LYHYEN MATEMATIIKAN KERTAUS

Jan Jansson

Karoliina Kaita

5.8.2018

v. 1.1 + OT 21 korjauksia

Materiaali on tarkoitettu lyhyen matematiikan perusteiden ja keskeisten asioiden kertaamiseen ennen ylioppilaskirjoituksia. Materiaalia saa kopioida voittoa tavoittelemattomaan toimintaan kuten lukio- ja peruskouluopetukseen. Uusin versio dokumentista löytyy sivulta peda.net/p/jan.jansson , jossa voi myös jättää palautetta.

Sisällys

1. MURTOLUKUJA JA PÄÄSSÄLASKUA

1.1. Murtoluku ja sekaluku

Murtoluvun suuruus on joskus vaikea tulkita. Kun murtoluvun osoittaja (ylempi luku) on paljon suurempi kuin nimittäjä, on vaikea sanoa, kuinka monta kokonaista luku on. Iso luku on hyvä antaa sekalukuna.

Esimerkki:

a) $\frac{66}{7}$ on vaikea tulkita. Kuinka monta kokonaista se on?

66 : 7 = 9,4… Kokonaisia on siis 9. Yli jää 66 – 9 · 7 = 66 – 63 = 3

Siispä $\frac{66}{7} = 9\frac{3}{7}$

b) Mitä on $6\frac{3}{4}$ murtolukuna? Kuinka monta neljäsosaa kokonaisissa on? 6 · 4 = 24 Kokonaisissa on siis 24 neljäsosaa. Pohjalla on jo kolme neljäsosaa.

Siispä $6\frac{3}{4} = \frac{24+3}{4} = \frac{27}{4}$

Harjoitus 1: Muuta sekaluvuiksi/murtoluvuiksi

a) $\frac{84}{5}$ b) $\frac{74}{3}$ c) $\frac{62}{9}$ d) $\frac{97}{6}$ e) $\frac{72}{9}$ f) $8\frac{2}{5}$ g) $9\frac{2}{3}$ h) $6\frac{3}{8}$ i) $7\frac{1}{9}$ j) $7\frac{1}{4}$

1.2. Murtolukujen laventaminen ja supistaminen

Laventamisessa murtoluvun osoittaja *ja* nimittäjä kerrotaan samalla luvulla. Supistamisessa jaetaan. Murtoluvun suuruus ei muutu.

Esimerkki:

${}^{3)}\frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{6}{18}$ ja toisaalta $\frac{2^{(2}}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$

Harjoitus 2:

Lavenna tai supista kaikki murtoluvut samannimisiksi. Samannimisillä murtoluvuilla on sama nimittäjä.

a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}$ d) $\frac{6}{8}, \frac{12}{32}, \frac{16}{64}$ e) $\frac{1}{7}, \frac{6}{9}, \frac{2}{3}$ f) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{18}{26}$ g) $\frac{2}{5}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{8}, \frac{2}{12}, \frac{9}{15}$

Harjoitus 3:

Prosentit ovat murtolukuja. 1% = $\frac{1}{100}$ = 0,01. Kirjoita vastaava prosentti-/murtoluku. Tarkista laskimella.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 75% e) 20% f) 12,5% g) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{6}{8}$ i) $\frac{3}{20}$ j) $\frac{8}{25}$ k) 33,3…% l) 16,6…%

1.3. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Murtoluvut voidaan laskea yhteen, jos niillä on sama nimittäjä.

Esimerkki:

a) $\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8^{(2}}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$

Harjoitus 4:

Tee laskut. Lavenna tai supista tarvittaessa. Anna vastaus siistissä muodossa.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5} + \frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{4} + \frac{6}{8}$ d) $\frac{3}{7} + \frac{1}{5}$ e) $\frac{5}{6} + \frac{8}{9}$ f) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ g) $\frac{4}{5} - \frac{1}{4}$ h) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ i) $\frac{1}{6} - \frac{4}{9}$ j) $\frac{3}{5} - \frac{1}{7}$

1.4. Murtolukujen kertolasku

Murtolukujen kertolaskussa kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

Esimerkki:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Harjoitus 5: Laske kertolasku. Supista vastaus tai muuta vastaus sekaluvuksi tarvittaessa.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{7}$ c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{7}$ d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{9}$ e) $\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{6}$ f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3}$ g) $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2}$ f) $\frac{3}{9} \cdot \frac{7}{4}$

1.5. Murtolukujen jakolasku

Murtolukujen jakolasku tehdään niin, että jakajasta tehdään käänteisluku ja samalla jakolasku muutetaan kertolaskuksi.

Esimerkki:

$$\frac{2}{3} : \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 2} = {}^{2)}\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Harjoitus 6: Laske jakolaskut. Muista supistaa vastaus ja muuttaa se sekaluvuksi tarvittaessa.

a) $\frac{4}{5} : \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{4}{5}$ c) $\frac{6}{4} : \frac{2}{4}$ d) $\frac{9}{7} : \frac{5}{6}$ e) $\frac{9}{5} : \frac{8}{9}$ f) $\frac{2}{3} : \frac{1}{9}$ g) $\frac{7}{6} : \frac{1}{4}$ h) $\frac{12}{5} : \frac{6}{10}$

1.6. Merkkisäännöt

Murtolukujen kerto- ja jakolaskuissa pätevät samat merkkisäännöt kuin kokonaislukujenkin kerto- ja jakolaskussa.

Harjoitus 7: Täydennä taulukkoon puuttuvat luvut ja täydennä merkkisäännöt taulukkoon

$4 \cdot 2 =$	$4 : 2 =$
$4 \cdot 1 =$	$4 : 1 =$
$4 \cdot 0 =$	$4 : 0 =$
$4 \cdot (-1) =$	$4 : (-1) =$
$4 \cdot (-2) =$	$4 : (-2) =$

plus	· tai :	plus	=
plus	· tai :	miinus	=
miinus	· tai :	plus	=
miinus	· tai :	miinus	=

Harjoitus 8:

Laske kerto- ja jakolaskut. Voit laskea laskun ”kahdessa osassa”. Päättele ensin merkki. Laske sitten lukuarvo, kun vastauksen merkki on tiedossa.

a) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$ b) $-\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$ c) $-\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$ d) $\frac{8}{9} : \left(-\frac{1}{6}\right)$ e) $-\frac{7}{6} : \left(-\frac{1}{2}\right)$ f) $-\frac{8}{3} : \frac{1}{9}$

1.7. Laskujärjestys:

Murtolukujen laskuissa pätevät samat laskujärjestyssäännöt kuin muissakin laskuissa. Ensin sulut. Sitten kerto- ja jakolaskut. Sitten yhteen- ja vähennyslaskut.

Harjoitus 9: Ratkaise lausekkeet laskujärjestyksen mukaisessa järjestyksessä.

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$ b) $\left(\frac{4}{6} + \frac{1}{4}\right) : \frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{6} : \frac{2}{6} : \frac{3}{6}$ d) $-\frac{2}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3}$ e) $\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right)$

1.8. Supistamisesta ja summasta supistamisesta

Esimerkki: Supistamisessa osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Joskus on helpompi ajatella niin, että vetää yli saman kertoimen osoittajasta ja nimittäjästä. Kerroin voi myös olla muuttuja kuten *a* tai *x*. Samojen tekijöiden löytämistä voi auttaa, jos hajottaa isot kertoimet tekijöihinsä.

$$\frac{2a}{3} \cdot \frac{15}{4a} = \frac{2a \cdot 15}{3 \cdot 4a} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{a}} = \frac{5}{2}$$

Esimerkki: Summasta ei saa supistaa. Supistaminen on jakamista. Jos jakaa summaa niin molemmat yhteenlaskettavat pitää jakaa. Summa voi olla hyvä jakaa kahdeksi jakolaskuksi ja katsoa voiko sitten supistaa.

$\frac{7+6a}{7} = \frac{7}{7} + \frac{6a}{7} = 1 + \frac{6}{7}a$ (vastaus ei ole 6a, koska silloin toinen yhteenlaskettava jäisi jakamatta)

Harjoitus 10: Sievennä lausekkeet supistamalla tai hajottamalla ne kahdeksi jakolaskuiksi.

a) $\frac{12a}{4}$ b) $\frac{12+a}{4}$ c) $\frac{12a}{4a}$ d) $\frac{21a^2}{3a}$ e) $\frac{3a+2b}{6}$ f) $\frac{35a^2+28a}{7a}$ g) $\frac{42a^2}{12}$ h) $\frac{154a^7}{14a^3}$

1.9. Lausekkeiden sieventämistä

Osamäärämuotoiset lausekkeet noudattavat murtolukujen laskusääntöjä.

Esimerkki:

$$^{2)}\frac{2a}{3} + {}^{3)}\frac{2a}{2} = \frac{2\cdot 2a}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 2a}{3\cdot 2} = \frac{4a}{6} + \frac{6a}{6} = \frac{10a^{(2}}{6} = \frac{10a:2}{6:2} = \frac{5a}{3} = \frac{5}{3}\cdot a = 1\frac{2}{3}a$$

Harjoitus 11:

Käytä murtolukujen laskusääntöjä ja sievennä lausekkeet.

a) $\frac{4a}{6} + \frac{a}{2}$ b) $\frac{8a}{3} - \frac{a}{2}$ c) $\frac{2a}{5} - \frac{a}{2}$ d) $\frac{2a}{3} \cdot \frac{3}{7}$ e) $\frac{3}{4}a : \frac{2}{3a}$ f) $\frac{2a}{3} \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right)$ g) $\frac{2a}{3} \cdot \left(-\frac{2a}{4}\right) : \left(\frac{2a}{4} + \frac{a}{3}\right)$

1.10. Vastauksia

1. a) $16\frac{4}{5}$ b) $24\frac{1}{3}$ c) $6\frac{8}{9}$ d) $16\frac{1}{6}$ e) 8 f) $\frac{42}{5}$ g) $\frac{29}{3}$ h) $\frac{51}{8}$ i) $\frac{64}{9}$ j) $\frac{29}{4}$

4. a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{30}$ c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{22}{35}$ e) $1\frac{13}{18}$ f) $\frac{1}{6}$ g) $\frac{11}{20}$ h) $-\frac{1}{6}$ i) $-\frac{5}{18}$ j) $\frac{16}{35}$

5. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{27}{28}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $1\frac{3}{4}$ g) $2\frac{11}{12}$ f) $\frac{7}{12}$

6. a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 3 d) $1\frac{19}{35}$ e) $2\frac{1}{40}$ f) 6 g) $4\frac{2}{3}$ h) 4

8. a) $-\frac{1}{15}$ b) $\frac{8}{63}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $-5\frac{1}{3}$ e) $2\frac{1}{3}$ f) -24

9. a) $\frac{8}{35}$ b) $1\frac{7}{48}$ c) 1 d) $-\frac{1}{28}$ e) $\frac{1}{6}$

10. a) $3a$ b) $3 + \frac{1}{4}a$ c) 3 d) $7a$ e) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ f) $5a + 4$ g) $3\frac{1}{2}a^2$ h) $11a^4$

11. a) $\frac{7}{6}a$ b) $2\frac{1}{6}a$ c) $-\frac{a}{10}$ d) $\frac{2}{7}a$ e) $\frac{9}{8}a^2$ f) $-\frac{4}{5}a^2$ g) $-\frac{2}{5}a$

1.11. YO-tehtäviä

S2016 2a

Sievennä lauseke

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

K2016 2c

Jussi laskee päässä kertolaskun seuraavasti:

27 · 31 = 20 · 30 + 7 · 30 + 20 · 1 + 7 · 1 = 600 + 210 + 20 + 7 = 837. Onko Jussin päättely oikein? Perustele.

S2014 1a ja 1b

a) Ratkaise yhtälö $\frac{x+2}{5} = \frac{x-3}{6}$

b) Laske lausekkeen $\frac{x+1}{y-1} + \frac{y-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{1}{2}$ ja $y = \frac{3}{2}$.

K2014 1b ja 1c

b) Laske lausekkeen $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ arvo, kun a = 1 ja b = $\frac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$.

K2013 1b ja 1c

b) Laske lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo.

c) Sievennä lauseke $\frac{3a-6a^2}{3a}$.

2. ALGEBRA JA YHTÄLÖNRATKAISU

2.1. Termien yhteenlasku

Muista, että vain samat muuttujat voi laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

Esimerkki:

$2x + 4 + 3x + 4x^2 = 4x^2 + 5x + 4$

Harjoitus 1: Sievennä

a) $x + 4 + 2x - x$ b) $2x^2 + 4x - x^2 + 4x$ c) $4x + x^2 + 3x - 2x^2$ d) $3x^2 + 6x - 2x^2 + 6 - 4x$

2.2. Sulkeiden avaaminen

Miinus sulkeiden edessä vaihtaa kaikkien sisällä olevien asioiden merkin. Plussa ei muuta.

Esimerkki:

$(x+1) - (x+1) = x+1 - x - 1 = 0$

Harjoitus 2: Sievennä

a) $-(2 + x)$ b) $(3 - 4x) + (3 - 4x)$ c) $(2x - 7) - (2x - 7)$ d) $(3x^2 + 6x^3) - (4x^2 + 3x^3)$
e) $(2x + 6) - (8x + 2) - x$ f) $(x + y) - (y - x)$ g) $2x^2 + (x + 2) - (x + 2) - x^2$ h) $-(3x^2 - 6) - (-2x + 2)$

2.3. Kertolaskut

Sulkujen edessä olevalla kertoimella pitää kertoa kaikki sulkeiden sisällä olevat asiat. Jos suluilla kerrotaan sulut, jokaisella termillä ensimmäisissä suluissa pitää kertoa kaikki termit toisissa.

Esimerkki:

$(\mathbf{a} + \mathbf{2})(b - 3) = \mathbf{a} \cdot b + \mathbf{a} \cdot (-3) + \mathbf{2} \cdot b + \mathbf{2} \cdot (-3)$

ja tästä saadaan $ab - 3a + 2b - 6$.

Harjoitus 3: Sievennä

a) $(x + 1)(x + 2)$ b) $(2x + 6)(4 - 2x)$ c) $(-2 + 3x)(x + 1)$ d) $(2x - 2)(2 - 2x)$

Muistathan, että potenssiin 2 tarkoittaa sitä, että asia kerrotaan itsellään. Avaa polynomien potenssit kertolaskuiksi ja laske sitten.

Esimerkki:

$(ax + 2x)^2 = (\mathbf{ax} + \mathbf{2x})(ax + 2x)$. Nyt kaikki pitää kertoa kaikella!

$= \mathbf{ax} \cdot ax + \mathbf{ax} \cdot 2x + \mathbf{2x} \cdot ax + \mathbf{2x} \cdot 2x$

$= a^2x^2 + 2ax^2 + 2ax^2 + 4x^2$

$= a^2x^2 + 4ax^2 + 4x^2$

Harjoitus 4: Sievennä

a) $(2x + 2)^2$ b) $(5 - 7x)^2$ c) $(-2x - 4)^2$ d) $(x^2 + 4)^2$

2.4. Yhtälönratkaisun menetelmät

Yhtälöä saa aina käsitellä niin, että molemmille puolille yhtälöä tekee saman asian. Molemmille puolille saa lisätä saman verran, molemmat puolet saa kertoa samalla luvulla jne.

Esimerkki:

$3x + 6 = 14 + x \quad || -6$

$3x + 6 - 6 = 14 + x - 6$

$3x = 8 + x \quad || -x$

3x – x = 8 + x – x
2x = 8 || : 2
2x : 2 = 8 : 2
x = 4

Harjoitus 5:
Ratkaise yhtälöt lisäämällä, vähentämällä, kertomalla tai jakamalla molempia puolia kunnes toisella puolella on plus yksi x ja toisella numero.

a) 2x + 8 = 14 b) 7 – x = 4 c) x – 4 = 2x + 6
d) 9x − 1 = x + 31 e) x + 16 = 5x – 4 f) 8 – 4x = 2x + 50

Harjoitus 6: Ratkaise yhtälöt. Avaa sulut ja järjestele termit (äxät vasemmalle, vakiot oikealle) ja jaa sitten äxän kertoimella.

a) 3x + 2x = (x −4) − 40 b) 3(2x + 6) = 30 c) –(x + 3) = 9x + 37
d) 2(x + 4) = −(1 − 5x) e) 12 − 6(x − 4) = 6x f) (x – 2)(x + 3) = x^2 − 4

2.5. Nimittäjän poisto

Nimittäjä (eli jakaja) yhtälössä poistetaan kertomalla molemmat puolet yhtälöstä jakajalla. (Jakamisen vastatoimitus on kertominen.) Huomaa kertoa molemmat puolet ja kaikki termit, että yhtäsuuruus säilyy.

Esimerkki: $\frac{6x+9}{3} = 15$, mistä kertomalla kolmella saadaan
$\frac{6x+9}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 15 \cdot 3$ eli 6x + 9 = 45

Esimerkki: $\frac{6x}{2} + 1 = 13$, mistä kertomalla kahdella saadaan
$\left(\frac{6x}{2} + 1\right) \cdot 2 = 13 \cdot 2$ eli
$\frac{6x}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + 1 \cdot 2 = 13 \cdot 2$ eli 6x + 2 = 26

Harjoitus 7:
Ratkaise yhtälöt. Poista ensin nimittäjä kertomalla sopivalla luvulla tai luvuilla.

a) $\frac{2x}{5} = 4$ b) $\frac{4x}{3} = 8$ c) $\frac{8}{x} = 4$ d) $\frac{2x+6}{6} = 4$
e) $\frac{2x+1}{2} = \frac{4x-7}{2}$ f) $\frac{x}{2} = \frac{2x+4}{6}$ g) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{8} = 2$

2.6. Yhtälön muodostaminen

Keskeistä lyhyessä matematiikassa on yhtälön muodostaminen sanallisista tehtävistä. Aloita aina nimeämällä x. Muuttujan pitäisi olla tuntematon tai ratkaistava asia tehtävässä. Yritä sitten keksiä yhtälö, jossa x esiintyy.

Harjoitus 8:
Muodosta yhtälö ja ratkaise x. Aloita kirjoittamalla ylös, mikä x yhtälössäsi on.

a) Mistä luvusta saadaan luku 21, jos siihen lisätään kaksi ja summa kerrotaan kolmella.
b) Jari on kolme kertaa niin vanha kuin Mari. Jos Marin ikään lisättäisiin 12 vuotta, he olisivat yhtä vanhat. Kuinka vanha Mari on?
c) Suorakulmion muotoinen pöydän toinen sivu on kaksi kertaa pidempi kuin toinen. Pöydän piiri on 420 cm. Kuinka pitkä on pöydän lyhyempi sivu?
d) Kasper, Jesper ja Joonatan yhdistävät ryöstösaaliinsa leipomosta, joka on 400 euroa, ja pankista. Kun rahat jaetaan rosvojen kesken, jokainen saa 850 euroa. Kuinka paljon rahaa ryöstettiin pankista?

2.7. Toisen asteen yhtälöitä

Toisen asteen yhtälön voi aina ratkaista ratkaisukaavalla $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Kertoimet a, b ja c saadaan yhtälöstä, kun termit on siirretty vasemmalle ja oikealla on nolla eli $ax^2+bx+c=0$

Esimerkki:

Yhtälö $15-2x=x^2$ pitää ensin muokata muotoon $-x^2-2x+15=0$, josta nähdään tarvittavat kertoimet, jotka ovat $a=-1$, $b=-2$ ja $c=15$.

Sijoitetaan kaavaan $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 15}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{-2}=\frac{2\pm 8}{-2}$

Lasketaan molemmat tulokset $x_1=\frac{2+8}{-2}=-5$ ja $x_2=\frac{2-8}{-2}=3$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua $x_1=-5$ ja $x_2=3$.

Harjoitus 9:

Ratkaise kaavalla tai soveltuvalla tavalla.

a) $x^2-8x+15=0$	b) $x^2+10x=24$	c) $28=2x^2+10x$
d) $x^2-24x+143=0$	e) $(2x+8)(4x-4)=0$	f) $(x+1)(x-3)=2(3-x)$
g) $8x^2-16x=24$	h) $54x^2-324=-54x$	i) $-18x-108=-6x^2$
j) $x^2-81=0$	k) $2x-x^2=0$	l) $x^2-9x=0$

2.8. Vastauksia:

1. a) $2x+4$ b) x^2+8x c) $-x^2+7x$ d) x^2+2x+6

2. a) $-2-x$ b) $6-8x$ c) 0 d) $3x^3-x^2$ e) $-7x+4$ f) $2x$ g) x^2 h) $-3x^2+2x+4$

3. a) x^2+3x+2 b) $-4x^2-4x+24$ c) $3x^2+x-2$ d) $-4x^2+8x-4$

4. a) $4x^2+8x+4$ b) $25-70x+49x^2$ c) $4x^2+16x+16$ d) x^4+8x^2+16

5. a) $x=3$ b) $x=3$ c) $x=-10$ d) $x=4$ e) $x=5$ f) $x=-7$

6. a) $x=-11$ b) $x=2$ c) $x=-4$ d) $x=3$ e) $x=3$ f) $x=2$

7. a) $x=10$ b) $x=6$ c) $x=2$ d) $x=9$ e) $x=4$ f) $x=4$ g) $x=4$

8. a) $21=(x+2)\cdot 3$, $x=5$ b) $3x=x+12$, $x=6$ c) $x+2x+x+2x=420$, $x=70$ d) $\frac{x+400}{3}=850$, $x=2150$

9. a) $x=3$, $x=5$ b) $x=2$, $x=-12$ c) $x=2$, $x=-7$ d) $x=11$, $x=13$ e) $x=1$, $x=-4$ f) $x=\pm3$ g) $x=3$, $x=-1$
h) $x=2$, $x=-3$ i) $x=-3$, $x=6$ j) $x=\pm9$ k) $x=0$, $x=2$ l) $x=0$, $x=9$

2.9. YO-tehtäviä

K01/2

Ratkaise yhtälö $x\left(x-\frac{7}{10}\right)=\frac{1}{10}-x$

S01/4

Ratkaise yhtälö $4x^2-4ax-3a^2=0$, kun $a=0{,}001$.

K02/1

a) Ratkaise yhtälö $3x+4=5-6x$

b) Ratkaise yhtälö $12x^2-7x+1=0$

K02/1

a) Ratkaise yhtälö $15x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) Millä x:n arvolla lauseke $\frac{4x}{x-1}$ saa arvon 13?

S03/2

Ratkaise yhtälö $5(3x+1) - 4(3-2x) = 2x$. Tutki, toteuttaako tämä ratkaisu myös yhtälön $27x^3 - 54x + 17 = 0$

K05/1

Ratkaise a) yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x-1)$, b) yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x + 1$.

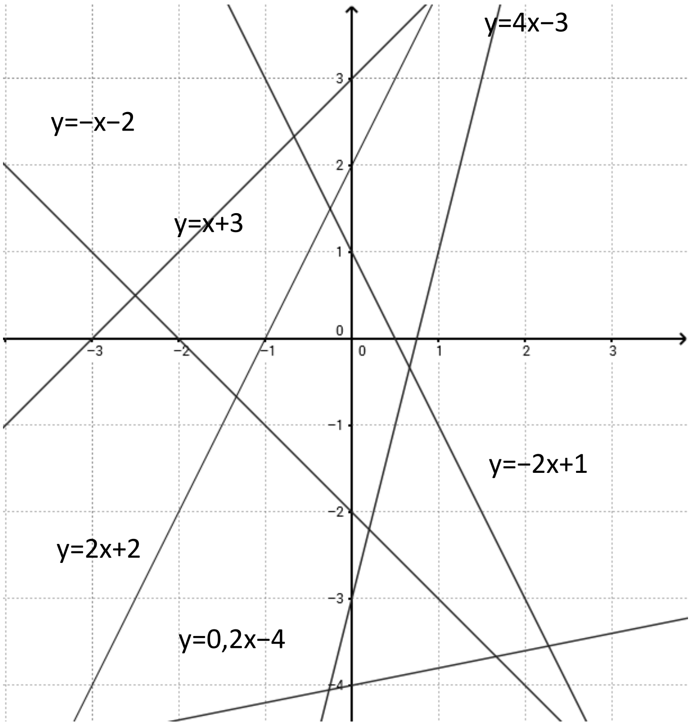
S05/1

a) Ratkaise yhtälö $(3x-2)(3x+5) = 0$

b) Mikä on lausekkeen $\frac{a^2-c^2}{b-c}$ arvo, kun $a = 1$, $b = -2$ ja $c = -\frac{1}{2}$.

3. PISTEITÄ KOORDINAATISTOSSA JA SUORAN YHTÄLÖ

3.1. Pisteiden välinen etäisyys



Kahden pisteen välinen etäisyys saadaan laskettua kaavalla $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$. Tämä kaava voidaan johtaa suoraan Pythagoraan lauseesta.

Harjoitus 1: Merkitse pisteet (0,0), (3,0) ja (3,−4) koordinaatistoon ja yhdistä pisteet kolmioksi. Laske kolmion vinon sivun pituus kaavalla. (v: 5)

Suoran yhtälön ratkaistu muoto on aina muotoa y = kx + b, missä k on kulmakerroin ja b on vakio.

Harjoitus 2: Etsi kuvasta kaikki ne suorat, jotka ovat nousevia/laskevia ja kirjoita niiden kulmakertoimet oikeaan laatikkoon. Katso, missä suorat leikkaavat y-akselin ja kirjoita niiden vakiot oikeaan laatikkoon.

nousevien suorien k:t	laskevien suorien k:t	vakiot, kun suora leikkaa y-akselin + -puolella	vakiot, kun suora leikkaa y-akselin − -puolella

3.2. Suoran yhtälön kuvaajan piirtäminen eli suoran piirtäminen

Suoran yhtälö voidaan piirtää koordinaatistoon, jos se on muokattu *ratkaistuun muotoon* eli muotoon, jossa vasemmalla on tasan yksi, positiivinen y ja muut termit ovat oikealla.

Harjoitus 3: Ympyröi suoran yhtälön ratkaistut muodot. Muokkaa muut ratkaistuun muotoon.

y = 2x + 4 2y = 8x – 6 2x = 3y + 7 y = 6 y = 3x + 2y y = −2x −7 −y = 2x + 5

Suoran piirtäminen aloitetaan tekemällä taulukko (oik.), johon keksitään kolme x:n arvoa (0, 1 ja 2 tai isossa kuvassa 0, 10 ja 20 tms.). Arvot sijoitetaan suoran yhtälöön ja lasketaan niitä vastaavat y:t. Saadut pisteet merkitään koordinaatistoon ja piirretään viiva niiden kautta.

x	y = 3x + 2		(x,y)
0	y = 3 · 0 + 2 = 2	→	(0, 2)
1			

Harjoitus 4: Piirrä koordinaatistoon suora y = 3x + 2. (Jatka taulukkoa.) Muokkaa sitten suoran yhtälö 3y + 9x = 12 ratkaistuun muotoon ja piirrä myös se.

3.3. Kulmakerroin

Suoran kulmakerroin kertoo, miten jyrkästi suora nousee tai laskee. Se lasketaan valitsemalla suoralta kaksi pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ja sijoittamalla koordinaatit kulmakertoimen kaavaan.

Esimerkki: Suora kulkee pisteiden (−1, 3) ja (2, −4) kautta. Kulmakerroin lasketaan seuraavasti:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-3}{2-(-1)} = \frac{-7}{3} = -2\frac{1}{3}$$

Harjoitus 5: Laske kulmakerroin, kun suora kulkee pisteiden (1, 2) ja (4, 11) kautta. Laske kulmakerroin, kun suora kulkee pisteiden (0,−2) ja (−2, 8) kautta. (v: k = 3 ja k = −5)

Harjoitus 6: Merkitse koordinaatistoon toiset pisteet, joiden kautta piirrettyjen suorien k:t ovat 3 ja −5.

3.4. Suoran yhtälön muodostaminen

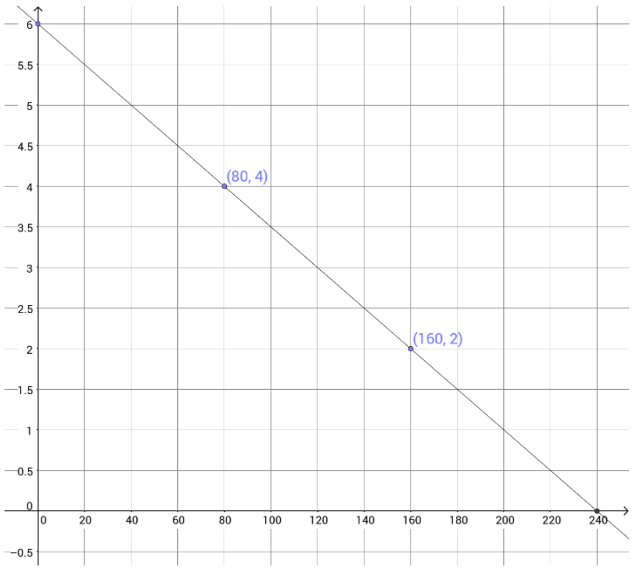
Suoran yhtälön voi aina muodostaa kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä (x_0, y_0) on jokin piste suoralla ja k on kulmakerroin. Kaavaan pitää jäädä x ja y, koska suoran yhtälössä on aina x ja y (esim. y = 3x – 6).

Esimerkki: Suora kulkee pisteiden (−2, −3) ja (1, 9) kautta. Muodosta suoran yhtälö.
$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-(-3)}{1-(-2)} = \frac{12}{3} = 4$ Nyt sijoitetaan k ja jommankumman pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$, josta saadaan $y - 9 = 4(x - 1)$ ja $y - 9 = 4x - 4$ ja tästä $y = 4x + 5$.

Harjoitus 7: Ratkaise kulmakerroin ja sitten suoran yhtälö, kun tiedetään, että suora kulkee pisteiden (2,4) ja (6,12) kautta.
Tee sama, kun suora kulkee pisteiden (2,4) ja (−2, 6) kautta. (v: y = 2x ja y = $-\frac{1}{2}$x + 5)

3.5. Sanalliset tehtävät suoran yhtälöstä

Suoran yhtälöllä voidaan kuvata tasaista muutosta.



Harjoitus 8: Kuva esittää mopon jäljellä olevan bensiinin määrää (y, litroina) ajomatkan (x, kilometreinä) funktiona. a) Kuinka paljon bensiiniä on alussa käytössä? b) Kuinka pitkälle mopolla pääsee? c) Laske suoran kulmakerroin. d) Päättele suoran yhtälö.

Sanallisessa tehtävässä on joskus mahdollista päätellä suoraan suoran yhtälö, joka kuvaa esimerkiksi kulujen kasvua, kuljettua matkaa tai muuta tasaisesti kasvavaa/vähenevää suuretta.

Esimerkki: Mikä suora kuvaa jäljellä olevien kahvikuppien määrää, kun niitä on alussa 150 ja niitä kuluu tunnissa 8?
Suorassa oleva vakio on 150, joka alkaa sitten muuttua −8 joka tunti. Päätetään, että tuntien määrä on x ja jäljellä oleva kuppien määrä on y, koska tunnit (x) määräävät jäljellä olevat kupit (y). Jäljellä olevat kupit (y) voi laskea suoran yhtälöllä y = 150 – 8 · x (eli y = −8x + 150), jos tuntee kuluneet tunnit (x).

Harjoitus 9:
a) Erään tanssikoulun jäsenyys maksaa 50 euroa vuodessa. Lisäksi jokaiselta tanssitunnilta tulee maksaa 5 euron tuntimaksu. Kuinka suuri on kokonaishinta (y), jos käy vain yhdellä (x) tunnilla? Entä jos x on kymmenen ja käy siis kymmenellä tunnilla? Entä mikä on y, jos tuntien määrä on x?
b) Käytä suoran yhtälöäsi ja laske y, kun x on 40 tanssituntia. Laske myös x, kun y = 200 euroa.
c) Puhelinliittymästä laskutetaan kuukaudessa 7,90 € ja lisäksi 0,50 € jokaisesta käytetystä gigasta mobiilidataa. Kuukausilaskun suuruus (€) on y ja käytetyt gigat ovat x. Mikä on suoran yhtälö, joka kuvaa puhelinlaskun suuruutta?
d) Käytä suoran yhtälöäsi ja laskea kuukausilaskun suuruus, kun dataa on käytetty 20 gigaa. Laske myös käytettyjen gigojen määrä, kun lasku on 22,40 €.

Joskus suoran yhtälön muodostaminen onnistuu annettujen tietojen avulla. Tällaisessa tehtävässä ensimmäiseksi pitää päättää, kumpaa tehtävässä esiintyvää suuretta pitää äxänä ja kumpaa yynä. Kun on päätetty x ja y, voit muodostaa annetuista tiedoista kaksi pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Niitä voi käyttää suoran yhtälön muodostamiseen.

Harjoitus 10:

a) Erään puhelinliittymän lasku koostuu kuukausittaisesta perusmaksusta ja kappalekohtaisesta viestin hinnasta. Kuukausilasku on 11,30 €, kun on lähetetty 220 viestiä. Kun viestejä on lähetetty 450, kuukausilasku on 15,90 €. Päätä *x* ja *y*. Muodosta suoran yhtälö. Mikä on perusmaksu?
b) Tyttöjen pituuskasvu on likimain lineaarista ikävälillä 2-13 vuotta. 3-vuotias on noin 95 cm pitkä ja 8-vuotias noin 130 cm pitkä. Päätä *x* ja *y*. Muodosta suoran yhtälö. Kuinka pitkä on 13-vuotias?

3.6. Vastauksia

3. $\underline{y = 2x + 4}$ $y = 4x - 3$ $y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$ $\underline{y = 6}$ $y = -3x$ $\underline{y = -2x - 7}$ $y = -2x - 5$

8. a) 6 litraa b) 240 km c) $k = -0{,}025$ (l/km) d) $y = -0{,}025x + 6$

9. a) $y = 5x + 50$ b) $y = 5 \cdot 40 + 50 = 250$ (€), $200 = 5x + 50 \rightarrow x = 30$ (tuntia)
c) $y = 0{,}50x + 7{,}90$ d) $y = 0{,}50 \cdot 20 + 7{,}90 = 17{,}90$ (€), $22{,}40 = 0{,}50x + 7{,}90 \rightarrow x = 29$ (gigaa)

10. a) x on viestien lkm, y on laskun suuruus (€), $y = 0{,}02x + 6{,}90$, perusmaksu on 6,90 €
b) x on ikävuodet, y on pituus (cm), $y = 7x + 74$, 165 cm

3.7. YO-tehtäviä

K01/6

Pisteiden (−2, 11) ja (7, −1) kautta kulkeva suora muodostaa koordinaattiakselien kanssa kolmion.
a) Muodosta suoran yhtälö. b) Määritä syntyneen kolmion sivujen pituudet.

K05/12

Lämpömittaria tutkittiin tarkkuusmittarin avulla. Kun lämpömittari näytti −9,9 °C, oikea lämpötila oli −9,2 °C. Kun lämpömittari näytti 18,5 °C, oikea lämpötila oli 18,1 °C. Oletetaan, että oikean lämpötilan ja lämpömittarin lukeman välinen riippuvuus on lineaarinen.
a) Johda lauseke, jolla oikea lämpötila y voidaan laskea, kun lämpömittarin lukema x tunnetaan. Ilmoita esiintyvät kertoimet neljän desimaalin tarkkuudella.
b) Missä lämpötilassa lämpömittari näyttää aivan oikein?

S08/8

Millä vakion a arvoilla suorat $y = -3x + 2$ ja $y = ax + 6$ erottavat *x*-akselista janan, jonka pituus on 3?

S12/11

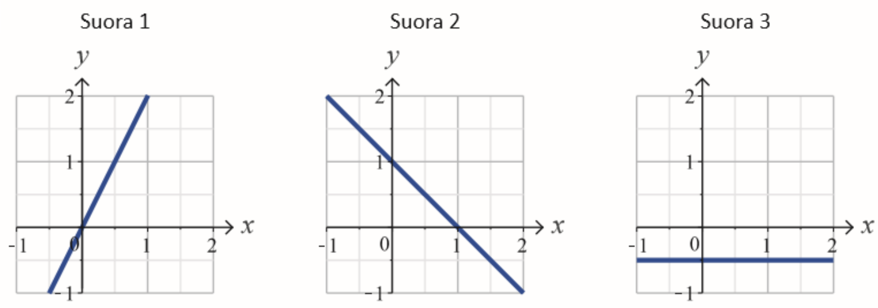
Aikuisen ihmisen sääriluun pituus *y* riippuu henkilön pituudesta *x* kaavojen

$$y = 0{,}43x - 27 \text{ (nainen)}$$
$$y = 0{,}45x - 31 \text{ (mies)}$$

mukaisesti, kun yksikkönä on senttimetri.
a) Arkeologi löytää naisen sääriluun, joka on 41 cm pitkä. Kuinka pitkä nainen oli?
b) Kaivauksissa löytyneen miehen pituudeksi arvioidaan 175 cm. Miehen läheltä löytyy sääriluu, jonka pituus on 42 cm. Onko kyseessä saman henkilön sääriluu?

K15/1

Alla on kolmen suoran kuvaajat. Esitä niiden yhtälöt muodossa y = kx + b. Perusteluita ei tarvita.



K15/5

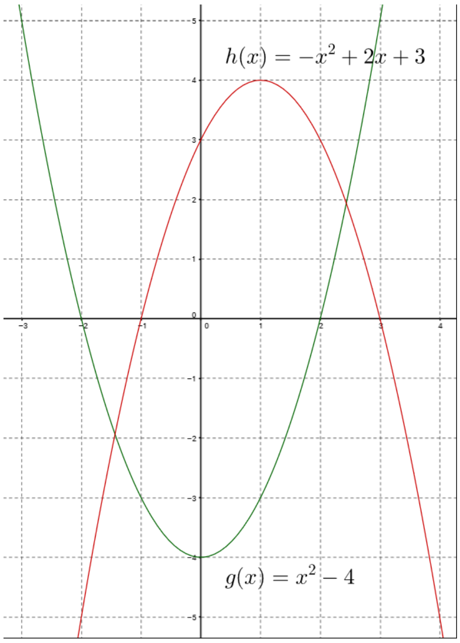
Yksinkertaistetut mallin mukaan ilman lämpötila laskee lineaarisesti korkeuden h suhteen noin 11 kilometriin saakka. Merenpinnan tasolla $h = 0$ keskilämpötila on +15 celsiusastetta ja 11 kilometrin korkeudella −56 celsiusastetta.

a) Kuinka monta astetta ilma jäähtyy, kun noustaan 5,0 kilometrin korkeudelta 1,0 kilometriä ylöspäin?

b) Määritä ilman lämpötilan lauseke $T = T(h)$ korkeuden h avulla lausuttuna ja piirrä sen kuvaaja (h, T) -koordinaatistoon, kun $0 \leq h \leq 11$ km.

4. PARAABELI JA YHTÄLÖPARI

4.1. Toisen asteen funktion kuvaaja on paraabeli



Toisen asteen funktion kuvaaja on paraabeli. Kuvassa on kaksi paraabelia. Tarkastele merkkejä funktioissa, kuvaajien muotoa ja pohdi, mitkä pisteet paraabelilla ovat mahdollisesti tärkeitä.

Harjoitus 1: a) Lue kuvasta funktion *h*(x) nollakohdat ja huipun *x*-koordinaatti. b) Pystytkö päättelemään huipun *x*-koordinaatin, jos tiedät paraabelin nollakohdat? Laske huipun *x*-koordinaatti, kun paraabelin nollakohdat ovat *x* = 2 ja *x* = 8.
(v: a) −1 ja 3 sekä 2 b) pystyt, *x* = 5)

x^2-termin edessä oleva kerroin auttaa päättelemään, onko paraabeli ylöspäin aukeava vai alaspäin aukeava. Positiivisen kertoimen kanssa paraabeli on ”iloinen” ja ylöspäin aukeava.

Harjoitus 2: Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 18$ kuvaaja on paraabeli. Sen nollakohdat ovat *x* = 3 ja *x* = −6. Määritä paraabelin huippupisteen koordinaatit. Onko paraabeli ylös- vai alaspäin aukeava?
(v: $(-1{,}5\,; -20\frac{1}{4})$, ylöspäin)

4.2. Suoran/paraabelin ja akselien leikkauspisteet

Harjoitus 3: Mitkä ovat origon koordinaatit? Mitkä ovat koordinaatit pisteelle, joka on yhden ruudun origon yläpuolella? Entä sen alapuolella? Mikä on yhteistä kaikkien *y*-akselilla olevien pisteiden koordinaateille?

Jos halutaan tietää suoran/paraabelin ja yhden akselin (vaikka *y*-akselin) leikkauspiste, sijoitetaan suoran yhtälöön sen *toisen* akselin (eli *x*:n) koordinaatin paikalle nolla. Sitten ratkaistaan yhtälö ja saadaan puuttuva koordinaatti. *Y*-akselilla *x* on aina nolla. -> Laitetaan yhtälöön *x*:n paikalle nolla ja ratkaistaan *y*.

Harjoitus 4: Ratkaise, missä pisteissä suora $y = 3x + 6$ leikkaa *y*-akselin. Entä missä pisteessä paraabeli $y = 2x^2 - 2x - 12$ leikkaa *y*-akselin? (v: (0, 6) v: (0, −12))

Sama toisinpäin: Kun tutkitaan *x*-akselin leikkauskohtia, tiedetään, että *y*-koordinaatti on nolla. Suoran/funktion ja *x*-akselin leikkauskohtia kutsutaan nollakohdiksi, koska niissä funktion arvo on nolla. (Funktion arvo on sama kuin suoran tai paraabelin *y*-koordinaatin arvo.)

Harjoitus 5: Sijoita lausekkeisiin tunnettu *y*:n arvo ja ratkaise, missä pisteissä suora $y = 3x + 6$ ja paraabeli $y = 2x^2 - 2x - 12$ leikkaavat *x*-akselin. (v: (−2,0) v: (−2, 0) ja (3, 0))

Kaikilla paraabeleilla ei ole ollenkaan nollakohtia eli ne eivät leikkaa *x*-akselia lainkaan. Ylöspäin aukeava paraabeli kulkee silloin koko ajan *x*-akselin yläpuolella ja alaspäin aukeava vastaavasti *x*-akselin alapuolella.

4.3. Suorien tai suoran ja paraabelin leikkauspisteet

Kun halutaan selvittää kahden funktion leikkauspiste (tai pisteet) pitää muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y = mx + c \end{cases}$$

Yksi helppo tapa ratkaista yhtälöpari on muuttaa yhtälöt ratkaistuun muotoon ja merkitä ne yhtä suuriksi (sijoitusmenetelmä).

Esim. $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 8 \end{cases}$, josta saadaan $2x + 3 = -3x + 8$ ja yhtälönratkaisulla $x = 1$.

Koska yhtälöparissa on kaksi tuntematonta (x ja y), yhtälöparin ratkaisuna saadaan kaksi lukua. Kun esimerkiksi x on ensin ratkaistu, y saadaan sijoittamalla saatu x:n arvo kumpaan tahansa yhtälöön. Valitaan $y = 2x + 3$, jolloin $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$. Yhtälöparin ratkaisu on siis $x = 1$ ja $y = 5$. Tämä piste (1, 5) on myös suorien $y = 2x + 3$ ja $y = -3x + 8$ leikkauspiste.

Harjoitus 6: ratkaise yhtälöparit/suorien leikkauspiste

a) $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x + 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = -2x - 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y = 6x + 8 \\ y + 4x = 18 \end{cases}$

(v: a) x=2, y=7 b) x = −3, y = 11 c) (6, −16) d) (4, −14) ja (−2, −2) e) (2, 8) f) x=2, y=10)

4.4. YO-Tehtäviä

S04/1

Olkoon $f(x) = x^2 - 3{,}1x - 1{,}4$. Laske funktion f nollakohdat ja tutki, millä välillä se saa negatiivisia arvoja.

K05/11

Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y), jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

K08/5

Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 4 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,12 euroa minuutilta. Määritä kuukausilaskun suuruus kummassakin tapauksessa lausekkeena, jossa muuttujana on puheaika minuutteina. Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret?

K08/7

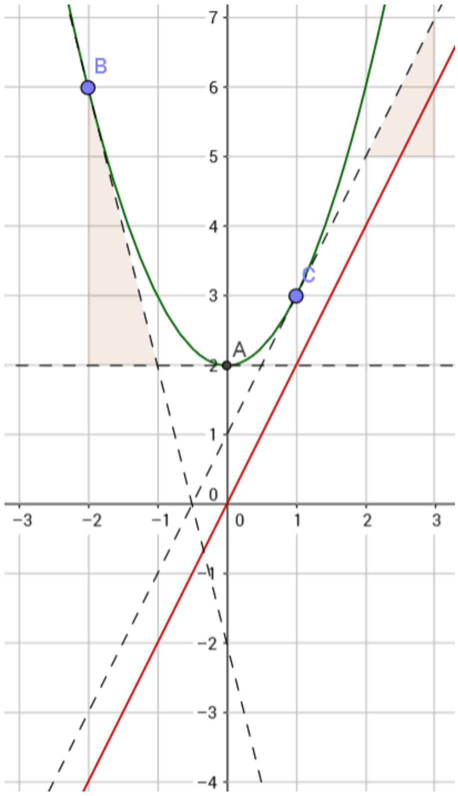
Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta $-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$, missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva?

S15/9

Suorakulmion muotoisen nurmikentän koko on 20,0 m × 12,0 m. Sen pinta-ala halutaan kaksinkertaistaa lisäämällä kahdelle sivulle yhtä leveä nurmikaistale oheisen kuvion mukaisesti. Määritä näin saadun nurmikentän pituus ja leveys 0,1 metrin tarkkuudella.

5. DERIVOINTI

5.1. Derivaatta kuvaa muutosnopeutta



Hetkellinen muutosnopeus on käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin, joka on myös derivaattafunktion arvo siinä kohdassa.

Harjoitus 1: a) Kuvassa paraabelin muotoiselle funktiolle on piirretty kolme tangenttia (katkoviivat, piirretty kohtiin $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$). Laske tangenttienkulmakertoimet (kuinka monta ruutua nousee tai laskee yhden ruudun matkalla). Kirjoita arvot taulukkoon.
b) Kuvassa on myös derivaattafunktio (suora). Lue sen arvo (eli *y*-koordinaatti), kun $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$. Kirjoita tulos taulukkoon.

Harjoitus 2: Katso kuvasta, millä alueella (eli millä x:n arvoilla) paraabeli on nouseva. Katso sitten, millä arvoilla derivaattafunktio on plussan puolella (*x*-akselin yläpuolella eli *y* on positiivinen).

5.2. Keskeisiä derivointisääntöjä

on kolme.

i) Koska derivaatta kuvaa muutosnopeutta ja vakio ei muutu, vakion derivaatta on aina 0.

ii) Koska suora muuttuu tasaisesti, sen derivaatta (eli sen muutosnopeus) on koko ajan suoran kulmakerroin.

iii) Korkeamman asteen muuttujan derivaatta saadaan niin, että vanha eksponentti otetaan termin eteen kertoimeksi ja korvataan uudella eksponentilla, joka on yhtä pienempi.

x	tangentin kulmakerroin	derivaattafunktion arvo (y)
−2		
0		
1		

Esimerkki: i) Jos $f(x) = 8$, niin $f'(x) = 0$.
ii) Jos $g(x) = 5x$, niin $g'(x) = 5$.
iii) Jos $h(x) = 4x^5$, niin $h'(x) = 5 \cdot 4x^{5-1} = 20x^4$.

Lisäksi pitää muistaa, että sulut ja potenssit ja muu *sieventäminen tehdään ennen derivointia*. Muista noudattaa laskujärjestystä (sulkeet, potenssit, kertolasku, yhteenlasku). Lisäksi jos funktiossa on monta termiä, jokainen niistä pitää derivoida erikseen.

Harjoitus 3: Derivoi seuraavat funktiot. Kiinnitä huomiota siihen, että rivin päässä on tai ei ole ʼ riippuen siitä, onko jo derivoitu vai ei.

a) $f(x) = 3x + 6$ b) $g(x) = 4x^2 + 5$ c) $h(x) = 7x^4 + 3x$ d) $i(x) = 2x(3x + 5)$ e) $j(x) = (3x + 5)^2$ f) $k(x) = \frac{(8x+4)^2}{4}$

(v: a) a) $f'(x) = 3$ b) $g'(x) = 8x$ c) $h'(x) = 28x^3 + 3$ d) $i'(x) = 12x + 10$ e) $j'(x) = 18x + 30$ f) $k'(x) = 32x + 16$)

5.3. *f*(x) vai *f'*(x)

Ole tarkkana siitä ollaanko ratkaisemassa **funktion arvoja vai derivaattafunktion arvoja**. Pidä paperilla merkinnät selkeinä, että näet, mikä on funktio ja mikä sen derivoitu versio. Kun sijoitat muuttujan arvoa, sijoita oikeaan funktioon.

Harjoitus 4: Ratkaise seuraavat, kun $f(x) = x^2 + 2$ ja sen derivaattafunktio $f\,'(x) = 2x$. Funktion tai derivaattafunktion arvon saat selville, kun sijoitat muuttujan paikalle annetun äxän arvon. Tarkasta tulos edellisen sivun ylälaidan kuvasta, johon funktiot on piirretty.

a) $f(0)$ b) $f\,'(0)$ c) $f\,'(-2)$ d) $f(1)$ e) $f\,'(1)$ f) $f(-2)$

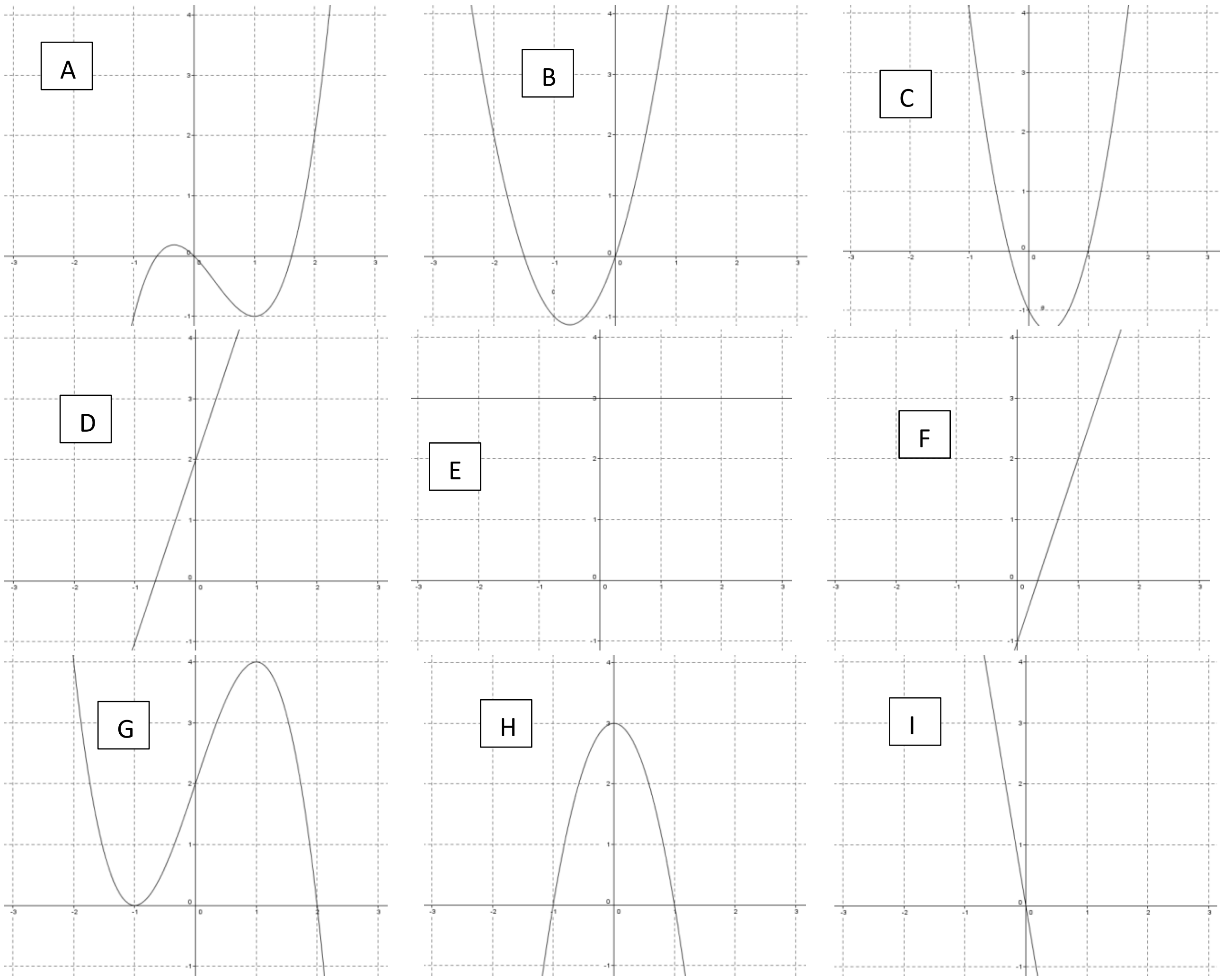
5.4. Nollakohdat

Merkittäviä paikkoja funktiossa ja derivaattafunktiossa ovat nollakohdat. Funktion nollakohdat ovat tärkeitä, koska silloin funktio siirtyy plussalta miinukselle tai toisinpäin.

Harjoitus 5: Ratkaise funktion $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ nollakohdat. Derivoi funktio ja laske derivaatan nollakohdat. (v: 1 & 3 sekä 2)

Piirrä (laskin, Desmos, geogebra.org) *f(x)* ja etsi huipun x-koordinaatti. Piirrä $f\,'(x)$. Huomaatko yhteyksiä? Derivaatan nollakohdassa (missä $f\,'(x) = 0$) varsinainen funktio voi kääntyä. Ts. esimerkiksi paraabelin huippu löytyy aina derivaatan nollakohdasta. Kun derivaatta on nolla, funktion muutosnopeus on nolla eli muutosnopeus voi juuri olla muuttumassa plussasta miinukselle eli kasvusta vähenemiseen tai toisinpäin. Kun derivaatta on plussalla, funktio nousee. Kun derivaatta on miinuksella, funktio laskee.

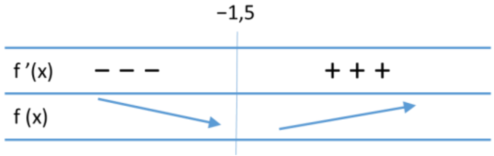
Harjoitus 6: Yhdistä funktio ja sen derivaattafunktio.



(v: B:n derivaatta on D, C:n derivaatta on F, H:n derivaatta on I, D:n on E, A:n on C ja G:n on H)

5.5. Merkki- ja kulkukaavio

Usein funktion piirtäminen on vaikeaa, joten **laaditaan merkki- ja kulkukaavio**, joka sisältää derivaatan merkin ja tästä päätellään funktion kulku.



Esimerkki:

i) Derivoi funktio. (esim. $f(x) = 2x^2 + 6x - 20 \rightarrow f\,'(x) = 4x + 6$

ii) Laske derivaatan nollakohdat ja merkitse ne kaavioon pystyviivoilla. (esim. $4x + 6 = 0 \rightarrow x = -1{,}5$)

iii) Laske jollakin arvolla $f'(x)$ arvo ennen ja jälkeen nollakohtien (esim. $x = -2$ on ennen nollakohtaa ja $f'(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2$ on negatiivinen. $x = 0$ on nollakohdan jälkeen ja $f'(0) = 4 \cdot 0 + 6 = 6$ on positiivinen.).

iv) Piirrä merkit taulukkoon. (ks. ylempi rivi kuvassa)

iv) Päättele derivaatan merkeistä funktion kulkusuunta ja piirrä nuolet. (ks. alempi rivi kuvassa).

Harjoitus 7: Laadi merkki- ja kulkukaavio funktiolle $f(x) = -2x^2 - 4x + 16$ ja toinen funktiolle $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 5$. Jälkimmäisessä on kaksi derivaatan nollakohtaa ja pystyviivaa.

5.6. YO-TEHTÄVIÄ

S01/7

Kennelin pitäjä tekee koirilleen aitauksen, jossa on rinnakkain viisi samanlaista suorakulmion muotoista osastoa siten, että koko aitauksesta muodostuu suorakulmio. Aita-aineksia on käytettävissä tasan 200 metrin aitaan. Mitkä ovat yhden osaston mitat silloin, kun koko aitauksen ala on mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin koko aitauksen ala?

S04/10

Osoita, että funktioilla $f(x) = -4x^3$ ja $g(x) = x^3 + x$ ei ole ääriarvoja, mutta summafunktiolla $h(x) = f(x) + g(x)$ on. Mitkä ovat nämä ääriarvot?

K05/7

Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2.

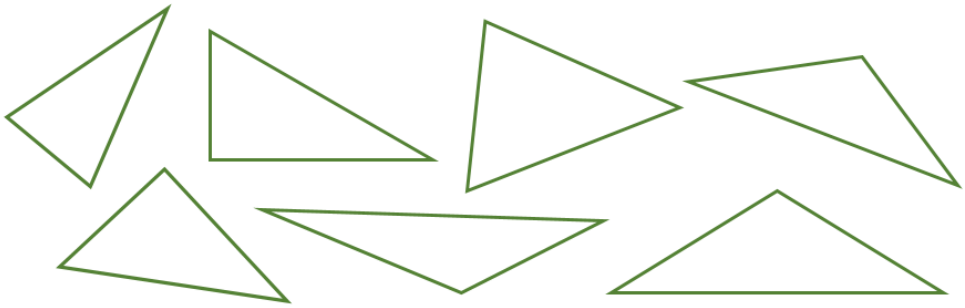
K06/7

Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.

6. GEOMETRIAA

6.1. Kolmio ja Pythagoraan lause

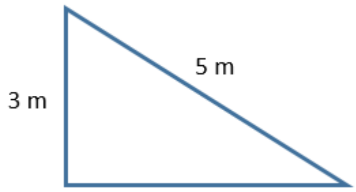
Harjoitus 1: Googlaa (tai ks. taulukkokirja) tarvittaessa termit ja etsi ao. kolmioista i) tasasivuiset kolmiot ii) tasakylkiset kolmiot iii) suorakulmaiset kolmiot iv) tylppäkulmaiset kolmiot



Suorakulmaisessa kolmiossa on aina voimassa **Pythagoraan lause** eli ”kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö”

eli $a^2 + b^2 = c^2$

Esimerkiksi: Erään suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 5 m ja toinen kateetti 3 m. Mikä on toisen kateetin pituus?



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + b^2 = 5^2$$
$$b^2 = 5^2 - 3^2$$
$$b = \pm\sqrt{25 - 9}$$
$$b = \pm 4$$

Kateetin pituus on siis 4 metriä, koska pituus ei voi olla negatiivinen.

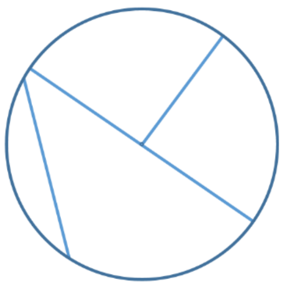
Harjoitus 2: Mikä on suorakulmaisen kolmion piiri, jos kateetit ovat 6 ja 8?

Harjoitus 3: Mikä on suorakulmaisen kolmion pinta-ala, jos sen toinen kateetti on 3 ja hypotenuusa 8?

Harjoitus 4: Lipputangon pituus on 6 metriä ja sen varjo maassa on 4 metriä pitkä. Kuinka pitkä matka on varjon päästä tangon huipulle?

Harjoitus 5: Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat *x* ja *x+5*. Mitkä ovat sivujen pituudet cm tarkkuudella, kun hypotenuusan pituus on 15 senttimetriä?

6.2. Ympyrä



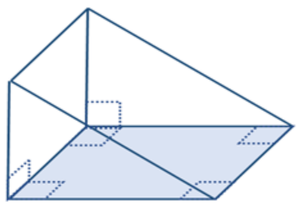
Harjoitus 6: Googlaa tarvittaessa (tai ks. taulukkokirja) ja kirjoita kuvaan oikeisiin kohtiin termit säde, halkaisija, kaari, sektori, jänne, segmentti.

Harjoitus 7: Laske ympyrän pinta-ala, kun säde on 8 cm.

Harjoitus 8: Mikä on ympyrän piiri, jos halkaisija on 20 cm?

6.3. Kappaleiden ominaisuuksia

Harjoitus 9: Hyödynnä ruutupaperia ja piirrä kavaljeeriperspektiivissä i) kuutio, ii) ympyrälieriö, iii) neliöpohjainen pyramidi ja iv) kartio. Kavaljeeriperspektiivi tarkoittaa, että syvyyssuuntainen sivu on 45 asteen kulmassa ja pituudeltaan puolet todellisesta. Kuten oheisessa kuvassa.



Kuvaan on merkitty joitakin suoria kulmia. Kuvan kappaleen pohja on muodoltaan neliö.

Harjoitus 10: Ympyräpohjainen kartio voidaan valmistaa paperista niin, että ensin piirretään paperille iso ympyrä. Ympyrästä leikataan sektori, joka taitetaan kartioksi. Halutaan tehdä kartio, jonka pohjan halkaisija on 10 cm ja korkeus 25 cm. Piirrä kuva.

a) Mikä on kartion sivujanan pituus?
b) Mikä on kartion pohjan piiri?
c) Kuinka suuri on ollut ensin piirretyn ison ympyrän pinta-ala?
d) Kuinka suuri on ollut keskuskulma siinä sektorissa, joka leikattiin isosta ympyrästä?

Harjoitus 11: Neliöpohjaisen pyramidin pohjan sivun pituus on 4 metriä ja pyramidin korkeus on 6 metriä.

a) Mikä on pyramidin sivutahkon korkeus?
b) Mitkä ovat pyramidin sivutahkon sivujen pituudet?

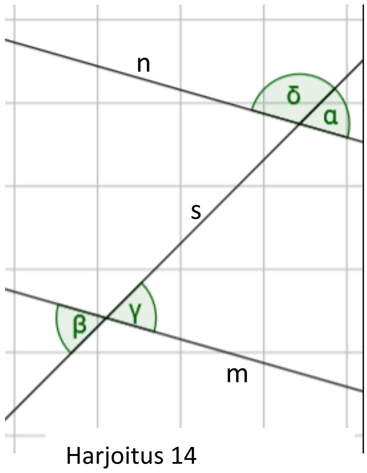
Harjoitus 12: Kuution sivun pituus on 6 metriä.

a) Mikä kuution tahkon halkaisija?
b) Entä kuution lävistäjän pituus?

Harjoitus 13: Kuinka monta prosenttia kuutiosta täyttää pallo, joka on niin suuri, että se mahtuu kuutioon juuri ja juuri? Entä kuinka monta prosenttia kuutiosta täyttäisivät kahdeksan samankokoista palloa, joka ovat niin suuria, että ne saadaan juuri ja juuri mahtumaan kuution sisään? *(Huomaa, että koska pituuksia ei ole annettu, pituuksina pitää käyttää a:ta tai vastaavaa muuttujaa. Esim. kuution sivun pituus on a ja pallon säde siis on... Jos kaikki menee hyvin, prosentuaalista osuutta laskiessa a:t supistuvat pois.)*

6.4. Kulmia

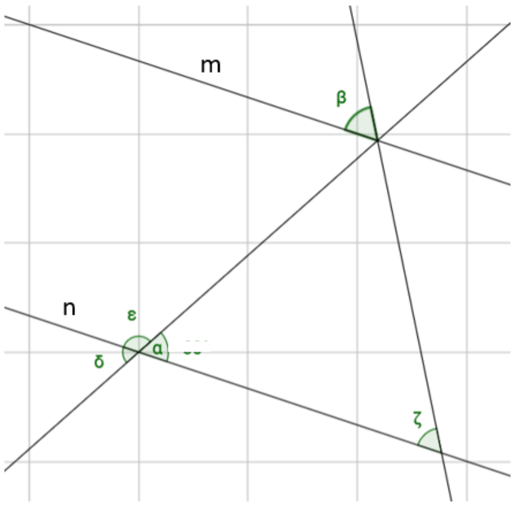
Tutkitaan kulmia α, β, γ ja δ (alfa, beeta, gamma ja delta). Suorat *n* ja *m* ovat yhdensuuntaiset ($n \parallel m$). Kulmat β ja γ ovat toistensa *ristikulmat* ja siksi yhtä suuret. Kulmat α ja δ ovat toistensa *komplementteja*. Kulmien summan täytyy olla 180°. Kulmat α ja γ ovat *samankohtaiset.* Koska suorat *n* ja *m* ovat *yhdensuuntaiset, s*uora *s* leikkaa ne molemmat samassa kulmassa. Siksi α ja γ ovat yhtä suuria.



Harjoitus 14

Harjoitus 14: Päättele viereisestä kuvasta muiden kulmien suuruudet, kun $\alpha = 60°$.

Harjoitus 15: Alemman kuvan avulla voi todistaa, että kolmion kulmien summa on 180°. Keksitkö miten? Alemmassakin kuvassa $n \parallel m$.



Harjoitus 15

6.5. YO-tehtäviä

S01/2

Tuoreen koivutukin pituus on neljä metriä ja sen keskimääräinen halkaisija puoli metriä. Mikä on tukin massa, kun tuoreen koivun tiheys on noin 0,9 kg/dm^3?

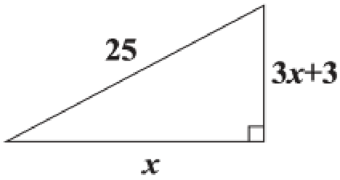
K02/2

Ympyrän pinta-ala on 12 cm^2. Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala? Anna vastaus neliösenttimetreinä kahden desimaalin tarkkuudella.

S02/5
Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan lasissa ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta?

K03/7
Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 21 ja pohjasärmän pituus $20\sqrt{2}$. Laske pyramidin sivusärmän pituus. Kuinka suuren kulman sivusärmä muodostaa pyramidin pohjan kanssa?

K05/2
Muodosta yhtälö oheisen suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien välille ja ratkaise sen avulla kolmion kateettien pituudet.



S05/7
Kuinka suuri on sen ympyrän säde, jonka kehällä olevaa 5,1 metrin pituista kaarta vastaa 9 asteen keskuskulma?

K08/4
Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä putken on oltava, jotta putkeen mahtuisi 3,0 litraa vettä?

S09/5
Sadetin kastelee urheilukenttää 14 metrin päähän sektorissa, jonka keskuskulma on 105 astetta. Nurmikenttä vaatii 4 mm vettä. Kuinka kauan sadetinta on pidettävä toiminnassa, kun se käyttää 32 litraa vettä minuutissa? Oletetaan, että sadettimen vesi jakaantuu sektorille tasaisesti.

K10/7
Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta.

6.6. Vastauksia

14. $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ja $\delta = 120^\circ$

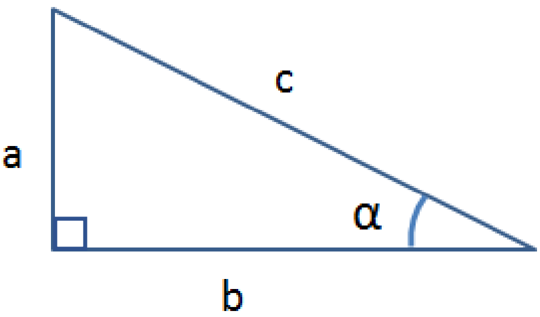
7. TRIGONOMETRIAA

7.1. Kulman yksikkö

Kulmia mitataan radiaaneissa (laskimessa *rad*, ilmaistaan usein piin osina esim. π/2) ja asteissa (laskimessa deg, yksikkö °). Yksiköt vastaavat toisiaan niin, että radiaaneissa π/2 on asteissa 90°. Koko ympyrä on siis 2π tai 360°. Molempia voi käyttää, mutta on tärkeää tietää, kummalla asetuksella laskimesi on.

7.2. Suorakulmainen kolmio

Suorakulmaisessa kolmiossa ilmenee hauskaa säännönmukaisuutta, joka tekee laskut mahdolliseksi. Suorakulmainen kolmio on sellainen kolmio, jossa on yksi 90° kulma. Suorakulmaisessa kolmiossa pisin sivu on aina suoraa kulmaa vastapäätä ja on nimeltään hypotenuusa. Kahta lyhyempää sivua kutsutaan kateeteiksi.



Harjoitus 1: Voiko suorakulmaisessa kolmiossa olla kaksi 90° kulmaa? Merkitse kuvaan kateetit ja hypotenuusa. Piirrä toinen suorakulmainen kolmio, joka on mielestäsi mahdollisimman erilainen kuin tämä.

7.3. Trigonometriset funktiot ja miten niitä käytetään

Trigonometriset funktiot ovat sini (sin), kosini (cos) ja tangentti (tan). Käytetään seuraavassa esimerkkinä siniä, mutta muut toimivat samaan tapaan.
Sini on toimitus, jonka voi tehdä luvulle - samaan tapaan kuin esimerkiksi logaritmin tai neliöjuuren voi ottaa luvusta. (Sini on määritelty myös kulmille, joita ei esiinny suorakulmaisessa kolmiossa (α > 90°). Yksikköympyrä.)

Ensimmäinen askel trigonometrisessa tehtävässä on piirtää kuva. Sitten pitää pohtia, mitä puuttuu. Sini kulmasta α on kulman vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan eli

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{vastainen\ kateetti}{hypotenuusa}$. Yleensä tiedetään näistä kaksi ja kolmas pitää selvittää.

7.4. Kuinka voit selvittää puuttuvan sivun pituuden?

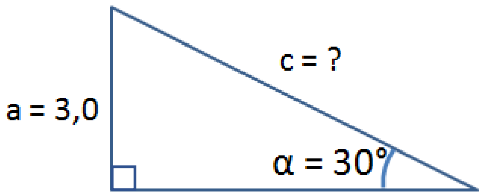
Esimerkki: Sijoita sinin lausekkeeseen tunnetut arvot ja ratkaise tuntematon. Kuvan mukaan

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin 30° = \frac{3,0}{x} \quad \| \cdot x$$

$$x \sin 30° = 3,0 \quad \| : \sin 30°$$

$$x = \frac{3,0}{\sin 30°}$$



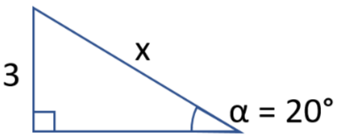
Ratkaistun lausekkeen voit syöttää tällaisenaan laskimeen taikka laskea erikseen laskimella, mitä on sini 30:stä asteesta. (sin 30° = 0,5)

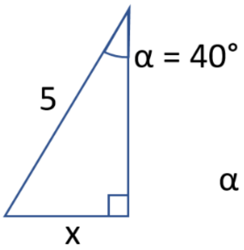
$$x = \frac{3,0}{0,5} = 6,0$$

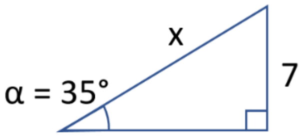
Harjoitus 2: Entä jos kuvasta tiedettäisiin c, mutta ei a:ta? Oletetaan, että kulma on edelleen α = 30°, mutta nyt a on tuntematon ja c = 6,0. Kirjoita yhtälö. Aloita yhtälön ratkaiseminen kertomalla jakaja pois.

Harjoitus 3: Muodosta siniä käyttävät yhtälöt myös näistä tilanteista ja ratkaise sivun x pituus.

Muista, että $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$







7.5. Entä jos tietää sivujen pituudet, muttei kulman suuruutta?

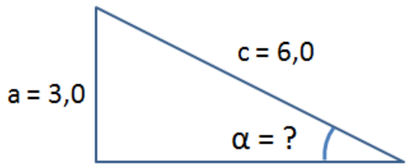
Sini on funktio, joka liittää jonkin suhdetta kuvaavan luvun kulman suuruuteen. Sinin käänteisfunktio ($\sin^{-1}$) tekee päinvastoin. Se liittää suhdetta kuvaavaan lukuun kulman suuruuden. Jos kateetin ja hypotenuusan suhteesta otetaan sinin käänteisfunktio, saadaan kulma.

Esimerkki: Ratkaistaan kulma α. Aloitetaan taas piirtämällä kuva ja muodostamalla yhtälö.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{3,0}{6,0}$$

$$\sin\alpha = 0,5$$



Käänteisfunktiota käytetään usein shift/2nd toiminnon avulla laskimesta. Jotta saadaan α pitää ottaa sinin käänteisfunktion arvo luvusta 0,5. Paperille merkitään vain nuoli (”tästä seuraa”) ja kulman tarkka arvo.

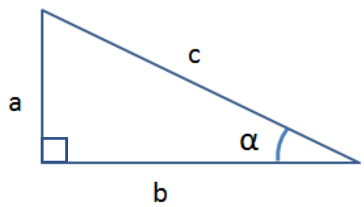
$$\Rightarrow \alpha = 30°$$

Käänteisfunktioon voi myös syöttää jakolaskun (3,0/6,0), jos haluaa välttää mahdollista pyöristysvirhettä.

Harjoitus 4: Kokeile syöttää sivujen pituuksien suhde (0,5) laskimeen sinin käänteisfunktioon. Kokeile syöttää myös jakolasku (3,0/6,0) ja tarkasta, saatko saman tuloksen. Tarvittaessa tarkista sulkeiden käyttö.

Harjoitus 5: Teltan keskellä olevan tolpan kärjestä lähtee köysi. Köysi on 15 metriä pitkä ja tolppa 10 metriä korkea. Missä kulmassa köysi tulee maahan? Anna vastaus asteen tarkkuudella. Aloita piirtämällä kuva, johon merkitset tunnetut tiedot. (42°)

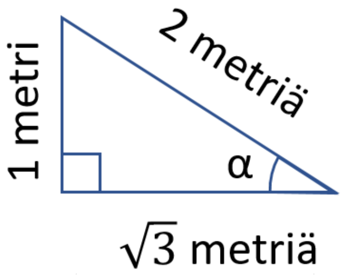
7.6. Kosini ja tangentti

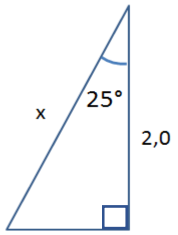


Kosini ja tangentti toimivat samalla tavalla kuin sini, mutta ne on määritelty eri tavalla. Sini kulmasta on α:n vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan eli $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Kosini kulmasta on kulman viereisen sivun suhde hypotenuusaan eli $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Tangentti kulmasta on α:n vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin eli $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Tehtävän alussa pitää pohtia, mitä tietoja tiedetään ja mitä trigonometrisia funktioita pitää käyttää. Usein vaihtoehtoja on monia.

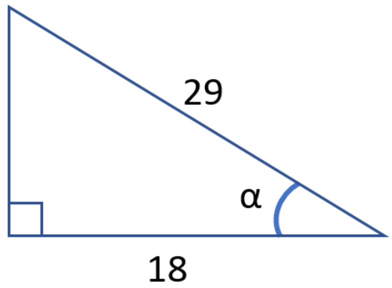
Harjoitus 6: Kirjoita kaikki trigonometriset yhtälöt kulmasta α. (Kuva oikealla.) Tarkista, että jokainen antaa kulmalle saman suuruuden.





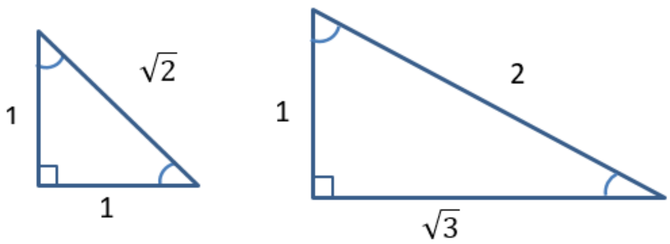
Harjoitus 7: Kolmiosta (vas.) tunnetaan yksi sivu (toinen kateetti) ja kulma. Halutaan selvittää hypotenuusan pituus.
a) Onko tunnettu kateetti kulman vastainen vai viereinen kateetti?
b) Pitääkö nyt käyttää siniä, kosinia vai tangenttia?
c) Muodosta yhtälö. Sijoita siihen tunnetut arvot ja *x* tuntemattoman paikalle.
d) Ratkaise yhtälöstä tuntematon. (x=2,2)

Harjoitus 8: Kolmiosta (kuva oikealla) tunnetaan kaksi sivua, joista toinen on kateetti, ja halutaan selvittää niiden välinen kulma.



a) Onko tunnettu kateetti kulman α vastainen vai viereinen?
b) Käytetäänkö siniä, kosinia vai tangenttia?
c) Muodosta yhtälö. Sijoita yhtälöön tunnetut tiedot.
d) Ratkaise käänteisfunktion avulla kulman suuruus.
e) Osaisitko laskea, mikä on kolmion toinen kulma? (38°)

Harjoitus 9: Kaksi kolmiota oikealla ovat *muistikolmioita*, joiden kulmat ja sivujen pituuksien suhteet on helppo muistaa. Nyt kaikki sivujen pituudet tunnetaan, joten voit käyttää kaikkia trigonometrisia funktioita joka kulmassa. Selvitä puuttuvien neljän terävän kulman suuruudet trigonometrisilla funktioilla. Käytä siniä, kosinia ja tangenttia ainakin kerran.



Harjoitus 10: Laske suunnikkaan korkeus, kun yksi kulma on 60° ja korkeuden suhteen vino sivu on 15 cm.
Harjoitus 11: Laske suorakulmaisen kolmion terävät kulmat, kun kateetin ja hypotenuusan suhde on 2:5.
Harjoitus 12: Tikkaita ei saisi asettaa alle 65 eikä yli 70 asteen kulmaan. Mikä on se korkeuden vaihteluväli, jolla viiden metrin tikkaiden yläpään pitää seinällä olla?
Harjoitus 13: Korttitalo rakennetaan asettamalla kortteja seisomaan toisiaan vasten. Pelikortin pituus on 88 mm ja ne asetetaan 5,0 cm päähän toisistaan. Kuinka korkea on nelikerroksinen korttitalo?

7.7. YO-tehtäviä

S03/6
Kolmion muotoisen viheralueen kaksi lyhintä sivua ovat 70,0 m ja 86,5 m. Jälkimmäisen vastainen kulma on 35,0°. Laske viheralueen muiden kulmien suuruudet ja alueen pinta-ala. Piirrä kuvio.

S04/5
Kaksi 14 mm paksua lautaa liitetään päällekkäin yhteen 30 mm pitkällä naulalla. Naulan tulee jäädä koko pituudeltaan lautojen sisään, joten naula lyödään hieman vinoon. Mikä on naulan a) pienin, b) suurin mahdollinen kaltevuuskulma, kun naulan tulee yltää alempaan lautaan vähintään 8 mm:n syvyyteen mutta ei kuitenkaan laudan läpi? Vastaukset asteen tarkkuudella.

S06/8
Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 12,4 cm ja toinen terävä kulma 64,5°. Kolmio pyörähtää pitemmän kateettinsa ympäri. Laske syntyneen kartion tilavuus ja vaipan ala.

K07/7

Lentokone lähestyy Oulunsalon kenttää kolmen asteen kulmassa maahan nähden. Kiitoradan pituus on 2,5 km, ja kone koskettaa kiitorataa 300 metrin päässä sen alkupäästä. Kuinka kaukana kiitoradan alkupäästä (vaakasuoraan ajateltuna) kone oli 500 jalan korkeudessa (1 jalka = 0,3048 m)? Kuinka kauan tästä kului maakosketukseen, jos lentokoneen lähestymisnopeus ilman suhteen oli 270 km/h? Oletetaan, että sää oli tyyni.

S14/6

Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.

a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liitää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.

b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liitää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

K15/4

Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 4,4 cm ja hypotenuusan AC pituus 8,1 cm.

a) Laske kateetin BC pituus.

b) Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.

c) Laske kolmion pinta-ala 0,1 neliösenttimetrin tarkkuudella.

8. POTENSSI- JA EKSPONENTTIYHTÄLÖT

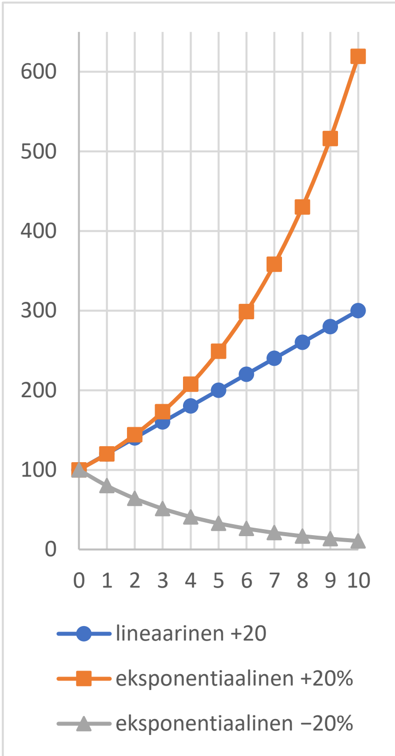
8.1. Prosentuaalinen kasvu

Prosenttilaskuissa käytetään muutoskerrointa. Muutoskerroin, joka on suurempi kuin 1, tarkoittaa kasvua. Ykköstä pienempi kerroin liittyy vähenemiseen.

Esimerkki: Mikroaaltouunin hinta on 79 €. Toinen kauppa nostaa sen hintaa 20 %, kun toinen laskee sitä 20 %. Muutoskerroin kasvulle: 100 % + 20 % = 120 %, josta saadaan 120 : 100 = 1,20
Muutoskerroin vähenemiselle: 100 % − 20 % = 80 %, josta saadaan 80 : 100 = 0,80
Uudet hinnat ovat 79 € · 1,20 = 94,80 € ja 79 € · 0,80 = 63,20 €.

Harjoitus 1: Mikä muutoskerroin sopii seuraaviin tilanteisiin? a) kasvaa 40 % b) jäljelle jää 20 % c) kaksinkertaistuu d) puolittuu e) vähenee 60 % f) kasvaa 150 % g) alenee viidenneksen.
(v: 1,40/0,20/2,00/0,50/0,40/2,50/0,80)

Esimerkki:
a) Pohdi lukusarjaa 100 → 120 → 144 → 173 → 207 → 249 → 299 jne.
Muutos alussa on vain +20, mutta lopussa jo +50, mutta koko ajan +20 %.
b) Pohdi lukusarjaa 100 → 80 → 64 → 51 → 41 → 33 → 26 → 21
Muutos alussa on −20, mutta lopussa enää −5, mutta koko ajan −20 %.
Huomaa ero lineaariseen muutokseen, jossa muutos on koko ajan +20.
(ks. viereinen kuva)



8.2. Eksponentiaalisen muutoksen yhtälö

Eksponentiaalista kasvua tai vähenemistä kuvaavat funktiot ovat aina muotoa
$\mathbf{A \cdot k^x = L}$ missä **A** on alkuperäinen arvo
k on prosentuaalisesta muutoksesta muodostettu muutoskerroin
x on toteutuneiden muutoskertojen määrä
L on lopullinen muuttunut arvo

Eksponentiaalisessa muutoksessa muutos on aina prosentuaalisesti yhtä suuri osuus edellisestä arvosta. Näin ollen korko kasvaa aina korkoa ja kasvu nopeutuu. Toisaalta taas väheneminen hidastuu.

8.3. Tehtävässä aina yksi osa yhtälöstä on tuntematon

Esimerkki: a) Liisa päättää pidentää juoksumatkaansa 10 % joka viikko. Ennen päätöstä hän juoksi 5 km lenkkejä. Kuinka paljon hän juoksee kuudennella viikolla päätöksen jälkeen?
A = 5 km, k = 1,10 (koska 100 % + 10 % on 110 % eli 1,10) ja x = 6 (koska lisäystä on nyt tullut kuusi kertaa), mutta L = ?.
b) Pepe suunnittelee tiputtavansa painoaan 5 % joka kuukausi, kunnes saavuttaa terveellisen painon. Hän painaa nyt 90 kg. Kuinka paljon hänen pitäisi painaa suunnitelmansa mukaan neljäntenä kuukautena? L = ?, A = 90 kg, k = 0,95 (koska 100 % − 5 % = 95 % eli 0,95) ja x = 4 (koska muutos on tapahtunut neljä kertaa).

Harjoitus 2: Sijoita esimerkkien arvot eksponentiaalisen muutoksen yhtälöön $\mathbf{A \cdot k^x = L}$ ja laske **L.** (v: a) 8,9 km b) 73 kg)

Harjoitus 3: Pankkitilille luvataan 5 % vuosikorko. Yusuf tallettaa tilille 500 €. Laske, kuinka paljon tilillä on rahaa kahdentoista vuoden kuluttua. (v: 898 €)

Harjoitus 4: Lisa seuraa perhospopulaation kokoa. Aluksi populaation kooksi saatiin 250 yksilöä. Se kasvaa noin 12 % viikossa. Kuinka monta yksilöä tulee lisää ensimmäisen viiden viikon aikana? Entä seuraavien viiden viikon aikana? Miksi kasvu ei ole sama? (v: 190 ja 340)

Harjoitus 5: Muriel sijoittaa 500 euroa osakkeisiin. Ensimmäisten 10 viikon ajan osakkeiden arvo nousee 5 % viikossa. Viikolla 11 osakkeiden arvo romahtaa 50 %. Mikä on osakkeiden arvo lopussa? Miksi osakkeiden arvo ei ole 500 €? (v: 407 €)

Harjoitus 6: Puoliintumisaika tarkoittaa aikaa, jossa puolet radioaktiivisesta aineesta hajoaa eli sen massa vähenee 50 %. Eräs sinkin isotooppi puoliintuu melko tarkasti tunnissa. Tätä sinkin isotooppia on aluksi 40 mg. Kuinka paljon sitä on kuuden tunnin kuluttua? (v: 0,625 mg)

Harjoitus 7: Erään kotilolajin määrä alueella on vähentynyt 15 % joka vuosi. Vuonna 2010 lajia arvioitiin olevan alueella 430 kappaletta. Kuinka monta kotiloa on jäljellä vuonna 2020? Tutki kokeilemalla laskimella, milloin kotiloita on jäljellä alle 2 kappaletta. (v: 85 kpl, 2044)

8.4. Oikean ratkaisumenetelmän valitseminen

Usein tuntematon ei ole heti yhtälön vasen puoli. Silloin pitää muodostaa yhtälö ja valita ratkaisumenetelmä.

Kun tuntematon on korotettu eksponenttiin pitää käyttää **juuriratkaisua**. Esim. kun yhtälössä esiintyy x^2, tulos ratkaistaan neliöjuuren avulla. Kun eksponentti on tuntematon, ratkaisu saadaan **logaritmilla**. Esim. yhtälössä esiintyy $1{,}05^x$. Eksponenttiin päästään käsiksi vain *logaritmin* avulla. Jos x on ihan normaalisti rivillä ilman eksponenttia, käytetään **normaalia yhtälönratkaisua** (äxät vasemmalle, muut oikealle, jaetaan äxän kertoimella).

Harjoitus 8:
Missä yhtälöissä tarvitaan juurta? Missä logaritmia?

$4x^5 = 31\,104$	$8^x + 72 = 584$	$x \cdot 8^5 = 229\,376$	$8 + 2x^6 = 235\,306$
$4 \cdot 6^x = 864$	$8x + 5^5 = 3157$	$1{,}5x^7 = 117\,187{,}5$	$\frac{2 \cdot 1{,}5^x}{5} = 0{,}9$

(v: j/l/n/j / l/n/j/l)

8.5. Juuriratkaisut

Juuriratkaisua tarvitaan, kun tuntemattomalla on eksponentti. Ensin yhtälö siistitään niin, että äxän sisältävä termi siirretään vasemmalle ja muut oikealle. Sitten jaetaan äxän kertoimella. Lopuksi otetaan juuri, jonka asteluku on sama kuin äxän eksponentti. Toiseen korottaminen kumotaan neliöjuurella ($\sqrt{}$), kolmanteen korottaminen kolmannella juurella ($\sqrt[3]{}$)

Esim.

$$\begin{aligned} 3x^6 - 5 &= 12283 \\ 3x^6 &= 12288 \\ x^6 &= 4096 \\ \sqrt[6]{x^6} &= \sqrt[6]{4096} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Parillinen juuri antaa aina kaksi vastausta. Positiivinen tai negatiivinen luku parilliseen potenssiin on plussaa.

Esim.

$$\begin{aligned} x^5 &= -1024 \\ \sqrt[5]{x^5} &= \sqrt[5]{-1024} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Pariton juuri antaa vain yhden vastauksen, koska pariton potenssi ei muuta merkkiä.

Esim.

$$x^4 = -16$$

Ei ratkaisua

Negatiivisesta luvusta ei voi ottaa parillista juurta.

Harjoitus 9: Ratkaise yhtälöt a) $6x^2 + 12 = 66$ b) $3x^4 = 2x^4 + 625$ c) $4x^6 + 33 = 29$
d) $\frac{3x^7}{6} = x^7 - 8192$ e) $x^6 + 162 = 0$ f) $2(x^3 + 6) = 262$ g) $(2x^3 + 2)^2 - 8 = 8x^3$

(v: a) x = ±3 b) x = ±5 c) ei ratkaisua d) x = 4 e) ei ratkaisua f) x = 5 g) x = ±1)

Harjoitus 10: Yasin on tallettanut tililleen 1200 euroa 10 vuotta sitten. Tilillä on nyt 1954,67 €. Mikä oli tilin korkoprosentti? (v: 5,0 %)

Harjoitus 11: Brunhilde on huomannut, että yhden asiakastapauksen kirjaamiseen kuluva aika on vähentynyt kokemuksen karttuessa. Aluksi kirjaamiseen kului 28 minuuttia, mutta viiden viikon kuluttua enää 22 minuuttia. Kuinka monta prosenttia Brunhilden käyttämä aika vähenee viikossa (jos muutos on joka viikolla yhtä monta prosenttia)? (v: 4,7 %)
Harjoitus 12: Alussa epäpuhtauksien määrä ilmassa on E. Viisinkertainen suodatin poistaa ilmasta 99,9 % epäpuhtauksista, joten lopussa jäljellä on vain 0,001E. Kuinka monta prosenttia epäpuhtauksista yksi suodatinkerros poistaa? (v:75 %)

8.6. Logaritmiratkaisut

Logaritmiratkaisua tarvitaan, kun tuntematon on itse eksponentti. Mikään jakaminen tai vähennys ei tiputa eksponenttia riville. Tämä johtuu laskujärjestyksestä. Potenssi pitää laskea ennen muita laskutoimituksia. Eksponentin kantalukuun ei saa puuttua ennen kuin potenssi on laskettu eikä sitä voi nyt laskea.

Logaritmiratkaisu alkaa samalla tavalla kuin muutkin yhtälönratkaisut. Äxän sisältävät termit vasemmalle, muut oikealle. Jaetaan kertoimella, joka äxän sisältävällä termillä on. Missään tapauksessa *ei* saa kertoa 6·4, koska potenssi pitäisi laskea ennen sitä (eikä voi!). Kun päästään tilanteeseen, missä vasemmalla on kantaluku potenssiin x ja oikealla puolella pelkkä luku, x saadaan ottamalla oikean puolen luvusta logaritmi, jonka kantaluku on sama kuin potenssin kantaluku.

$$6\cdot 4^x = 6144 \quad \|:6$$
$$4^x = 1024 \quad \| \log_4()$$
$$x = \log_4(1024)$$
$$x = 5$$

Harjoitus 13: Laske esimerkin lasku kun kantaluku on 3.
Harjoitus 14: Hildegard on tallettanut tililleen 1200 euroa, mutta ei millään muista kuinka monta vuotta sitten. Tilillä on nyt 1531,54 € ja tilin korkoprosentti on ollut jo useita vuosia 5 %. (v: 5 vuotta)
Harjoitus 15: Joosepin yritys pyrkii pienentämään sairauspoissaoloja 5 % vuosittain. Alkutilanteessa sairauspoissaoloja on 248 työpäivää vuodessa. Milloin poissaolojen määrä saadaan vähennettyä alle 150 päivään? (v: 10 vuoden kuluttua)

Huomaa, että moniosainen eksponentti tulee kokonaan logaritmin ratkaisuksi.

Esimerkki:

$$4^{x+1} = 64 \quad \| \log_4()$$
$$x+1 = \log_4(64)$$
$$x+1 = 3 \quad \| -1$$
$$x = 2$$

Harjoitus 16: Ratkaise yhtälöt
a) $8^{x+2} = 32768$ b) $4^{2x+8} = 256$
c) $4 \cdot 5^{2x+1} = 12500$ d) $2 \cdot 7^{4-x} = \frac{2}{49}$
e) $2(3 - 4^{x+1}) = -122$ f) $\frac{8^{8x}}{4} = 8192$
(v: a) x = 3 b) x = −2 c) x = 2 d) x = 6 e) x = 2 f) $x = \frac{5}{8}$)

8.7. YO-Tehtäviä:

K2012/8
Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?

K2001/8
Pieneläinklinikassa käytetään kerta-annoksena annettavaa nukutusainetta, jonka määrä elimistössä vähenee eksponentiaalisesti siten, että kolmen tunnin kuluttua aineesta on enää puolet jäljellä. Leikkauksen ajan on nukutusainetta elimistössä oltava vähintään 23 mg eläimen kutakin painokiloa kohti.

Kuinka suuri määrä nukutusainetta on vähintään annettava 20 kg painavalle koiralle leikkausta varten, kun leikkauksen on arvioitu kestävän 1 h 15 min?

K2002/12

Uutta pesukonemallia Suomeen tuova yritys sai joulukuussa 2000 myydyksi 470 pesukonetta. Yritys sai mainostajalta tarjouksen, jossa luvattiin mainostamisen lisäävän myyntiä vuoden 2001 alusta lähtien 25 % edelliseen kuukauteen verrattuna joka kuukausi kahden vuoden ajan. a) Kuinka monta pesukonetta yritys myisi tarjouksen mukaan vuoden 2001 kesäkuussa? b) Kuinka monta konetta myynti olisi koko kahden vuoden aikana?

K2003/12

Vuoden 2002 tammikuun alussa talletetaan tietty summa tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,54 %, ja tasan vuoden kuluttua samansuuruinen summa toiselle tilille, jonka korkoprosentti on 3,25. Varat on tarkoitus nostaa tileiltä, kun talletukset ovat kasvaneet yhtä suuriksi. Arvioi kuukauden tarkkuudella, milloin tämä tapahtuu. Sovella koronkoronlaskuperiaatetta, muodosta yhtälö ja ratkaise se. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

K2004/12

Määrittämällä Äänisen rannoilla tehtyjen hautalöytöjen luiden ikä radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14 pitoisuuden avulla on selvitetty, että alueella on ollut asutusta jo 7500 vuotta sitten. a) Kuinka monta prosenttia luiden radioaktiivisen hiilen määrä on vähentynyt tänä aikana, kun eliön kuoltua hiilen määrä puoliintuu 5730 vuodessa? b) Kuinka monta vuotta tarvitaan lisää, jotta radioaktiivisen hiilen määrä on alentunut 30 prosenttiin alkuperäisestä arvosta?

K2009/14

Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1000 €, eikä muita talletuksia tehdä. a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein? b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?

K2010/5

Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

S2010/12

Tsernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja Keski-Suomessa oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus on vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen? (Alkuperäisessä tehtävässä ohessa on kartta, jossa aktiivisuuden arvo on 10-30 kBq/m^2).

9. TALOUSMATEMATIIKKAA

9.1. Arvonlisävero ja prosenttiyhtälö

Arvonlisävero eli alv lasketaan aina verottomasta hinnasta. Yleensä sovelletaan 24 % arvonlisäverokantaa, jolloin myyntihinta on ”124 %” ja veroton hinta pitää laskea prosenttiyhtälöllä.

Esimerkki: Paita maksaa 46 €. Kuinka monta euroa hinnassa on arvonlisäveroa? Merkitään verotonta hintaa muuttujalla *x*. Muodostuu yhtälö $x \cdot 1{,}24 = 46$ €, josta jakamalla saadaan $x =$ 37,096… €.

Veron osuus on siis 46 € − 37,096… € = 8,903… € eli noin 8,90 €.

Harjoitus 1: Hiustenleikkuu maksaa 38 €. Hiustenleikkuusta maksetaan 24 % arvonlisäveroa. Kuinka paljon parturille jää käteen arvonlisäveron jälkeen? (v: 30,65 €)

Harjoitus 2: Elintarvikkeiden arvonlisäverokanta on 14 %. Henkilön ruokaostokset ovat kuukaudessa yhteensä 420 €. Mikä on uusi ruokaostosten hinta, jos ruoan arvonlisäverokantaa nostetaan 16 %:iin? (v: 427,37 €)

Harjoitus 3: Ostokset maksoivat yhteensä 60 euroa. Ostoksissa oli ruokaa (alv 14 %) ja lehti (alv 24 %). Yhteensä veroa maksettiin 8,22 €. Kuinka paljon ruoka maksoi? Entä lehti? Muodosta ja ratkaise sopiva yhtälöpari. (v: 48 € ja 12 €)

9.2. Yksinkertainen korko

Yksinkertaisesta korosta on kyse silloin, kun ei ehdi kulua kokonaista korkokautta. Jos esimerkiksi korkoa pitää maksaa vuodessa 5 % ja talletusaika onkin vain 6 kk, korkoa maksetaan vain 2,5 %. Näissä tilanteissa käytetään usein kaavaa r = kit Kaavassa *r* on maksettavan koron määrä (€), *k* on alkuperäinen pääoma, *i* on korkotekijä (5 % => 0,05) ja *t* on korkoaika.

Esimerkki: Tilin vuosikorko on 4,8 % ja talletus on tilillä 7 kuukautta. Tilille talletetaan 1700 €. Laske korko.

$$r = kit = 1700\ € \cdot 0{,}048 \cdot \frac{7}{12} = 47{,}5999\ldots € \approx 47{,}60\ €$$

Harjoitus 4: Laske kertyvä korko, kun 670 euron talletus on tilillä 8 kuukautta ja vuosikorko on 4,5 %. (20,10 €)

Harjoitus 5: Mikä on tilin saldo lopussa, kun 350 € talletus on tilillä 4 kuukautta 0,60 % vuosikorolla. (350,70 €)

Harjoitus 6: Mikä on tilin korkokanta, kun 1200 euron talletukselle maksettiin 19 euroa korkoa viiden kuukauden talletusajan jälkeen? (v: 3,8 %)

9.3. Nettokorkokanta (%) ja nettokorko (€)

Maksettavista koroista peritään lähdeveroa (30 %). Näin ollen korkokannasta (esim. 5 %) voidaan laskea nettokorkokanta vähentämällä maksettavasta korkokannasta 30 %. Nettokorko on verojen jälkeen tilille tuleva summa.

Esimerkki: 3500 € talletetaan vuodeksi. Korkokanta on 5,0 %. Laske nettokorkokanta ja nettokorko. Nettokorkokanta on $5{,}0 \cdot (1 - 0{,}30) = 3{,}5$ eli 3,5 %. Nettokorko vuoden aikana on 3500 € · 0,035 = 122,50 €

Harjoitus 7: Laske nettokorko vuoden aikana, kun tilille talletetaan 3500 € ja tilin korkokanta on 1,7 % ja lähdevero 30 %. (v: 41,65 €)

Harjoitus 8: Mikä on tilin korkokanta, kun tilin nettokorkokanta on 1,204 %? (v: 1,72 %)

Harjoitus 9: Kuinka paljon lähdeveroa tulee maksettavaksi, kun 12 700 € talletus on kolme kuukautta tilillä, jonka korkokanta on 1,2 %? (v: 11,43 €)

9.4. Koronkorko

Koronkorkolaskuissa käytetään eksponentiaalisen muutoksen kaavaa $K = kq^n$ Jos talletusaika on monta korkokautta, myös kertyvä korko alkaa kasvaa korkoa (eksponentiaalinen kasvu!). Kaavassa K on uusi pääoma, k on alkuperäinen pääoma, q on korkotekijä (5 % => 1,05) ja n on korkokausien lukumäärä. Kaavassa on neljä mahdollista tuntematonta. Muodosta yhtälöt näissä tilanteissa koronkoron kaavan mukaan. Merkitse x tuntemattoman paikalle ja muihin kohtiin tunnetut arvot.

Esimerkki: Kuinka paljon vastasyntyneen tilille pitää tallettaa, kun lapselle haluttaisiin antaa 18-vuotissyntymäpäivälahjaksi 5000 € ja tilin vuosikorko on 3,0 %?
Korkotekijä lasketaan 3 % + 100 % = 103 %, josta saadaan 1,03. Korkokausia on 18. Muodostetaan yhtälö $5000 = x \cdot 1{,}03^{18}$, joka ratkeaa jakamalla kertoimella $1{,}03^{18}$ ja saadaan $x = 2936{,}973\ldots$ eli pitää tallettaa 2936,97 €.

Harjoitus 10: i) Laske, mikä on uusi pääoma, jos alkuperäinen pääoma on 500 €, korko 5 % ja talletusaika 10 vuotta. (suora sijoitus) ii) Laske, mikä oli alkuperäinen pääoma, jos uusi pääoma on 814,45 €, korko on 5% ja talletusaika 10 vuotta. (ensimmäisen asteen yhtälö) iii) Laske korkoprosentti, jos alkuperäinen pääoma on 500 €, uusi pääoma 814,45 € ja talletusaika 10 vuotta. (juuri) iv) Laske talletusaika, jos alkuperäinen pääoma on 500 €, korkoprosentti 5 ja uusi pääoma 814,45 €. (logaritmi)

K02/14 : Vanhemmat päättivät tallettaa lapsilleen Anjalle ja Artolle vuoden 2003 alussa yhteensä 9500 € siten, että lapset saisivat nostaa yhtä suuret rahamäärät 21-vuotissyntymäpäiväänsä seuraavan vuoden alussa. Kuinka paljon vanhempien on sijoitettava lasten tileille, kun vuoden 2003 alussa Anja on 16-vuotias ja Arto 12-vuotias? Oletetaan, että pankki maksaa vuotuista korkoa 2,5 prosentin mukaan. Verotusta ei oteta huomioon.

K09/14 : Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?
b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?

Lainoissa on pääoma, joka maksetaan takaisin osissa. Maksuerä sisältää osan lainatusta pääomasta sekä lainatulle pääomalle edellisen maksun jälkeen kasvaneet korot (maksuerä = lyhennys + korko).

9.5. Tasalyhennyslaina

Tasalyhennyslainassa jokainen maksuerä sisältää yhtä paljon lyhennystä. Jos 10000 euron laina maksetaan takaisin 20 erässä, yksi maksuerä sisältää 500 € lyhennystä. Maksuerän sisältämä korko lasketaan yksinkertaisen koron kaavalla, koska lainan lyhennyksessä korko maksetaan joka kuukausi pois. Silloin korko ei ehdi kasvaa korkoa. Pääoma kasvaa korkoa vain yhden kuukauden, jos maksuja suoritetaan kuukauden välein.

Harjoitus 11: Tasalyhennyslainana on lainattu 10000 €. Vuosikorko on 5 % ja tasalyhennykseksi on sovittu 500 € joka kuukausi, minkä päälle tulevat korot. i) Kuinka paljon korkoa maksetaan ensimmäisen maksuerän yhteydessä? ii) Kuinka paljon rahaa on vielä lainassa, kun enää yksi maksuerä on suorittamatta? iii) Kuinka paljon korkoa maksetaan viimeisessä erässä? (v: i) 41,67€ ii) 500 € iii) 2,08 €)

Harjoitus 12: Tasalyhennyslainan maksuerien sisältämät korot muodostavat aritmeettisen jonon. Taulukoi edellisen kohdan mukaan viiden ensimmäisen maksuerän korot. Laske sitten kaikkien korkojen summa koko maksuajalta. (v: 41,67€, 39,58€, 37,50€, 35,42€ ja 33,33 €. Jos a_1=41,67 ja a_{20}=2,08 niin S_{20} = 437,50 €.)

S09/15: Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 € 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää lainaa vuosittain 4800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan?

9.6. Tasaerälaina eli annuiteettilaina

Tasaerälainassa jokainen maksuerä on yhtä suuri. Alussa erä sisältää isomman osan korkoja ja vähemmän lyhennystä. Loppua kohden korkojen osuus vähenee. Tasaerän eli annuiteetin suuruus (lyhennys + korko) voidaan laskea kaavalla $\boldsymbol{A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}}$, jossa *A* on kuukausittaisen tasaerän suuruus, *K* lainattu pääoma, *q* korkotekijä *maksuerien välisenä aikana* (esim. 6 % vuodessa on 1 + 0,06/12 eli 1,005) ja *n* on maksukertojen lukumäärä.

Harjoitus 13: Laske tasaerän suuruus, jos 10000 € lainataan ja maksetaan takaisin 20 erässä kuukauden välein. Vuosikorko on 5 %. (v: 522,16 €)

Harjoitus 14: Henkilö ottaa 100 000 € asuntolainan, joka on tarkoitus maksaa takaisin yhdeksässä vuodessa. Mikä on annuiteettilainan kuukausittainen maksuerä, jos korkokanta on 6,5 %? (v:1225,45 €)

K04/15 : Henkilö otti vuoden 2003 alussa 40000 € asuntolainan 10 vuodeksi. Hän maksaa lainan ja korot yhtä suurena vuotuisena eränä aina vuoden lopussa, ts. kyseessä on tasaerälaina. Mikä on erän suuruus, jos korko on neljä prosenttia? Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu (mahdollisesti pienemmäksi jäävää viimeistä erää lukuun ottamatta), vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Minkä vuoden lopussa henkilö maksaa viimeisen erän, jos korko nousee viiden vuoden kuluttua kuuteen prosenttiin eikä tämän jälkeen muutu? Mikä on viimeisen erän suuruus?

K06/14 : Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaerä- eli annuiteettilainana puolivuosittain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.

10.TODENNÄKÖISYYSLASKENTA

Tapahtuman todennäköisyys voidaan useimmiten muodostaa jakolaskulla/murtolukuna $\frac{suotuisat\ tapaukset}{kaikki\ alkeistapaukset}$. Esimerkiksi korttipakasta saa hertan todennäköisyydellä $\frac{13}{52} = 0{,}25$ eli 25 %.

10.1. Kertolaskusääntö

Sanan ”ja” paikalle kuuluu todennäköisyyslaskennassa aina kertomerkki. Todennäköisyydet ovat ykköstä pienempiä lukuja ja niiden kertominen keskenään tuottaa yhä pienemmän tuloksen.

Harjoitus 1: Mikä on todennäköisyys, että arvaat oikein puhelimen PIN-koodin ensimmäisen numeron? Entä todennäköisyys, että arvaat oikein toisen numeron? Entä todennäköisyys, että arvaat oikein ensimmäisen ja toisen numeron eli P(”1. oikein” ja ”2. oikein”)? Entä kaikki neljä numeroa? (v: $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10000}$)

Harjoitus 2: Millä todennäköisyydellä nopanheitolla saadaan tulos 6? Millä todennäköisyydellä neljästä nopasta tulee kaikista 6? (v: $\frac{1}{6}, \frac{1}{1296}$)

Toisinaan peräkkäiset tapahtumat eivät ole riippumattomia. Todennäköisyys voi muuttua, kun ensimmäinen valinta toteutuu. Lottoarvonnassa on mahdotonta nostaa kahdesti lukua 9. Toisaalta jos puolet palloista on jo nostettu, mutta numeroa yhdeksän ei, sen todennäköisyys on nyt paljon suurempi kuin alussa.

Harjoitus 3: Laatikossa on 18 sukkaa, joista 10 on mustia ja 8 harmaita. Millä todennäköisyydellä ensimmäinen nostettu sukka on musta? Entä toinen, jos ensimmäinen oli musta? Entä molemmat? (v: $\frac{5}{9}, \frac{9}{17}, \frac{5}{17}$)

Harjoitus 4: Muodosta lottorivi (7 numeroa 40:stä). Mikä on todennäköisyys sille, että ensimmäinen arvottu numero on rivissäsi? Mikä on todennäköisyys sille, että toinen arvottu numero on rivissäsi, jos ensimmäinen oli? Mikä on todennäköisyys sille, että lottorivisi on viikon oikea rivi? (v: 7/40, 6/39, $5{,}4/10^8$)

10.2. Yhteenlaskusääntö

Sanan ”tai” paikalle kuuluu todennäköisyyslaskennassa aina +. Matematiikassa tai tarkoittaa ”tämä tai tuo tai molemmat” eikä pelkkää valintaa ”tämä tai tuo”. Jos tapahtumilla on yhteisiä alkioita, käytetään yhteenlaskusääntöä: P(A tai B) = P(A) + P(B) – P(A ja B)

Esimerkki: Mikä on todennäköisyys saada korttipakasta ässä tai hertta? Täytyy laskea P(ässä tai hertta) = P(ässä) + P(hertta) – P(ässä ja hertta). Ässiä on pakassa 4, joten P(ässä) on 4/52. Herttoja on 13, joten P(hertta) on 13/52. Kortteja, jotka ovat ässiä ja herttoja on 1, joten sen todennäköisyys on 1/52. Lasku on siis P(ässä tai hertta) = 4/52 + 13/52 – 1/52 = 16/52 = 4/13

Harjoitus 5: Mikä on todennäköisyys saada nopalla 6? Entä parillinen numero? Entä 6 tai parillinen numero? Laske yhteenlaskusäännöllä P(6 tai parillinen). (v: 1/6, 3/6, 3/6)

Harjoitus 6: Petteri näppäilee vahingossa puhelintaan ja PIN-kenttään on tullut kaksi numeroa. Mikä on todennäköisyys sille, että ensimmäinen tai toinen numeroista on oikein? (v: 19%)

Harjoitus 7: Seuraavalle päivälle on luvattu sadetta 30% todennäköisyydellä ja tuulta 20% todennäköisyydellä. Kumpikin estää piknikin. Millä todennäköisyydellä sataa tai on tuulta? (v: 44%)

10.3. Komplementti

Jos lasketaan yhteen tapahtuman onnistumisen ja epäonnistumisen todennäköisyys, saadaan 100%. Komplementti eli vastatapahtuma on usein helppo tapa ratkoa monimutkaisia todennäköisyyksiä.

Esimerkki: Mikä on todennäköisyys sille, että Jokerin seitsemästä numerosta (esim. 3456789) saa ainakin yhden oikein? On paljon helpompi laskea komplementtitapahtuman (ei yhtään numeroa oikein) todennäköisyys kuin itse tapahtuman todennäköisyys, jossa pitäisi laskea yhteen ”yksi numero oikein” ”kaksi numeroa oikein” jne. ja huomioida myös, että oikeiden numeroiden paikka voi vaihdella.

Komplementin avulla P(ainakin yksi oikein) = 1 – P(ei yhtään oikein) = $1-\left(\frac{9}{10}\right)^7$ = 0,478… eli noin 48%. Tämä pitää paikkansa, koska yhteensä kaikki todennäköisyydet ovat 100% eli 1. Yhdessä ”ainakin yksi oikein” ja ”ei yhtään oikein” täyttävät koko todennäköisyysavaruuden. Ne ovat siis toistensa komplementtitapahtumia.

Harjoitus 8: Petteri sählää kännykkänsä kanssa ja näppäilee vahingossa neljä numeroa PIN-kenttään. Mikä on todennäköisyys sille, että kaikki numerot ovat väärin? Entä sille, että ainakin jokin numeroista on oikein? (v: 65,6%, 34,4%)

Harjoitus 9: Riitta vaihtaa kotonaan 4 lamppua. Niissä luvataan 1000 tuntia käyttöaikaa 99% todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä kaikki lamput toimivat1000 tuntia? Millä todennäköisyydellä ainakin yksi lamppu hajoaa ennen 1000 tuntia? (v: 96,1%, 3,9%)

Harjoitus 10: Ossi istuttaa 5 hankalaa siementä, joiden luvataan itävän 60% todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi siemen itää? (mieti ensin mikä on ”ainakin yksi itää” vastatapahtuma ja laske sen todennäköisyys ensin) (v: 99,0%)

10.4. Kombinaatiot

Jokerin kaksi oikein tuloksen voi saada, jos mitkä vain kaksi numeroa rivistä osuvat olemaan samat. Esim. OOVVVVV ja OVOVVVV ja OVVVVOV ovat kaikki 2 oikein rivejä. Jokaisella rivillä on sama todennäköisyys $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5$. Kaksi oikein rivin todennäköisyys on kaikkien 2 oikein rivien todennäköisyyksien summa. Ongelma on, että on vaikea sanoa kuinka monta erilaista 2 oikein riviä on olemassa. Rivien määrä on helpoin laskea kombinaatioilla. Kaksi oikein seitsemästä saadaan kombinaatiolla $\binom{7}{2}$. Tämä kertoo, miten monella eri tavalla kaksi voidaan valita seitsemästä. Laskimessa lasku merkitään ”7 nCr 2”. Lasku luetaan ”seitsemän yli kahden”.

Harjoitus 11: Laske kaksi oikein tuloksen todennäköisyys Jokerissa. $\binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5$ (v: 12%)

Harjoitus 12: 3 työntekijää valitaan uuden ohjelman käyttökoulutukseen. Miten monella eri tavalla koulutettavat voidaan valita, kun työntekijöitä on a) 3 b) 4 c) 5 d) 9? (v: 1, 4, 10, 84)

Harjoitus 13: Kuinka monella eri tavalla loton 40 numerosta voidaan valita 7? Entä kuinka monella eri tavalla voi saada neljä oikein? (Kuinka monella tavalla voi valita neljä oikeista? Entä kuinka monella tavalla voi valita 3 vääristä numeroista?) (v: 18 643 560, neljä oikeaa 35 ja kolme väärää 5456 tapaa, joten yhteensä 190 960 eri ”4 oikein” riviä)

10.5. Binomitodennäköisyys

Edellisessä on jo käytetty binomitodennäköisyyttä eli kaavaa $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, missä *n* on toistojen määrä ja *k* onnistuneiden kokeiden määrä sekä *p* onnistumisen todennäköisyys.

Harjoitus 14: Laske taulukkoon, millä todennäköisyydellä Jokerista saadaan 0, 1, 2…6 tai 7 oikein.

Harjoitus 15: Ossi istuttaa 5 hankalaa siementä, joiden luvataan itävän 60% todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä siemenistä itää tasan kaksi? (v: 23,0%)

Harjoitus 16: Mildred osuu paperipallolla paperikoriin 80% todennäköisyydellä. Hän heittää kuusi kertaa. Millä todennäköisyydellä hän onnistuu joka heitolla? Millä todennäköisyydellä hän epäonnistuu kerran?

Millä todennäköisyydellä hän epäonnistuu kaksi kertaa? Millä todennäköisyydellä hän epäonnistuu ainakin kerran? (v: 26,2%, 39,3% 24,6%, 73,8%)

10.6. YO-tehtäviä:

S2010/8: Verkkopankkiin kirjaudutaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.
a) Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?
b) Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin?

K2010/8: Tiedonsiirtojärjestelmässä havaittiin yksittäisen bitin saapuvan virheellisenä vastaanottajalle todennäköisyydellä 0,00015. Yksittäisten bittien siirtojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia.
a) Millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuvassa 16 bitin jonossa on ainakin yksi virheellinen bitti?
b) Jos lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja, niin millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuu ainakin yksi virheellinen jono?

S2008/11: Puutarhuri istuttaa siemeniä, joiden itävyys on 60%.
a) Mikä on todennäköisyys, että kolmesta istutetusta siemenestä mikään ei idä? Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi siemen itää?
b) Siemeniä istutetaan viiteen ruukkuun kuhunkin kolme. Mikä on todennäköisyys, että jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää?

K2008/8: Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen musta palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?

K2006/9: Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on a) täsmälleen kaksi kuutosta, b) vähintään kaksi kuutosta?

K2004/6: a) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että pistesumma on suurempi kuin kahdeksan? b) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kahdesti. Mikä on todennäköisyys, että kummallakin kerralla pistesumma on suurempi kuin kahdeksan?

S2001/9: Tietokonepelissä heitetään virheellistä noppaa, jossa nopan silmälukujen todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia silmälukuihin. Mitkä ovat eri silmälukujen todennäköisyydet? Mikä on todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta?

11.LUKUJONOT

On olemassa monia mahdollisia sääntöjä lukujonojen muodostamiseen. Mielenkiintoisimpia ovat aritmeettiset lukujonot ja geometriset lukujonot, joihin liittyy säännönmukaisuutta.
Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus (*differenssi, d*) on koko ajan sama. Toisin sanoen koko ajan lisätään sama luku (tämä voi joskus näyttää vähentämiseltä, kun lisätään negatiivinen luku). Differenssi on aina sama, kun vähennetään lukujonon jäsenestä edellinen jäsen.
Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde (*suhdeluku, q*) on aina sama. Toisin sanoen koko ajan kerrotaan samalla luvulla (tämä voi joskus näyttää jakamiselta, kun kerroin on murtoluku). Suhdeluku on aina sama, kun jaetaan lukujonon jäsen edellisellä jäsenellä.

Esimerkki: Onko lukujono aritmeettinen tai geometrinen? a) 12, 10, 8, … b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$
a) Jono on aritmeettinen, koska 10 – 12 = 8 – 10 = −2 = *d*.
b) Jono on geometrinen, koska $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = q$

Harjoitus 1: Onko jono aritmeettinen, geometrinen vai joku muu? Määritä d tai q, jos mahdollista.
a) 7, 9, 11, … b) 16, 32, 64, … c) 2, −2, 2, −2, … d) $50, 41\frac{2}{3}, 34\frac{13}{18}, \ldots$ e) 17, 4, −9, …
f) 2, 8, 18, 32, … g) 60, 30, 20, 15, … h) 324, 972, 2916, … i) $1\frac{2}{5}, 2, 2\frac{3}{5}, 3\frac{1}{5}, \ldots$
(v: a) d = 2 b) q = 2 c) q = −1 d) q = $\frac{5}{6}$ e) d = −13 f) joku muu g) joku muu h) q = 3 i) d = $\frac{3}{5}$

11.1. Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen (a_n) muodostetaan kaavalla $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$, missä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen, *n* on jäsenen järjestysnumero ja *d* on differenssi eli erotus peräkkäisten jäsenten välillä.

Esimerkki: Muodosta lukujonon yleinen jäsen, kun jono alkaa 2, 5, 8…
Differenssi on 5 – 2 = 8 – 5 = 3 = d ja jonon ensimmäinen jäsen on 2.
Sijoitetaan kaavaan. $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$, josta saadaan sulkeet avaamalla yleinen jäsen $a_n = 3n - 1$.

Harjoitus 2: Määritä yleinen jäsen harjoituksen 1 jonoille a), e) ja i).
(v: a) $a_n = 2n + 5$, e) $a_n = 30 - 13n$, i) $a_n = \frac{3}{5}n + \frac{4}{5}$)

Esimerkki: Yleistä jäsentä voi käyttää, kun pitää selvittää jonon jonkin jäsenen suuruus tai järjestysnumero jonossa. Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3n - 1$. a) Laske lukujonon 36. jäsen. b) Monesko lukujonon jäsen on suurempi kuin 300?
a) Kun halutaan laskea lukujonon 36. jäsen, sijoitetaan järjestysnumero n:n paikalle. $a_{36} = 3 \cdot 36 - 1 = 107$.
b) Nyt jäsen pitäisi olla suurempi kuin 300 eli $a_n > 300$. Sijoitetaan a_n:n paikalle yleisen jäsenen lauseke niin saadaan $3n - 1 > 300$. Epäyhtälön ratkaisulla saadaan n > 100,3… eli 101. jäsen on ensimmäinen jonon jäsen, joka on suurempi kuin 300. Ratkaisun voi vielä tarkastaa sijoittamalla.

Harjoitus 3: Erään aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 9n + 2$. Laske yleisen jäsenen avulla jonon kolme ensimmäistä jäsentä. Mikä on jonon differenssi? (v: 11, 20, 29, d = 9)
Harjoitus 4: Lukujono alkaa 27, 21, 15… Monesko jonon jäsen on −141? (v: $a_{29} = -141$)
Harjoitus 5: Eräässä kokeessa lämpötila on alussa 22 °C ja laskee sitten 4,2 °C minuutissa. Muodosta sopiva lukujono ja ratkaise, kuinka monta minuuttia kuluu, että lämpötila alittaa −40°C. (v: 16 minuuttia)

11.2. Aritmeettisen lukujonon summa

Aritmeettisen lukujonon summa on helppo laskea. Jonon jokainen jäsen on keskimäärin yhtä suuri kuin keskimmäinen, joten kaikkien jäsenten summa on keskimmäinen arvo kerrottuna jäsenten määrällä. Aritmeettisen jonon summa (S_n) on $S_n = n\frac{a_1+a_n}{2}$, missä *n* on viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero ja a_n siis viimeinen yhteenlaskettava.

Harjoitus 6: Lukujono alkaa 2, 4, 6, … ja sen 50. jäsen on 100. Laske 50. jäsenen summa. (v: 2550)
Harjoitus 7: Lukujono alkaa 126, 118, 110, … Laske jonon 35 ensimmäisen jäsenen summa. (v: −350)
Harjoitus 8: Auditoriossa on 20 penkkiriviä. Ensimmäisellä rivillä on 12 penkkiä ja seuraavalla aina 2 enemmän. Laske penkkien määrä auditoriossa. (v: 620 penkkiä)

11.3. Geometrisen lukujonon yleinen jäsen

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen muodostetaan kaavalla $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, missä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen, *n* on jäsenen järjestysnumero ja *q* on peräkkäisten jäsenten suhde eli suhdeluku.

Harjoitus 9: Muodosta lukujonon yleinen jäsen ja laske kymmenes jäsen, kun lukujono alkaa
a) 7, 14, 28, 56, … b) 360, 300, 250, $208\frac{1}{3}$, …

(v: a) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$, a_{10} = 3584, b) $a_n = 360 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $\frac{9765625}{139968}$ eli noin 69,8)
Harjoitus 10: Eräässä lukujonossa a_{10} = 78732 ja a_{11} = 236196. Mikä on jonon q? Entä a_1? (v: 3 ja 4)
Harjoitus 11: Eräs lukujono alkaa 12, 18, 27… Monesko lukujonon jäsen on 1224,434082? (logaritmitehtävä) (v: 14.)

11.4. Geometrisen lukujonon summa

Geometrisen lukujonon summan (S_n) laskemiseen on kaava $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$, missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, *n* on viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero ja *q* on jonon suhdeluku.
Harjoitus 12: Lukujono alkaa 8 ; 9,6 ; 11,52… Mikä on 26 ensimmäisen jäsenen summa? (v: n. 4500)
Harjoitus 13: Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{3}{5}$ ja suhdeluku 7. Monenko jäsenen summa on suurempi kuin 1 000 000? (ratkaisu vaatii logaritmin käyttöä) (v: 9 jäsenen summa)
Harjoitus 14: Tilille talletetaan joka vuosi 50 euroa. Rahat kasvavat tilillä korkoa 5% vuodessa. Rahat nostetaan 10 vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta (siis vuoden kuluttua viimeisestä talletuksesta) Kuinka paljon rahaa voidaan nostaa tililtä? (v: 660,34 €)

11.5. YO-tehtäviä

S16/8: Kun kumipallo putoaa korkeudesta h, se ponnahtaa ylöspäin korkeuteen 0,8 · h saakka. Pallo pudotetaan yhden metrin korkeudesta. Mikä on pallon kulkema matka, kun se kymmenennen kerran osuu lattiaan?

K14/8: Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?

K13/11: Lukujonossa (a_n) on a_1 = 2 ja a_2 = $\frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on a) aritmeettinen b) geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.

S11/13: Laske lukujen 1 000 ja 2 000 välissä olevien 13:lla jaollisten lukujen summa.

K09/13: Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61, ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi?

S08/10: Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n:nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.

K06/11: Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

S04/6: Muodosta geometrisen jonon $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \ldots$ n:n ensimmäisen termin summa. Ratkaise summalauseketta käyttäen, msitä n:n arvosta alkaen summa ylittää miljoonan.

S03/7: Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3844775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi?

12. HARJOITUSKOE

12.1. MAB9 Ensimmäinen osa

Ratkaise ilman laskinta. Voit käyttää taulukkokirjaa. Vastaa kaikkiin tehtäviin. Kirjoita tämän osion vastaukset tälle paperille. Voit tarvittaessa jatkaa erilliselle konseptille.

S11/1

a) Laske lausekkeen $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ arvo, kun x = 3.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{5}{x} = -\frac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18$.

S09/1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{1-5x}{5} = \frac{3+4x}{2}$.

b) Sievennä lauseke $(5 + x^2) - (4x^2 + x)$ ja laske sen arvo, kun $x = -2$.

c) Ratkaise yhtälö $4x^2 - 8x + 3 = 0$.

S12/4

Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 - 12x + 35$.

a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x-akselin?

b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit.

12.2. MAB9 Toinen osa

Tehtävissä saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa. Valitse kolme tehtävää. Kirjoita tämän osion vastaukset eri konseptille kuin muiden osioiden.

K10/10

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus.

K09/6

Kuparipallon ympärysmitta on 64,2 cm ja massa 37,9 kg. Tutki, onko pallon sisällä tyhjää tilaa. Kuparin tiheys on 8,96 g/cm^3.

K12/5

Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x + 3)(x^2 - 4)$.

a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.
b) Määritä derivaatta $f'(x)$.
c) Laske derivaatan nollakohdat.

S10/6

Pisteitä A = (1, 4) ja B = (7, 1) katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB tällöin näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähtäysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella.

12.3. MAB9 Kolmas osa

Tehtävissä saa käyttää laskinta. Valitse kolme tehtävää. Kirjoita tämän osion vastaukset eri konseptille kuin muiden osioiden.

S10/8

Verkkopankkiin kirjaudutaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.

a) Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?
b) Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin?

S13/10

Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

K09/13

Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61 ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi?

S14/14

Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6 % koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon.

a) Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus.
b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksunajasta on kulunut?
c) Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?