

Luku 8 – Tehtävien malliratkaisut

8.1

a)

Ympyrän halkaisija on 12 m. Lasketaan kehän pituus halkaisijan avulla.

$$p = \pi \cdot 12 \text{ m} = 37,699 \dots \text{ m} \approx 38 \text{ m}$$

Ympyrän kehän pituus
 $p = 2d$

b)

Ympyrän piiri on 155 mm. Muodostetaan kehän pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan halkaisijan pituus d .

$$\pi \cdot d = 155$$

$$d = \frac{155}{\pi}$$

$$d = 49,338 \dots$$

$$d \approx 49,3 \text{ (mm)}$$

Halkaisijan pituus on 49 mm.

c)

Sektorin keskuskulma on $\alpha = 256^\circ$ ja säde $r = 27 \text{ cm}$. Lasketaan kaaren b pituus.

$$b = \frac{256^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 27 \text{ cm} = 120,637 \dots \text{ cm} \approx 120 \text{ cm}$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Vastaus a) 38 m

 b) 49,3 mm

 c) 120 cm

8.2

a)

Ympyrän piiri on 244 cm. Muodostetaan kehän pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan säteen pituus r .

$$2\pi r = 244$$

$$r = \frac{244}{2\pi}$$

$$r = 38,833 \dots$$

$$r \approx 38,8 \text{ (cm)}$$

← Ympyrän kehän pituus
 $p = 2\pi r$

Säteen pituus on 38,8 cm.

b)

Sektorin keskuskulma on $\alpha = 54^\circ$ ja säde $r = 38,833 \dots$ cm. Lasketaan kaaren b pituus.

$$b = \frac{54^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 38,833 \dots \text{ cm} = 36,599 \dots \text{ cm} \approx 37 \text{ cm}$$

← $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

Vastaus a) 38,8 cm

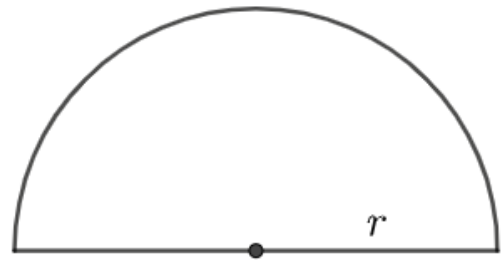
 b) 37 cm

8.3

Puoliympyrän piiri koostuu sektorista, jonka keskuskulma on 180° ja halkaisijasta, jonka pituus on $2r$.

Muodostetaan piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan r .

$$\begin{aligned}\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r + 2r &= 346 \\ r &= 67,294 \dots \\ r &\approx 67,3 \text{ (cm)}\end{aligned}$$



Vastaus 67,3 cm

8.4

a)

Lasketaan kehän pituus p , kun säde on $r = 13,4$ cm.

$$p = 2\pi \cdot 13,4 \text{ cm} = 84,194 \dots \text{ cm} \approx 84,2 \text{ cm}$$

b)

Lasketaan kehän pituus p , kun halkaisija on $d = 88$ mm.

$$p = \pi \cdot 88 \text{ mm} = 276,460 \dots \text{ mm} \approx 280 \text{ mm}$$

Vastaus a) 84,2 cm

 b) 280 mm

8.5

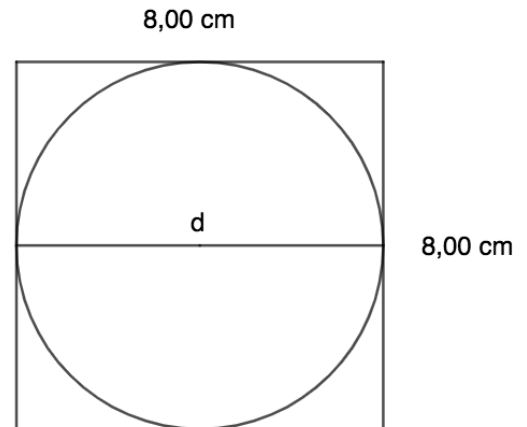
a)

Lasketaan ensin neliön sivun pituus.

$$\frac{32,0 \text{ cm}}{4} = 8,00 \text{ cm}$$

Ympyrän halkaisija d on yhtä pitkä kuin neliön sivun pituus. Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$p = \pi \cdot 8,00 \text{ cm} = 25,132 \dots \text{ cm} \approx 25,1 \text{ cm}$$



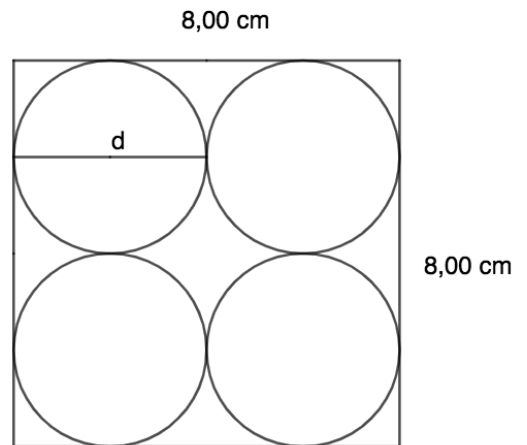
b)

Neliön sivun pituus on 8,00 cm. Koska ympyrät sivuavat toisiaan ja neliön sivuja, yhden ympyrän halkaisija on puolet neliön sivun pituudesta eli

$$\frac{8,00 \text{ cm}}{2} = 4,00 \text{ cm}.$$

Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$p = \pi \cdot 4,00 \text{ cm} = 12,566 \dots \text{ cm} \approx 12,6 \text{ cm}$$



Vastaus a) 25,1 cm

b) 12,6 cm

8.6

Koska sadettaja on keskellä ympyrää, veden on lennettävä ympyrän säteen verran, jotta koko kukkapenkki saa vettä.

Ympyrän kehän pituus on 28 m. Muodostetaan kehän pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$2\pi r = 28$$

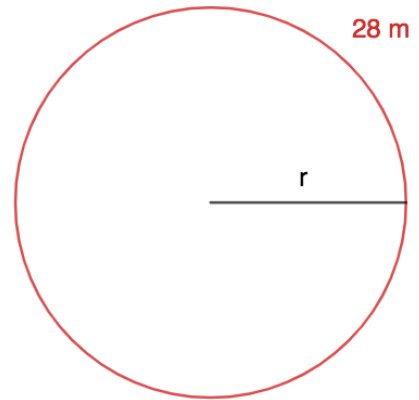
$$r = \frac{28}{2\pi}$$

$$r = 4,456 \dots$$

$$r \approx 4,5 \text{ (m)}$$

Veden on lennettävä 4,5 m päähän.

Vastaus 4,5 m



8.7

a)

Polkupyörä etenee sen renkaan kehän pituuden mittaisen matkan, kun rengas pyörähtää akselinsa ympäri. Renkaan halkaisija on 72 cm. Lasketaan renkaan kehän pituus.

$$p = \pi \cdot 72 \text{ cm} = 226,194 \dots \text{ cm} \approx 230 \text{ cm}$$

Pyörä etenee 230 cm mittaisen matkan.

b)

Lasketaan, kuinka monta kehän pituutta on 12 km.

$$\frac{12000 \text{ m}}{226,194 \dots \text{ m}} = 5305,180 \dots \approx 5300$$

Pyörän on pyörittävä 5300 kertaa.

Vastaus a) 230 cm

 b) 5300 kertaa

8.8

Piirretään mallikuva.

Peli koostuu puoliympyrästä, jonka säde on r ja suorakulmiosta, jonka pituus on 45,5 cm ja leveys $2r$.

Puoliympyrän kaaren pituus on puolet ympyrän kehän pituudesta.

$$p = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$$

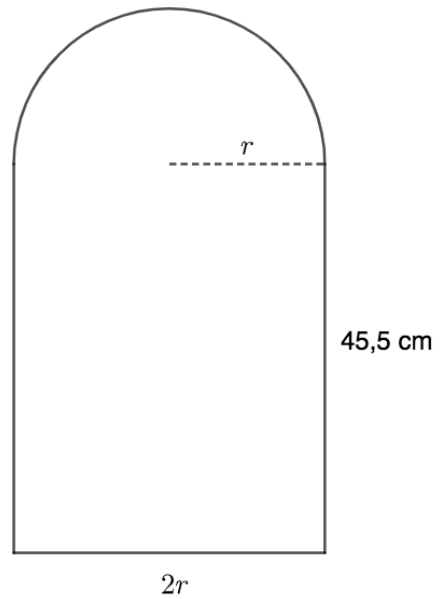
Muodostetaan ympärysmittan avulla yhtälö ja ratkaistaan r .

$$\begin{aligned}\pi r + 2 \cdot 45,5 + 2r &= 171 \\ r &= 15,559 \dots \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Pelin leveys on $2 \cdot 15,559 \dots \text{ cm} = 31,118 \dots \text{ cm} \approx 31 \text{ cm}$.

Pelin korkeus on $45,5 \text{ cm} + 15,559 \dots \text{ cm} = 61,059 \dots \text{ cm} \approx 61 \text{ cm}$.

Vastaus leveys 31 cm ja pituus 61 cm

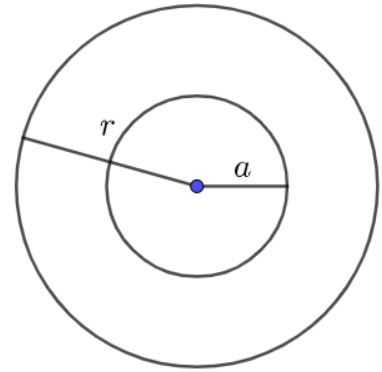


8.9

Piirretään mallikuva.

Merkitään kaula-aukon ympyrän sädettä kirjaimella a ja ulkoympyrän sädettä kirjaimella b .

Kauluksen leveys on säteiden erotus $b - a$.



Lasketaan säteiden pituudet ympärysmittojen avulla.

$$2\pi a = 35$$

$$a = 5,570 \dots \text{ (cm)}$$

$$2\pi r = 85$$

$$r = 13,528 \dots \text{ (cm)}$$

Kauluksen leveys on $13,528 \dots \text{ cm} - 5,570 \dots \text{ cm} = 7,95 \dots \text{ cm} \approx 8,0 \text{ cm}$.

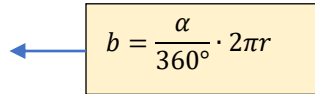
Vastaus 8,0 cm

8.10

Sektorin säde on $r = 34,0$ cm ja kaaren pituus $b = 60,5$ cm.

Muodostetaan sektorin kaaren pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä kulma β .

$$\frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 34,0 = 60,5$$
$$\beta = 101,952 \dots^\circ$$
$$\beta \approx 102^\circ$$


$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Vastaus 102°

8.11

Piirretään mallikuva.

Viuhkan ympärysmitta on sektorin kaaren pituuden sekä kahdesta säteen summa.

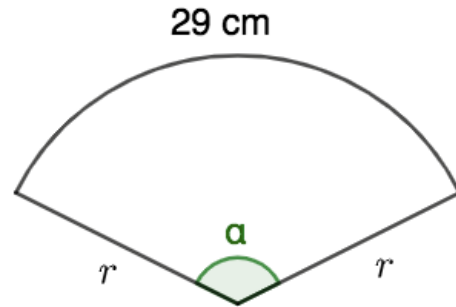
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$29 + 2r = 73$$
$$r = 22 \text{ (cm)}$$

Muodostetaan kaaren pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 22 = 29$$
$$\alpha = 75,526 \dots^\circ$$
$$\alpha \approx 76^\circ$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



Vastaus 76°

8.12

Merkitään sektorin sädettä kirjaimella r .

Alkuperäisen ympyrän kehän pituus on $p = 2\pi r$.

Ympyrästä poistetaan ympyräsektorin muotoinen pala, jonka kaaren pituus on

$$b = \frac{38^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

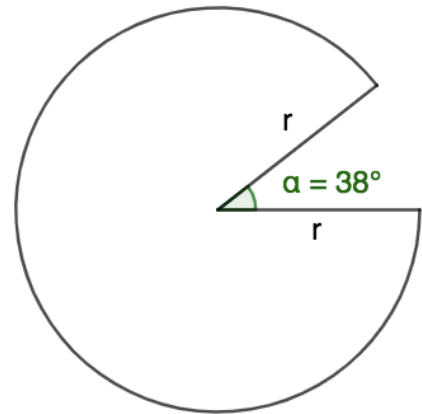
Samalla kuitenkin kuvion ympärysmittaan tulee kaksi säteen pituutta lisää.

Muodostetaan kuvion piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan r .

$$2\pi r - \frac{38^\circ}{360^\circ} 2\pi r + 2r = 458$$
$$r = 60,105 \dots$$
$$r \approx 60,1 \text{ (cm)}$$

Ympyrän säde on 60,1 cm.

Vastaus 60,1 cm



8.13

a)

Ympyrän piiri on $p = 120$ cm. Muodostetaan kehän pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan halkaisijan pituus d .

$$\begin{aligned}\pi \cdot d &= 120 \\ d &= \frac{120}{\pi} \\ d &= 38,197 \dots \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Nelikulmion korkeus ja leveys yhtä pitkiä kuin ympyrän halkaisija, joten kyseessä on neliö.

Neliön piiri on $4 \cdot 38,197 \dots \text{ cm} = 152,788 \dots \text{ cm} \approx 153 \text{ cm}$.

b)

Ympyrän halkaisija on $38,197 \dots \text{ cm}$. Nelikulmion korkeus on ympyrän halkaisija ja leveys kolme kertaa ympyrän halkaisija.

Lasketaan nelikulmion piiri.

$$p = 2 \cdot 38,197 \dots \text{ cm} + 2 \cdot 3 \cdot 38,197 \dots \text{ cm} = 305,577 \dots \text{ cm} \approx 306 \text{ cm}$$

Vastaus a) 153 cm

 b) 306 cm

8.14

Rimaa menee vaakasuoriin ja pystysuoriin janoihin, sekä puoliympyröiden säteisiin ja puoliympyröihin. Lasketaan rimaa eri kohdissa.

Vaakasuorat rimat:

$$3 \cdot 4x = 3 \cdot 4 \cdot 20 \text{ cm} = 240 \text{ cm}$$

Pystysuorat rimat:

$$5 \cdot 2y = 5 \cdot 2 \cdot 40 \text{ cm} = 400 \text{ cm}$$

Puoliympyrän säteet:

$$4 \cdot 2x = 4 \cdot 2 \cdot 20 \text{ cm} = 160 \text{ cm}$$

Pienempi puoliympyrä:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 20 \text{ cm} = 62,831 \dots \text{ cm}$$

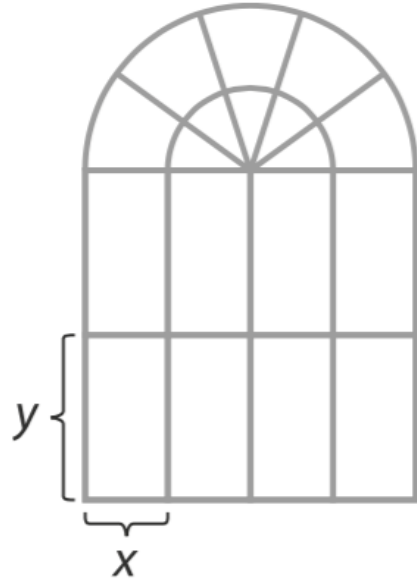
Suurempi puoliympyrä:

$$\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 40 \text{ cm} = 125,663 \dots \text{ cm}$$

Rimaa tarvitaan yhteensä

$$240 \text{ cm} + 400 \text{ cm} + 160 \text{ cm} + 62,831 \dots \text{ cm} + 125,663 \text{ cm} \\ = 988,49 \dots \approx 988 \text{ cm.}$$

Vastaus 988 cm



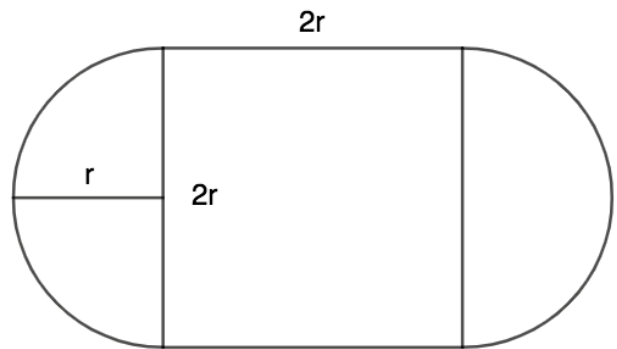
8.15

a)

Kuvio muodostuu kahdesta puoliympyrästä, jonka säde on r sekä neliöstä, jonka sivun pituus on $2r$.

Puoliympyrän kaaren pituus on

$$b = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \pi r.$$



Kuvion piiriä kuvaa lauseke $p = 2 \cdot \pi r + 2 \cdot 2r = 2\pi r + 4r$.

← Kaksi puoliympyrän kaarta ja kaksi neliön sivua.

b)

Muodostetaan piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan r .

$$\begin{aligned} 2\pi r + 4r &= 128 \\ r &= 12,447 \dots \\ r &\approx 12,4 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Säde r on 12,4 cm.

Vastaus a) $2\pi r + 4r$

b) 12,4 cm

8.16

Merkitään kuvioiden puoliympyröiden sädettä kirjaimella r . Tällöin neliön sivun pituus on $2r$.

Muodostetaan puoliympyröiden kaaren pituuksien avulla piirin yhtälö ja ratkaistaan r .

$$4 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = 214$$

$$r = 17,029 \dots \text{ (cm)}$$

Neliön sivun pituus on $2r = 2 \cdot 17,029 \dots \text{ cm} = 34,05 \dots \text{ cm} \approx 34,1 \text{ cm}$.

Vastaus 34,1 cm

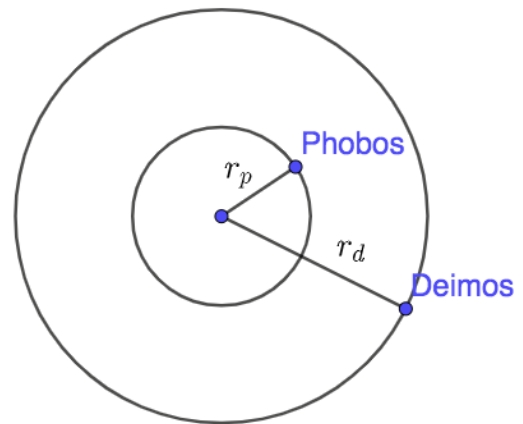
8.17

a)

Piirretään mallikuva.

Olkoon Phoboksen kiertoradan säde r_p
ja Deimoksen kiertoradan säde r_d .

Lasketaan säteet kiertoradan eli kehän
pituuden avulla.



$$2\pi r_p = 58900$$

$$r_p = 9374,226 \dots \text{ (km)}$$

$$2\pi r_d = 147400$$

$$r_d = 23459,438 \dots \text{ (km)}$$

Kiertoratojen välinen etäisyys on

$$\begin{aligned} r_d - r_p &= 23459,438 \dots \text{ km} - 9374,226 \dots \text{ km} \\ &= 14085,212 \dots \text{ km} \\ &\approx 14100 \text{ km.} \end{aligned}$$

b)

Etäisyys on suurimmillaan, kun kuut ovat vastakkaisilla puolilla.
Tällöin niiden etäisyys on säteiden summa.

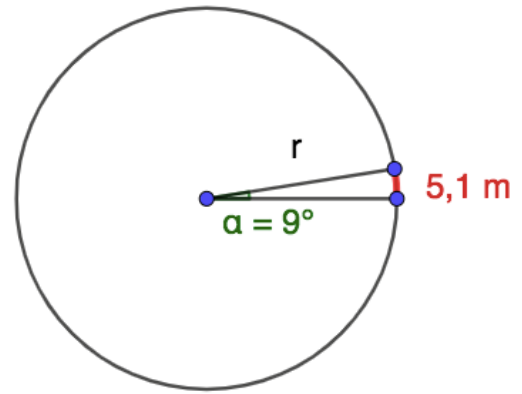
$$\begin{aligned} r_d + r_p &= 23459,438 \dots \text{ km} + 9374,226 \dots \text{ km} \\ &= 32833,664 \dots \text{ km} \\ &\approx 32800 \text{ km} \end{aligned}$$

Vastaus a) 14100 km

 b) 32800 km

8.18

Sektorin keskuskulma on $\alpha = 9^\circ$ ja kaaren pituus $b = 5,1$ m.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$\frac{9^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = 5,1$$

$$r = 32,467 \dots$$

$$r \approx 32 \text{ (m)}$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Ympyrän säde on 32 m.

Vastaus 32 m

8.19

Merkitään sektorin sädettä kirjaimella r .

Tällöin kaaren pituus on $2r$.

Ratkaistaan ensin säde r piirin avulla.

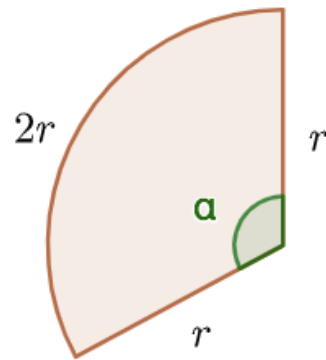
$$\begin{aligned}2r + r + r &= 450 \\ r &= 112,5 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kaaren pituus on siis $2 \cdot 112,5 \text{ cm} = 225 \text{ cm}$.

Muodostetaan sektorin kaaren pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä kulma α .

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 112,5 &= 225 \\ \alpha &= 114,591 \dots^\circ \\ \alpha &\approx 115^\circ\end{aligned}$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

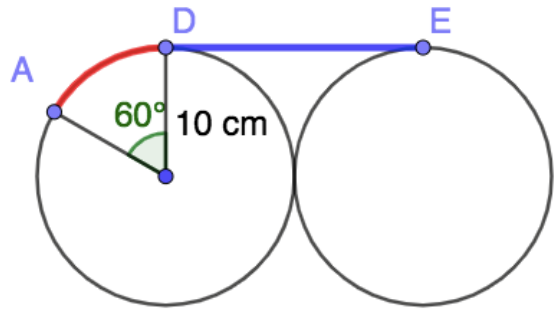


Vastaus 115°

8.20

Piirretään mallikuva kahdesta vierekkäisestä tukista.

Tukin säde on
 $\frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}.$



Vaijeri osuu tukkeihin sektorin kaaren pituudella. Koska tukkeja on 6 kappaletta ulkoreunoilla, sektorin keskuskulma on
 $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$

Kaaren pituus on
 $\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 10 \text{ cm} = 10,471 \dots \text{ cm}$

Vaijeri ei osu tukkeihin sektorin kaarien välissä. Tämän pituus on kaksi sädettä eli 20 cm.

Kumpaakin tapausta esiintyy kuviossa 6 kappaletta.

Vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen

$$6 \cdot 10,471 \dots \text{ cm} + 6 \cdot 20 \text{ cm} = 182,831 \dots \text{ cm} \approx 183 \text{ cm}.$$

Vastaus 183 cm

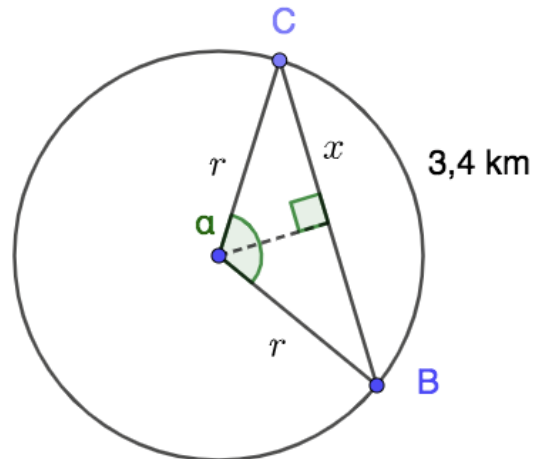
8.21

Piirretään mallikuva.

Mökkien etäisyys soutaan on jängten CB pituus.

Ratkaistaan ensin ympyrän säteen pituus r järven ympärösmitan avulla.

$$\begin{aligned}2\pi r &= 18,0 \\ r &= \frac{18,0}{2\pi} \\ r &= 2,864 \dots \text{ (km)}\end{aligned}$$



Jänne ja säteet muodostavat tasakylkisen kolmion, joka voidaan jakaa kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Muodostetaan sektorin kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan tasakylkisen kolmion huippukulma eli sektorin keskuskulma α .

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \frac{18,0}{2\pi} &= 3,4 \\ \alpha &= 68^\circ\end{aligned}$$

Merkitään puolikkaan jängten pituutta kirjaimella x .

Suorakulmaisen kolmion sivun x vastainen kulma on puolet keskuskulmasta eli $\frac{68^\circ}{2} = 34^\circ$.

Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 34^\circ &= \frac{x}{2,864 \dots} \\ x &= 1,601 \dots \text{ (km)}\end{aligned}$$

Etäisyys soutaan on siis $2 \cdot 1,601 \dots \text{ km} = 3,202 \dots \text{ km} \approx 3,2 \text{ km}$.

Vastaus 3,2 km

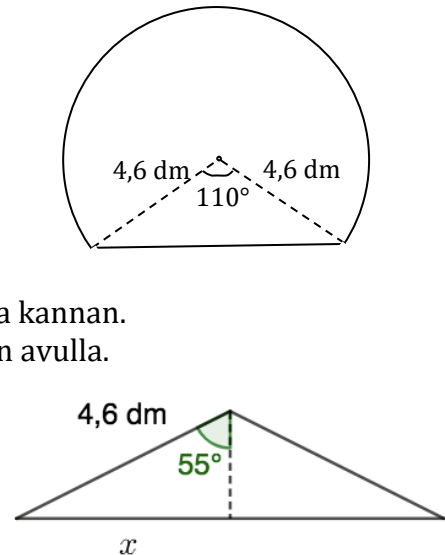
8.22

Jänne muodostaa säteiden kanssa tasakylkisen kolmion.

Lasketaan ensin jänneen pituus.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan. Merkitään kannan puolikasta kirjaimella x . Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\sin 55^\circ = \frac{x}{4,6}$$
$$x = 3,768 \dots \text{ (dm)}$$



Kannan eli jänneen pituus on siis
 $2 \cdot 3,768 \dots \text{ dm} = 7,536 \dots \text{ dm}$.

Keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus on

$$b = \frac{110}{360} \cdot 2\pi \cdot 4,6 \text{ dm} = 8,831 \dots \text{ dm}$$

Alkuperäisen ympyrän kehän pituus on $2\pi \cdot 4,6 \text{ dm} = 28,902 \dots \text{ dm}$

Kun leikataan jännettä pitkin pala pois ympyrästä, kuvion piiri pienenee sektorin kaaren verran, mutta samalla siihen tulee lisää tasakylkisen kolmion kannan pituus.

Lasketaan kuvion piiri.

$$p = 28,902 \dots \text{ dm} - 8,831 \dots \text{ dm} + 7,536 \dots \text{ dm}$$
$$= 27,607 \dots \text{ dm}$$
$$\approx 28 \text{ dm}$$

Vastaus 28 dm