

MAB4-harjoituskoe

Muista perustella ratkaisusi! Kokeessa on kaksi osiota. A-osiossa on käytössä vain yksinkertaiset laskinohjelmistot, ja B-osassa on käytössä myös Geogebra ja muut kattavat laskinohjelmistot. A-osassa vastataan kahteen tehtävään kolmesta, ja B-osassa vastataan kolmeen tehtävään neljästä.

Sisällys

Osa 1: A-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

1. [Monivalintatehtävä](#) 12 p.
2. [Suoran yhtälö](#) 12 p.
3. [Bakteerit](#) 12 p.

Osa 2: B-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

4. [Pankkitilin korko](#) 12 p.
5. [Akun ja Roopen säästöt](#) 12 p.
6. [Terästehdas](#) 12 p.
7. [Koivujen pituuskasvu](#) Aineisto 12 p.

Koe yhteensä

60 p.

Osa 1: A-osa

 Vastaa kahteen tehtävään.

Vastaa kahteen tehtävään kolmesta. Muista perustella vastauksesi, ellei toisin sanota.

1. Monivalintatehtävä 12 p.

Valitse oikea vastausvaihtoehto.

1.1 Eksponenttifunktio $f(x) = 3^x$ 1 p.

- on vähenevä funktio.
- on potenssifunktio.
- on kasvava funktio.
- on lineaarinen funktio.

1.2 Suoran yhtälö on $6x - 2y - 1 = 0$. Suora leikkaa y -akselin pisteessä 1 p.

- $(0, -\frac{1}{2})$
- $(0, -2)$

Osa 1: Vastaa kahteen tehtävään.
Osa 2: Vastaa kolmeen tehtävään.

(0, 1)

1.3 Auton polttoainetankissa on 65 l polttoainetta, ja auto kuluttaa polttoainetta 7 l sadalla kilometrillä. Mikä seuraavista funktioista kuvaa jäljellä olevan polttoaineen määrää (l), kun on ajettu x km? 1 p.

$f(x) = 65 - \frac{7}{100}x$

$f(x) = 65 - \frac{7}{x}$

$f(x) = 65 - 7x$

1.4 Eksponenttifunktio $g(x) = 0,6^{x+1}$ 1 p.

on potenssifunktio.

on vähenevä funktio.

on lineaarinen funktio.

on kasvava funktio.

1.5 Suoran yhtälö on $3x - 3y + 6 = 0$. Mikä väitteistä on tosi? 2 p.

Suora on nouseva ja sen y-akselin leikkauskohta on piste (0, 2).

Suora on laskeva, koska sen kulmakerroin on -3.

Suora on nouseva, koska sen kulmakerroin on 3.

1.6 Suorien $x = -4$ ja $y = -\frac{1}{2}x - 1$ leikkauspiste on 2 p.

(1, 4)

(-4, -3)

(-4, 1)

(1, -4)

1.7 Funktio $f(x) = -3x^4$. Laske $f(-2)$. 1 p.

48

-48

-24

24

1.8 Funktio $g(x) = -4 \cdot 3^x$. Ratkaise, millä arvolla x funktio g saa arvon -324. 1 p.

$x = 4$

$x = -4$

Ei ratkaisua.

1.9 Suora kulkee pisteen (2, -3) kautta leikkaamatta suoraa $2y - x - 3 = 0$. Mikä on suoran yhtälö? 2 p.

$2y + x + 8 = 0$

$2y - x + 8 = 0$

$$\circ y = \frac{1}{2}x + 2$$

2. Suoran yhtälö 12 p.

Suora s kulkee pisteiden $(-1,2)$ ja $(3,-6)$ kautta. Määritä

2.1 Suoran s yhtälö ratkaistussa muodossa. 4 p.

Määritetään suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{-6 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{8}{4} = -2$$

Tapa 1:

$$y = kx + b$$

Sijoitetaan kulmakertoimen arvo

$$y = -2x + b$$

Ratkaistaan b , kun tiedetään, että suora kulkee pisteen $(-1,2)$ kautta

(voidaan valita kumpi piste tahansa)

Sijoitetaan pisteen koordinaatit suoran yhtälöön

$$y = -2x + b$$

$$2 = -2 \cdot (-1) + b$$

$$2 = 2 + b \quad \parallel -2$$

$$b = 0$$

Siis suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -2x + 0$ eli $y = -2x$

Tapa 2:

Ratkaistaan suoran yhtälö käyttäen kaavaa $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Sijoitetaan kaavaan kulmakerroin ja pisteen $(3,-6)$ koordinaatit (voidaan valita kumpi piste tahansa)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -2 \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-6) = -2 \cdot (x - 3)$$

$$y + 6 = -2x + 6 \quad \parallel -6$$

$$y = -2x$$

Siis suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -2x$

Vastauksen pituus: 412 merkkiä.

2.2 Suoran s ja x - akselin leikkauspiste. 4 p.

Suora leikkaa x - akselin, kun $y = 0$.

Osa 1: Vastaa kahteen tehtävään.
Osa 2: Vastaa kolmeen tehtävään.

Ratkaistaan nyt yhtälö

$$-2x = 0 \quad ||: (-2)$$

$$x = 0$$

Siis suora leikkaa x-akselin kohdassa $x = 0$. Tällöin y-koordinaatti on $y = -2 \cdot 0 = 0$. Siis suoran

ja x-akselin leikkauspiste on $(0,0)$.

Vastauksen pituus: 141 merkkiä.

2.3 Suoran s ja suoran $y = \frac{7}{2}x + \frac{11}{2}$ leikkauspiste 4 p.

Suorien leikkauspisteessä suorien x- ja y-koordinaattien arvot ovat yhtä suuret. Tällöin suorien leikkauspiste saadaan ratkaistua yhtälöstä (asetetaan suorien yhtälöt yhtä suuriksi ratkaistussa muodossa)

$$-2x = \frac{7}{2}x + \frac{11}{2} \quad || -\frac{7}{2}x$$

$$-\frac{11}{2}x = \frac{11}{2} \quad ||: \left(-\frac{11}{2}\right)$$

$$x = -1$$

Ratkaistaan leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla saatu arvo jompaankumpaan suoran yhtälöön.

Sijoitetaan arvo yhtälöön $y = -2x$

$$y = -2 \cdot (-1) = 2$$

Siis suorat leikkaavat pisteessä $(-1,2)$

Vastauksen pituus: 324 merkkiä.

3. Bakteerit 12 p.

Bakteerien määrä kasvaa suotuisissa olosuhteissa 40% kymmenessä minuutissa. Bakteerimassaa oli tutkimuksen alussa 5,0 mg.

3.1 Laske, kuinka monta prosenttia bakteerimassa kasvaa minuutissa. 8 p.

Alussa bakteerien määrä on **5,0 mg**.

Tällöin kymmenen minuutin kuluttua bakteereita on 40% enemmän eli $1,4 \cdot 5,0 \text{ mg} = 7,0 \text{ mg}$

Kuvataan nyt bakteerimäärän kasvua minuutissa muuttujalla x . Tällöin bakteerimäärän kasvua voidaan kuvata yhtälöllä

$$5,0 \cdot x^{10} = 7,0 \quad ||: 5,0$$

$$x^{10} = \frac{7,0}{5,0} \quad || \sqrt[10]{\quad}$$

$$x = \pm \sqrt[10]{\frac{7}{5}} = \pm 1,03421\dots$$

Koska kysytään prosenttikerrointa, niin hylätään negatiivinen ratkaisu. Tällöin siis

$$x = \pm 1,03421\dots \approx 1,034$$

Nyt siis bakteerien määrä minuutissa kasvaa 3,4%.

Vastauksen pituus: 302 merkkiä.

3.2 Kuinka paljon bakteerimassaa olisi 15 minuutin kuluttua? 4 p.

Bakteerien määrä minuutissa kasvaa **3,421...%** .

Tällöin 15 minuutin päästä bakteerien määrä on

$$5,0 \text{ mg} \cdot 1,03421\dots^{15} = 8,28251\dots \text{ mg} \approx 8,3 \text{ mg}$$

Siis 15min kuluttua bakteerien määrä on noin 8,3 mg.

Huom! Käytä välivaiheessa riittävän tarkkaa arvoa, jotta saat oikean vastauksen!

Vastauksen pituus: 187 merkkiä.

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

Osa 2: B-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

Vastaa kolmeen tehtävään neljästä.

4. Pankkitilin korko 12 p.

4.1 Pankkitilille talletetaan 200 €. Tilin vuotuinen korko on 1,35 %. Tilillä ei ole muita tapahtumia kuin koronmaksu.

Muodosta funktio f , joka ilmaisee tilillä olevan rahamäärän n vuoden kuluttua. Kuinka monen vuoden kuluttua tilillä on rahaa yli 300 €? 6 p.

Muodostetaan tilin rahamäärää kuvaava funktio:

$$f(x) = 200 \cdot 1,0135^n$$

Ratkaistaan yhtälö

$$f(x) = 300$$

$$200 \cdot 1,0135^n = 300$$

Geogibralla saadaan $n \approx 30,24$

Siis tilillä on rahaa yli 300 euroa 31 vuoden kuluttua.

Huom! Muista liittää kuvankaappaus Geogibrasta vastaukseen!

Vastauksen pituus: 178 merkkiä.

Osa 1: Vastaa kahteen tehtävään.
Osa 2: Vastaa kolmeen tehtävään.

4.2 Kaupunki joutuu säästämään budjetistaan 6,5 % seuraavan neljän vuoden aikana. Säästö toteutetaan siten, että budjettia leikataan joka vuosi yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi säästötavoitteeksi? 6 p.

Merkitään kaupungin budjettia alussa kirjaimella a .

Tällöin neljän vuoden kuluttu budjetti on $0,935a$.

Kuvataan nyt säästöä muuttujalla x .

Tällöin saadaan yhtälö

$$a \cdot x^4 = 0,935a \quad ||: a \quad (a \neq 0)$$

$$x^4 = 0,935 \quad || \sqrt[4]{}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{0,935} = \pm 0,9833\dots$$

Nyt kun kysytään prosenttikerrointa, valitaan siis positiivinen ratkaisu.

$$0,9833\dots - 1 = -0,0167\dots \approx -0,017$$

Siis budjettia täytyy supistaa joka vuosi noin 1,7%.

Huom! Muista liittää kuvankaappaus vastaukseesi, jos ratkaisit yhtälön Geogebra!

Vastauksen pituus: 319 merkkiä.

5. Akun ja Roopen säästöt

12 p.

Aku ja Roope aloittavat säästämisen. Tammikuun ensimmäisellä viikolla he laittavat sukan varteen 40 €. He jatkavat säästämistään viikoittain mutta Aku kasvattaa säästöjänsä 15 eurolla joka viikko. Roope puolestaan kasvattaa säästöjään siten, että säästössä oleva rahasumma kasvaa 10 % joka viikko.

5.1 Muodosta lausekkeet $A(x)$ ja $R(x)$, jotka ilmaisevat viikolla x Akun ja Roopen säästöjen suuruuden. 6 p.

$$A(x) = 40 + 15x$$

$$R(x) = 40 \cdot 1,1^x$$

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

5.2 Kumman sukassa on enemmän rahaa vuoden lopussa ja kuinka monta prosenttia enemmän? Vuodessa on 52 viikkoa. 6 p.

Akun rahamäärä vuoden lopussa:

$$A(52) = 40 + 15 \cdot 52 = 820$$

Roopen rahamäärä vuoden lopussa:

$$R(52) = 40 \cdot 1,1^{52} = 5681,7172\dots \approx 5681,72$$

Määritetään kuinka paljon Roopella on enemmän säästöjä

$$\frac{5681,7172\dots}{820} - 1 = 5,9289\dots \approx 5,9$$

Siis Roopella on säästöjä 590% enemmän kuin Akulla vuoden kuluttua. Akulla on säästöjä 820 euroa ja Roopella on säästöjä 5681,72 euroa.

Vastauksen pituus: 219 merkkiä.

6. Terästehdas 12 p.

SSAB:n Raahan terästehtaan hiilidioksidipäästöt vuonna 2018 olivat 4,03 megatonnia, joka on noin 7,0% Suomen kaikista hiilidioksidipäästöistä. SSAB testaa uutta teknologiaa, joka perustuu vedyn ja sähkön käyttöön.

6.1 Kuinka suuret olivat Suomen hiilidioksidipäästöt vuonna 2018? 2 p.

Merkitään Suomen hiilidioksidipäästöjä muuttujalla x .

Nyt tiedetään, että 7,0% hiilidioksidipäästöistä on 4,03 megatonnia, eli

$$0,070x = 4,03$$

Ratkaistaan yhtälöstä hiilidioksidipäästöjen suuruus

$$0,070x = 4,03 \quad ||: 0,070$$

$$x = \frac{4,03}{0,070} = 57,57142... \approx 57,8$$

Siis Suomen hiilidioksidipäästöt olivat noin 57,8 megatonnia vuonna 2018.

Vastauksen pituus: 227 merkkiä.

6.2 Uuden teknologian vaiheittaisen käyttöönoton seurauksena hiilidioksidipäästöjä pyritään leikkaamaan seuraavan viidenvuoden aikana 50%. Kuinka monta prosenttia olisi vuotuinen vähentämisprosentti oltava? 4 p.

Alussa hiilidioksidipäästöjen määrä on a .

Viiden vuoden päästövähennysten jälkeen päästöjen määrä on $0,5a$

Merkitään vuosittaista päästövähennystä muuttujalla x . Tällöin saadaan yhtälö

$$a \cdot x^5 = 0,5a \quad ||: a \quad (a \neq 0)$$

$$x^5 = 0,5 \quad || \sqrt[5]{}$$

$$x = \sqrt[5]{0,5} = 0,87055...$$

Nyt siis vähennys prosentteina

$$0,87055... - 1 = -0,12944 \approx -0,13$$

Siis päästöjä tulisi vähentää 13% vuodessa.

Vastauksen pituus: 223 merkkiä.

6.3 Oletetaan, että päästöjen vähenemisprosentti pystytään säilyttämään. Muodosta eksponentiaalinen malli, joka ilmaisee terästehtaan hiilidioksidipäästöjen suuruuden $S(x)$, kun x on vuosien määrä vuodesta 2018 laskettuna. Anna kertoimet kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

4 p.

$$S(x) = 4,03 \cdot 0,871^x$$

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

6.4 Arvioi mallin avulla tehtaan päästöt vuonna 2030. Mikä olisi tällöin terästehtaan päästöjen osuus Suomen hiilidioksidipäästöistä, jos Suomen muut hiilidioksidipäästöt pysyisivät samana? 2 p.

Määritellään funktion S arvo, kun $x = 12$

$$S(12) = 4,03 \cdot 0,871^{12} = 0,76828... \approx 0,77$$

Päästöjen vähennys:

$$4,03 - 0,76828... = 3,26172...$$

Osuus Suomen koko päästöistä:

$$\frac{0,76828...}{57,57142... - 3,26172...} = 0,01414... \approx 0,014$$

Siis päästöjen määrä olisi 0,77 megatonnia ja osuus koko Suomen päästöistä olisi 1,4 %.

Vastauksen pituus: 147 merkkiä.

7. Koivujen pituuskasvu 12 p.

Puistossa olevan koivun pituuskasvua seurattiin vuosittain syksyisin. Taulukkoon on koottu mittaustulokset. Ne löytyvät myös Geogebra-tiedostosta [puu.ggb](#) ([puu.ggb](#)).

Vuosi Korkeus (m)

0	1,26
1	1,90
2	2,57
3	2,92
4	3,60
5	4,09
6	4,70
7	5,31

Aineisto

7.A Koivun pituudet taulukkomuodossa

7.1 Tutki ohjelmiston avulla, kumpi malli kuvaa puun kasvua parhaiten, lineaarinen vai eksponentiaalinen? Perustele. 4 p.

Piirrä esimerkiksi kuvaaja jollakin ohjelmistolla. Esimerkiksi Geogebralla ylälaidassa on kolmas painike, ja sen alla komento luo pistelista. Maalaa arvot, ja luo pistelista tällä komennolla, jolloin Geogebra piirtää pisteet koordinaatistoon. Jos maalaat arvot, ja painat Geogebra-ensimmäistä nappia, löytyy sen alta vaihtoehto kahden muuttujan regressioanalyysi. Myös tällä saa piirrettyä pisteet. Voit piirtää kuvaajan myös taulukkolaskennan avulla. Tulkitse tulosta. Koska pisteet osuvat suoralle, selkeästi lineaarinen malli kuvaa parhaiten puun kasvua. Muista liittää kuvankaappaukset piirroksistasi vastaukseen!

Vastauksen pituus: 548 merkkiä.

7.2 Muodosta taulukon tiedoista mallia kuvaava funktio siten, että x on vuodet tarkastelun alusta alkaen. Anna lukuarvot kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. 4 p.

Osa 1: Vastaa kahteen tehtävään.
Osa 2: Vastaa kolmeen tehtävään.

Tee Geogebraalla kahden muuttujan regressioanalyysi (nappi, jossa on siniset pylväät).
Valitse regressiomalliksi lineaarinen. Nyt Geogebra sovittaa suoran yhtälön. Yhtälöksi saadaan

$$y = 0,567x + 1,31$$

Siis funktio on

$$f(x) = 0,567x + 1,31$$

Muista liittää kuvankaappaus vastaukseesi!

Vastauksen pituus: 213 merkkiä.

7.3 Laske muodostamasi mallin avulla arvio puun korkeudelle 10. tarkasteluvuotena. 4 p.

Sijoitetaan Geogebbran regressioanalyysiin muuttujan arvo 10, jolloin saadaan puun pituudeksi 6,9763...

Siis puun pituus 10. tarkasteluvuonna on noin 6,98 metriä.

Muista liittää kuvakaappaus vastaukseesi!

Vastauksen pituus: 180 merkkiä.

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.