

Luku 4 – Tehtävien malliratkaisut

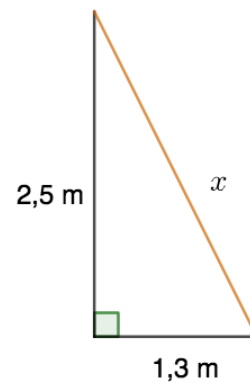
4.1

Tikapuut muodostavat seinän ja lattian kanssa suorakulmaisen kolmion.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$2,5^2 + 1,3^2 = x^2$$
$$x = \pm 2,817 \dots$$

Pituudeksi kelpaa vain positiivinen luku, joten tikkaiden pituus on $x = 2,817 \dots \approx 2,8$ (m).



Vastaus 2,8 m

4.2

Luiska, portaan laita ja maanpinta muodostavat suorakulmaisen kolmion.



Merkitään luiskan pituutta eli hypotenuusaa kirjaimella x .

Tunnetun kulman vastaisen kateetin pituus on 45 cm (luiskan korkeus). Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 22^\circ &= \frac{45}{x} \\ x &= 120,126 \dots \\ x &\approx 120 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

Luiskan pituus on 120 cm.

Vastaus 120 cm

4.3

Puu, maan pinta ja näkösäde muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Merkitään näkökulmaa kirjaimella α . Tällöin kulman vastaisen kateetin pituus on 17,4 m viereisen kateetin pituus 4,5 m.

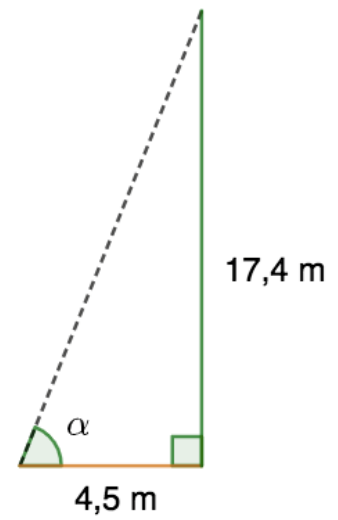
Ratkaistaan kulman suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{17,4}{4,5}$$

$$\alpha = 75,499 \dots^\circ$$

$$\alpha \approx 75^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$



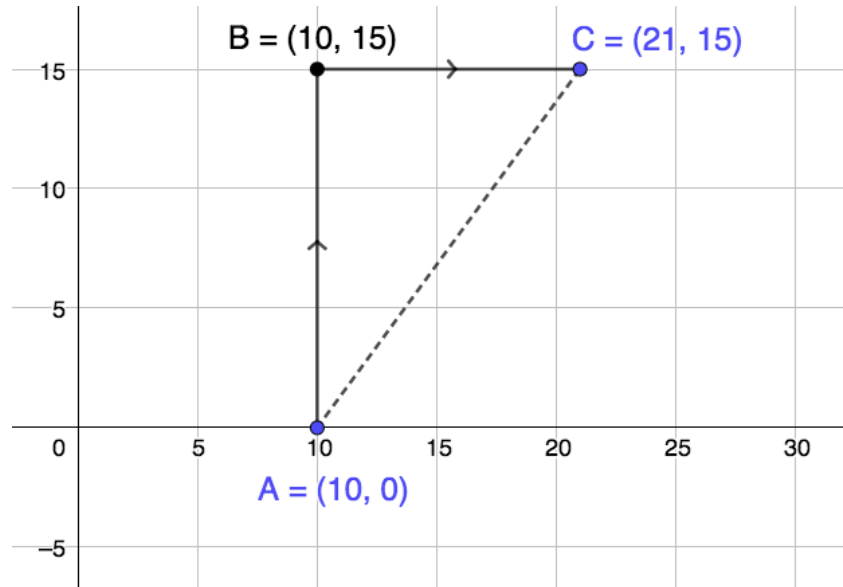
Emil näkee latvan 75° kulmassa.

Vastaus 75°

4.4

a)

Piirretään kuva matkareitistä. Merkitään käännöskohdan pistettä kirjaimella B .



b)

Ajoreitti sekä kaupunkien suora etäisyys AC muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Sivun AB pituus on 15 km ja sivun BC pituus 11 km.

Suora etäisyys AC on kolmion hypotenuusa.

Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan suora etäisyys AC .

$$11^2 + 15^2 = AC^2$$
$$AC = \pm 18,601 \dots$$

Pituudeksi kelpaa vain positiivinen luku, joten $AC = 18,601 \dots \approx 19$ (km).

Kaupunkien suora etäisyys on 19 km.

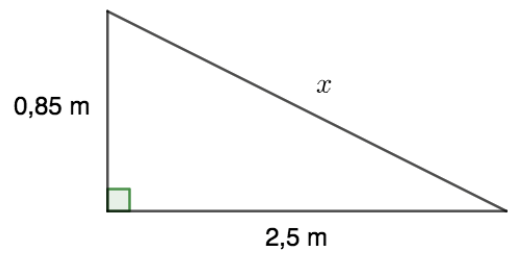
Vastaus a) kuva yllä

b) 19 km

4.5

Maanpinta, levy ja levyn korkeusjana muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusaa kuvaa levy.

Merkitään levyn pituutta, eli hypotenuusaa, kirjaimella x .



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x .

$$0,85^2 + 2,5^2 = x^2$$
$$x = \pm 2,640 \dots$$

Pituus on aina positiivinen luku, joten $x = 2,640 \dots \approx 2,6$ (m)

Levyn pituus on 2,6 m.

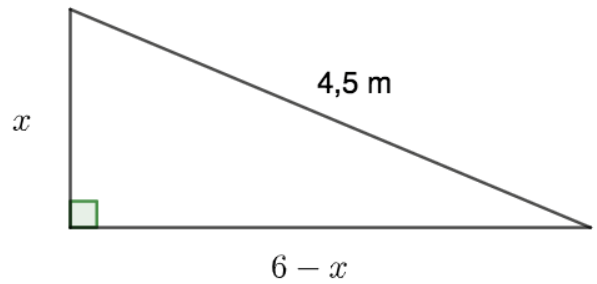
Vastaus 2,6 m

4.6

Suorakulmaisen kolmion pisin sivu on hypotenuusa, jonka pituus on 4,5 m.

Koska kolmion piiri 10,5 m, kateettien summa on $10,5 \text{ m} - 4,5 \text{ m} = 6 \text{ m}$.

Merkitään toisen kateetin pituutta kirjaimella x . Tällöin toisen kateetin pituus on $6 - x$ (m).



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x .

$$x^2 + (6 - x)^2 = 4,5^2$$
$$x = 1,939 \dots \text{ tai } x = 4,060 \dots$$

Jos $x = 1,939 \dots$ (m), toisen kateetin pituus on $6 - 1,909 \dots = 4,060 \dots$ (m).

Jos $x = 4,060 \dots$ (m), toisen kateetin pituus on $6 - 4,060 \dots = 1,939 \dots$ (m).

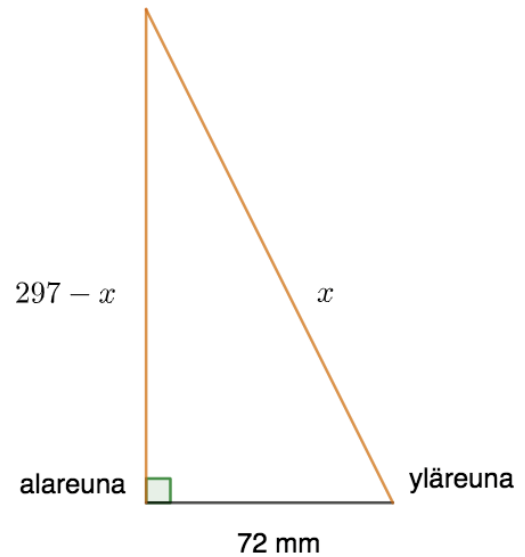
Kateettien pituudet ovat siis $1,939 \dots \approx 1,9$ (m) ja $4,060 \dots \approx 4,1$ (m).

Vastaus 1,9 m ja 4,1 m

4.7

Kartongin alaosa, yläosa ja pöytä muodostavat suorakulmaisen kolmion, jossa kartongin yläosa on kolmion hypotenuusa.

Merkitään taitteen etäisyyttä yläreunasta eli hypotenuusan pituutta kirjaimella x (mm). Koska kartongin pituus on 297 mm, alaosan pituus on $297 - x$ (mm). Toisen kateetin pituus on 72 mm.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}72^2 + (297 - x)^2 &= x^2 \\x &= 157,227 \dots \\x &\approx 157 \text{ (mm)}\end{aligned}$$

Kartonki on taitettu 157 mm päästä yläreunasta.

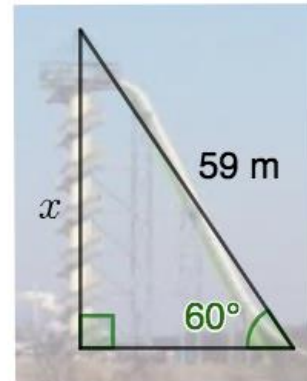
Vastaus 157 mm

4.8

Kun alkuosaa mallinnetaan suorakulmaisella kolmiolla, sen hypotenuusan pituus on 59 m ja korkeusjanaa vastassa olevan kulman suuruus on 60° . Ratkaistaan korkeus sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{x}{59} \\ x &= 51,095 \dots \\ x &\approx 51 \text{ (m)}\end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

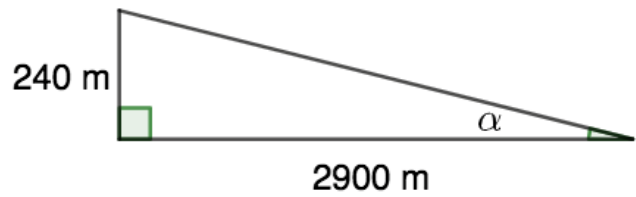


Vesiliukumäen korkeus on 51 m.

Vastaus 51 m

4.9

Tilannetta kuvaa suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on Sofian näkösäde. Kolmion toisen kateetin pituus on pallon korkeus 240 m. Maanpintaa kuvaavan kateetin pituus on 2,90 km = 2900 m.



Ratkaistaan näkökulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{240}{2900}$$

$$\alpha = 4,730 \dots^\circ$$

$$\alpha \approx 4,7^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$

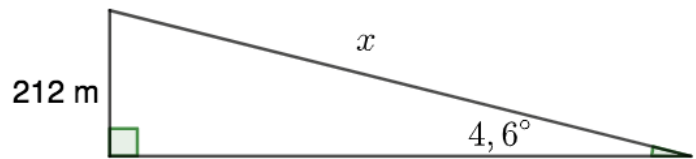
 ←

Sofia näkee pallon $4,7^\circ$ kulmassa.

Vastaus $4,7^\circ$

4.10

Tilannetta mallintaa suorakulmainen kolmio, jossa tuolihissin pituus on hypotenuusan pituus. Kaltevuuskulmaa $4,6^\circ$ vastassa olevan kateetin pituus on 212 m.



Ratkaistaan tuolihissin pituus x sinin avulla.

$$\sin 4,6^\circ = \frac{212}{x}$$

$$x = 2643,426 \dots \text{ (m)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

Koska nopeus on 5,0 m/s, kestää matka huipulle

$$\frac{2643,426 \dots}{5,0} = 528,685 \dots \text{ (s)}$$

Muutetaan sekunnit minuuteiksi ja sekunneiksi.

$$\begin{aligned} 528,685 \dots \text{ s} &= 8,810 \dots \text{ min} \\ &= 8 \text{ min } 48,625 \text{ s} \approx 8 \text{ min } 49 \text{ s} \end{aligned}$$

Jaa sekunnit luvulla 60, niin saat ajan minuutteina. Kerro tämän jälkeen desimaaliosa luvulla 60, niin saat sekunnit.

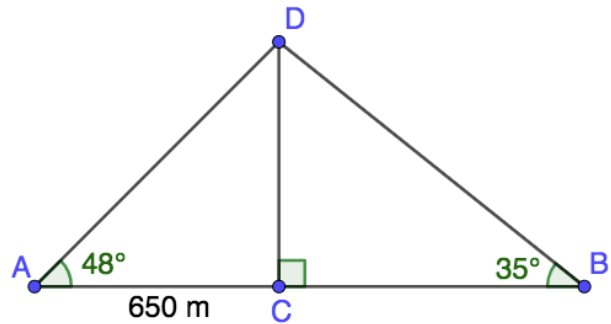
Vastaus 8 min 49 s

4.11

a)

Laivan etäisyys rannasta on janan DC pituus. Ratkaistaan se suorakulmaisen kolmion ACD avulla.

$$\begin{aligned}\tan 48^\circ &= \frac{DC}{650} \\ DC &= 721,898 \dots \\ DC &\approx 720 \text{ (m)}\end{aligned}$$



Laivan etäisyys on 720 m.

b)

Ratkaistaan janan AD pituus kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos 48^\circ &= \frac{650}{AC} \\ AC &= 971,409 \dots \\ AC &\approx 970 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Pisteessä A olevan henkilön etäisyys laivasta on 970 m.

c)

Henkilöiden etäisyyttä varten tulee laskea janan CB pituus. Janan DC pituus laskettiin aikohdassa, joten ratkaistaan janan CB pituus tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 35^\circ &= \frac{721,898 \dots}{CB} \\ CB &= 1030,977 \dots \text{ (m)}\end{aligned}$$

Henkilöiden etäisyys on siis

$$1030,977 \dots \text{ m} + 650 \text{ m} = 1680,977 \dots \text{ m} \approx 1700 \text{ m.}$$

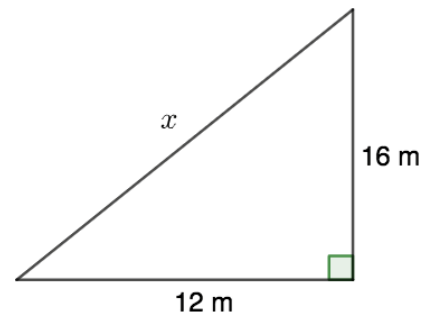
Vastaus a) 720 m b) 970 m c) 1700 m

4.12

Katonreunojen etäisyys on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Merkitään sitä kirjaimella x .

Toisen kateetin pituus on rakennusten etäisyys 12 m.

Toisen kateetin pituus on rakennusten korkeusero $48 \text{ m} - 32 \text{ m} = 16 \text{ m}$.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseen avulla.

$$12^2 + 16^2 = x^2$$
$$x = \pm 20 \text{ (m)}$$

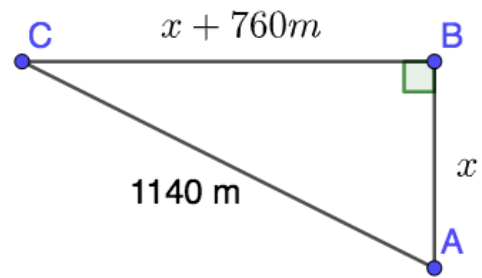
Koska etäisyys on positiivinen luku, $x = 20 \text{ m}$.

Vastaus 20 m

4.13

a)

Reitit muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on 1140 m. Toisen kateetin pituus on Leon ensin kulkema matka x ja toinen kateetti $x + 760$ m eli Leon kulkema matka länteen.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + (x + 760)^2 = 1140^2$$
$$x = -1090,914 \dots \text{ tai } x = 330,914 \dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten valitaan $x = 330,914 \dots$ m.

Leon kulkema matka on siis

$$330,914 \dots \text{ m} + (330,914 \dots \text{ m} + 760 \text{ m}) = 1421,828 \dots \text{ m} \approx 1420 \text{ m}.$$

b)

Main kulkema matka on 1,14 km eli hänellä kuluu aikaa $\frac{1,14}{4,2} = 0,2714 \dots$ (h).

Leon kulkema matka on 1421,828... km eli hänellä kuluu aikaa $\frac{1,421\dots}{5,1} = 0,2786 \dots$ (h).

Näin ollen Mailla kuluu matkaan vähemmän aikaa ja hän on aiemmin perillä.

Vastaus a) 1420 m b) Mai

4.14

Pöllö, hiiri ja puhelinpylväs muodostavat suorakulmaisen kolmion.

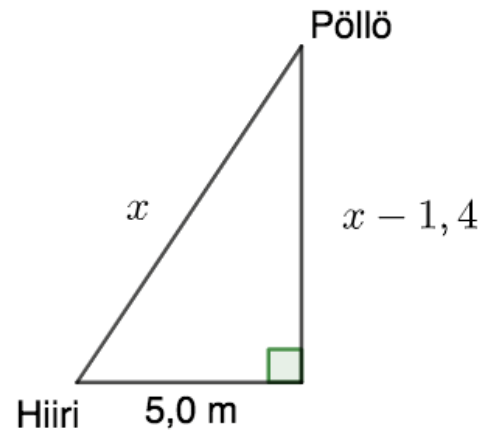
Merkitään pöllön etäisyyttä hiirestä eli kolmion hypotenuusan pituutta kirjaimella x .

Tällöin pylvään korkeus eli toisen tangentin pituus on $x - 1,4$ (m). Toisen tangentin pituus on 5,0 m.

Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}5,0^2 + (x - 1,4)^2 &= x^2 \\x &= 9,628 \dots \\x &\approx 9,6 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Vastaus 9,6 m

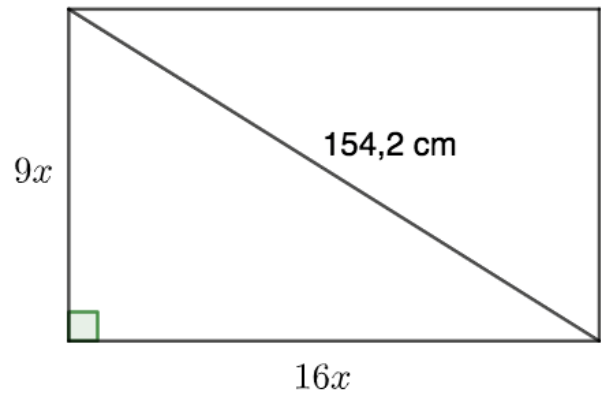


4.15

Television näytön lävistäjä sekä sivut muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Lävistäjän eli hypotenuusan pituus senttimetreinä on $60 \cdot 2,54 \text{ cm} = 152,4 \text{ cm}$.

Koska sivujen suhde on 16:9, on korkeus $9x$ ja leveys $16x$.



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan x .

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 152,4^2$$
$$x = \pm 8,301 \dots \text{ (cm)}$$

Pituus on aina positiivinen, joten valitaan $x = 8,301 \dots \text{ cm}$.

Ratkaistaan sivujen pituudet.

Leveys on $16x = 16 \cdot 8,301 \dots = 132,82 \dots \approx 133 \text{ (cm)}$.

Korkeus on $9x = 9 \cdot 8,301 \dots = 74,71 \dots \approx 75 \text{ (cm)}$.

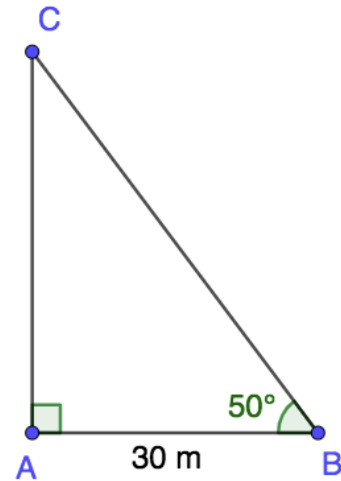
Vastaus $133 \text{ cm} \times 75 \text{ cm}$

4.16

Pisteet A , B ja C muodostavat suorakulmaisen kolmion. Kulman ABC suuruus on 50° ja sen viereisen kateetin AB pituus on 30 m. Ratkaistaan joen leveys AC eli toinen kateetti tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 50^\circ &= \frac{x}{30} \\ x &= 35,752 \dots \\ x &= 36 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Joki on 36 metriä leveä.



Vastaus 36 m

4.17

Tutkitaan suorakulmaisia kolmioita, joiden kateetti on kerrostalon sivu. Merkitään kulmien α vieruskulmia kirjaimella β .

Merkitään korkeamman kerrostalon etäisyyttä kysytyyn kohtaan kirjaimella x (m). Tällöin pienemmän talon etäisyys kohdasta on $50 - x$ (m).

Muodostetaan molemmista kolmioista kulman β tangenti ja ratkaistaan yhtälöpari.

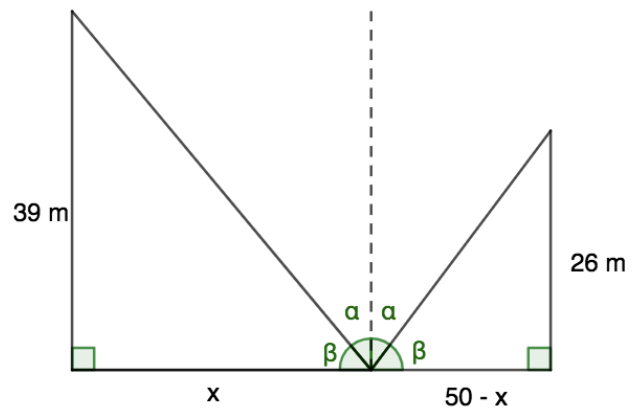
$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{39}{x} \\ \tan \beta = \frac{26}{50 - x} \end{cases}$$

$$\frac{39}{x} = \frac{26}{50 - x}$$

$$x = 30 \text{ (m)}$$

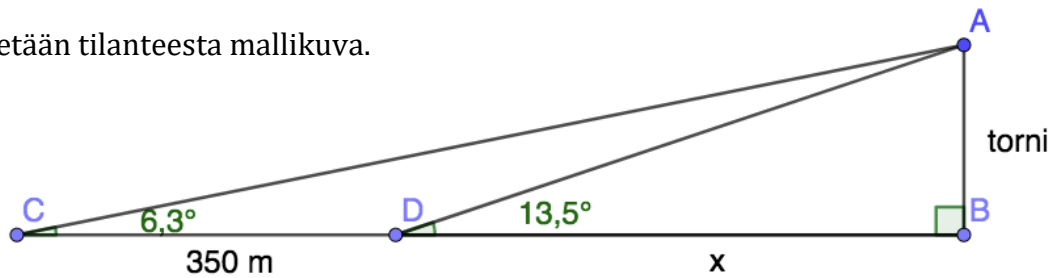
Kulma α on 30 m päässä korkeammasta asunnosta.

Vastaus 30 m



4.18

Piirretään tilanteesta mallikuva.



a)

Henkilö on aluksi pisteessä C, jonka jälkeen hän siirtyy pisteeseen D. Merkitään pisteen D etäisyyttä tornista kirjaimella x ja tornin korkeutta kirjaimella h .

Muodostetaan tunnettujen kulmien tangenttien avulla yhtälöpari ja ratkaistaan x .

$$\begin{cases} \tan 6,3^\circ = \frac{h}{350 + x} \\ \tan 13,5^\circ = \frac{h}{x} \end{cases}$$

Yhtälöparin voi syöttää CAS-laskimeen jo tässä muodossa.

$$\begin{cases} \tan 6,3^\circ = \frac{h}{350 + x} \\ \tan 13,5^\circ \cdot x = h \end{cases}$$

$$\tan 6,3^\circ = \frac{\tan 13,5^\circ \cdot x}{350 + x}$$

$$\tan 6,3^\circ \cdot (350 + x) = \tan 13,5^\circ \cdot x$$

$$x = 297,972 \dots \text{ (m)}$$

$$x \approx 300 \text{ (m)}$$

Henkilön etäisyys on 300 m tornista.

b)

Ratkaistaan korkeus h .

$$\tan 13,5^\circ = \frac{h}{297,972 \dots}$$

$$h = 71,536 \dots$$

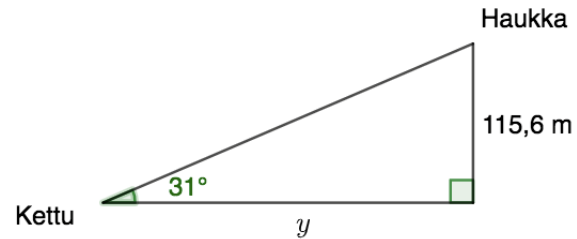
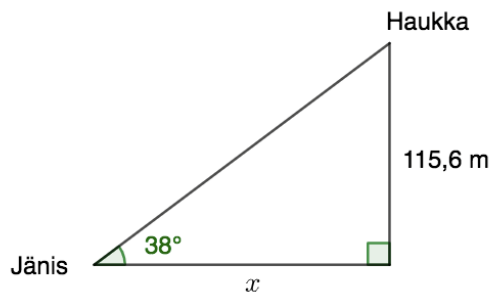
$$h \approx 72 \text{ (m)}$$

Tornin korkeus on 72 m.

Vastaus a) 300 m b) 72 m

4.19

Piirretään tilanteista mallikuvat.



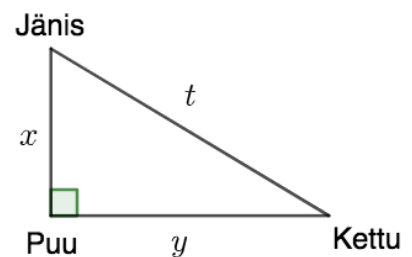
Ratkaistaan jäniksen ja ketun etäisyydet puusta tangentin avulla.

$$\tan 38^\circ = \frac{115,6}{x}$$
$$x = 147,96 \dots \text{ (m)}$$

$$\tan 31^\circ = \frac{115,6}{y}$$
$$y = 192,39 \dots \text{ (m)}$$

Puu, jänis ja kettu muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on jäniksen ja ketun etäisyys. Merkitään sitä kirjaimella t ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$147,96 \dots^2 + 192,39 \dots^2 = t^2$$
$$t = \pm 242,70 \dots \text{ (m)}$$

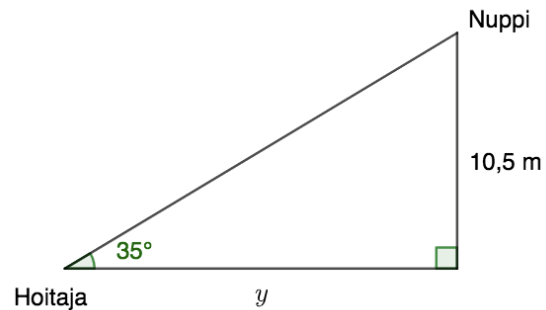
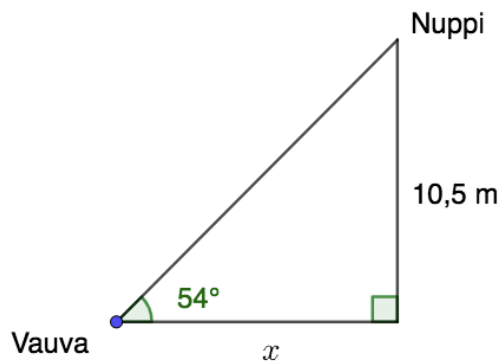


Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, joten ketun ja jäniksen etäisyys on $t = 242,70 \dots \text{ m} \approx 240 \text{ m}$.

Vastaus 240 m

4.20

Piirretään tilanteista mallikuvat.



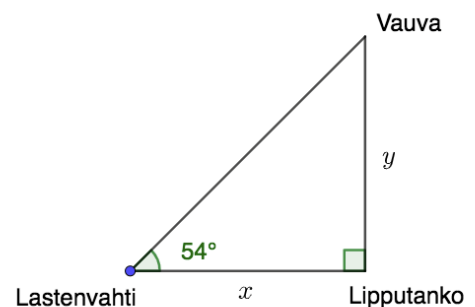
Ratkaistaan vauvan ja hoitajan etäisyydet lipputangosta tangentin avulla.

$$\tan 54^\circ = \frac{10,5}{x}$$
$$x = 7,628 \dots \text{ (m)}$$

$$\tan 35^\circ = \frac{10,5}{y}$$
$$y = 14,995 \dots \text{ (m)}$$

Lipputanko, vauva ja lastenvahti muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on vauvan ja vahdin etäisyys. Merkitään sitä kirjaimella t ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$7,628 \dots^2 + 14,995 \dots^2 = t^2$$
$$t = \pm 16,823 \dots \text{ (m)}$$

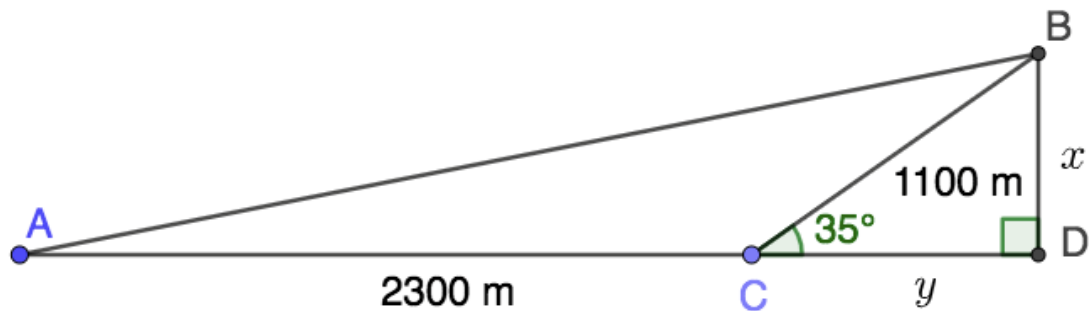


Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, joten vauvan ja lastenvahdin etäisyys on $t = 16,823 \dots \text{ m} \approx 17 \text{ m}$.

Vastaus 17 m

4.21

Piirretään reiteistä kuva. Oletetaan, että talo on pisteessä A ja sauna pisteessä B. Piirretään janalle AC jatke, niin että syntyy suorakulmainen kolmio ADB.



Ratkaistaan jatkeen CD sekä korkeusjanan BD pituudet suorakulmaisen kolmion CDB trigonometrian avulla.

$$\sin 35^\circ = \frac{x}{1100}$$

$$x = 630,934 \dots \text{ (m)}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{y}{1100}$$

$$y = 901,067 \dots \text{ (m)}$$

Nyt tiedetään, että suorakulmaisen kolmion ADB kateetit ovat $BD = 630,934 \dots \text{ (m)}$ ja $AD = 2300 + 901,067 \dots = 3201,067 \dots \text{ (m)}$.

Ratkaistaan talon ja saunan etäisyys AB Pythagoraan lauseen avulla.

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

$$630,934 \dots^2 + 3201,067 \dots^2 = AB^2$$

$$AB = \pm 3262,65 \dots \text{ (m)}$$

Vain positiivinen ratkaisu kelpaa eli saunan ja talon etäisyys on $AB = 3262,65 \dots \text{ m} \approx 3300 \text{ m}$.

Vastaus 3300 m