

Luku 2 – Tehtävien malliratkaisut

2.1

a)

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on kolmion pisin sivu, joten hypotenuusan pituus on 30.

b)

Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat kolmion lyhyemmät sivut, joten kateettien pituudet ovat 18 ja 24.

c)

Pythagoraan lauseen mukaan kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö, eli

$$18^2 + 24^2 = 30^2.$$

Vastaus **a)** 30

b) 18 ja 24

c) $18^2 + 24^2 = 30^2$

2.2

Tutkitaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen eli yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$.

a)

Tutkitaan yhtälön vasenta puolta. Lasketaan kahden lyhimmän sivun neliöiden summa.

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Lasketaan yhtälön oikea puoli eli pisimmän sivun neliö.

$$5^2 = 25$$

Koska $5 \neq 25$, ehto $a^2 + b^2 = c^2$ ei toteudu ja kolmio ei ole suorakulmainen.

b)

Lasketaan kahden lyhimmän sivun neliöiden summa.

$$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

Lasketaan pisimmän sivun neliö.

$$13^2 = 169$$

Ehto $a^2 + b^2 = c^2$ on voimassa, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus **a)** ei ole

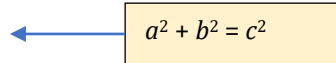
b) on

2.3

a)

Kolmio on suorakulmainen ja kolmion kateettien pituudet ovat 9,0 m ja 12,0 m. Kysytty sivu x on kolmion hypotenuusa. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}9,0^2 + 12,0^2 &= x^2 \\81 + 144 &= x^2 \\x^2 &= 225 \\x &= \pm\sqrt{225} \\x &= \pm 15\end{aligned}$$

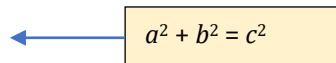

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 15$ (m).

b)

Kolmion toisen kateetin pituus on 6,4 cm ja hypotenuusan pituus on 8,3 cm. Kysytty sivu x on kolmion toinen kateetti. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}x^2 + 6,4^2 &= 8,3^2 \\x^2 + 40,96 &= 68,89 \\x^2 &= 27,93 \\x &= \pm\sqrt{27,93} \\x &= \pm 5,284 \dots\end{aligned}$$


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 5,28 \dots \approx 5,3$ (cm).

Vastaus a) $x = 15$ m

b) $x \approx 5,3$ cm

2.4

a)

Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 3,45 ja toisen x . Hypotenuusan pituus on 11,2. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

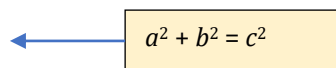
$$\begin{aligned}x^2 + 3,45^2 &= 11,2^2 \\x^2 &= 11,2^2 - 3,45^2 \\x^2 &= 113,5375 \\x &= \pm\sqrt{113,5375} \\x &= \pm 10,6553 \dots\end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 10,655 \dots \approx 10,7$.

b)

Kolmio on suorakulmainen ja kolmion kateettien pituudet ovat 162 ja 235. Kysytty sivu x on kolmion hypotenuusa. Sijoitetaan arvot Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}162^2 + 235^2 &= x^2 \\81469 &= x^2 \\x &= \pm\sqrt{81469} \\x &= \pm 285,42 \dots\end{aligned}$$


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 285,42 \dots \approx 285$.

Vastaus a) $x \approx 10,7$

 b) $x \approx 285$

2.5

a)

Päätellään suorakulmaisen kolmion kateettien pituus pisteiden $A = (1, 1)$ ja $C = (6, 4)$.

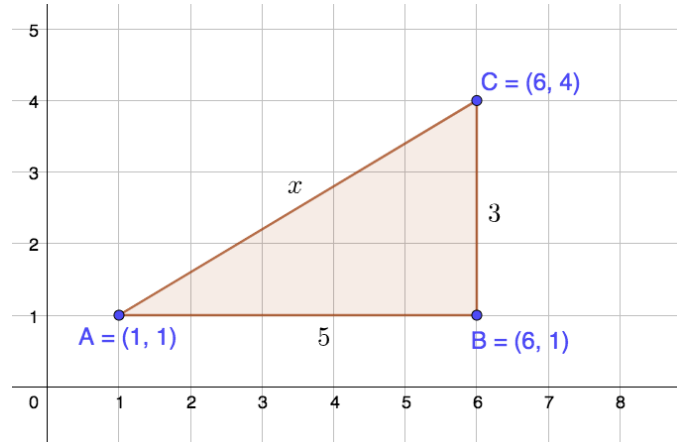
Vaakasuoran kateetin pituus on
 $6 - 1 = 5$.

Pystysuoran kateetin pituus on
 $4 - 1 = 3$.

Lasketaan hypotenuusan x pituus
Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 3^2 + 5^2 &= x^2 \\ 9 + 25 &= x^2 \\ x^2 &= 34 \\ x &= \pm\sqrt{34} \\ x &= \pm 5,830 \dots \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten hypotenuusan pituus on $5,830 \dots \approx 5,83$.

b)

Päätellään suorakulmaisen kolmion kateettien pituus pisteiden $A = (4, 2)$ ja $C = (23, 12)$.

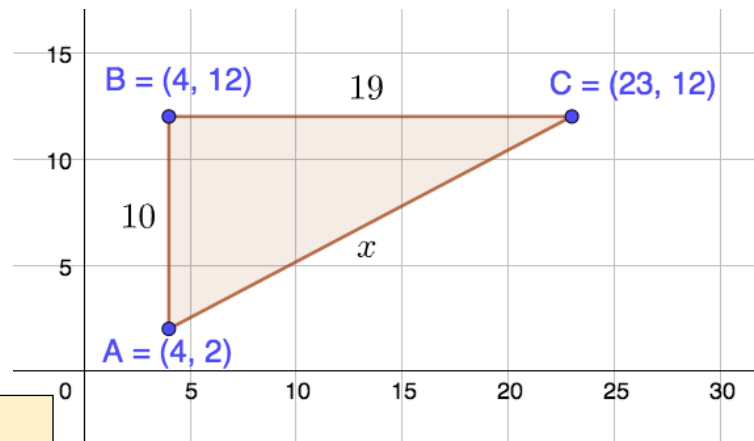
Vaakasuoran kateetin pituus on
 $23 - 4 = 19$.

Pystysuoran kateetin pituus on
 $12 - 2 = 10$.

Lasketaan hypotenuusan x pituus
Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 10^2 + 19^2 &= x^2 \\ 100 + 361 &= x^2 \\ x^2 &= 461 \\ x &= \pm\sqrt{461} \\ x &= 21,470 \dots \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten hypotenuusan pituus on $21,470 \dots \approx 21,47$.

Vastaus a) 5,83
 b) 21,47

2.6

a)

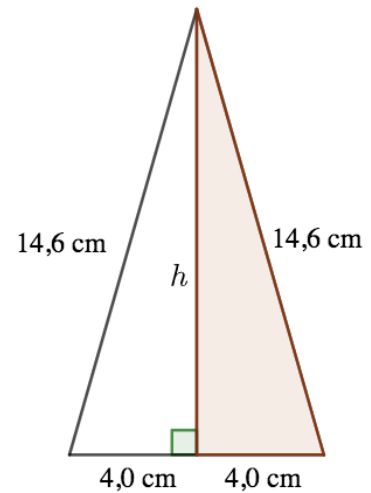
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden hypotenuusa on 14,6 cm ja toisen kateetin pituus

$$\frac{8,0 \text{ cm}}{2} = 4,0 \text{ cm.}$$

Korkeusjana h on suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeusjanan h pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} h^2 + 4,0^2 &= 14,6^2 \\ h^2 &= 213,16 - 16 \\ h &= \pm\sqrt{197,16} \\ h &= 14,041 \dots \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten $h = 14,04 \dots \approx 14$ (cm).

Epätarkimmassa alkuarvossa kaksi merkitsevää numeroa.

b)

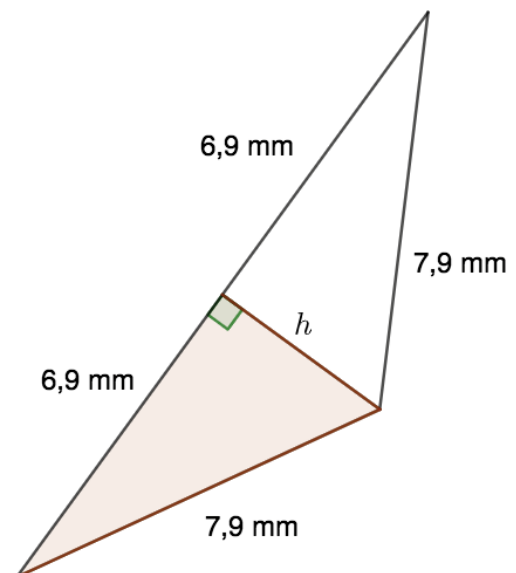
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden hypotenuusa on 7,9 mm ja toisen kateetin pituus

$$\frac{13,8 \text{ mm}}{2} = 6,9 \text{ mm.}$$

Korkeusjana h on suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeusjanan h pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} h^2 + 6,9^2 &= 7,9^2 \\ h^2 &= 61,41 - 47,61 \\ h &= \pm\sqrt{14,8} \\ h &= 3,847 \dots \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten $h = 3,84 \dots \approx 3,8$ (mm).

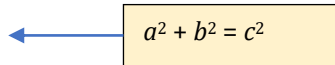
Vastaus a) 14 cm
 b) 3,8 mm

2.7

a)

Merkitään hypotenuusaa kirjaimella c . Suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan hypotenuusa c .

$$\begin{aligned}20^2 + 21^2 &= c^2 \\400 + 441 &= c^2 \\c^2 &= 841 \\c &= \pm\sqrt{841} \\c &= \pm 29\end{aligned}$$

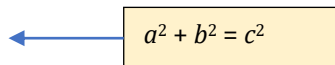

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten hypotenuusan pituus on 29 m.

b)

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 5,3 cm ja pidempi kateetti 4,5 cm. Merkitään kolmatta sivua eli lyhintä kateettia kirjaimella x . Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}x^2 + 4,5^2 &= 5,3^2 \\x^2 + 20,25 &= 28,09 \\x^2 &= 7,84 \\x &= \pm\sqrt{7,84} \\x &= \pm 2,8\end{aligned}$$


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten kolmannen sivun pituus on 2,8 cm.

Vastaus a) 29 m

b) 2,8 cm

2.8

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden hypotenuusa on 8,2 mm ja toisen kateetin pituus

$$\frac{6,4 \text{ mm}}{2} = 3,2 \text{ mm.}$$

Korkeusjana h on suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeusjanan h pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 3,2^2 = 8,2^2$$

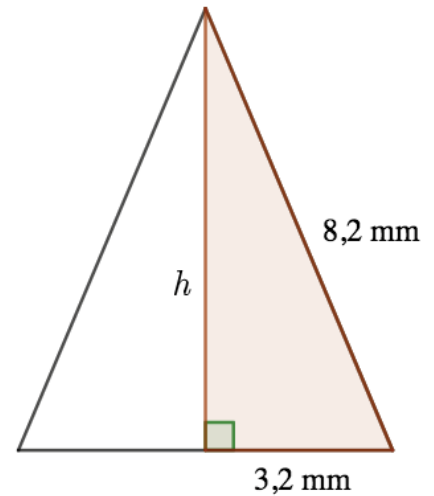
$$h^2 = 67,24 - 10,24$$

$$h^2 = 57$$

$$h = \pm\sqrt{57}$$

$$h = 7,549 \dots$$

$$\leftarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten korkeusjana $h = 7,549 \dots \approx 7,5$ (mm).

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{6,4 \cdot \sqrt{57}}{2}$$

$$= 24,159 \dots$$

$$\approx 24 \text{ (mm}^2\text{)}$$

Vastaus Kolmion korkeus on 7,5 mm ja pinta-ala 24 mm².

2.9

Selvitetään pinta-alan laskemista varten ensin kolmion korkeus.

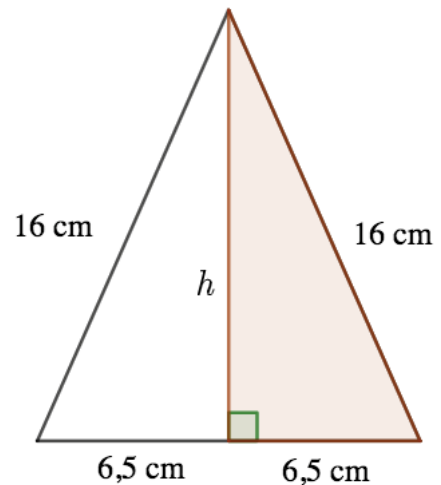
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden hypotenuusa on 16 cm ja toisen kateetin pituus

$$\frac{13 \text{ cm}}{2} = 6,5 \text{ cm.}$$

Korkeusjana h on suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 6,5^2 &= 16^2 \\h^2 &= 256 - 42,25 \\h^2 &= 213,75 \\h &= \pm\sqrt{213,75}\end{aligned}$$

$$\leftarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Sivun pituus on positiivinen luku, joten tasakylkisen kolmion korkeus on $\sqrt{213,75} = 14,62 \dots$ (cm).

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned}A &= \frac{13 \cdot \sqrt{213,75}}{2} \\&= 95,031 \dots \\&\approx 95 \text{ (cm}^2\text{)}\end{aligned}$$

Vastaus 95 cm²

2.10

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 7 cm ja x (cm). Hypotenuusan pituus on $x + 1$ (cm). Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$7^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

$$49 + x^2 = (x + 1)(x + 1)$$

$$49 + x^2 = x^2 + x + x + 1$$

$$49 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$-2x = -48 \quad | : (-2)$$

$$x = 24$$

Pidemmän kateetin pituus on siis 24 cm.

Hypotenuusan pituus on tällöin $24 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$.

Kolmion sivujen pituudet ovat siis 7 cm, 24 cm ja 25 cm.

Vastaus 7 cm, 24 cm ja 25 cm

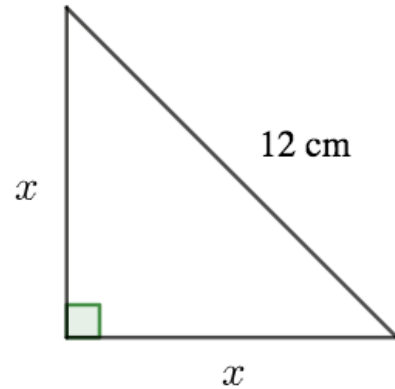
2.11

Merkitään suorakulmaisen kolmion kateetteja kirjaimella x . Hypotenuusan pituus on 12. Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= 12^2 \\2x^2 &= 144 \\x^2 &= 72 \\x &= \pm\sqrt{72}\end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten kolmion kateettien pituudet ovat $\sqrt{72} = 8,485 \dots \approx 8,49$.

Vastaus $\sqrt{72} \approx 8,49$



2.12

Jos lyhtypylväs on asennettu kohtisuoraan maata vasten, maan ja lyhtypylvään väliin syntyy suorakulma ja kolmio on näin ollen suorakulmainen.

Tutkitaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen eli yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$.

Lasketaan kahden lyhimmän sivun neliöiden summa.

$$5,4^2 + 7,2^2 = 81$$

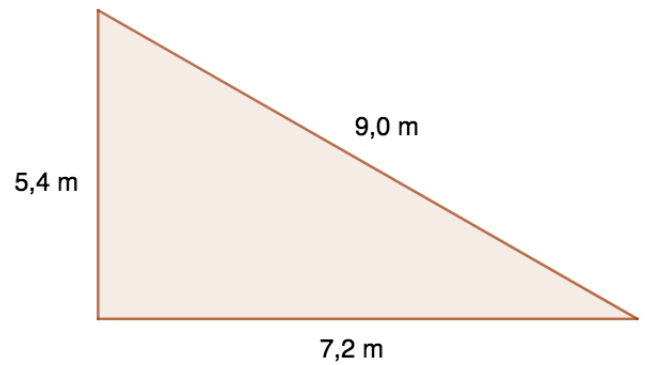
Lasketaan yhtälön oikea puoli eli pisimmän sivun neliö.

$$9,0^2 = 81$$

Ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu ja kolmio on siis suorakulmainen.

Näin ollen lyhtypylväs on asennettu kohtisuoraan maata vasten.

Vastaus Tulevat.



2.13

a)

Piirretään pisteet koordinaatistoon. Muodostetaan suorakulmainen kolmio niin, että jana AB on kolmion hypotenuusa.

Näin ollen suorakulma sijaitsee pisteessä $C(9, 4)$, jonka x -koordinaatti on pisteen B x -koordinaatti ja y -koordinaatti pisteen A y -koordinaatti.



Janan AC pituus on $9 - 1 = 8$ ja janan BC pituus on $10 - 4 = 6$.

Merkitään janan AB pituutta kirjaimella x . Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

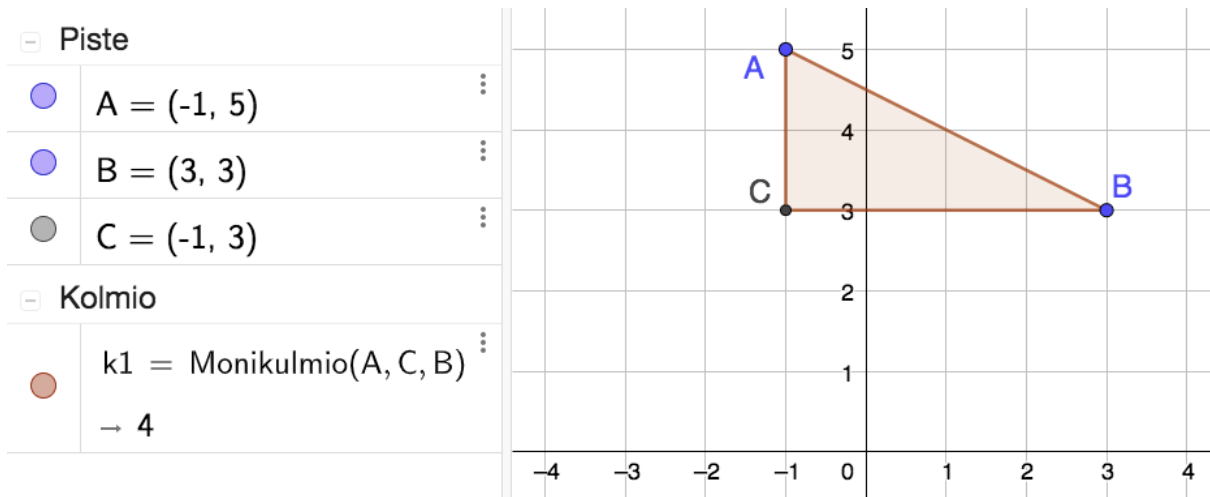
$$\begin{aligned}8^2 + 6^2 &= x^2 \\x^2 &= 64 + 36 \\x^2 &= 100 \\x &= \pm\sqrt{100} \\x &= \pm 10\end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten janan AB pituus on 10.

b)

Piirretään pisteet koordinaatistoon. Muodostetaan suorakulmainen kolmio niin, että jana AB on kolmion hypotenuusa.

Näin ollen suorakulma sijaitsee pisteessä $C(-1, 3)$, jonka x -koordinaatti on pisteen B x -koordinaatti ja y -koordinaatti pisteen A y -koordinaatti.



Janan AC pituus on $5 - 3 = 2$ ja janan BC pituus on $3 - (-1) = 4$.

Merkitään janan AB pituutta kirjaimella x . Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned}
 2^2 + 4^2 &= x^2 \\
 x^2 &= 4 + 16 \\
 x^2 &= 20 \\
 x &= \pm\sqrt{20}
 \end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten pisteiden A ja B välinen etäisyys on $\sqrt{20}$.

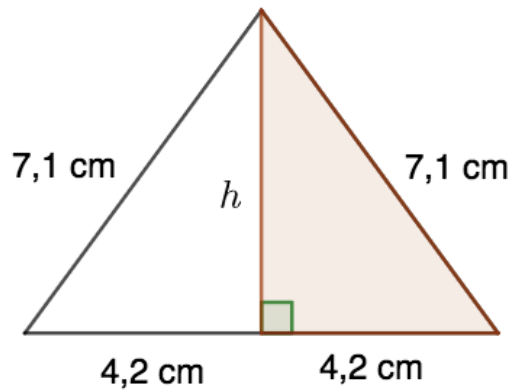
Vastaus a) 10

b) $\sqrt{20}$

2.14

Selvitetään pinta-alan laskemista varten ensin kolmion korkeus.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden hypotenuusa on 7,1 cm ja toisen kateetin pituus



$$\frac{8,4 \text{ cm}}{2} = 4,2 \text{ cm.}$$

Korkeusjana h on suorakulmaisen kolmion toinen kateetti. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 4,2^2 = 7,1^2$$

$$h^2 = 50,41 - 17,64$$

$$h^2 = 32,77$$

$$h = \pm\sqrt{32,77}$$

$$h = \pm 5,724 \dots$$

$$\leftarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten tasakylkisen kolmion korkeus on $\sqrt{32,77} = 5,724 \dots$ (cm).

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{8,4 \cdot \sqrt{32,77}}{2}$$

$$= 24,0429 \dots$$

$$\approx 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 24 cm²

2.15

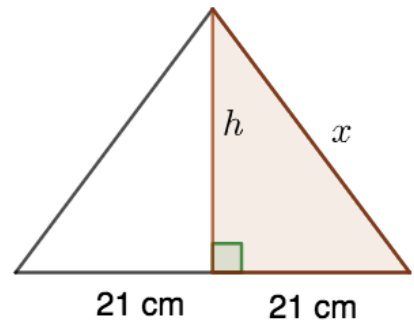
Muodostetaan ensin pinta-alan lauseke ja ratkaistaan yhtälöstä kolmion korkeusjanan h pituus.

$$A = 588$$

$$\frac{42 \cdot h}{2} = 588 \quad | \cdot 2$$

$$42h = 1176 \quad | : 42$$

$$h = 28 \text{ (cm)}$$



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja jakaa kolmion kahteen keskenään samanlaiseen suorakulmaiseen kolmioon. Syntyneiden kolmioiden toinen kateetti on korkeusjana $h = 28$ (cm) ja toisen kateetin pituus

$$\frac{42 \text{ cm}}{2} = 21 \text{ cm.}$$

Tasakylkisen kolmion kylki on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa x . Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$21^2 + 28^2 = x^2$$

$$x^2 = 441 + 784$$

$$x^2 = 1225$$

$$x = \pm\sqrt{1225}$$

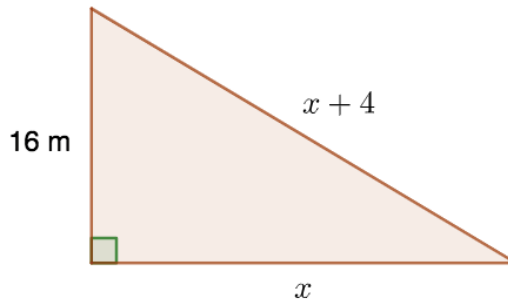
$$x = \pm 35$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten kyljen pituus on 35 cm.

Vastaus 35 cm

2.16

Kolmion lyhyin sivu on 16 m pitkä.
Merkitään pidempää kateettia kirjaimella x . Näin ollen pisimmän sivun eli hypotenuusan pituus on $x + 4$ (m).



Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}16^2 + x^2 &= (x + 4)^2 \\16^2 + x^2 &= (x + 4)(x + 4) \\256 + x^2 &= x^2 + 4x + 4x + 16 \\-8x &= -240 \quad | : (-8) \\x &= 30\end{aligned}$$

Pidemmän kateetin pituus on siis 30 m.

Hypotenuusan pituus on tällöin $30 \text{ m} + 4 \text{ m} = 34 \text{ m}$.

Sivujen pituudet ovat siis 16 m, 30 m ja 34 m.

Vastaus 16 m, 30 m ja 34 m

2.17

Kateettien suhde on 3:4. Lyhyempi kateetti on siis pituudeltaan $3x$ ja pidempi kateetti $4x$. Hypotenuusan pituus on 45. Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}(3x)^2 + (4x)^2 &= 45^2 \\ 9x^2 + 16x^2 &= 2025 \\ 25x^2 &= 2025 \quad | : 25 \\ x^2 &= 81 \\ x &= \pm\sqrt{81} \\ x &= \pm 9\end{aligned}$$

Pituuden on oltava positiivinen luku, joten $x = 9$.

Tällöin lyhyempi kateetti on $3 \cdot 9 = 27$ ja pidempi kateetti on $4 \cdot 9 = 36$.

Vastaus 27 ja 36

2.18

Pienin luku on 32. Merkitään keskimmäistä lukua kirjaimella a ja suurinta lukua kirjaimella b . Lukujen summa on 160. Muodostetaan summan lauseke, ja ilmaistaan luku a luvun b avulla.

$$\begin{aligned}32 + a + b &= 160 \\ a + b &= 128 \\ a &= 128 - b\end{aligned}$$

Luvut toteuttavat Pythagoraan lauseen. Sijoitetaan luvut Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan b .

$$\begin{aligned}32^2 + a^2 &= b^2 \\ 32^2 + (128 - b)^2 &= b^2 \\ 1024 + (128 - b)(128 - b) &= b^2 \\ 1024 + 16384 - 128b - 128b + b^2 &= b^2 \\ -256b &= -17308 \quad | : (-256) \\ b &= 68\end{aligned}$$

Suurin luku on siis $b = 68$.

Tällöin keskimäinen luku on $a = 128 - 68 = 60$.

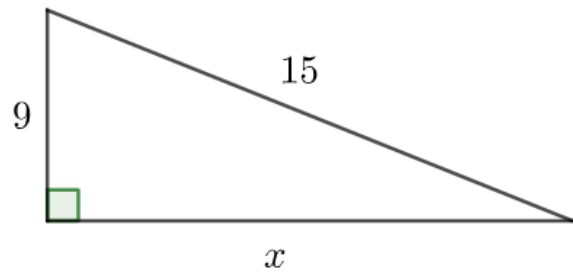
Kaksi suurinta lukua ovat siis 60 ja 68.

Vastaus 60 ja 68

2.19

Kuviossa on kaksi suorakulmaista kolmiota, joilla on sama kanta x . Ratkaistaan kanta x pienemmästä kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}9^2 + x^2 &= 15^2 \\x^2 &= 225 - 81 \\x^2 &= 144 \\x &= \pm\sqrt{144} \\x &= \pm 12\end{aligned}$$

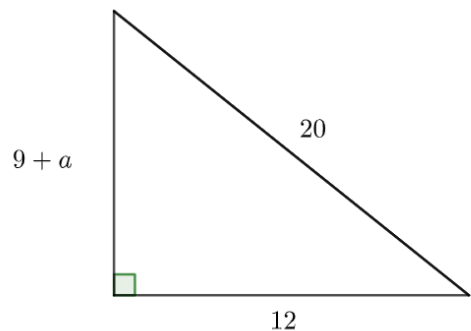


Pituus on positiivinen luku, joten $x = 12$.

Suuremman kolmion sivujen pituudet ovat 12, $9 + a$ ja 20. Sijoitetaan luvut Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan a .

$$\begin{aligned}12^2 + (a + 9)^2 &= 20^2 \\144 + (a + 9)(a + 9) &= 400 \\144 + a^2 + 9a + 9a + 81 &= 400 \\a^2 + 18a - 175 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-175)}}{2 \cdot 1} \\a &= \frac{-18 \pm \sqrt{1024}}{2} \\a &= \frac{-18 \pm 32}{2} \\a &= \frac{-18 + 32}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad a = \frac{-18 - 32}{2} = -25\end{aligned}$$



Sivun $9 + a$ pituus tulee olla positiivinen luku, joten vain $a = 7$ käy.

Vastaus $a = 7$

2.20

Piirretään pisteet koordinaatistoon. Muodostetaan suorakulmainen kolmio niin, että jana AB on kolmion hypotenuusa.

Näin ollen suorakulma sijaitsee pisteessä $C(8, 5)$, jonka x -koordinaatti on pisteen B x -koordinaatti ja y -koordinaatti pisteen A y -koordinaatti.

Janan AC pituus on $8 - (-2) = 10$ ja
janan BC pituus on $29 - 5 = 24$.

Merkitään janan AB pituutta kirjaimella x . Sijoitetaan pituudet Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$10^2 + 24^2 = x^2$$
$$x = 26$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten janan AB pituus on 26.

Koska koordinaatiston yksikkö on 0,1 m, leppäkertun lentomatka on

$$26 \cdot 0,1 \text{ m} = 2,6 \text{ m}$$

b)

Levähdyspaikan koordinaatit saadaan määrittämällä janan AB keskipiste.

Keskipisteen x -koordinaatti on päätepisteiden x -koordinaattien keskiarvo.

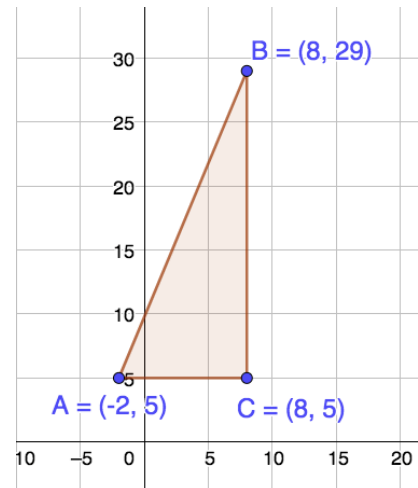
$$\frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Keskipisteen y -koordinaatti on päätepisteiden y -koordinaattien keskiarvo.

$$\frac{5 + 29}{2} = 17$$

Keskipisteen eli levähdyspisteen koordinaatit ovat (3, 17).

Vastaus **a)** 2,6 m **b)** (3, 17)



2.21

Täydennetään kuviota piirtämällä kolme suorakulmaista kolmiota.

Selvitetään ensin janan AC pituus ruskean kolmion avulla.

$$AF = -2 - (-3) = 1$$

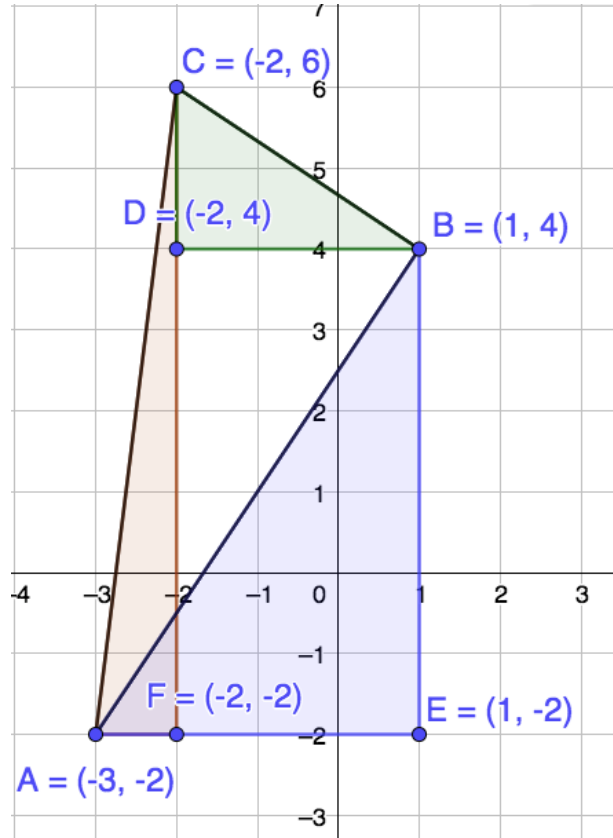
$$FC = 6 - (-2) = 8$$

Sijoitetaan Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan AC .

$$1^2 + 8^2 = AC^2$$

$$AC = \pm\sqrt{65}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC = \sqrt{65}$.



Selvitetään janan AB pituus sinisen kolmion avulla.

$$AE = 1 - (-3) = 4$$

$$BE = 4 - (-2) = 6$$

Sijoitetaan Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan AB .

$$4^2 + 6^2 = AB^2$$

$$AB = \pm 2\sqrt{13}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AB = 2\sqrt{13}$.

Selvitetään viimeiseksi janan BC pituus vihreän kolmion avulla.

$$DB = 1 - (-2) = 3$$

$$CD = 6 - 4 = 2$$

Sijoitetaan Pythagoraan lauseeseen ja ratkaistaan BC .

$$2^2 + 3^2 = BC^2$$

$$BC = \pm\sqrt{13}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BC = \sqrt{13}$.

b)

Lasketaan kahden lyhimmän sivun neliöiden summa.

$$(2\sqrt{13})^2 + \sqrt{13}^2 = 65$$

Lasketaan pisimmän sivun neliö.

$$\sqrt{65}^2 = 65$$

Ehto $a^2 + b^2 = c^2$ on voimassa, joten kolmio on suorakulmainen.

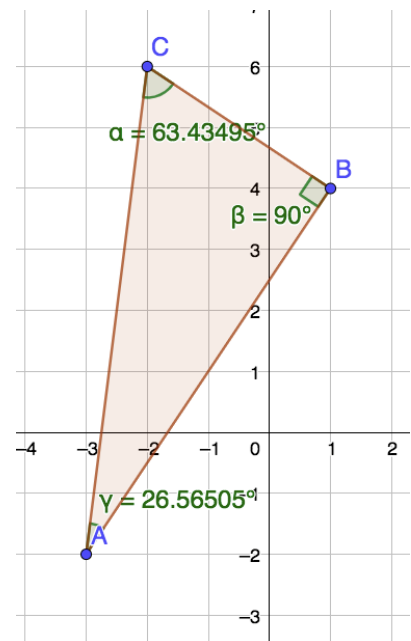
c)

Kulma CBA on suorakulma, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus a) $AC = \sqrt{65}$, $AB = 2\sqrt{13}$ ja $BC = \sqrt{13}$

b) Kolmio on suorakulmainen.

c) Kuva on oikealla.



2.22

Pisteillä A ja B on sama x -koordinaatti, joten niiden välinen jana on pystysuora. Janan pituus on y -koordinaattien erotus, eli $29 - 2 = 27$.

Olkoon kolmion kolmas kärki pisteessä C . Näin ollen tiedetään, että kateetti $AB = 27$ ja hypotenuusa $BC = 45$. Sijoitetaan luvut Pythagoraan lauseeseen ja selvitetään kolmannen sivun AC pituus.

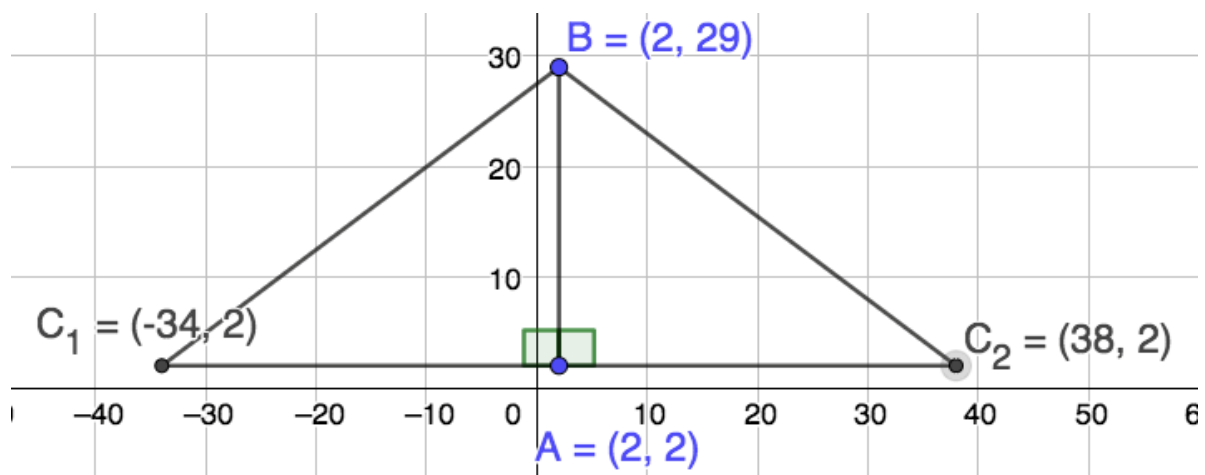
$$27^2 + AC^2 = 45^2$$
$$AC = \pm 36$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC = 36$.

Suorakulma voi aueta joko oikealle tai vasemmalle. Pisteiden C y -koordinaatti on kummassakin tilanteessa 2.

Jos kulma aukeaa oikealle, pisteen C x -koordinaatti on $2 + 36 = 38$.

Jos kulma aukeaa vasemmalle, pisteen C x -koordinaatti on $2 - 36 = -34$.



Kärkipiste voi olla siis joko $(-34, 2)$ tai $(38, 2)$.

Vastaus $(-34, 2)$ tai $(38, 2)$

2.23

a)

Tutkitaan yhtälön vasenta puolta. Lasketaan kahden pienimmän luvun neliöiden summa.

$$65^2 + 72^2 = 9409$$

Lasketaan yhtälön oikea puoli suurimman luvun neliö.

$$97^2 = 9409$$

Ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu ja luvut 65, 72 ja 97 ovat Pythagoraan kolmikko.

b)

Jos luvut $2k$, $k^2 - 1$ ja $k^2 + 1$ ovat Pythagoraan kolmikko, ne toteuttavat Pythagoraan lauseen.

Sievennetään ensin yhtälön vasen puoli.

$$\begin{aligned}(2k)^2 + (k^2 - 1)^2 &= 4k^2 + (k^2 - 1)(k^2 - 1) \\ &= 4k^2 + k^4 - k^2 - k^2 + 1 \\ &= k^4 + 2k^2 + 1\end{aligned}$$

Sievennetään sitten yhtälön oikea puoli.

$$\begin{aligned}(k^2 + 1)^2 &= (k^2 + 1)(k^2 + 1) \\ &= k^4 + k^2 + k^2 + 1 \\ &= k^4 + 2k^2 + 1\end{aligned}$$

Koska molemmille puolille saatiin sama lauseke, yhtälö

$(2k)^2 + (k^2 - 1)^2 = (k^2 + 1)^2$ on aina tosi, ja Pythagoraan lause pätee, kun $k > 1$ ja kokonaisluku. Näin ollen luvut $2k$, $k^2 - 1$ ja $k^2 + 1$ muodostavat Pythagoraan kolmikon.

Kun $k = 2$, kolmikko on $(2 \cdot 2, 2^2 - 1, 2^2 + 1) = (4, 3, 5) = (3, 4, 5)$.

Kun $k = 3$, kolmikko on $(2 \cdot 3, 3^2 - 1, 3^2 + 1) = (6, 8, 10)$.

Kun $k = 4$, kolmikko on $(2 \cdot 4, 4^2 - 1, 4^2 + 1) = (8, 15, 17)$.

Vastaus **a)** $65^2 + 72^2 = 97^2$

b) $(2k)^2 + (k^2 - 1)^2 = (k^2 + 1)^2$

c) $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ ja $(8, 15, 17)$

2.24

TAPA 1

Yhden kolmion pinta-ala on $\frac{ab}{2}$.

Neliön sivun pituus on $a + b$. Neliön sisälle syntyy valkoinen neliö, jonka sivun pituus on c . Kolmioiden pinta-ala on siis sama kuin suuremman neliön ja pienemmän neliön pinta-alojen erotus.

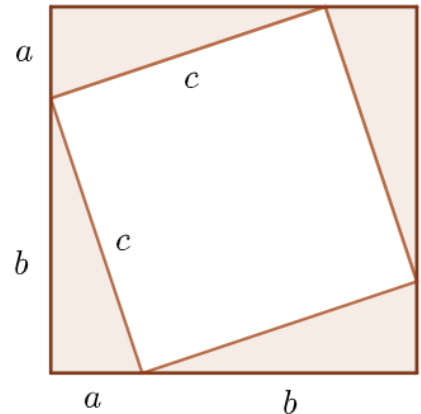
$$(a + b)^2 - c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$(a + b)(a + b) - c^2 = 2ab$$

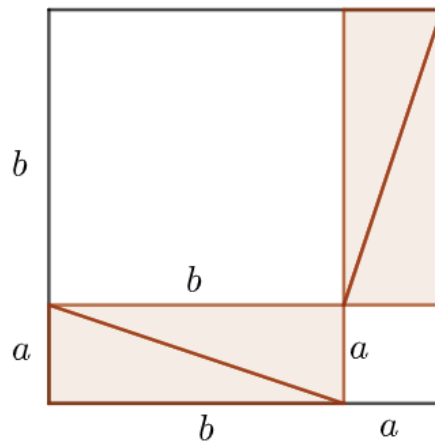
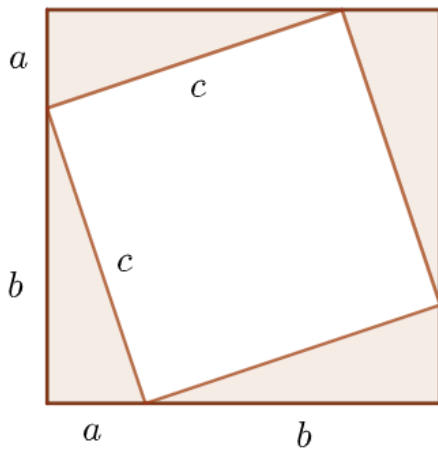
$$a^2 + ab + ab + b^2 - c^2 = 2ab \quad | - c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad | - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



TAPA 2



Molempien neliöiden sivujen pituus on $a + b$ eli neliöt ovat yhtä suuria. Molemmissa neliöissä on neljä yhtä suurta kolmiota, joten myös valkoisen alueen pinta-ala tulee olla neliöissä sama. Vasemmassa neliössä valkoisen pinta-ala c^2 on ja oikealla valkoisen alueen pinta-ala koostuu kahdesta neliöstä eli $a^2 + b^2$. Näin ollen $a^2 + b^2 = c^2$.