Luku 11 – Tehtävien malliratkaisut

11.1

Yhdenmuotoisten kappaleiden vastinsivujen suhteet ovat samat.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{15}$$

Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$15x = 60 \quad | : 15$$

$$x = 4 \text{ (cm)}$$

Vastaus 4 cm

11.2

a)

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhteet ovat samat.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$\frac{x}{12} = \frac{50}{30}$$

$$30x = 600 \quad | : 30$$

$$x = 20 \text{ (cm)}$$

Sivun AB pituus on $x = 20$ cm.

b)

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{x + 4{,}0} = \frac{1{,}5}{2{,}5}$$

$$2{,}5x = 1{,}5(x + 4{,}0)$$

$$2{,}5x = 1{,}5x + 6{,}0 \quad | - 1{,}5x$$

$$x = 6{,}0 \text{ (m)}$$

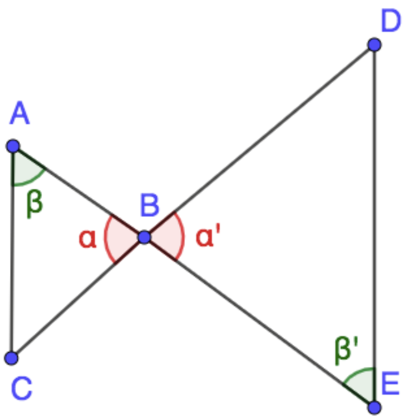
Sivun CE pituus on $x = 6{,}0$ cm.

Vastaus **a)** 20 cm

b) 6,0 m

11.3

a)



Kolmioiden kärkipisteeseen B muodostuvat kulmat α ja α' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla β ja β' on vasempana kylkenä jana AE. Näin ollen ne ovat samakohtaisia kulmia. Koska janat AC ja DE ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, eli $\beta' = \beta$.

Kolmioilla ABC ja BED on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

b)

Sivu DB on kulman α' vasen kylki. Kulman α' vastinkulma on α, jonka vasen kylki on sivu *BC.* Näin ollen sivun DB vastinsivu on *BC.*

c)

Merkitään janan BC pituutta kirjaimella *x.* Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|BE|}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{8}{12}$$

$$12x = 120 \quad | : 12$$

$$x = 10 \text{ (cm)}$$

Sivun BC pituus on $x = 10$ cm.

Vastaus **b)** sivu BC

c) 10 cm

11.4

Kolmioilla on yhteinen kulma $\sphericalangle EAD$.

Jana AC on sekä kulman $\sphericalangle ACB$ että kulman $\sphericalangle AED$ oikeana kylkenä, joten ne ovat samankohtaiset kulmat.

Koska janat DE ja BC ovat yhdensuuntaiset, pätee $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AED$.

Kolmioilla on ABC ja ADE on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten kk-lauseen mukaan ne ovat yhdenmuotoiset eli $ABC \sim ADE$.

11.5

a)

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhteet ovat samat.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|CB|}{|EB|}$$

Verranto ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$\frac{x}{16{,}0} = \frac{18{,}0 + 6{,}0}{18{,}0}$$

$$18{,}0x = 16{,}0 \cdot 24{,}0$$

$$x = 21{,}333\ldots$$

$$x = 21\ (\mathrm{cm})$$

Sivun AC pituus on $x = 21$ cm.

b)

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|CB|}$$

$$\frac{x}{x + 4{,}0} = \frac{3{,}0}{5{,}5}$$

$$5{,}5x = 3{,}0(x + 4{,}0)$$

$$5{,}5x = 3{,}0x + 12{,}0$$

$$2{,}5x = 12{,}0 \quad | : 2{,}5$$

$$x = 4{,}8\ (\mathrm{m})$$

Sivun AD pituus on $x = 4{,}8$ m.

Vastaus **a)** 21 cm

b) 4,8 m

11.6

Kolmioilla BDC ja GHC on yhteinen kulma $\sphericalangle HCG$ ja molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana, joten kk-lauseen mukaan $BDC \sim GHC$.

Koska AB ja CB ovat yhtä pitkät, $|AD| = |DC| = 3{,}50$ m.
Janan HC pituus on siis $3{,}50 \text{ m} - 1{,}20 \text{ m} = 2{,}30 \text{ m}$.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$\frac{|BD|}{|GH|} = \frac{|DC|}{|HC|}$$

$$\frac{x}{1{,}50} = \frac{3{,}50}{2{,}30}$$

$$2{,}30x = 1{,}50 \cdot 3{,}50$$

$$2{,}30x = 5{,}25 \quad | : 2{,}30$$

$$x = 2{,}282 \ldots$$

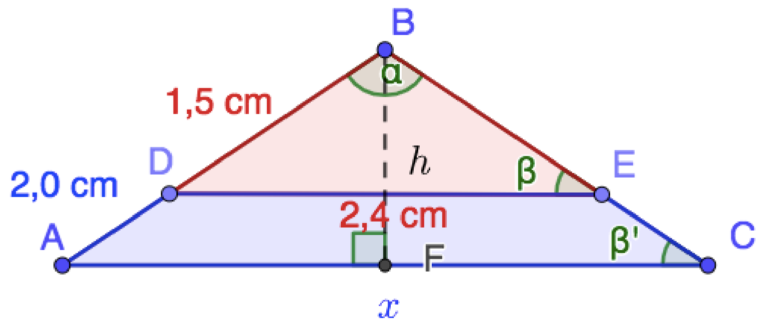
$$x = 2{,}28 \text{ (m)}$$

Keskipilarin DB pituus on 2,28 m.

Vastaus 2,28 m

11.7

Piirretään mallikuva.



Kolmioilla on yhteinen kulma α.
Jana BC on sekä kulman β että kulman β' oikeana kylkenä.
Näin ollen ne ovat samankohtaiset kulmat.

Koska kolmiot ACB ja DEB ovat tasakylkisiä, ovat janat DE ja AC yhdensuuntaiset ja $\beta = \beta'$.

Kolmioilla on ACB ja DEB on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten kk-lauseen mukaan ne ovat yhdenmuotoiset eli $ACB \sim DEB$.

Merkitään janaa AC kirjaimella x. Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|DB|}$$
$$\frac{x}{2{,}4} = \frac{2{,}0 + 1{,}5}{1{,}5}$$
$$x = 5{,}6 \text{ (cm)}$$

Tasakylkisen kolmion ACB korkeusjana puolittaa kannan AC ja muodostaa suorakulmaisen kolmion AFB, jonka hypotenuusa on 3,5 cm ja toinen kateetti

$$\frac{5{,}6 \text{ cm}}{2} = 2{,}8 \text{ cm}.$$

Merkitään korkeutta kirjaimella h ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 2{,}8^2 = 3{,}5^2$$
$$h = \pm 2{,}1$$

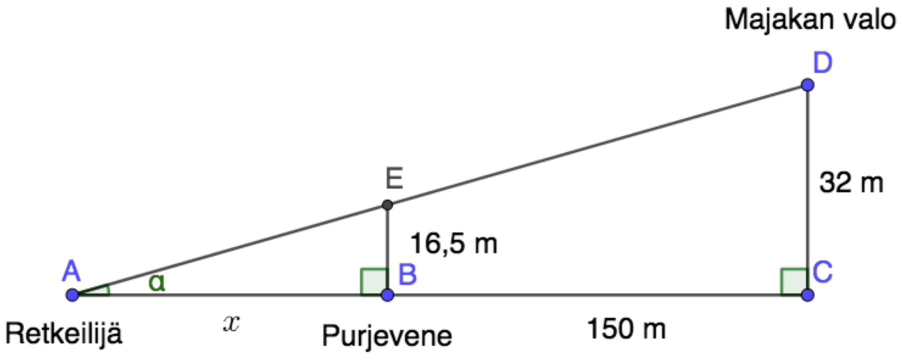
Korkeus on positiivinen luku, joten $h = 2{,}1$ cm.

Vastaus 2,1 cm

11.8

Piirretään mallikuva.

Merkitään retkeilijän etäisyyttä purjeveneestä kirjaimella *x.*



Tarkastellaan kolmioita *ABE* ja *ACD.*

- Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana.
- Kulma A on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{x}{x+150} = \frac{16{,}5}{32}$$

$$x = 159{,}677\ldots$$

$$x \approx 160 \text{ (m)}$$

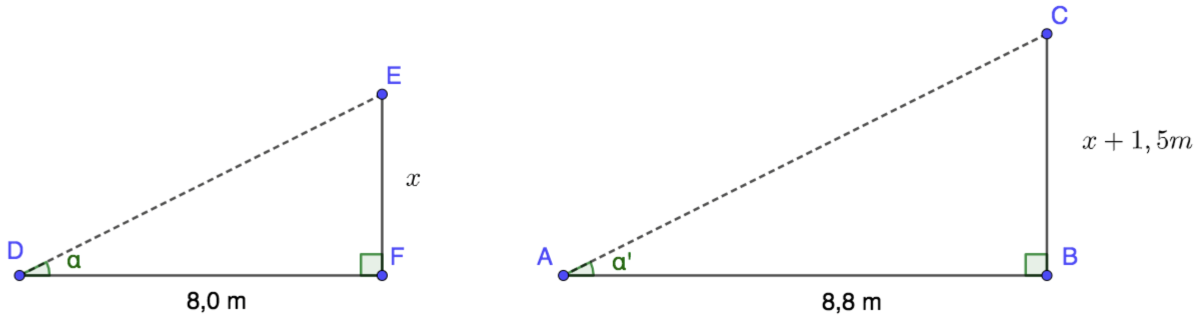
Purjevene on 160 m päässä retkeilijästä.

Vastaus 160 m

11.9

Piirretään mallikuvat.

Merkitään lyhyemmän puun pituutta kirjaimella *x.* Lyhyemmän puun varjo on myös lyhyempi eli 8,0 m.



Tutkitaan kolmioita *DFE* ja *ABC.*

Koska puut ovat vierekkäin, voidaan olettaa auringon säteiden tulevan samasta kulmasta molempiin puuhun. Näin ollen kulmat *A* ja *D* ovat yhtä suuret vastinkulmat.

Lisäksi puut kasvavat kohtisuoraan maata vasten, joten molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

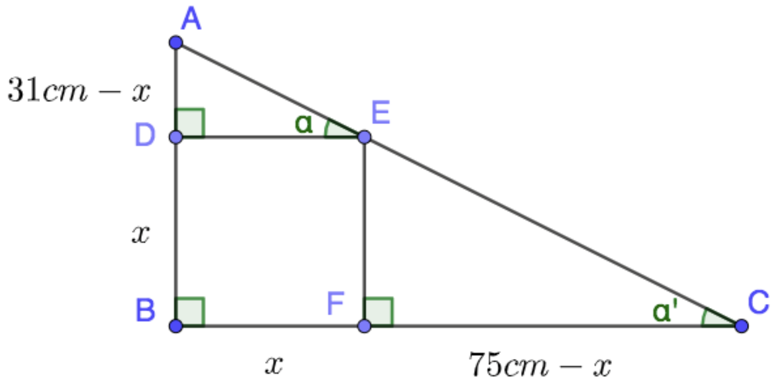
$$\frac{x}{x+1{,}5} = \frac{8{,}0}{8{,}8}$$
$$x = 15 \text{ (m)}$$

Puiden pituudet ovat 15,0 m ja 15 m + 1,5 m = 16,5 m.

Vastaus 15,0 m ja 16,5 m

11.10

a)
Suorakulmainen kolmio on jaettu neliöön ja kahteen pienempään suorakulmaiseen kolmioon. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella *x.*



Tarkastellaan kolmioita *ADE* ja *EFC.* Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana.

Kulmat α ja α' ovat samankohtaiset kulmat, sillä niillä on molemmilla oikeana kylkenä jana *AC.* Koska janat *DE* ja *BC* ovat yhdensuuntaiset, $\alpha = \alpha'$.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{31 - x}{x} = \frac{x}{75 - x}$$

$$x = 21{,}933 \ldots$$

$$x \approx 22 \text{ (cm)}$$

Neliön sivun pituus on 22 cm.

b)

Lasketaan kuvioiden pinta-alat.

$$A_{\text{neliö}} = (21{,}933 \ldots \text{ cm})^2 = 481{,}056 \ldots \text{ cm}^2$$

$$A_{ABC} = \frac{31 \text{ cm} \cdot 75 \text{ cm}}{2} = 1162{,}5 \text{ cm}^2$$

Verrataan neliön pinta-alaa kolmion pinta-alaan.

$$\frac{A_{\text{neliö}}}{A_{ABC}} = \frac{481{,}056 \ldots \text{ cm}^2}{1162{,}5 \text{ cm}^2} = 0{,}4138 \ldots \approx 41\%$$

Vastaus **a)** 22 cm

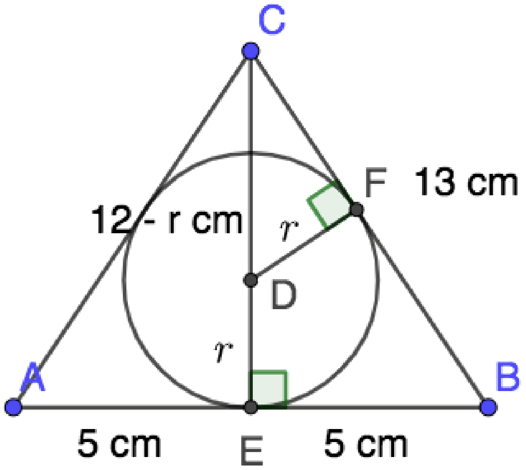
b) 41 %

11.11

Ympyrä sivuaa kolmion kantaa ja kylkiä, joten säde on kohtisuorassa kolmion sivuja vastaan.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r.*

Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota *CEB* ja *CDF.*



Kolmioilla on yhteinen kulma *C* ja suora kulma vastinkulmana.
Näin ollen kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\frac{|DF|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$$

$$\frac{r}{5} = \frac{12 - r}{13}$$

$$x = 3{,}333\ldots$$

$$x \approx 3{,}3 \text{ (cm)}$$

Ympyrän säde on 3,3 cm.

Vastaus 3,3 cm

11.12

Tutkitaan, ovatko vastinsivujen suhteet samat.

Kylkien suhde on

$$\frac{9{,}0\ \text{cm}}{21{,}5\ \text{cm}} = 0{,}418\ldots$$

Kantojen suhde on

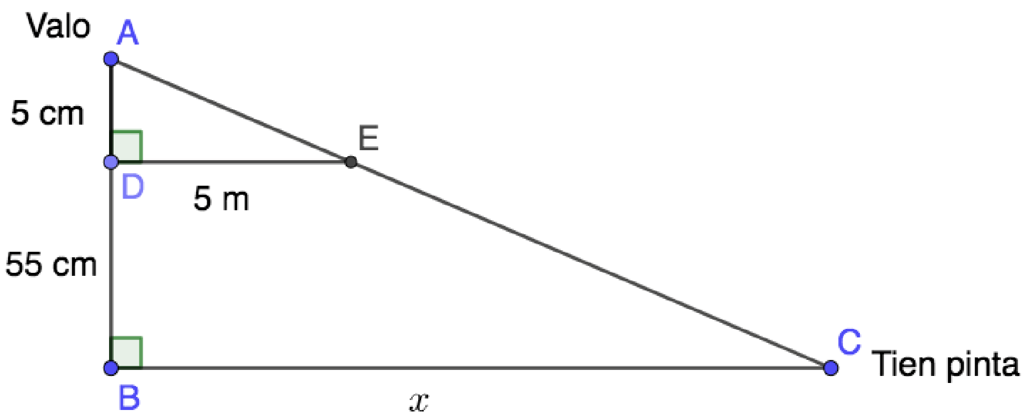
$$\frac{15{,}0\ \text{cm}}{34{,}5\ \text{cm}} = 0{,}434\ldots$$

Suhteet eivät ole samat, joten kolmiot eivät ole yhdenmuotoiset.

Vastaus Eivät ole.

11.13

Piirretään mallikuva. Merkitään valaisuetäisyyttä kirjaimella *x.*



Tarkastellaan kolmioita *ADE* ja *ABC.*

- Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana.
- Kulma *A* on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

$$\frac{5\text{ cm}}{60\text{ cm}} = \frac{5\text{ m}}{x}$$

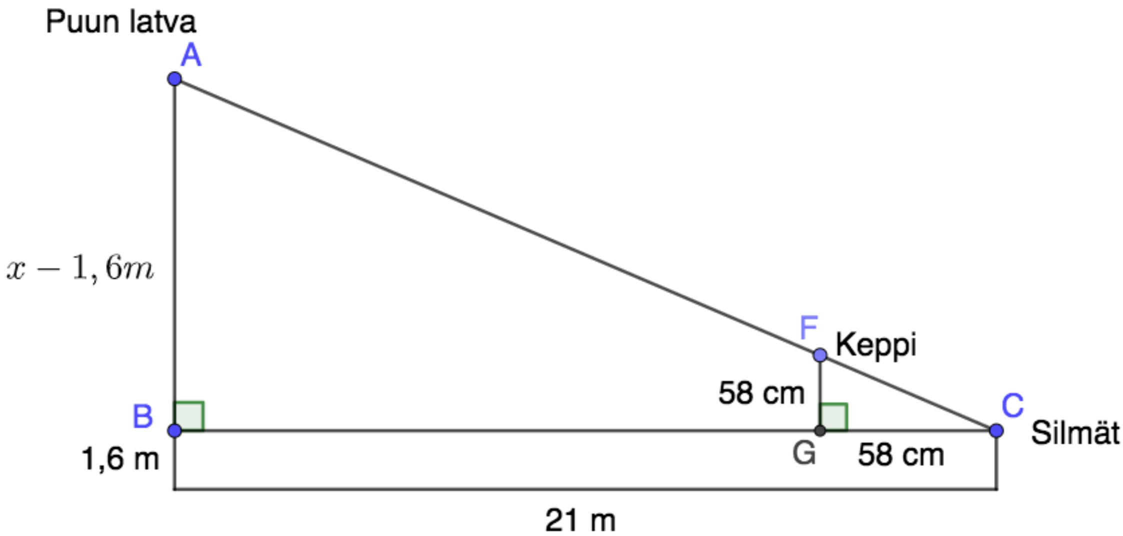
$$x = 60\text{ m}$$

Valot valaisevat 60 metrin päähän.

Vastaus 60 m

11.14

Piirretään mallikuva. Merkitään puun korkeutta kirjaimella *x.*



Tutkitaan kahta suorakulmaista kolmiota ABC ja FGC, jotka muodostuvat silmien korkeudelle 1,6 m.

- Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana.
- Kulma C on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AB|}{|FG|} = \frac{|BC|}{|GC|}$$

$$\frac{x - 1{,}6}{0{,}58} = \frac{21}{0{,}58}$$

$$x = 22{,}6$$

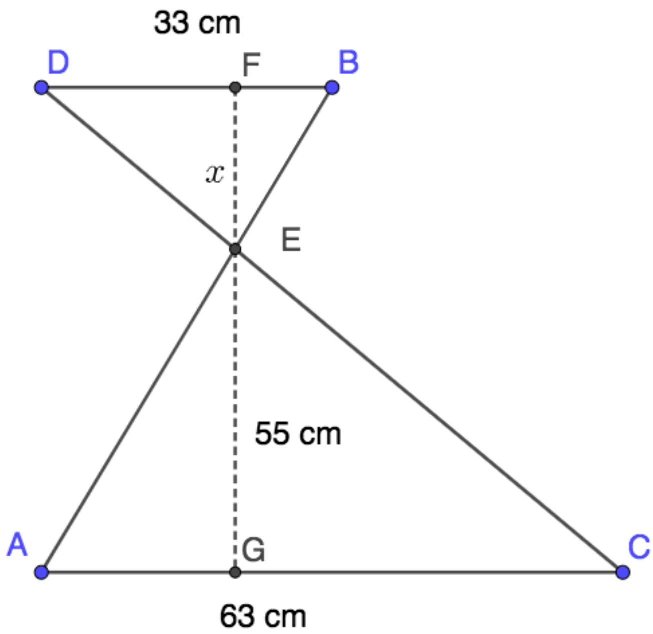
$$x \approx 23 \text{ (m)}$$

Mänty on 23 m korkea.

Vastaus 23 m

11.15

Piirretään mallikuva.



Jalat muodostavat kaksi kolmioita, joista alemman korkeus on 55 cm. Merkitään pienemmän kolmion korkeutta kirjaimella *x.*

Kolmioiden kärkipisteeseen E muodostuvat kulmat ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla CAB ja DBA on vasempana kylkenä jana AB. Näin ollen ne ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat AC ja DB ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Kolmioilla CAB ja DBA on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen ja korkeuksien suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|FE|}{|GE|} = \frac{|DB|}{|AC|}$$
$$\frac{x}{55} = \frac{33}{63}$$
$$63x = 55 \cdot 33 \quad | : 63$$
$$x = 28{,}809\ldots\ \text{(cm)}$$

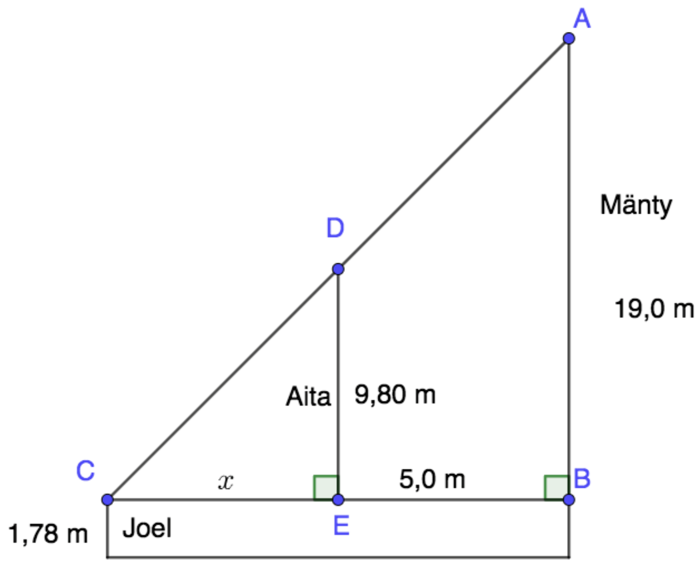
Silityslaudan korkeus lattiasta on

$$\begin{aligned} |GF| &= |GE| + |FE| \\ &= 55\ \text{cm} + 28{,}809\ldots\ \text{cm} \\ &= 83{,}809\ldots\ \text{cm} \approx 84\ \text{cm} \end{aligned}$$

Vastaus 84 cm

11.16

a)
Piirretään mallikuva. Merkitään Joelin etäisyyttä tuija-aidasta kirjaimella *x.*



Tarkastellaan kolmioita CED ja CBA.

Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana ja kulma C on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Janan AB pituus on männyn korkeuden ja Joelin pituuden erotus.

$|AB| = 19{,}0 \text{ m} - 1{,}78 \text{ m} = 17{,}22 \text{ m}$

Janan DB pituus on aidan korkeuden ja Joelin pituuden erotus.

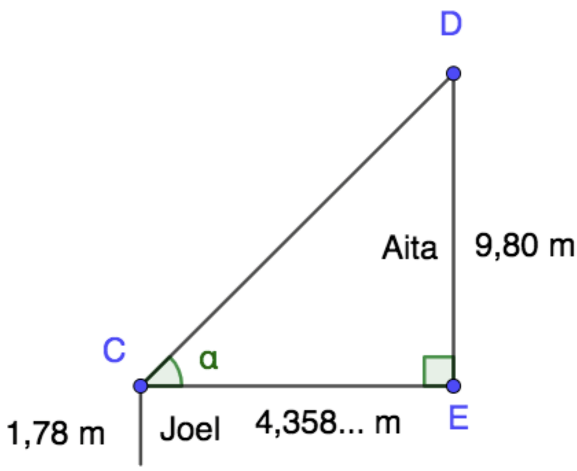
$|DE| = 9{,}80 \text{ m} - 1{,}78 \text{ m} = 8{,}02 \text{ m}$

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$
$$\frac{x}{x + 5{,}0} = \frac{8{,}02}{17{,}22}$$
$$x = 4{,}358 \ldots$$
$$x \approx 4{,}4 \text{ (m)}$$

Joelin etäisyys tuija-aidasta 4,4 m.

b)
Merkitään näkökulmaa kirjaimella αja ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta CED tangentin avulla.



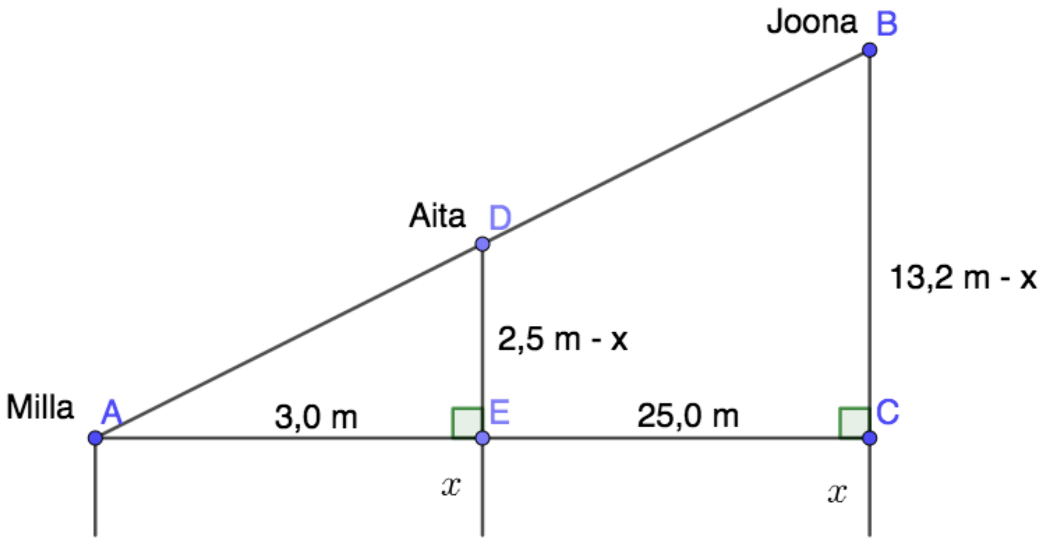
$$\tan\alpha = \frac{8{,}02}{4{,}358 \ldots}$$
$$\alpha = 61{,}480 \ldots°$$
$$\alpha \approx 61°$$

Vastaus **a)** 4,4 m
b) 61°

11.17

Piirretään mallikuva.

Merkitään Millan pituutta kirjaimella *x* ja ratkaistaan, mikä tulee olla Millan vähimmäispituus, jotta Joona näkisi Millan.



Tarkastellaan kolmioita *AED* ja *ACB.*

Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana ja
kulma *A* on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|CB|}$$

$$\frac{3{,}0}{28{,}0} = \frac{2{,}5 - x}{13{,}2 - x}$$

$$x = 1{,}216 \text{ (m)}$$

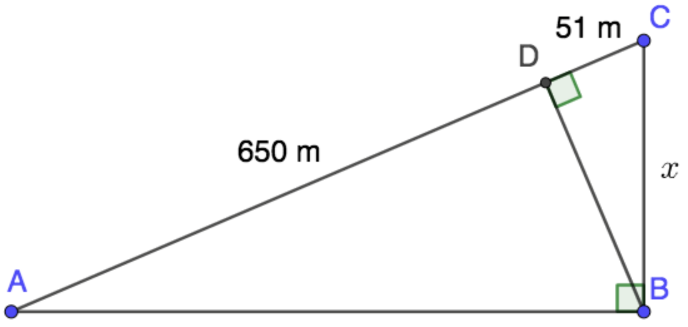
Koska Millan pituus on 1,6 m, Joel näkee Millan.

Vastaus Näkee.

11.18

Merkitään janan CB pituutta kirjaimella x.

Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota ABC ja CDB.



Kolmioilla on yhteinen kulma C ja suora kulma vastinkulmana.
Näin ollen kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|CB|}$$
$$\frac{x}{701} = \frac{51}{x}$$
$$x = \pm 189{,}079\ldots \text{ (m)}$$

Pituus on positiivinen, joten $x = 189{,}079\ldots$ m.

Ratkaistaan janan DB pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$|DB|^2 + 51^2 = 189{,}079\ldots^2$$
$$|DB| = \pm 182{,}071\ldots \text{ (m)}$$

Pituus on positiivinen, joten $|DB| = 182{,}071\ldots$ m.

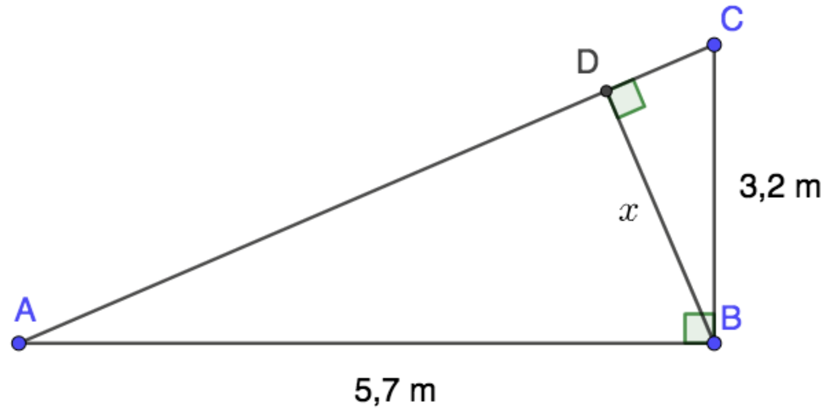
Lasketaan kysytyn kolmion ABD pinta-ala.

$$A_{ABD} = \frac{182{,}071\ldots \text{ m} \cdot 650 \text{ m}}{2} = 59173{,}20\ldots \text{ m}^2 \approx 5{,}9 \text{ ha}$$

Vastaus 5,9 ha

11.19

Piirretään mallikuva.
Merkitään suoran kulman kärjen etäisyyttä hypotenuusasta kirjaimella *x.*



Etäisyysjana jakaa suorakulmaisen kolmion kahteen pienempään suorakulmaisen kolmioon.

Lasketaan ensin hypotenuusan AC pituus.

$$|AC|^2 = 3{,}2^2 + 5{,}7^2$$
$$|AC| = \pm\, 6{,}536\ldots\ \text{(cm)}$$

Pituus on positiivinen, joten $|AC| = 6{,}536\ldots$ cm $\approx 6{,}5$ cm.

Tutkitaan suorakulmaisia kolmiota ABD ja ABC.

Kolmioilla on yhteinen kulma A ja suora kulma vastinkulmana.
Näin ollen kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

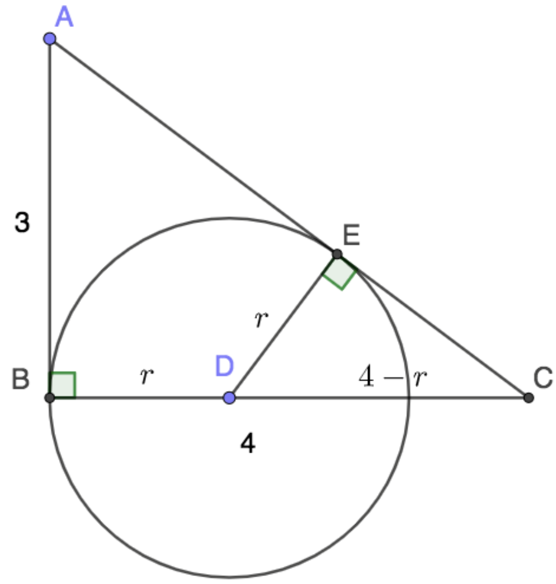
Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CB|}{|DB|}$$
$$\frac{6{,}536\ldots}{5{,}7} = \frac{3{,}2}{x}$$
$$x = 2{,}790\ldots$$
$$x \approx 2{,}8 \text{ cm}$$

Vastaus hypotenuusan pituus 6,5 cm, kärjen etäisyys 2,8 cm

11.20

Piirretään mallikuva.



Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r.*

Ratkaistaan ensin Pythagoraan lauseen avulla hypotenuusa *AC.*

$$|AC|^2 = 3^2 + 4^2$$
$$|AC| = \pm 5$$

Pituus on positiivinen, joten $|AC| = 5$.

Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota *ABC* ja *DCE.*

Kolmioilla on yhteinen kulma C ja suora kulma vastinkulmana.
Näin ollen kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

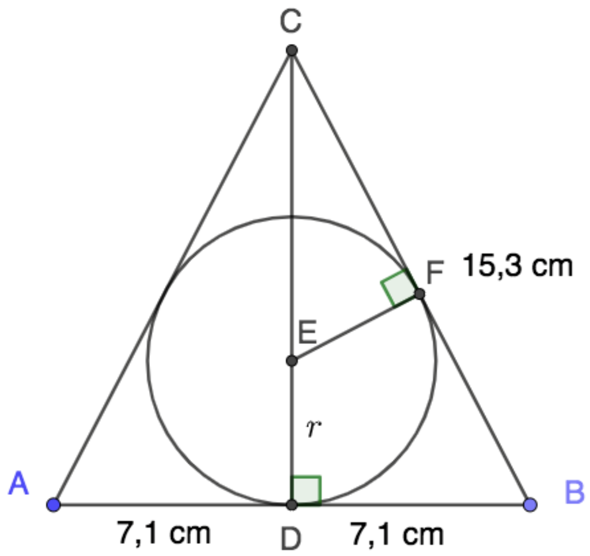
Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|}$$
$$\frac{r}{3} = \frac{4-r}{5}$$
$$r = \frac{3}{2}$$

Ympyrän säde on $\frac{3}{2}$.

Vastaus $\frac{3}{2}$

11.21



Piirretään mallikuva.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r.*

Ympyrä sivuaa kolmion kylkeä pisteessä *F.*

Piirretään ympyrän säde *EF*, joka on kohtisuorassa janaa *CB* vastaan.

Tasakylkisen kolmion *ABC* korkeusjana puolittaa janan *AB* ja synnyttää suorakulmaisen kolmion *DBC.*

Lasketaan tasakylkisen kolmion *ABC* korkeus *CD* Pythagoraan lauseen avulla.

$$|CD|^2 + 7{,}1^2 = 15{,}3^2$$
$$|CD| = \pm\, 13{,}552\ldots\ \text{(cm)}$$

Tutkitaan kahta suorakulmaista kolmiota *EFC* ja *DBC.*

Kolmioilla on yhteinen kulma C ja suora kulma vastinkulmana.
Näin ollen kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|EF|}{|DB|}$$
$$\frac{13{,}552\ldots - r}{15{,}3} = \frac{r}{7{,}1}$$
$$r = 4{,}295\ldots\ \text{(cm)}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

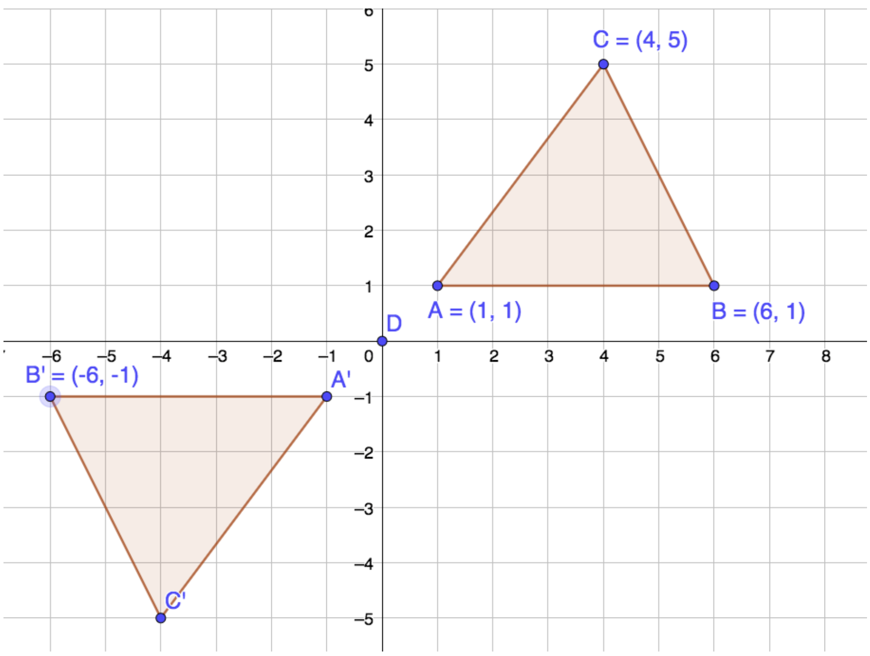
$$A = \pi \cdot (4{,}295\ldots\ \text{cm})^2 = 57{,}953\ldots\ \text{cm}^2 \approx 58{,}0\ \text{cm}^2$$

Vastaus 58,0 cm^2

11.22

a)

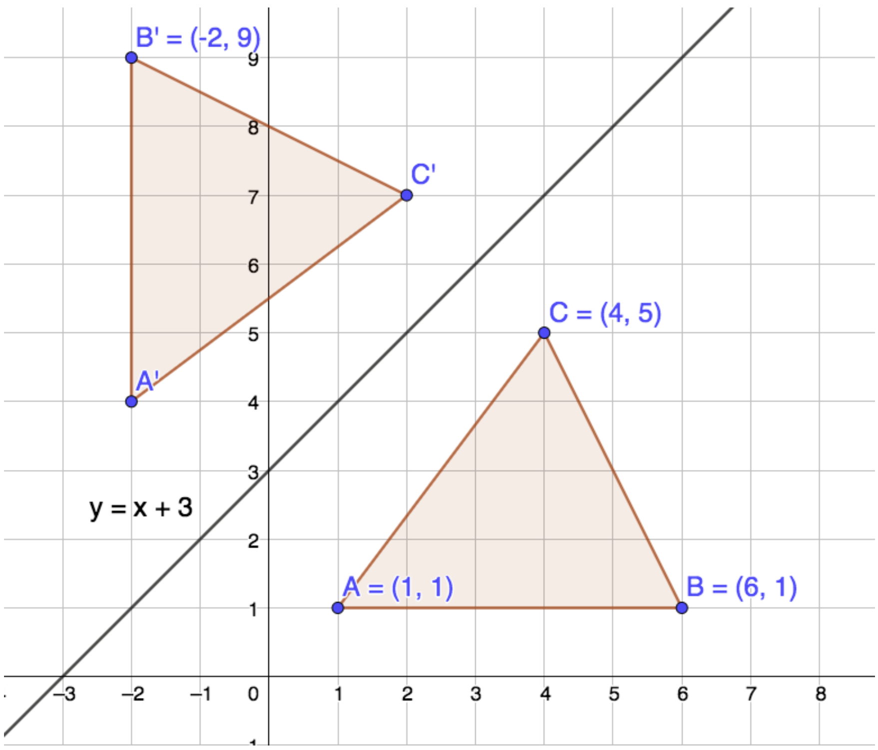
Piirretään ensin pisteet *A, B* ja *C.* Muodostetaan näiden pisteiden avulla kolmio monikulmio-työkalulla. Peilataan kolmio pisteen $D(0, 0)$ suhteen peilaus-työkalulla.



Pisteen B vastinpisteen B' koordinaatit ovat $(-6, -1)$.

b)

Piirretään suora $y = x + 3$ ja peilataan kolmio suoran suhteen peilaus-työkalulla.



Pisteen B vastinpisteen B' koordinaatit ovat $(-2, 9)$.

Vastaus **a)** $(-6, 1)$

b) $(-2, 9)$