

3 Jatkuva todennäköisyysjakauma

3.1 Jatkuvan jakauman kuvaaminen

139.

a) Korkeintaan kaksi vuotta kestäneet komponentit kuuluvat kahteen alimpaan luokkaan.

$$38 \% + 22 \% = 60 \%$$

Korkeintaan kaksi vuotta kestäneitä komponentteja oli 60 %.

b) Yli viisi vuotta kestäneet komponentit kuuluvat kolmeen ylimpään luokkaan.

$$3 \% + 5 \% + 1 \% = 9 \%$$

Yli viisi vuotta kestäneitä komponentteja oli 9 %.

c) Yli kaksi vuotta mutta korkeintaan viisi vuotta kestäneitä komponentteja oli

$$18 \% + 6 \% + 7 \% = 31 \%$$

140.

Todennäköisyys vastaa tiheysfunktion kuvaajan alle jäävää pinta-alaa.

a) $P(X \leq 2) = 0,6321 \approx 0,63$

b) Tiheysfunktion kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän alueen kokonaispinta-ala on $1 = 100 \%$.

$$P(X > 5) = 1 - 0,9179 = 0,0821 \approx 0,08$$

c) Tiheysfunktion välillä $[2, 5]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,9179 - 0,6321 = 0,2858 \approx 0,29.$$

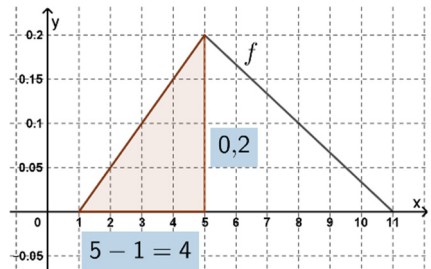
141.

Hyvä muistaa:

Tiheysfunktion kuvaajan ja x -akselin väliin jäävä kokonaispinta-ala on **1** (eli 100 %).

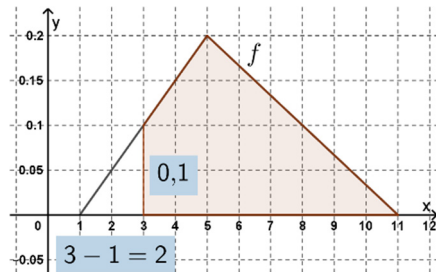
a) Tapahtuman $X \leq 5$ todennäköisyys saadaan laskemalla kohdan $x = 5$ vasemmalle puolelle rajautuvan kolmion pinta-ala.

$$P(X \leq 5) = \frac{4 \cdot 0,2}{2} = 0,4$$

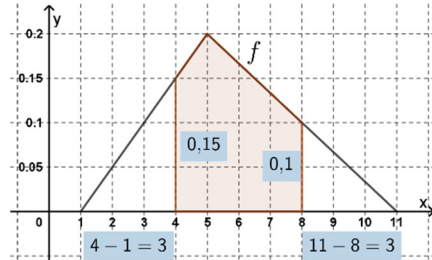


b) Tapahtuman $X > 3$ todennäköisyys saadaan laskemalla kohdan $x = 3$ oikealle puolelle rajautuvan alueen pinta-ala. Tämä saadaan vähentämällä kokonaispinta-alasta vasemmalle rajautuvan kolmion pinta-ala.

$$P(X > 3) = \mathbf{1} - \frac{2 \cdot 0,1}{2} = 0,9$$



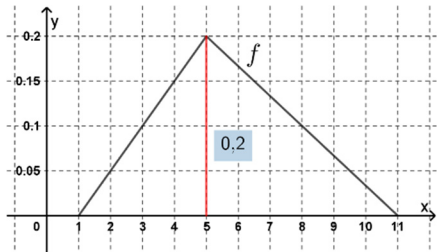
c) Tapahtuman $4 < X \leq 8$ todennäköisyys saadaan laskemalla välillä $[4, 8]$ rajautuvan alueen pinta-ala. Tämä saadaan esimerkiksi vähentämällä kokonaispinta-alasta kohdan $x = 4$ vasemmalle puolelle ja kohdan $x = 8$ oikealle puolelle rajautuvien kolmioiden pinta-alat.



$$P(4 < X \leq 8) = \mathbf{1} - \frac{3 \cdot 0,15}{2} - \frac{3 \cdot 0,1}{2} = 0,625$$

d) Janan pinta-ala on nolla, joten tapahtuman $X = 5$ todennäköisyys on nolla.

$$P(X = 5) = 0$$



Huomaa: Satunnaismuuttujan arvot sijoittuvat todennäköisimmin väleille, joilla todennäköisyys on tihein. Lähellä arvoa $x = 5$ olevat muuttujan arvot ovat todennäköisimpiä, koska tiheysfunktion f arvo on suurimmillaan (kuvaaja on korkeimmillaan). Yksittäisen arvon todennäköisyys on kuitenkin nolla.

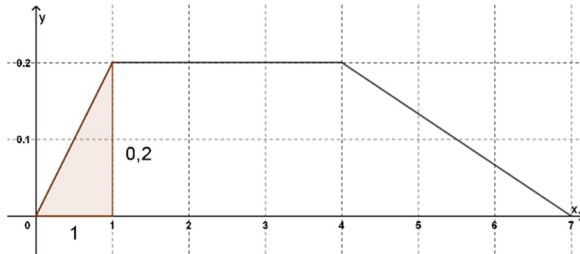
142.

a) Tiheysfunktion f arvo on positiivinen välillä $[0, 7]$.

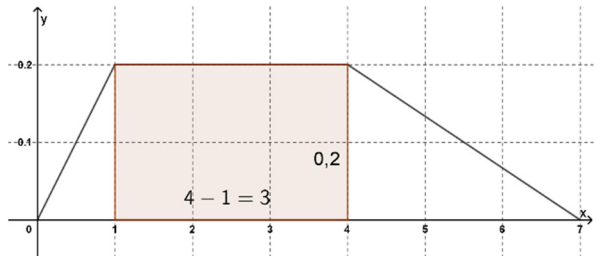
Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat siis välillä $0 \leq X \leq 7$.

b) Tapahtuman $X < 1$ todennäköisyys saadaan laskemalla suorakulmaisen kolmion pinta-ala.

$$P(X < 1) = \frac{1 \cdot 0,2}{2} = 0,1$$



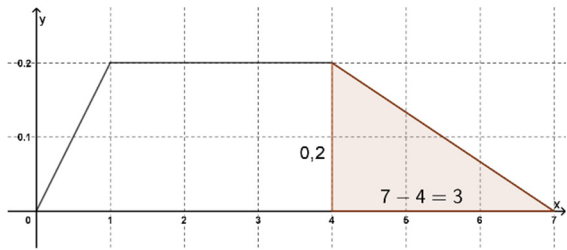
c) Tapahtuman $1 \leq X \leq 4$ todennäköisyys saadaan laskemalla välillä $[1, 4]$ rajautuvan suorakulmion pinta-ala.



$$P(1 \leq X \leq 4) = \underbrace{(4 - 1)}_{\text{kanta}=3} \cdot 0,2 = 0,6$$

d) Tapahtuman $X > 4$ todennäköisyys saadaan laskemalla suorakulmaisen kolmion pinta-ala. Kolmion kanta on $7 - 4 = 3$ ja korkeus on $0,2$.

$$P(X > 4) = \frac{3 \cdot 0,2}{2} = 0,3.$$

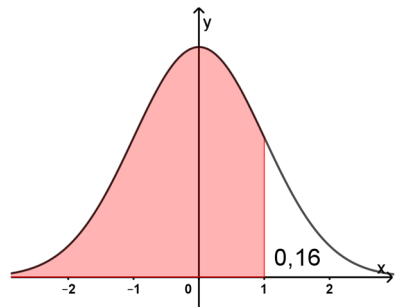
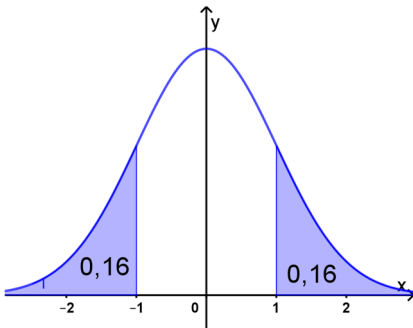


143.

a) Jakauma on symmetrinen y -akselin suhteen, joten kokonaispinta-alasta puolet on kohdan $x = 0$ oikealla puolella.

Siis $P(X \geq 0) = 0,50$.

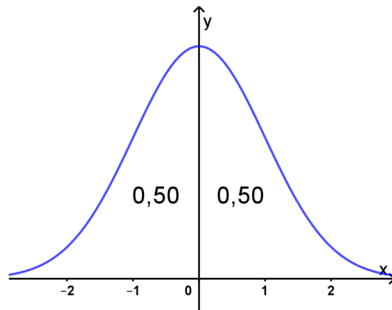
b) Arvot $x = -1$ ja $x = 1$ ovat yhtä kaukana jakauman symmetria-akselista, joten kuvaan sinisellä merkityt pinta-alat ovat yhtä suuret. Siis $P(X \leq -1) = 0,16 = P(X \geq 1)$.



Kysytty todennäköisyys on

$$P(X \leq 1) = 1 - 0,16 = 0,84.$$

c) Mediaani on se muuttujan arvo x , jota pienempiä on puolet (50 %) ja jota suurempia on puolet (50 %) arvoista. Mediaanin sijaitsee siis jakauman puolivälissä kohdassa, jossa molemmille puolille jää puolet kokonaistodennäköisyydestä (0,50 ja 0,50).



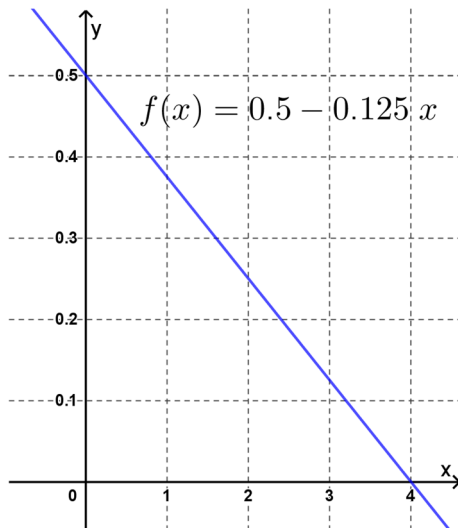
Symmetrian vuoksi jakauman mediaani on $M_d = 0$.

Symmetrisissä jakaumissa odotusarvo on yhtä suuri kuin mediaani, joten odotusarvo on $\mu = 0$.

144.

Funktion $f(x) = 0,5 - 0,125x$ lauseke kannattaa tallentaa laskimen muistiin.

a) Piirretään funktion $f(x) = 0,5 - 0,125x$ kuvaaja.



Muuttuja x ilmaisee karhun etäisyyttä tiestä, joten $x \geq 0$ (km).

Tiheysfunktioilla f on ominaisuuudet:

1) Funktion f arvo on positiivinen tai nolla,

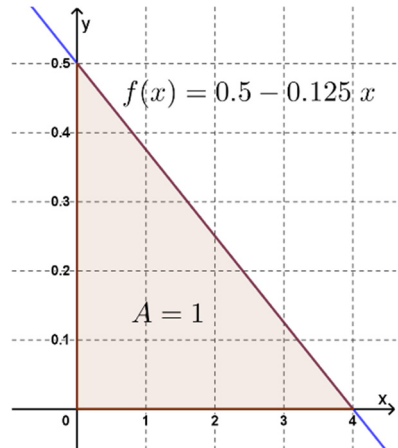
$$f(x) \geq 0$$

$$0,5 - 0,125x \geq 0$$

$$x \leq 4 \text{ (km)}$$

2) Funktion f kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

$$\frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1$$



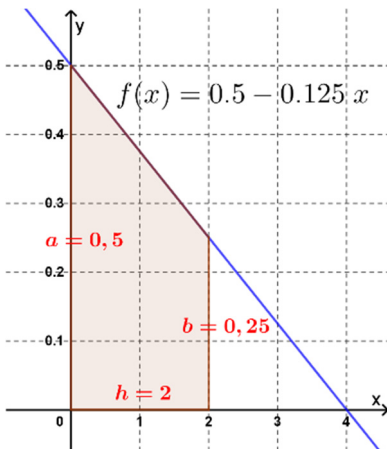
Muuttujan x arvot ovat siis välillä $0 \leq x \leq 4$ (km).

b) Kysytty todennäköisyys vastaa kuvaa väritetyn puolisuunnikkaan pinta-alaa.

Lasketaan tiheysfunktion f arvo kohdassa $x=2$.

Laskimella: $f(2) = 0,25$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala kaavan avulla:



$$P(X < 2) = \frac{0,5 + 0,25}{2} \cdot 2 = 0,75.$$

Todennäköisyys saadaan myös
komplementtisäännöllä:

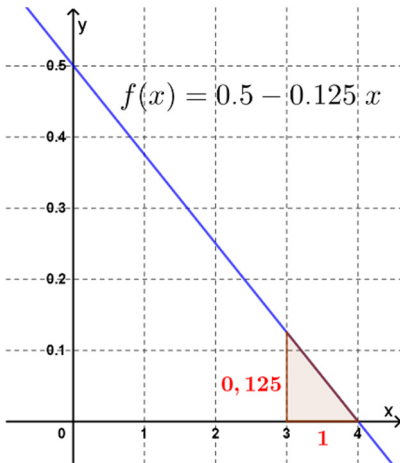
$$P(X < 2) = 1 - \frac{2 \cdot 0,25}{2} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

c) Kysytty todennäköisyys vastaa kuvaa väritetyn kolmion pinta-alaa.

Kolmion korkeus on tiheysfunktion f arvo kohdassa $x=3$.

Laskimella: $f(3) = 0,125$.

Todennäköisyysdeksi saadaan:



$$P(X > 3) = \frac{1 \cdot 0,125}{2} = 0,0625.$$

145.

a) Symmetrian perusteella

$$P(6 < X < 8) = \frac{0,50}{2} = 0,25.$$

b) Symmetrian perusteella

$$P(4 < X < 6) = P(10 < X < 12) = 0,16.$$

Siis

$$P(4 < X < 10) = 0,16 + 0,50 = 0,66.$$

c) Puolet pinta-alasta (eli todennäköisyydestä) on odotusarvoa $\mu = 8$ suurempia. Toisaalta,

$$P(8 < X < 12) = 0,25 + 0,16 = 0,41.$$

Siis

$$P(X > 12) = 0,50 - 0,41 = 0,09.$$

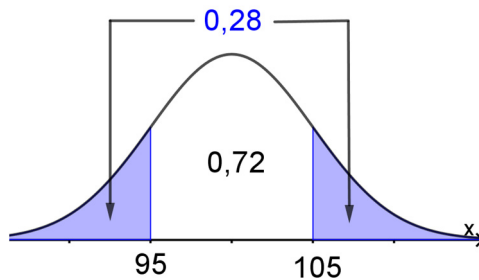
146.

a) Symmetrian perusteella

$$P(100 < X < 115) = \frac{0,72}{2} = 0,36.$$

b) Komplementtisäännön mukaan ”häntiin” jää yhteensä pinta-ala.

$$1 - 0,72 = 0,28.$$



Symmetrian perusteella puolet tästä pinta-alasta on ”oikeanpuoleisessa” hännässä. Siis,

$$P(X > 105) = \frac{0,28}{2} = 0,14.$$

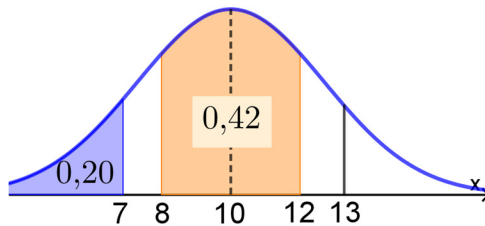
c) Tapahtuman $X \geq 90$ määrittämiseksi tässä kappaleessa esitetyillä menetelmillä tulisi tuntea vastatapahtuman $X < 90$ todennäköisyys tai odotusarvon suhteen symmetrisen tapahtuman $X \leq 100$ (tai $X > 100$) todennäköisyys.

Annetuilla tiedoilla ei siis voida päätellä todennäköisyyttä $P(X \geq 90)$.

Lisätieto: Kappaleessa 3.2 opimme menetelmiä, joilla tämäkin todennäköisyys on mahdollista ratkaista annetuilla tiedoilla.

147.

Mallikuva:



Arvot $X = 12$ ja $X = 8$ sekä $X = 13$ ja $X = 7$ ovat yhtä kaukana odotusarvosta. Symmetrian perusteella välillä $[12, 13]$ on yhtä suuri pinta-ala kuin välillä $[7, 8]$.

Symmetrian perusteella välillä $8 < X < 10$ on pinta-ala

$$P(8 < X < 10) = \frac{0,42}{2} = 0,21.$$

Odotusarvon $\mu = 10$ vasemmalla puolella on pinta-ala 0,50. Siis välillä $7 < X < 8$ on pinta-ala

$$P(7 < X < 8) = 0,50 - 0,21 - 0,20 = 0,09.$$

Kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan

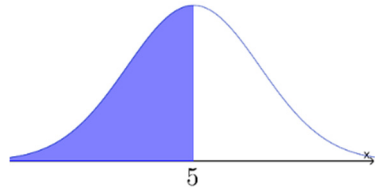
$$P(12 < X < 13) = P(7 < X < 8) = 0,09.$$

148.

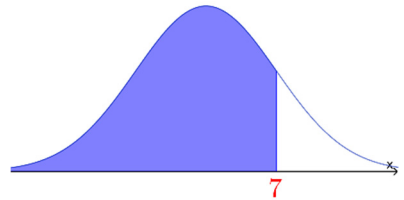
Normaalijakaumakuvaajat voidaan piirtää esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Sovellukseen syötetään jakauman odotusarvo $\mu = 5$ ja keskihajonta $\sigma = 2$.

a) Valitaan sovelluksessa asetus "vasemmanpuoleinen" ja syötetään yläraja 5. Puolet (50 %) muuttujan arvoista on odotusarvoa pienempiä, joten

$$P(X \leq 5) = 0,50.$$



b) Valitaan sovelluksessa asetus "vasemmanpuoleinen" ja syötetään yläraja 7.



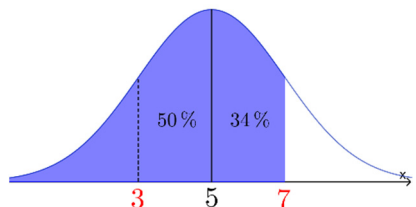
Lasketaan yhden keskihajonnan verran odotusarvosta poikkeavat arvot:

- $\mu - \sigma = 5 - 2 = 3$ (vasemmalla)
- $\mu + \sigma = 5 + 2 = 7$ (oikealla)

Prosenttisäännön mukaan 68 % muuttujan X arvoista on välillä $[3, 7]$. Symmetrian perusteella puolet näistä arvoista, eli $\frac{68\%}{2} = 34\%$ on odotusarvon oikealla puolella, eli välillä $[5, 7]$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(X < 7) = 0,50 + 0,34 = 0,84.$$



c) Valitaan sovelluksessa asetus "väli" ja syötetään alaraja 1 ja yläraja 5.

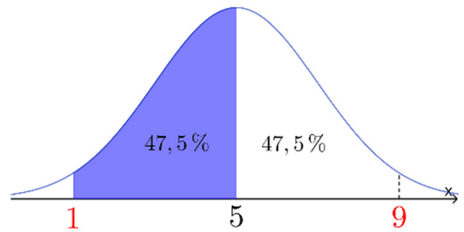
Lasketaan kahden keskihajonnan verran odotusarvosta poikkeavat arvot:

- $\mu - 2\sigma = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ (vasemmalla)
- $\mu + 2\sigma = 5 + 2 \cdot 2 = 9$ (oikealla)

Prosenttisäännön mukaan 95 % muuttujan X arvoista on välillä $[1, 9]$. Symmetrian perusteella puolet näistä arvoista, eli $\frac{95\%}{2} = 47,5\%$ on odotusarvon vasemmalla puolella, eli välillä $[1, 5]$.

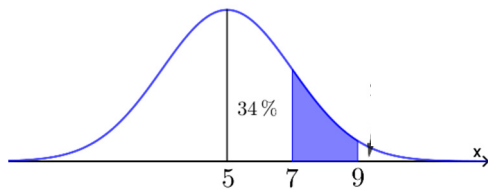
Kysytty todennäköisyys on

$$P(1 \leq X < 5) = 0,475 \approx 0,48.$$



d) Välillä $[5, 7]$ on 34 % arvoista. Välillä $[5, 9]$ on 47,5 % arvoista, joten kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(7 < X \leq 9) &= 0,475 - 0,34 \\ &= 0,135 \approx 0,14 \end{aligned}$$

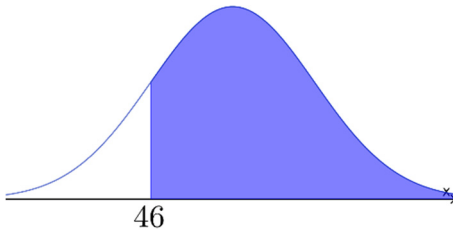


149.

Satunnaismuuttuja X = "hajuvesipullossa olevan hajuveden määrä (ml)" noudattaa normaalijakaumaa.

Odotusarvo on $\mu = 50$ (ml) ja keskihajonta $\sigma = 4$ (ml).

a) Lasketaan tapahtuman $X \geq 46$ todennäköisyys.



Normaalijakaumakuvaajat voidaan piirtää esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Sovellukseen syötetään $\mu = 50$ ja $\sigma = 4$. Valitaan asetus "oikeanpuoleinen" ja syötetään alaraja 46.

Lasketaan yhden keskihajonnan verran odotusarvosta poikkeavat arvot.

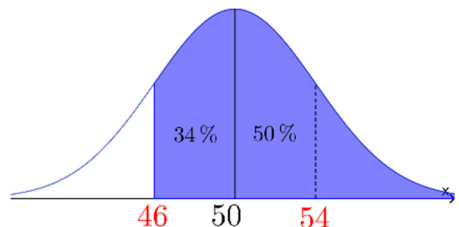
- $\mu - \sigma = 50 - 4 = 46$ (vasemmalla)
- $\mu + \sigma = 50 + 4 = 54$ (oikealla)

Prosenttisäännön mukaan 68 % muuttujan X arvoista on välillä $[46, 54]$. Symmetrian perusteella puolet näistä arvoista, eli

$\frac{68\%}{2} = 34\%$ on odotusarvon vasemmalla puolella, eli välillä $[46, 50]$.

Kun lisäksi huomioidaan, että puolet arvoista on odotusarvoa suurempia, kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan

$$P(X \geq 46) = 0,34 + 0,50 = 0,84.$$



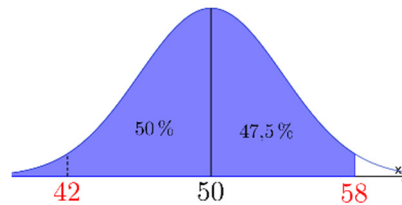
b) Lasketaan tapahtuman $X < 58$ todennäköisyys.

Lasketaan kahden keskihajonnan verran odotusarvosta poikkeavat arvot.

- $\mu - 2\sigma = 50 - 2 \cdot 4 = 42$ (vasemmalla)
- $\mu + 2\sigma = 50 + 2 \cdot 4 = 58$ (oikealla)

Prosenttisäännön mukaan 95 % muuttujan X arvoista on välillä $[42, 58]$. Symmetrian perusteella puolet näistä arvoista, eli $\frac{95\%}{2} = 47,5\%$ on odotusarvon oikealla puolella, eli välillä $[50, 58]$.

Kun lisäksi huomioidaan, että puolet arvoista on odotusarvoa pienempiä, kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan



$$P(X < 58) = 0,50 + 0,475 = 0,975 \approx 0,98.$$

c) Muuttujan arvoista 47,5 % on välillä $[42, 50]$ ja 34 % on välillä $[50, 54]$.

$$P(42 < X < 54) = 0,475 + 0,34 = 0,815 \approx 0,82$$

150.

Satunnaismuuttuja X = "raskausajan kesto (vrk)" noudattaa normaalijakaumaa.

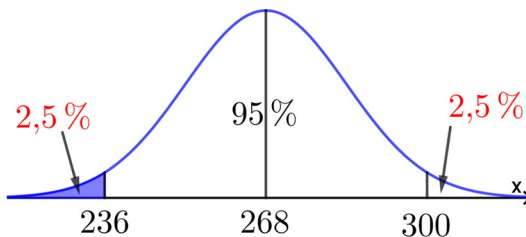
Odotusarvo on $\mu = 268$ (vrk) ja keskihajonta $\sigma = 16$ (vrk).

a) Prosenttisäännön mukaan 95 % satunnaismuuttujan arvoista on korkeintaan kahden keskihajonnan päästä odotusarvosta.

- $\mu - 2\sigma = 268 - 2 \cdot 16 = 236$ (vrk)
- $\mu + 2\sigma = 268 + 2 \cdot 16 = 300$ (vrk)

Kestoltaan keskimääräinen 95 % raskauksista on välillä 236 – 300 päivää.

b) Symmetrian perusteella arvoa 236 pienempiä arvoja on $\frac{5\%}{2} = 2,5\%$.



Lyhin 2,5 % raskauksista on kestoltaan alle 236 päivää.

c) Pituudeltaan yli 300 päivää kestäviä raskauksia on noin 2,5 %.

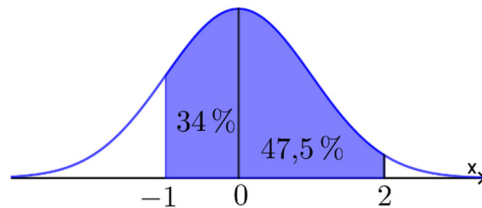
151.

a) Prosenttisäännön mukaan korkeintaan yhden hajonnan päässä odotusarvosta, eli välillä $-1 < X < 1$ on 68 % arvoista. Siis

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0,68 = 68 \, \%.$$

b) Symmetrian perusteella välillä $[-1, 0]$ on $\frac{68 \, \%}{2} = 34 \, \%$ muuttujan arvoista.

Toisaalta, prosenttisäännön mukaan korkeintaan kahden hajonnan päässä odotusarvosta, eli välillä $-2 < X < 2$ on 95 % arvoista. Symmetrian perusteella välillä $[0, 2]$ on $\frac{95 \, \%}{2} = 47,5 \, \%$ muuttujan arvoista.

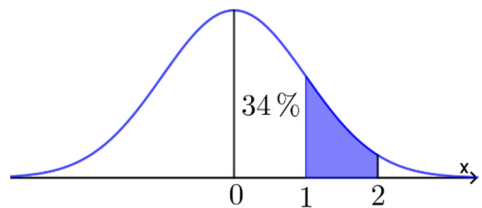


Siis $P(-1 \leq X \leq 2) = 0,34 + 0,475 = 0,812 \approx 82 \, \%$.

c) Välillä $[0, 2]$ on 47,5 % muuttujan arvoista ja välillä $[0, 1]$ on 34 % arvoista.

Siis

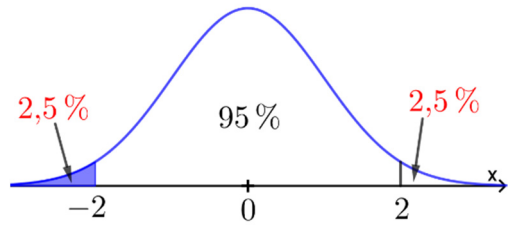
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= 0,475 - 0,34 \\ &= 0,135 \approx 14 \, \%. \end{aligned}$$



d) Arvoista 95 % on välillä $[-2, 2]$.

Symmetrian perusteella arvoa -2 pienempiä arvoja on

$$\frac{5\%}{2} = 2,5\% \approx 3\%.$$



152.

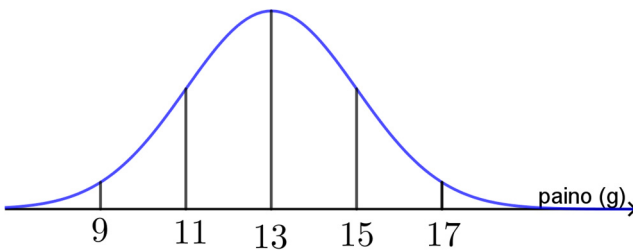
Satunnaismuuttuja $X = \text{"puuterirasian paino (g)"}$ noudattaa normaalijakaumaa.

$$\mu = 13 \text{ ja } \sigma = 2$$

Lasketaan yhden ja kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta olevat arvot.

- $\mu - 2\sigma = 13 - 2 \cdot 2 = 9$
- $\mu - \sigma = 13 - 2 = 11$
- $\mu + \sigma = 13 + 2 = 15$
- $\mu + 2\sigma = 13 + 2 \cdot 2 = 17$

Mallikuva:

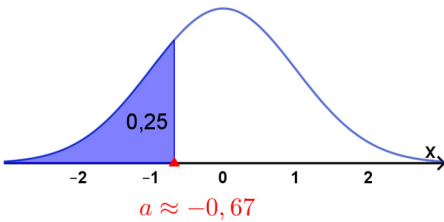


Normaalijakauman ominaisuuksien perusteella voidaan esimerkiksi sanoa, että

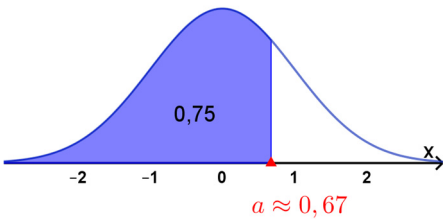
- suurimmalla osalla puuterirasioista paino on lähellä arvoa 13 g
- puolet rasioista painaa alle 13 g ja puolet yli 13 g
- noin 68 % rasioista painaa 11 g – 15 g
- noin 95 %, eli lähes kaikki rasiat, painavat 9 g – 17 g.

153.

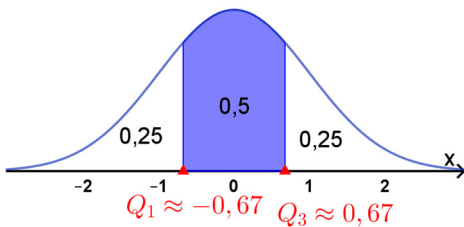
a) Ohjelmiston avulla arvoksi a saadaan $a \approx -0,67$. Siis $Q_1 \approx -0,67$.



b) Ohjelmiston avulla arvoksi a saadaan $a \approx 0,67$. Siis $Q_3 \approx 0,67$.



c) Muuttujan arvoista keskimäinen 50 % on kvartiilivälillä eli välillä $-0,67 - 0,67$.

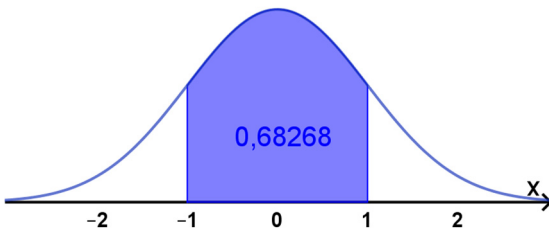


154.

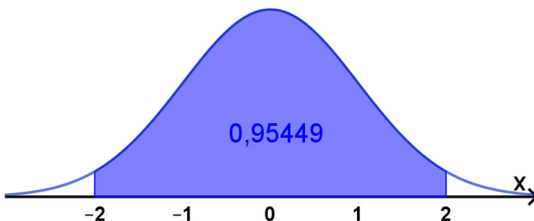
Pinta-alojen eli todennäköisyyksien tarkat arvot saadaan esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella valitsemalla asetuksista vaihtoehto "väli" ja syöttämällä muuttujan arvojen ala- ja yläraja.

a) $P(-1 \leq X \leq 1) = 0,6826\dots$

Siis, muuttujan arvoista noin 68,3 % on korkeintaan yhden hajonnan päässä odotusarvosta.



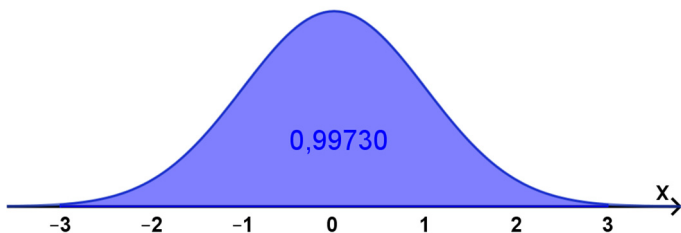
b) $P(-2 \leq X \leq 2) = 0,9544\dots$



Siis, muuttujan arvoista noin 95,4 % on korkeintaan kahden hajonnan päässä odotusarvosta.

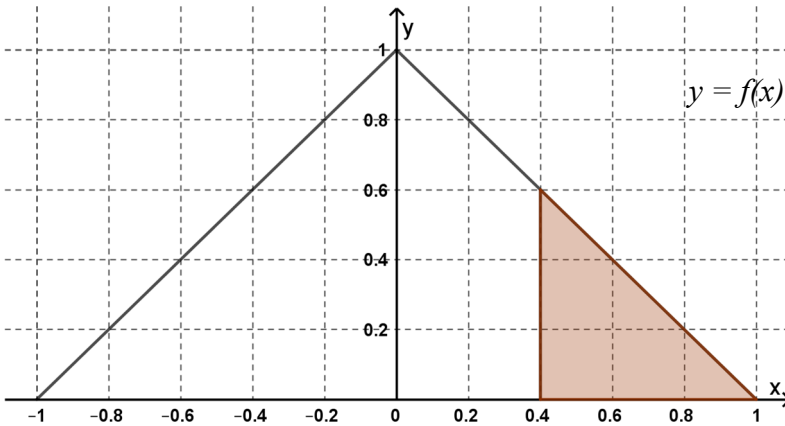
c) $P(-3 \leq X \leq 3) = 0,99730\dots$

Siis muuttujan arvoista noin 99,7 % on korkeintaan kolmen hajonnan päässä odotusarvosta. Siis, lähes kaikki arvot ovat korkeintaan kolmen hajonnan päässä odotusarvosta.



155.

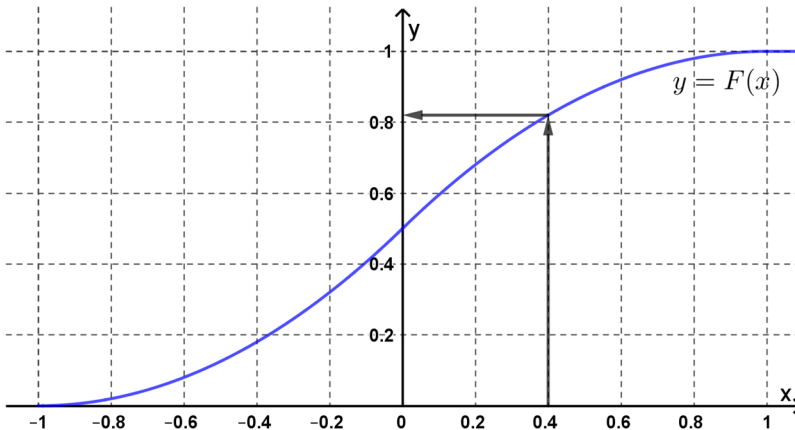
a) Tiheysfunktion kuvaajalta todennäköisyyden arvo lasketaan pinta-alana.



Kolmion pinta-ala on

$$P(X > 0,4) = \frac{0,6 \cdot 0,6}{2} = 0,18.$$

b) Kertymäfunktion kuvaajalta voidaan arvioida kertymätodennäköisyys eli tiettyyn arvon saakka kertynyt todennäköisyys.



Kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq 0,4) \approx 0,82.$$

Komplementtisäännön mukaan

$$P(X > 0,4) \approx 1 - 0,82 = 0,18.$$

156.

A: Tiheysfunktio f on vakiofunktio (sen arvo ei muutu, vaan on koko ajan sama). Pinta-ala eli todennäköisyys kertyy tasaisesti, joten kertymäfunktio on lineaarinen funktio.

Lisäksi x -akselilta huomataan, että muuttujan X suurin arvo on $X = 3$, joten kertymäfunktio F on saavuttanut maksimiarvonsa 1 kohdassa $x = 3$.

Kertymäfunktio on siis kuvassa II.

B: Tiheysfunktio f on lineaarinen funktio. Pinta-ala eli todennäköisyys kertyy kiihtyvään tahtiin, eli kertymäfunktion kuvaaja jyrkkenee muuttujan arvon suuretessa.

Lisäksi x -akselilta huomataan, että muuttujan X suurin arvo on $X = 4$, joten kertymäfunktio F on saavuttanut maksimiarvonsa 1 kohdassa $x = 4$.

Kertymäfunktio on siis kuvassa III.

C: Normaalijakauman kertymäfunktio on kuvassa I.

157.

a) Luetaan kertymäfunktion arvo taulukosta.

$$P(X < 16) = F(16) = 0,6038$$

b) Kysytty todennäköisyys saadaan komplementtisäännöllä.

$$P(X \geq 12) = 1 - F(12) = 1 - 0,2149 = 0,7851$$

c) Kahden rajan väliin jäävä todennäköisyys saadaan kertymätodennäköisyyksien erotuksena.

$$P(14 \leq X < 18) = F(18) - F(14) = 0,7851 - 0,3962 = 0,3889$$

d) Jakauman odotusarvo on 15, eli kertymätodennäköisyys kohtaan $a = 15$ on 0,50.

$$P(X \leq 15) = F(15) = 0,50$$

Kahden rajan väliin jäävä todennäköisyys saadaan kertymien erotuksena.

$$P(14 < X \leq 15) = F(15) - F(14) = 0,50 - 0,3962 = 0,1038$$

158.

a) Määritetään tapahtuman $X < 500$ todennäköisyys.

Luetaan kertymäfunktion arvo taulukosta.

$$P(X < 500) = F(500) = 0,3694 \approx 37 \%$$

Kahvipaketeista noin 37 % on painoltaan alle 500 g.

b) Määritetään tapahtuman $X \geq 510$ todennäköisyys, joka saadaan komplementtisäännöllä.

$$P(X \geq 510) = 1 - F(510) = 1 - 0,6306 = 0,3694 \approx 37 \%$$

Kahvipaketeista noin 37 % on painoltaan vähintään 510 g.

c) Määritetään tapahtuman $490 < X < 520$ todennäköisyys, joka saadaan kertymätodennäköisyyksien erotuksena.

$$\begin{aligned} P(490 < X < 520) &= F(520) - F(490) \\ &= 0,8413 - 0,1586 \\ &= 0,6827 \approx 68 \% \end{aligned}$$

Kahvipaketeista noin 68 % on painoltaan välillä 490 g – 520 g.

159.

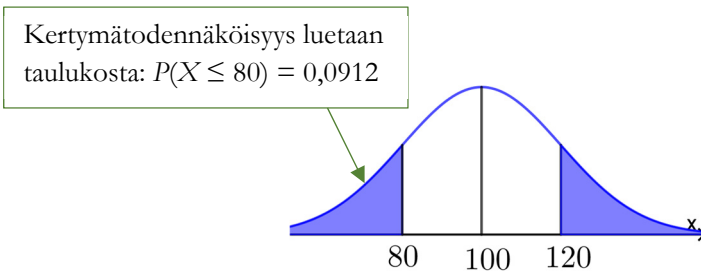
a) Kahden rajan väliin jäävä todennäköisyys saadaan kertymien erotuksena.

$$P(80 \leq X < 100) = F(100) - F(80)$$

Jakauman odotusarvo on 100, eli kertymätodennäköisyys kohtaan $a = 100$ on 0,50.

$$\begin{aligned} P(80 \leq X < 100) &= F(100) - F(80) \\ &= 0,50 - 0,0912 \\ &= 0,4088 \approx 0,41 \end{aligned}$$

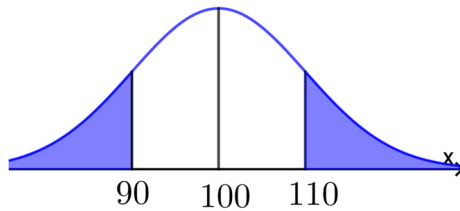
b) Arvot 120 ja 80 ovat yhtä kaukana jakauman odotusarvosta 100, mutta vastakkaisilla puolilla (erotus on 20).



Symmetrian perusteella

$$P(X > 120) = P(X \leq 80) = 0,0912 \approx 0,09.$$

c) Arvot 110 ja 90 ovat yhtä kaukana jakauman odotusarvosta 100, mutta vastakkaisilla puolilla (erotus on 10).

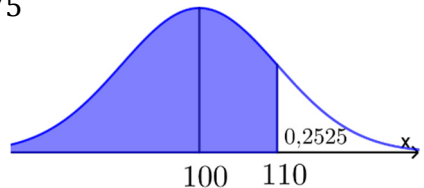


Symmetrian perusteella

$$P(X > 110) = P(X \leq 90) = 0,2525.$$

Kysytty todennäköisyys saadaan komplementtisäännöllä.

$$P(X \leq 110) = 1 - 0,2525 = 0,7475 \approx 0,75$$



d) Arvon 115 kertymätodennäköisyys nähdään taulukosta.

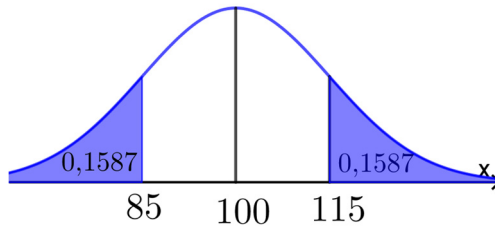
$$P(X \leq 115) = 0,8413.$$

Tällöin komplementtisäännön mukaan

$$P(X > 115) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Rajana olevat arvot 85 ja 115 ovat yhtä kaukana jakauman odotusarvosta 100, mutta vastakkaisilla puolilla (erotus on 15). Symmetrian perusteella

$$P(X \leq 85) = 0,1587.$$



Kysytty todennäköisyys on

$$P(85 \leq X \leq 115) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826 \approx 0,68.$$

160.

a) Lasketaan tapahtuman $X \leq 10$ todennäköisyys.

Kertymätodennäköisyyden arvo luetaan kertymäfunktion kuvaajalta.

$$P(X \leq 10) = F(10) \approx 0,50$$

b) Lasketaan tapahtuman $X > 12$ todennäköisyys.

Kertymätodennäköisyyden arvo luetaan kertymäfunktion kuvaajalta.

$$P(X \leq 12) = F(12) \approx 0,79$$

Tapahtuman $X > 12$ todennäköisyys saadaan komplementtisäännöllä.

$$P(X > 12) \approx 1 - 0,79 = 0,21$$

c) Lasketaan tapahtuman $8 \leq X \leq 12$ todennäköisyys.

Kertymätodennäköisyyden arvot luetaan kertymäfunktion kuvaajalta.

$$P(X \leq 8) \approx 0,21 \quad \text{ja} \quad P(X \leq 12) \approx 0,79$$

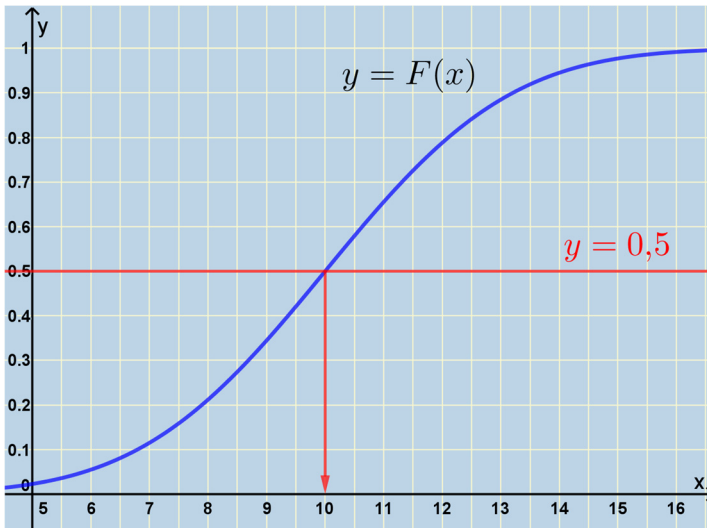
Tapahtuman $8 \leq X \leq 12$ todennäköisyys saadaan kertymätodennäköisyyksien erotuksena.

$$P(8 \leq X \leq 12) \approx 0,79 - 0,21 = 0,58$$

d) Jatkuvalle satunnaismuuttujalle yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla.

$$P(X = 10) = 0$$

e) Kertymäfunktion kuvaajalta voidaan arvioida odotusajan mediaani.



$M_d \approx 10$ (min).

Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan mediaani ja odotusarvo ovat yhtä suuret. Siis $\mu = 10$ (min).

Pizzaa joutuu odottamaan keskimäärin 10 min.

161.

X = ”junamatkan kesto (h)”

X noudattaa normaalijakaumaa.

a) Lasketaan tapahtuman $X \leq 2,5$ todennäköisyys.

Kertymätodennäköisyyden arvo luetaan kertymäfunktion kuvaajalta.

$$P(X \leq 2,5) = F(2,5) \approx 0,11$$

b) Lasketaan tapahtuman $3 \leq X \leq 4$ todennäköisyys.

Kertymätodennäköisyyden arvot luetaan kertymäfunktion kuvaajalta.

$$P(X \leq 3) \approx 0,34 \quad \text{ja} \quad P(X \leq 4) \approx 0,89$$

Tapahtuman $3 \leq X \leq 4$ todennäköisyys saadaan kertymätodennäköisyyksien erotuksena.

$$P(3 \leq X \leq 4) = F(4) - F(3) \approx 0,89 - 0,34 = 0,55$$

c) Kertymäfunktion kuvaajalta voidaan arvioida matka-ajan mediaani kertymätodennäköisyyttä 0,50 vastaavan muuttujan arvon x kohdalta.

$$Md \approx 3,25 \text{ (h)}.$$

Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan mediaani ja odotusarvo ovat yhtä suuret. Siis $\mu = 3,25 \text{ (h)}$.

Junamatka kestää siis keskimäärin noin 3,25 tuntia eli 3 tuntia ja 15 minuuttia.

d) Kertymätodennäköisyyden arvo saavuttaa maksimiarvonsa 1 muuttujan arvon $x \approx 5 \text{ (h)}$ kohdalla.

$$P(X \leq 5) \approx 1$$

Siis tapahtuma ”junamatka kestää korkeintaan 5 tuntia” on varma tapaus.

Junamatka kestää korkeintaan 5 tuntia.

162.

Tallennetaan kertymäfunktion $F(t) = 1 - 2^{-t/12,364}$ lauseke laskinohjelmiston muistiin.

X = ”atomin hajoamiseen kuluva aika (h)”

a) Kertymätodennäköisyyden arvo saadaan kertymäfunktion arvona. Lasketaan funktion arvot laskimen avulla.

$$P(X \leq 12) = F(12) = 0,4896 \dots \approx 0,49$$

$$P(X \leq 24) = F(24) = 0,7395 \dots \approx 0,74$$

Laskin.

b) Atomi hajoaa ensimmäisen vuorokauden jälkimmäisellä puoliskolla, kun $12 < X \leq 24$.

$$P(12 < X \leq 24) = F(24) - F(12) = 0,2498 \dots \approx 0,25$$

Laskin.

c) Lasketaan todennäköisyys, että atomi on hajoamatta ensimmäisen vuorokauden lopussa, eli $X > 24$.

$$P(X > 24) = 1 - F(24) = 0,2604 \dots \approx 26 \%$$

Laskin.

Kun atomeja on suuri määrä, todennäköisyys ilmaisee myös niiden atomien prosenttiosuuden, jotka ovat hajoamatta ensimmäisen vuorokauden lopussa. Näitä atomeja on siis 26 %.

163.

a) III

b) IV

c) I

d) Merkintä $P(a \leq X \leq b)$ tarkoittaa kohtien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävän alueen pinta-alaa. Merkintä $1 - P(a \leq X \leq b)$ tarkoittaa tämän alueen komplementtia eli kohdan $x = a$ vasemmalle ja kohdan $x = b$ oikealle puolelle jäävien alueiden pinta-alojen summaa.

II

164.

Odotusarvo 5 on jakauman keskikohdan eli huipun kohdalla.

a) Odotusarvoa suurempia arvoja on 50 %.

$$P(X \geq 5) = 0,50$$

Merkintä vastaa kuvaa IV.

b) Arvot 4 ja 6 ovat tasan yhden keskihajonnan ($\sigma = 1$) päässä odotusarvosta 5. Prosenttisäännön mukaan näiden arvojen väliin jää 68 % kaikista arvoista, eli pinta-ala 0,68.

$$P(4 < X \leq 6) = 0,68$$

Merkintä vastaa kuvaa III.

c) Symmetrian perusteella välille $5 < X < 6$ jää puolet b-kohdan pinta-alasta.

$$P(5 < X < 6) = \frac{0,68}{2} = 0,34$$

Merkintä vastaa kuvaa II.

d) Symmetrian perusteella välille $4 < X < 5$ jää puolet b-kohdan pinta-alasta. Puolet (50 %) muuttujan arvoista on odotusarvoa 5 pienempiä.

$$P(X \leq 4) = 0,50 - \frac{0,68}{2} = 0,50 - 0,34 = 0,16$$

Merkintä vastaa kuvaa I.

165.

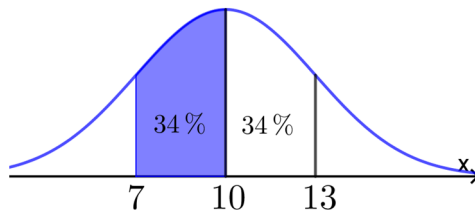
a) Puolet muuttujan arvoista on odotusarvoa 10 pienempiä ja puolet tätä suurempia. Muuttujan X mediaani on siis $Md = 10$.

b) $P(X < 10) = 0,50$

c) Arvo 7 on yhden keskihajonnan ($\sigma = 3$) päässä odotusarvosta 10 vasemmalla.

Prosenttisäännön mukaan muuttujan arvoista 68 % on korkeintaan yhden keskihajonnan päässä odotusarvosta eli välillä 7–13.

Symmetrian perusteella näistä arvoista puolet, eli $\frac{68\%}{2} = 34\%$ on odotusarvoa pienempiä.

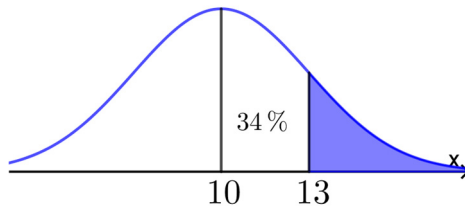


Siis:

$$P(7 < X < 10) = 0,34$$

Todennäköisyys ilmaisee myös pinta-alan, eli kysytty pinta-ala on 0,34.

d) Välillä $[10, 13]$ on 34 % muuttujan arvoista.



Puolet muuttujan arvoista on odotusarvoa suurempia, joten

$$P(X \geq 13) = 0,50 - 0,34 = 0,16 = 16 \, \%.$$

Muuttujan arvoista 16 % on vähintään 13.

e) Jatkuvalle satunnaismuuttujalle yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla.

$$P(X = 14) = 0$$

166.

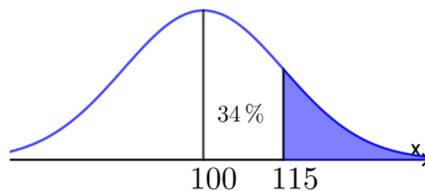
X = "älykkyystestissä saatu pistemäärä"

a) Lasketaan tapahtuman $X \leq 100$ todennäköisyys. Puolet satunnaismuuttujan arvoista on odotusarvoa 100 pienempiä, joten

$$P(X \leq 100) = 0,50 = 50 \, \%.$$

Arvo 115 on yhden keskihajonnan ($\sigma = 15$) päässä odotusarvosta 100. Prosenttisäännön mukaan

$$P(X \geq 115) = 0,50 - 0,34 = 0,16 = 16 \, \%.$$



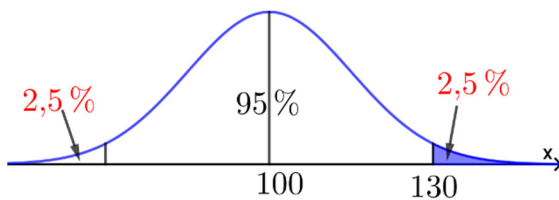
b) Prosenttisäännön mukaan 95 % muuttujan arvoista on korkeintaan kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta.

- $\mu - 2\sigma = 100 - 2 \cdot 15 = 70$
- $\mu + 2\sigma = 100 + 2 \cdot 15 = 130$

Keskimmäinen 95 % testiin osallistuneista (kun osallistujia on suuri määrä) saa testistä 70–130 pistettä.

c) Arvojen 70–130 väliin jää 95 % arvoista, joten symmetrian perusteella arvoa 130 suurempia arvoja on $\frac{5\%}{2} = 2,5\%$.

Siis menestynein 2,5 % osallistujista saa vähintään 130 pistettä.



167.

a) Odotusarvon vasemmalle puolelle jää pinta-ala 0,50.

$$P(-1,2 \leq X < 0) = 0,50 - 0,12 = 0,38$$

b) Todennäköisyys voidaan päätellä useita eri reittejä, esimerkiksi:

a-kohdan mukaan välille $[-1,2 ; 0]$ jäävä pinta-ala on 0,38.

Symmetrian perusteella välille $[0; 1,2]$ jää pinta-ala 0,38, joten

$$P(0 < X < 2) = 0,38 + 0,09 = 0,47.$$

c) Arvon $-1,2$ vasemmalle puolelle jää pinta-ala 0,12. Symmetrian perusteella arvon $1,2$ oikealle puolelle jää sama pinta-ala, 0,12, joten

$$P(X > 2) = 0,12 - 0,09 = 0,03.$$

168.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"yliaika (min)"}.$

a) $P(X \leq 2) = F(2) = 0,2$

b) Tapahtuman "tunti menee yliajalle korkeintaan 6 min" eli $X \leq 6$ todennäköisyys luetaan kertymäfunktion kuvaajalta. Kysytty todennäköisyys saadaan komplementtisäännöllä.

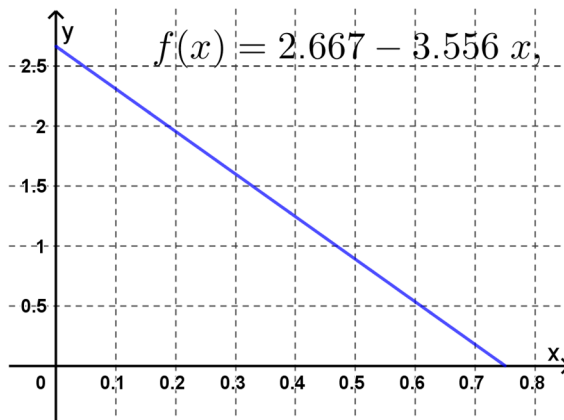
$$P(X \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - 0,6 = 0,4$$

c) Yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla, joten $P(X = 5) = 0.$

169.

Funktion $f(x) = 2,667 - 3,556x$, $0 \leq x \leq 0,75$, lauseke kannattaa tallentaa laskimen muistiin.

a) Piirretään funktion $f(x) = 2,667 - 3,556x$, $0 \leq x \leq 0,75$ kuvaaja.



Tiheysfunktion kuvaaja leikkaa y -akselin kohdassa $f(0) = 2,667$.

Lasketaan tiheysfunktion arvot.

x	$f(x)$
0.1	2.3114
0.25	1.778
0.5	0.889
0.75	0

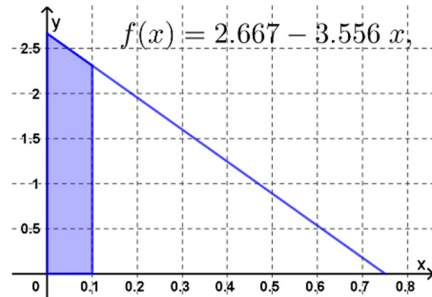
Kysytyjä todennäköisyyksiä vastaavat alueet ovat puolisuunnikkaita, joiden pinta-ala lasketaan kaavalla $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



Lasketaan todennäköisyydet pinta-alatulkinnan avulla.

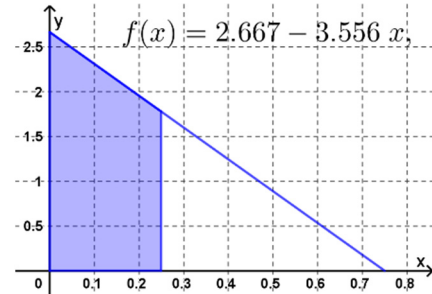
$$P(X \leq 0,1) = \frac{2,667 + 2,3114}{2} \cdot 0,1$$

$$= 0,24892 \approx 0,249$$



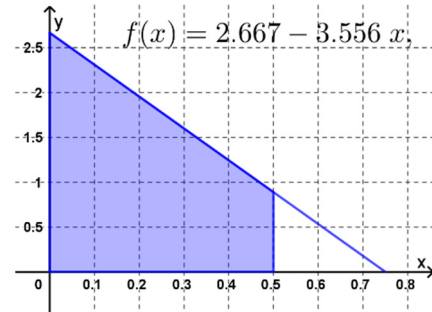
$$P(X \leq 0,25) = \frac{2,667 + 1,778}{2} \cdot 0,25$$

$$= 0,5556 \dots \approx 0,556$$



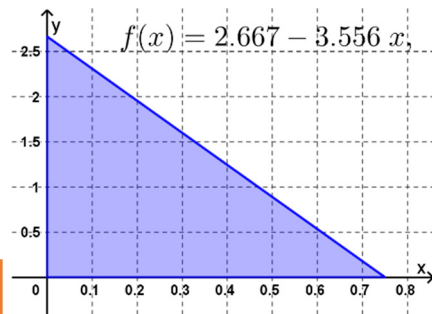
$$P(X \leq 0,5) = \frac{2,667 + 0,889}{2} \cdot 0,5$$

$$= 0,889.$$



$$P(X \leq 0,75) = \frac{2,667 + 0}{2} \cdot 0,75$$

$$= 1,000 \dots \approx 1.$$



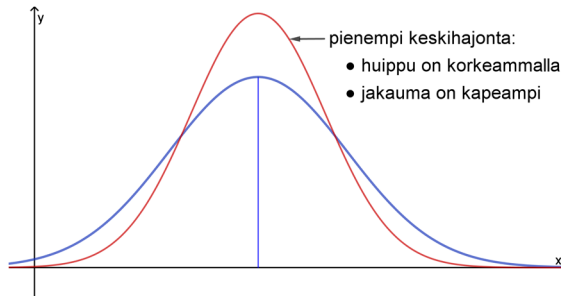
Huomaa: Arvo $x = 0,75$ on muuttujan suurin arvo, joten kertymätodennäköisyys kohtaan $x = 0,75$ on 1.

$$\text{b) } P(0,25 \leq X \leq 0,75) = 1 - 0,5556 \dots = 0,444 \dots \approx 0,44$$

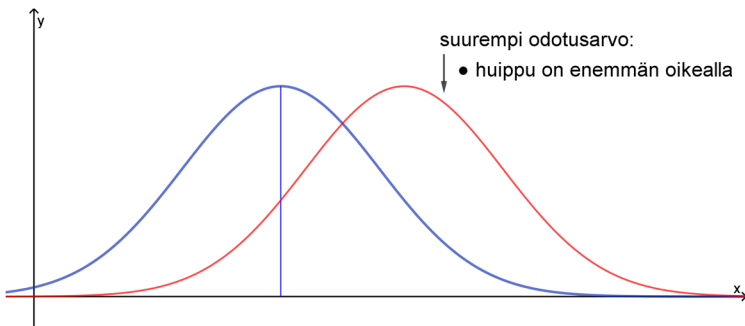
3.2 Normaalijakauma

170.

a) Jakauman sijainti eli huippukohta pysyy vaaka-akselilla ennallaan. Kun keskihajontaa pienennetään, kuvaajan korkeus kasvaa eli huippu nousee ja jakauma kapenee.



b) Kuvaajan korkeus ja leveys pysyvät ennallaan. Kun jakauman odotusarvoa suurennetaan, kuvaaja siirtyy vaaka-akselilla oikealle.



171.

Normaalijakauman $N(10, 4)$ odotusarvo on $\mu = 10$, joten kuvaajan huippu on kohdassa $x = 10$. Jakauman $N(10, 4)$ tiheysfunktio on f .

Normaalijakaumissa $N(20, 4)$ ja $N(20, 2)$ odotusarvo on $\mu = 20$, joten kuvaajien huiput ovat kohdassa $x = 20$.

Jakauman $N(20, 4)$ hajonta on $\sigma = 4$ on suurempi kuin jakauman $N(20, 2)$ hajonta $\sigma = 2$ ($4 > 2$), joten jakauman $N(20, 4)$ kuvaaja on kapeampi ja korkeampi kuin jakauman $N(20, 2)$ kuvaaja.

Jakauman $N(20, 4)$ tiheysfunktio on h .

Jakauman $N(20, 2)$ tiheysfunktio on g .

172.

a) Verrataan lamppumerkkien kestoiän keskihajontoja.

- $N(2100, 150)$: Lamppumerkin A lamppujen kestoiän keskihajonta on $\sigma = 150$ (h).
- $N(1800, 70)$: Lamppumerkin B lamppujen kestoiän keskihajonta on $\sigma = 70$ (h).

Lamppumerkin B lamppujen kestoiän keskihajonta on pienempi, eli lamppumerkin B lamput ovat tasalaatuisempia. Kannattaa siis valita merkin B lamppuja.

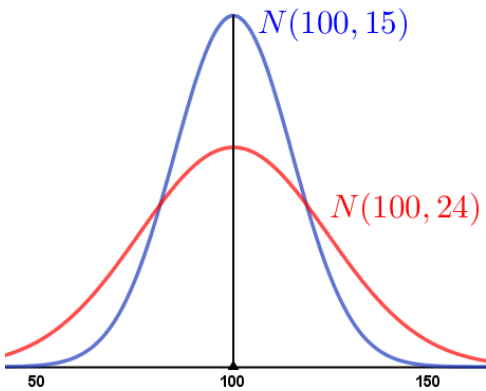
b) Verrataan lamppumerkkien kestoiän odotusarvoja.

- $N(2100, 150)$: Lamppumerkin A lampun kestoiän odotusarvo on $\mu = 2100$ (h).
- $N(1800, 70)$: Lamppumerkin B lampun kestoiän odotusarvo on $\mu = 1800$ (h).

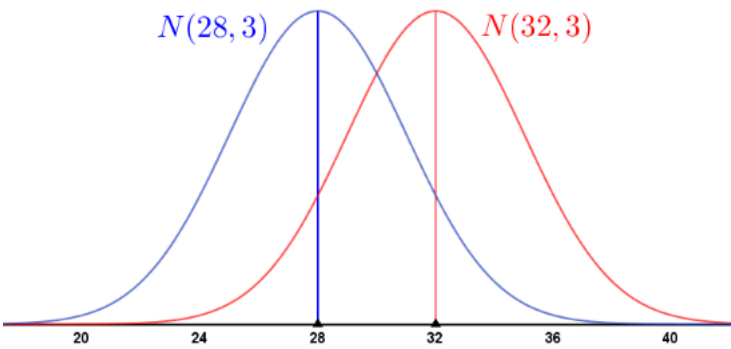
Lamppumerkin A lampun kestoiän odotusarvo on suurempi. Kannattaa siis valita merkin A lamppu.

173.

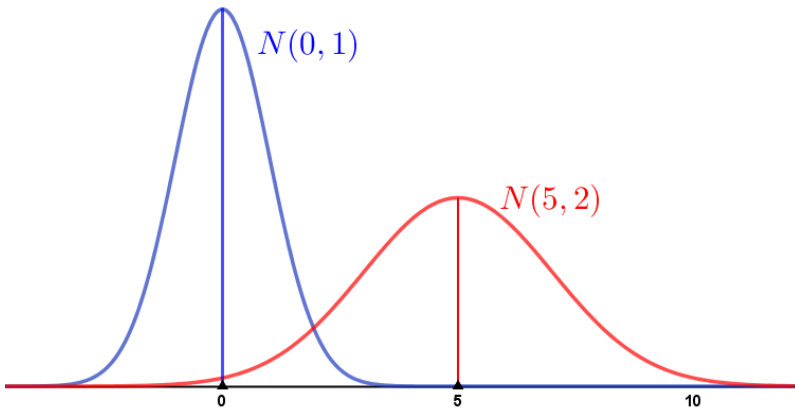
a)



b)



c)



Odotusarvo määrää kuvaajan sijainnin vaakasuunnassa:

- isompi odotusarvo – kuvaaja enemmän oikealla

Keskihajonta määrää huipun korkeuden ja kuvaajan leveyden:

- isompi keskihajonta – matalampi kuvaaja
- isompi keskihajonta – leveämpi kuvaaja

174.

Normitetaan muuttujan arvot.

a) Arvon 54 normitettu arvo on

$$\frac{54 - \mu}{\sigma} = \frac{54 - 50}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Arvo 54 on kaksi keskihajontaa odotusarvoa suurempi, eli arvo poikkeaa kaksi keskihajontaa odotusarvosta (oikealle: 2).

b) Arvon 44 normitettu arvo on

$$\frac{44 - \mu}{\sigma} = \frac{44 - 50}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Arvo 44 on kolme keskihajontaa odotusarvoa pienempi, eli arvo poikkeaa kolme keskihajontaa odotusarvosta (vasemmalle: -3).

175.

Odotusarvo on $\mu = 120$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

a) Lasketaan 1,96 keskihajontaa odotusarvoa suurempi arvo.

$$\mu + 1,96\sigma = 120 + 1,96 \cdot 15 = 149,4$$

b) Lasketaan 2,58 keskihajontaa odotusarvoa pienempi arvo.

$$\mu - 2,58\sigma = 120 - 2,58 \cdot 15 = 81,3$$

c) Arvo voi poiketa odotusarvosta vasemmalle tai oikealle.

Lasketaan 3,29 keskihajontaa odotusarvoa pienempi arvo

$$\mu - 3,29\sigma = 120 - 3,29 \cdot 15 = 70,65$$

Lasketaan 3,29 keskihajontaa odotusarvoa suurempi arvo

$$\mu + 3,29\sigma = 120 + 3,29 \cdot 15 = 169,35$$

Siis 3,29 keskihajontaa odotusarvosta poikkeavat arvot ovat 70,65 ja 169,35.

176.

Odotusarvo on $\mu = 120$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

a) Arvon 93 normitettu arvo on

$$\frac{93 - \mu}{\sigma} = \frac{93 - 120}{15} = \frac{-27}{15} = -1,8.$$

Arvon 156 normitettu arvo on

$$\frac{156 - \mu}{\sigma} = \frac{156 - 120}{15} = \frac{36}{15} = 2,4.$$

b) Merkitään kysyttyä arvoa kirjaimella x . Normitettu arvo on 0,8 eli

$$\frac{x - 120}{15} = 0,8.$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 132$.

c) Lasketaan tasan kaksi keskihajontaa odotusarvosta poikkeavat arvot.

- $\mu - 2\sigma = 120 - 2 \cdot 15 = 90$ (vasemmalle)
- $\mu + 2\sigma = 120 + 2 \cdot 15 = 150$ (oikealle)

Yli kaksi keskihajontaa odotusarvosta poikkeavat arvot ovat siis $x < 90$ ja $x > 150$.

d) Arvon 93 normitettu arvo laskettiin a-kohdassa. Normitettu arvo on $-1,8$ eli arvo on $1,8$ keskihajontaa odotusarvoa pienempi.

Tapa 1: Lasketaan arvo, joka jakaumassa $N(18, 2)$ on $1,8$ keskihajontaa odotusarvoa pienempi.

$$\mu - 1,8\sigma = 18 - 1,8 \cdot 2 = 14,4.$$

Tapa 2: Ratkaistaan arvo normitetun arvon avulla. Merkitään kysyttyä arvoa kirjaimella x . Normitettu arvo on $-1,8$ eli

$$\frac{x - 18}{2} = -1,8.$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 14,4$.

177.

a) Odotusarvo on $\mu = 16$ ja keskihajonta $\sigma = 4$.

$$\frac{16 - \mu}{\sigma} = \frac{16 - 16}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

b) Odotusarvo on $\mu = 18$ ja keskihajonta $\sigma = 4$.

$$\frac{16 - \mu}{\sigma} = \frac{16 - 18}{4} = \frac{-2}{4} = -0,5.$$

c) Odotusarvo on $\mu = 4$ ja keskihajonta $\sigma = 12$.

$$\frac{16 - \mu}{\sigma} = \frac{16 - 4}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

Normitettu arvo ilmaisee, kuinka monen keskihajonnan päässä arvo on jakauman odotusarvosta. Se ilmaisee siis, kuinka paljon arvo poikkeaa odotusarvosta, kun yksikkönä käytetään keskihajontaa.

Normitettu arvo siis ilmaisee, kuinka poikkeava (poikkeavan pieni tai poikkeavan suuri) havainto on siinä perusjoukossa, jota normaalijakaumamalli havainnollistaa.

178.

Normitetaan tyttöjen pistemäärät.

6. luokan kokeessa pistemäärän keskiarvo on $\mu = 24,3$ ja keskihajonta $\sigma = 5,2$. Pihlan pistemäärän 32 normitettu arvo on

$$\frac{32 - \mu}{\sigma} = \frac{32 - 24,3}{5,2} = \frac{7,7}{5,2} = 1,480 \dots \approx 1,48.$$

9. luokan kokeessa pistemäärän keskiarvo on $\mu = 42,6$ ja keskihajonta $\sigma = 6,8$. Pinjan pistemäärän 53 normitettu arvo on

$$\frac{53 - \mu}{\sigma} = \frac{53 - 42,6}{6,8} = \frac{10,4}{6,8} = 1,529 \dots \approx 1,53.$$

Verrataan normitettuja arvoja: Pinjan arvo on suurempi ($1,53 > 1,48$), joten Pinja pärjäsi kokeessa suhteellisesti paremmin.

179.

Matematiikan kokeessa pistemäärän keskiarvo on $\mu = 33$ ja keskihajonta $\sigma = 5,3$.

Normitetaan Oivan saama pistemäärä 48.

$$\frac{48 - \mu}{\sigma} = \frac{48 - 33}{5,3} = \frac{15}{5,3} = 2,830 \dots$$

Englannin kokeessa pistemäärän keskiarvo on $\mu = 113$ ja keskihajonta $\sigma = 7,9$.

Merkitään Oivan englannin kokeessa saamaa pistemäärää kirjaimella x . Pistemäärän normitettu arvo on

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 113}{7,9}.$$

Oiva pärjäsi englannin kokeessa vähintään yhtä hyvin, jos normitettu arvo on vähintään yhtä suuri kuin matematiikan kokeen pistemäärän normitettu arvo. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x - 113}{7,9} \geq 2,830 \dots$$

Ratkaisuksi saadaan $x \geq 135,358\dots$

Ehdosta seuraa, että Oivan olisi pitänyt saada englanninkokeesta vähintään 136 pistettä.

Huomaa: Pistemäärä on pyöristettävä ylöspäin, jotta ehto $x \geq 135,358\dots$ toteutuu.

180.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"keksipaketin massa (g)"}$

$$X \sim N(204, 6).$$

$$\mu = 204 \text{ ja } \sigma = 6$$

Määritetään kysytyt todennäköisyydet sopivan ohjelmiston avulla.

$$\text{a) } P(X < 200) = 0,252... \approx 0,25$$

$$\text{b) } P(X \geq 210) = 0,158... \approx 0,16$$

$$\text{c) } P(200 \leq X < 210) = 0,588... \approx 0,59$$

181.

$$X \sim N(8,3)$$

$$\mu = 8 \text{ ja } \sigma = 3.$$

Määritetään kysytyt todennäköisyydet sopivan ohjelmiston avulla.

a) $P(X \leq 7) = 0,3694... \approx 0,369.$

b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X > 10$.

$$P(X > 10) = 0,2524... \approx 0,252 = 25,2 \text{ \%}.$$

Muuttujan arvoista 25,2 % on yli 10.

c) $P(4 < X \leq 9) = 0,5393... \approx 0,539.$

182.

Satunnaismuuttuja X = ”pullossa olevan hajuveden määrä (ml)”.

$$X \sim N(52; 1,25)$$

$$\mu = 52 \text{ (ml)} \text{ ja } \sigma = 1,25 \text{ (ml)}.$$

Määritetään kysytyt todennäköisyydet sopivan ohjelmiston avulla.

$$\text{a) } P(X < 50) = 0,0547 \dots \approx 0,055.$$

$$\text{b) } P(X > 55) = 0,00819 \dots \approx 0,0082.$$

$$\text{c) } P(48 < X < 54) = 0,944 \dots \approx 0,94.$$

Huomaa: Yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla, joten esimerkiksi c-kohdan todennäköisyys on yhtä suuri kuin

$$P(48 \leq X \leq 54) = 0,944 \dots \approx 0,94.$$

Siis yhtäsuuruudet voivat olla epäyhtälössä mukana.

183.

Normitettu normaalijakauma $N(0, 1)$.

$\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

a) Väritettyä aluetta vastaavat arvot $Z \leq 1,26$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(Z \leq 1,26)$.

$$P(Z \leq 1,26) = 0,8961... \approx 0,896.$$

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normitetun muuttujan Z arvo on korkeintaan 1,26. Siis, pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X normitettu arvo on korkeintaan 1,26.

b) Väritettyä aluetta vastaavat arvot $Z \geq -0,65$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(Z \geq -0,65)$

$$P(Z \geq -0,65) = 0,7421... \approx 0,742.$$

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normitetun muuttujan Z arvo on vähintään $-0,65$. Siis, pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X normitettu arvo on vähintään $-0,65$.

c) Väritettyä aluetta vastaavat arvot $-1,37 \leq Z \leq 0,52$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(-1,37 \leq Z \leq 0,52)$.

$$P(-1,37 \leq Z \leq 0,52) = 0,6131 \dots \approx 0,613.$$

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normitetun muuttujan Z arvo on välillä $-1,37-0,52$. Siis, pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden, että normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X normitettu arvo on välillä $-1,37-0,52$.

184.

$$X \sim N(10, 4)$$

$$\mu = 10 \text{ ja } \sigma = 4$$

Ratkaistaan raja a sopivan ohjelmiston avulla.

a) Tapahtuman $X < a$ todennäköisyys on $67 \% = 0,67$.

$$P(X < a) = 0,67$$

$$a = 11,75 \dots \approx 12.$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,67 sekä $\mu = 10$ ja $\sigma = 4$.

b) Arvoista 8% on suurempia kuin a , joten korkeitaan a :n suuruisia arvoja on $100 \% - 8 \% = 92 \%$. Kertymätodennäköisyys on siis

$$P(X \leq a) = 0,92$$

$$a = 15,62 \dots \approx 16$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,92 sekä $\mu = 10$ ja $\sigma = 4$.

c) Määritetään kertymätodennäköisyys ylärajalle a .

Symmetrian perusteella välillä $[10, a]$ on $\frac{90 \%}{2} = 45 \%$ arvoista.

Odotusarvoa 10 pienempiä arvoja on 50% , joten

$$P(X \leq a) = 0,50 + 0,45$$

$$P(X \leq a) = 0,95.$$

$$a = 16,57 \dots \approx 17.$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,95 sekä $\mu = 10$ ja $\sigma = 4$.

185.

$$X \sim N(7; 0,5)$$

$$\mu = 7 \text{ ja } \sigma = 0,5$$

a) Ratkaistaan raja a sopivan ohjelmiston avulla.

$$P(X \leq a) = 0,40$$

$$a = 6,87... \approx 6,9.$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,4 sekä $\mu = 7$ ja $\sigma = 0,5$.

b) Päätellään kertymätodennäköisyys.

$$P(X \leq a) = 1 - 0,07$$

$$P(X \leq a) = 0,93$$

$$a = 7,73... \approx 7,7$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,93 sekä $\mu = 7$ ja $\sigma = 0,5$.

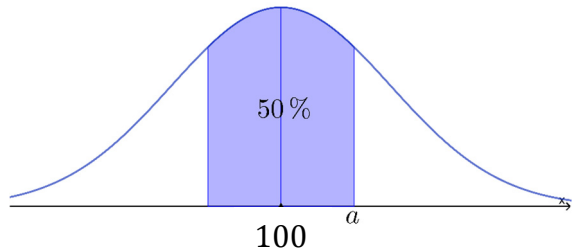
186.

Satunnaismuuttuja X = "ihmisen älykkyydosamäärä".

$$X \sim N(100, 15)$$

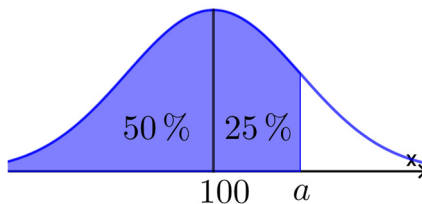
$$\mu = 100 \text{ ja } \sigma = 15$$

Merkitään kysytyn välin ylärajaa kirjaimella a .



Symmetrian perusteella välillä $[100, a]$ on $\frac{50\%}{2} = 25\%$ väestöstä.

Väestöstä puolet on älykkyydosamäärältään odotusarvon alapuolella.



Kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq a) = 0,50 + 0,25$$

$$P(X \leq a) = 0,75$$

$$a = 110,117 \dots \approx 110,11$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,75 sekä $\mu = 100$ ja $\sigma = 15$.

Välin yläraja a on $110,1 - 100 = 10,11$ yksikköä odotusarvoa suurempi.
Välin alaraja on vastaavasti $10,11$ yksikköä odotusarvoa pienempi.

Alaraja on $100 - 10,11 = 89,89$.

Väestöstä täsmälleen puolet kuuluu älykkyyssosamäärältään välille $[89,89; 110,11]$.

Tarkistus: $P(89,89 < X < 110,11) = 0,4996... \approx 50,0 \%$

187.

Normitettu normaalijakauma $Z \sim N(0,1)$.

$\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

a) Väritettyä aluetta vastaavat muuttujan arvot $Z \leq a$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(Z \leq a)$.

$$P(Z \leq a) = 0,94$$
$$a = 1,5547 \dots \approx 1,555$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,94 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Luku a ilmaisee normitetun muuttujan Z arvon, jota pienempiä arvoja on 94 %. Siis, luku a ilmaisee normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X sitä arvoa vastaavan normitetun arvon, jota pienempiä arvoja on 94 %.

b) Väritettyä aluetta vastaavat muuttujan arvot $Z \geq a$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(Z \geq a)$.

$$P(Z \geq a) = 0,27$$
$$P(Z < a) = 1 - 0,27$$
$$P(Z < a) = 0,73$$
$$a = 0,6128 \dots \approx 0,613$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,73 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Luku a ilmaisee normitetun muuttujan Z arvon, jota suurempia arvoja on 27 %. Siis, luku a ilmaisee normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X sitä arvoa vastaavan normitetun arvon, jota suurempia arvoja on 27 %.

c) Väritettyä aluetta vastaavat muuttujan arvot $-a \leq Z \leq a$.

Pinta-ala ilmaisee todennäköisyyden $P(-a \leq Z \leq a)$.

Päätellään kertymätodennäköisyys ylärajalle a . Symmetrian perusteella välillä $[0, a]$ on pinta-ala eli todennäköisyys $\frac{0,86}{2} = 0,43$.

Odotusarvon 0 vasemmalla puolella on todennäköisyys 0,5.

$$P(Z \leq a) = 0,5 + 0,43$$

$$P(Z \leq a) = 0,93$$

$$a = 1,4757 \dots \approx 1,476$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,93 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Luku a ilmaisee odotusarvon 0 suhteen symmetrisen välin, jolla on 86 % normitetun muuttujan Z arvoista. Siis, luku a ilmaisee normaalijakaumaa noudattavan muuttujan X jakaumasta sellaisen odotusarvon suhteen symmetrisen välin ylärajan, jossa välillä on 86 % muuttujan arvoista.

188.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"television kestoikä (vuosina)"}.$

$$X \sim N(4,6; 1,2)$$

$$\mu = 4,6 \text{ ja } \sigma = 1,2.$$

a) Jakauman odotusarvo $\mu = 4,6$ on myös jakauman mediaani: se ilmaisee kestoikää, jonka puolet televisioista alittaa ja puolet ylittää.

Siis, puolet televisioista kestää korjauksitta korkeintaan 4,6 vuotta ja puolet vähintään tämän ajan.

Odotusarvolla on myös seuraava tulkinta: jos tutkittaisiin suuri määrä televisioita, niiden kestoian keskiarvo olisi likimain 4,6 vuotta.

b) Lasketaan tapahtuman $X \geq 5$ (vuotta) todennäköisyys.

$$P(X \geq 5) = 0,369 \dots \approx 37 \, \%. \quad \leftarrow$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään alaraja 5, yläraja ∞ sekä $\mu = 4,6$ ja $\sigma = 1,2$.

c) Televisioista 3 % joudutaan korjaamaan takuuaikana eli tapahtuman $X < a$ todennäköisyys on 0,03.

$$P(X < a) = 0,03 \quad \leftarrow$$

$$a = 2,343 \approx 2,3 \text{ (vuotta)}$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaali-jakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,03 sekä $\mu = 4,6$ ja $\sigma = 1,2$.

189.

Satunnaismuuttuja $X =$ "kilpailussa saatu pistemäärä".

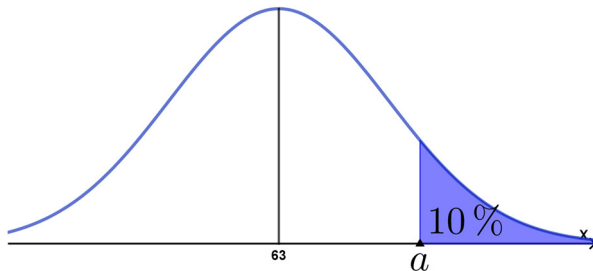
$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 63,0 \text{ ja } \sigma = 13,4.$$

a) Lasketaan tapahtuman $X \geq 50$ todennäköisyys.

$$P(X \geq 50) = 0,834 \dots \approx 83 \%$$

b) Merkitään loppukilpailuun pääsevien pistemäärää kirjaimella a .
Osallistujista 10 % pääsee loppukilpailuun eli $P(X \geq a) = 0,10$.



Kertyमतodennäköisyys on

$$P(X \leq a) = 1 - 0,10$$

$$P(X \leq a) = 0,90$$

$$a = 80,172 \dots \approx 80$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,9 sekä $\mu = 63$ ja $\sigma = 13,4$.

Loppukilpailuun pääsevien pisteraja on 80 pistettä.

Huomautus: Ratkaisussa pistemäärä pyöristettiin normaalien pyöristyssääntöjen mukaan alaspäin. Todennäköisyys, että satunnainen kilpailija saa vähintään 80 pistettä on

$$P(X \geq 80) = 0,10228... \approx 10,2 \%$$

eli normaalijakaumamallin mukaan hivenen yli 10 % kilpailijoista hyväksytään loppukilpailuun, kun rajana on 80 pistettä.

190.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"marsun pituus (cm)"}.$

$$X \sim N(22, 4)$$

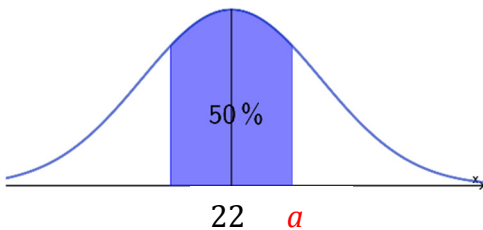
$$\mu = 22 \text{ ja } \sigma = 4.$$

a) Lasketaan tapahtuman $19 \leq X \leq 24$ todennäköisyys.

$$P(19 \leq X \leq 24) = 0,464 \dots \approx 46 \%$$

Marsuista 46 % on pituudeltaan välillä 19 cm – 24 cm.

b) Merkitään välin ylärajaa kirjaimella a (cm).



Symmetrian perusteella välillä $[22, a]$ on $\frac{50 \%}{2} = 25 \%$ arvoista.

Keskipituutta 22 (cm) pienempiä arvoja on 50 %, joten kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq a) = 0,50 + 0,25$$

$$P(X \leq a) = 0,75.$$

$$a = 24,69 \dots \approx 25 \text{ (cm)}.$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,75 sekä $\mu = 22$ ja $\sigma = 4$.

Välin yläraja on $25 - 22 = 3$ (cm) keskiarvoa suurempi.

Välin alaraja on vastaavasti 3 (cm) keskiarvoa pienempi.

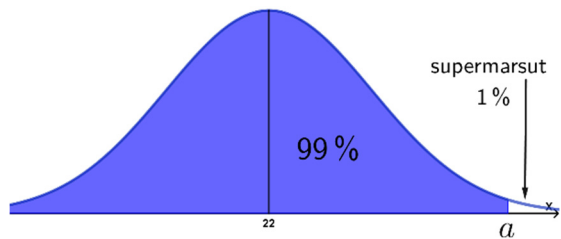
$$22 - 3 = 19 \text{ (cm)}$$

Kysytty väli on [19 cm, 25 cm].

c) Merkitään kirjaimella a sitä pituutta, jota lyhyempiä on 99 % marsuista.

$$P(X < a) = 0,99$$

$$a = 31,30 \dots \approx 31 \text{ (cm)}$$



Supermarsut ovat pituudeltaan yli 31 cm.

191.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"kultakolikon halkaisija (mm)"}.$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = n \text{ ja } \sigma = 0,2n.$$

Satunnaisesti valitun kultakolikon halkaisija on korkeintaan 76 % keskiarvosta n silloin, kun halkaisija on korkeintaan $0,76n$.

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X \leq 0,76n$.

Koska jakauman odotusarvo ja keskihajonta eivät ole reaalilukuja, siirrytään normitettuun jakaumaan.

Normitetaan yläraja $0,76n$. Normitettu arvo on

$$Z = \frac{0,76n - \mu}{\sigma} = \frac{0,76n - n}{0,2n} = -1,2.$$

Todennäköisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned} P(X \leq 0,76n) &= P(Z \leq -1,2) \\ &= 0,1150 \dots \\ &\approx 12 \%. \end{aligned}$$

192.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"hattivatin korkeus (cm)"}.$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = h \text{ ja } \sigma = 0,6h.$$

Lasketaan, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu hattivatti on korkeudeltaan vähintään $2h$ eli lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X \geq 2h$.

Koska jakauman odotusarvo ja keskihajonta eivät ole reaalilukuja, siirrytään normitettuun jakaumaan.

Normitetaan yläraja $2h$. Normitettu arvo on

$$Z = \frac{2h - \mu}{\sigma} = \frac{2h - h}{0,6h} = 1,666 \dots$$

Todennäköisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned} P(X \geq 2h) &= P(Z \geq 1,666 \dots) \\ &= 0,0477 \dots \\ &\approx 4,8 \%. \end{aligned}$$

Laskinohjelmiston normaali jakaumatoimintoon syötetään alaraja 1,66..., yläraja ∞ , $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Hattivateista 4,8 % on korkeudeltaan vähintään $2h$.

193.

Lasketaan arvoa 62 mm vastaavat normitetut arvot.

Iris Setosa: Kun $\mu = 50,0$ ja $\sigma = 3,5$ niin normitettu arvo on

$$\frac{62 - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 50,0}{3,5} = \frac{12}{3,5} = 3,428 \dots$$

Iris Versicolor: Kun $\mu = 59,4$ ja $\sigma = 5,2$ niin normitettu arvo on

$$\frac{62 - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 59,2}{5,2} = \frac{2,8}{5,2} = 0,538 \dots$$

Iris Virginica: Kun $\mu = 65,9$ ja $\sigma = 6,4$ niin normitettu arvo on

$$\frac{62 - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 65,9}{6,4} = \frac{-3,9}{6,4} = -0,609 \dots$$

Normitettu arvo ilmaisee, kuinka poikkeava arvo 62 mm on kussakin jakaumassa. Pienin poikkeama keskiarvosta on keskimmäisessä tilanteessa.

Kurjenmiekka, jonka verholehden pituus on 62 mm, kuuluu todennäköisimmin lajiin *Iris Virginica*.

194.

Satunnaismuuttuja $X =$ "testitulos älykkyystestissä".

$$X \sim N(100, 24)$$

$$\mu = 100 \text{ ja } \sigma = 24.$$

a) Pistemäärän 85 normitettu arvo on

$$Z_{85} = \frac{85 - \mu}{\sigma} = \frac{85 - 100}{24} = \frac{-15}{24} = -0,625.$$

Pistemäärän 130 normitettu arvo on

$$Z_{130} = \frac{130 - \mu}{\sigma} = \frac{130 - 100}{24} = \frac{30}{24} = 1,25.$$

b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X < 85$.

$$P(X < 85) = 0,265 \dots \approx 27 \%$$

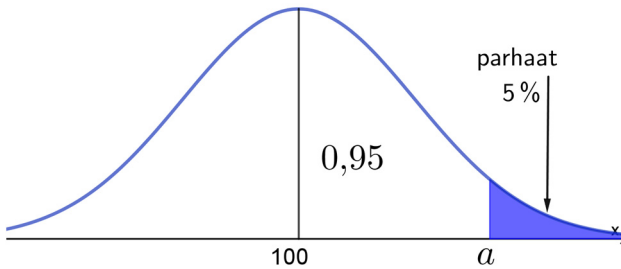
Todennäköisyys voidaan laskea myös normitetun arvon avulla.

$$P(Z < -0,625) = 0,265 \dots \approx 27 \%$$

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X > 130$.

$$P(X > 130) = 0,105 \dots \approx 11 \%$$

c) Merkitään kirjaimella a sellaista pistemäärää jolla $P(X \geq a) = 0,05$.



Kertymätodennäköisyys on tällöin

$$P(X \leq a) = 1 - 0,05$$

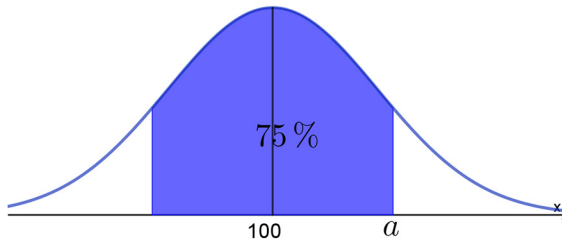
$$P(X \leq a) = 0,95$$

$$a = 139,47 \dots$$

Älykkäin 5 % testiin osallistuneista saa siis vähintään 140 pistettä.

Huomaa, että pistemäärä on pyöristettävä ylöspäin.

d) Merkitään kysytyn välin ylärajaa kirjaimella a .



Symmetrian perusteella välille $[100, a]$ kuuluu $\frac{75\%}{2} = 37,5\% = 0,375$.

Odotusarvoa 100 pienempiä arvoja on 50 %, joten kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq a) = 0,50 + 0,375$$

$$P(X \leq a) = 0,875$$

$$a = 127,60 \dots \approx 128$$

Välin yläraja 128 (pistettä) on $128 - 100 = 28$ pistettä odotusarvoa suurempi.

Välin alaraja on vastaavasti 28 pistettä odotusarvoa pienempi.

$$100 - 28 = 72$$

Kysytty väli on 72–128 pistettä.

195.

Satunnaismuuttuja X = "aika, jonka kuivaaja toimii vioittumatta (kk)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 15,2 \text{ ja } \sigma = 2,5.$$

a) Takuu aika on yksi vuosi eli 12 kk. Kuivaaja joutuu takuukorjaukseen, jos se vioittuu vuoden aikana, eli jos $X \leq 12$.

$$P(X \leq 12) = 0,100 \dots \approx 10 \%$$

Kuivaajista 10 % joutuu takuukorjaukseen.

b) Lasketaan tapahtuman $X > 18$ todennäköisyys.

$$P(X > 18) = 0,1313 \dots \approx 13 \%$$

Kuivaajista 13 % toimii vioittumatta yli 18 kuukautta.

196.

Satunnaismuuttuja X = "kiihdytysaika nopeuteen 100 km/h (sekuntia)".

$$X \sim N(10,5; 2,8).$$

$$\mu = 10,5 \text{ ja } \sigma = 2,8$$

$$\text{a) } P(X < 4) = 0,0101... \approx 1 \%$$

$$P(X \geq 12) = 0,296... \approx 30 \%$$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella a (sekuntia).

Autoista 85 % kiihtyy nopeuteen 100 km/h ajassa a . Siis, tapahtuman $X \leq a$ todennäköisyys on 0,85.

$$P(X \leq a) = 0,85$$

$$a = 13,402 ... \approx 13 \text{ (s)}$$

197.

Satunnaismuuttuja X = "ajoneuvon nopeus (km/h)".

$$X \sim N(76, 6)$$

$$\mu = 76 \text{ ja } \sigma = 6.$$

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $80 < X < 95$.

$$P(80 < X < 95) = 0,2517 \dots \approx 25,2 \%$$

Siis 25,2 % autoilijoista voisi saada rikesakon.

198.

Satunnaismuuttuja X = "hedelmäkärpäsien elinikä (vrk)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 20,3 \text{ ja } \sigma = 9,3.$$

a) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X < 7$.

$$P(X < 7) = 0,0763 \dots \approx 0,076.$$

b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X > 30$.

$$P(X > 30) = 0,148 \dots = 14,8 \dots \%$$

Kärpäsistä 14,8... % eli yli kuukauden. Näitä kärpäsiä oli

$$0,148 \dots \cdot 1\,203\,646 = 178\,707,34 \dots \approx 180\,000 \text{ (kappaletta)}.$$

c) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella a (vrk). Tapahtuman $X \leq a$ todennäköisyys on 0,95.

$$P(X \leq a) = 0,95$$
$$a = 35,5 \dots \approx 36$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaali jakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,95 sekä $\mu = 20,3$ ja $\sigma = 9,3$.

Kärpäsistä 95 % oli kuollut 36 vuorokauden kuluttua.

199.

Normitetaan opiskelijoiden pistemäärät.

Lukiossa A pistemäärien keskiarvo on $\mu = 72$ ja keskihajonta $\sigma = 9,2$.

Alinan pistemäärän 82 normitettu arvo on

$$\frac{82 - \mu}{\sigma} = \frac{82 - 72}{9,2} = \frac{10}{9,2} = 1,086 \dots \approx 1,09.$$

Lukiossa B pistemäärien keskiarvo on $\mu = 72$ ja keskihajonta $\sigma = 6,8$.

Bertan pistemäärän 80 normitettu arvo on

$$\frac{80 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 72}{6,8} = \frac{8}{6,8} = 1,176 \dots \approx 1,18.$$

Verrataan normitettuja arvoja: Bertan arvo on suurempi ($1,18 > 1,09$), joten Bertta pärjasi kokeessa suhteellisesti paremmin kuin Alina.

Satunnaismuuttujan $X =$ "pistemäärä lukiossa B".

$$Y \sim N(72; 6,8)$$

$$\mu = 72 \text{ ja } \sigma = 6,8$$

Lasketaan tapahtuman $72 < X < 80$ todennäköisyys.

$$P(72 < X < 80) = 0,380 \dots \approx 38 \%$$

Keskiarvoa paremmin mutta Berttaa huonommin menestyi 38 % lukion B opiskelijoista.

Satunnaismuuttujan Y = "pistemäärä lukiossa A".

$$Y \sim N(72; 9,2)$$

$$\mu = 72 \text{ ja } \sigma = 9,2$$

Lasketaan tapahtuman $Y > 82$ todennäköisyys.

$$P(Y > 82) = 0,138 \dots \approx 14 \%$$

Alinaa paremmin menestyi 14 % lukion A opiskelijoista.

3.3 Normaalijakaumasovelluksia

200.

a) Satunnaismuuttuja X = "30-vuotiaan suomalaismiehen pituus (cm)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 180,0 \text{ ja } \sigma = 5,8$$

Lasketaan tapahtuman $X > 200$ (cm) todennäköisyys.

$$P(X > 200) = 0,0002821 \dots \approx 0,028 \%$$

Laskinohjelmiston
normaalijakaumatoimintoon
syötetään: alaraja 200, yläraja ∞ ,
 $\mu = 180$ ja $\sigma = 5,8$.

Siis, normaalijakaumamallin mukaan, 30-vuotiaista miehistä 0,028 % on pituudeltaan vähintään kaksi metriä.

b) Suomalaisia 30-vuotiaita miehiä on äärellinen (rajallinen) määrä. Frekvenssijakaumassa on siis äärellinen määrä havaintoja.

➤ normaalijakaumamallissa on ääretön määrä havaintoja

Suomalaisten 30-vuotiaiden miesten pituuksilla on jokin positiivinen alaraja. Pisin suomalainen mies on Sami Eerola, jonka pituus on 218 cm.

Tapahtumat $X \leq 0$ (cm) ja $X > 218$ (cm) ovat siis mahdottomia, sillä suomalaisten 30-vuotiaiden miesten minimipituus on jokin positiivinen luku, ja pituus on korkeintaan 218 cm.

- normaalijakaumamallissa kaikki reaalilukuarvot ovat mahdollisia

Normaalijakaumamalli on "ideaalimalli", joka ei huomioi käytännössä esiintyviä epäsäännöllisyyksiä eikä poikkeavia havaintoja.

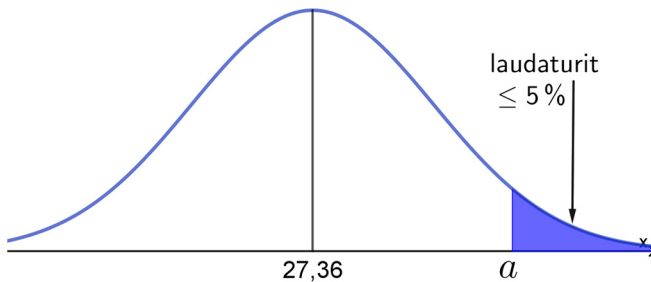
201.

Satunnaismuuttuja $X =$ "ylioppilaskokeen pistemäärä".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 27,36 \text{ ja } \sigma = 12,23$$

a) Merkitään laudatur-arvosanan pisterajaa kirjaimella a . Laudaturin saa korkeintaan 5 % kokelaista, joten tapahtuman $X \geq a$ todennäköisyys on korkeintaan 0,05.



Kokelaista vähintään 95 % saa laudaturin pisterajaa pienemmän pistemäärän.

Tapahtuman $X < a$ todennäköisyys on siis oltava vähintään 0,95.

$$P(X < a) = 0,95$$

$$a = 47,4765...$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään pinta-ala 0,95 sekä $\mu = 27,36$ ja $\sigma = 12,23$.

Kun pisteraja on $a = 47,4765... (> 47)$, laudatureja on normaalijakaumamallin mukaan (tasan) 5 %. Pisterajan a kasvaessa laudaturien määrä pienenee. Pisteraja on siis pyöristettävä ylöspäin.

Alin pistemäärä, jolla saa laudaturin on 48 pistettä.

b) Suoritus on hyväksytty, jos pistemäärä X on vähintään 12. Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X \geq 12$.

$$P(X \geq 12) = 0,8954... \approx 89,5 \%$$

c) Ylioppilaskokeen pistemäärä on välillä 0–60. Siis, negatiiviset arvot sekä pistemäärää 60 suuremmat arvot ovat mahdottomia.

- normaalijakaumamallissa kaikki reaalilukuarvot ovat mahdollisia

Ylioppilaskokeen pistemäärä on diskreetti muuttuja, sillä kokeessa on mahdollisuus saada vain kokonaislukupistemääriä.

- normaalijakauma kuvaa jatkuvaa jakaumaa

202.

Satunnaismuuttuja X = "television kestoikä ennen ensimmäistä korjausta (vuosina)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 4,6 \text{ ja } \sigma = 1,2$$

a) Tapahtuman "ainakin yksi kolmesta" vastatapahtuma on "ei yhtään kolmesta" eli kaikki kolme televisiota toimivat alle viisi vuotta.

Lasketaan todennäköisyys, että yksi televisio toimii alle viisi vuotta.

$$P(X < 5) = 0,6305 \dots$$

Kertolaskusäännön mukaan kolme televisiota toimivat alle viisi vuotta todennäköisyydellä

$$P(3 \text{ toimii alle viisi vuotta}) = (0,6305 \dots)^3 = 0,2507 \dots$$

Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{ainakin yksi toimii viisi vuotta}) = 1 - 0,2507 \dots = 0,7492 \dots \approx 0,75.$$

b) Televisio joudutaan huoltamaan viiden vuoden aikana, kun $X < 5$.

$$P(X < 5) = 0,6305 \dots$$

Todennäköisyys ilmaisee myös viiden vuoden aikana huoltoa vaativien televisioiden prosenttiosuuden.

$$0,6305 \dots \cdot 350 = 220,695 \dots \approx 220 \text{ (televisiota).}$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

c) Merkitään takuuaikaa kirjaimella a (vuotta). Televisio joudutaan huoltamaan takuuaikana, jos $X < a$. Tämän tapahtuman todennäköisyys saa olla enintään $1,6 \% = 0,016$.

$$P(X < a) = 0,016$$

$$a = 2,026 \dots \approx 2,0 \text{ (vuotta)}$$

203.

Satunnaismuuttuja X = "kirjekuoren paino (g)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 1,95 \text{ ja } \sigma = 0,05$$

a) Lasketaan tapahtuman $X > 2$ todennäköisyys.

$$P(X > 2) = 0,1586... \approx 0,16$$

Laskinohjelmiston
normaalijakaumatoimintoon
syötetään: alaraja 2, yläraja ∞
sekä $\mu = 1,95$ ja $\sigma = 0,05$.

b) Tapahtuman "ainakin yksi 150:stä" vastatapahtuma on "ei yhtään 150:stä" eli kaikki 150 kirjekuorta painavat korkeintaan 2 g.

$$P(X \leq 2) = 0,8413 ...$$

Kertolaskusäännön mukaan 150 kirjekuorta painavat jokainen korkeintaan 2 g todennäköisyydellä

$$P(150 \text{ korkeintaan } 2 \text{ g}) = (0,8413 ...)^{150} = 5,573 ... \cdot 10^{-12}$$

Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{ainakin yksi yli } 2 \text{ g}) = 1 - 5,573 ... \cdot 10^{-12} \approx 1$$

Kyseessä on siis (lähes) varma tapaus.

c) Todennäköisyys, että kirjekuori painaa yli 2 g on $P(X > 2) = 0,1586...$

$$0,1586... \cdot 150 = 23,798... \approx 24 \text{ (kuorta)}$$

204.

Satunnaismuuttuja X = "lampun kestoikä (h)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 8000 \text{ ja } \sigma = 2000$$

a) Yksi lamppu palaa vuodessa $8 \cdot 5 \cdot 52 = 2080$ (tuntia).

Kahdessa vuodessa lamppu palaa $2 \cdot 2080 = 4160$ (tuntia).

Lamppu kestää korkeintaan kaksi vuotta, kun $X \leq 4160$.

$$P(X \leq 4160) = 0,0274...$$

Laskinohjelmiston
normaalijakaumatoimintoon
syötetään: yläraja 4160 sekä
 $\mu = 8000$ ja $\sigma = 2000$.

Todennäköisyys ilmaisee myös korkeintaan kaksi vuotta kestävien lamppujen prosenttiosuuden.

$$0,0274 \dots \cdot 300 = 8,228 \dots \approx 8 \text{ (lamppua).}$$

b) Merkitään vaihtoaikaa kirjaimella a (h). Lamppu sammuu ennen vaihtoa, kun $X < a$. Sammuvien lamppujen prosenttiosuus on $100\% - 90\% = 10\% = 0,10$.

$$P(X \leq a) = 0,10$$

$$a = 5436,986 \dots (\text{h})$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,10 sekä $\mu = 8000$ ja $\sigma = 2000$.

Lamput on siis vaihdettava 5436,986 ... tunnin polttamisen jälkeen.

Lamppuja poltetaan 2080 tuntia vuodessa.

$$\frac{5436,986 \dots}{2080} = 2,613 \dots$$

2,613... vuotta
= 2 a + 0,613... · 12 kk
= 2 a + 7,366... kk
≈ 2 a 7 kk

Vaihtoaika tulee siis olla 2,613 ... vuotta eli noin 2 vuotta ja 7 kuukautta.

205.

Satunnaismuuttuja X = "tulppamerkin A kestävyys (ajokm)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 45\,000 \text{ ja } \sigma = 1600$$

a) Merkitään vaihtoaikaa kirjaimella a (ajokm). Tulppa ei kestä vaihtoon saakka, kun $X < a$. Tämän tapahtuman todennäköisyys on $100\% - 99,9\% = 0,1\% = 0,001$.

$$P(X < a) = 0,001$$

$$a = 40\,055,6 \dots$$

$$a \approx 40\,000 \text{ (ajokm)}$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,001 sekä $\mu = 45000$ ja $\sigma = 1600$.

Tulppa on siis vaihdettava 40 000 ajokilometrin jälkeen.

b) Lasketaan, millä todennäköisyydellä tulppamerkin A tulppa kestää vaihtoon.

$$P(X \geq 40\,000) = 0,99911 \dots \approx 99,91\%$$

Merkin A tulppa kestää siis vaihtoon saakka 99,91 %:n varmuudella.

Satunnaismuuttuja Y = "tulppamerkin B kestävyys (ajokm)".

$$Y \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\mu = 50\,000 \text{ ja } \sigma = 3000$$

Lasketaan todennäköisyys, että merkin B tulppa kestää vaihtoon saakka.

$$P(Y \geq 40\,000) = 0,99957 \dots \approx 99,96 \%$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 40 000, ylärajaa ∞ , $\mu = 50\,000$ ja $\sigma = 3000$.

Merkin B tulppa kestää vaihtoon saakka varmuudella $99,96 \% > 99,91 \%$. Kannattaa siis valita merkin B tulppa.

c) Todennäköisyys, että yksi merkin A tulppa kestää vähintään 44 000 ajokilometriä on

$$P(X \geq 44\,000) = 0,7340 \dots$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 44 000, ylärajaa ∞ , $\mu = 45\,000$ ja $\sigma = 1600$.

Oletetaan, että tulpan kestävyys perheen kahdessa autossa on toisistaan riippumatonta. Tällöin kertolaskusäännön mukaan kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{tulppa kestää molemmissa } 44\,000 \text{ ajokm}) &= (0,7340 \dots)^2 \\ &= 0,538 \dots \approx 0,54 \end{aligned}$$

206.

Satunnaismuuttuja X = "sokeripussin paino (g)".

$$X \sim N(\mu; 8,0)$$

Sokeripusseista 95 % painaa vähintään 1000 g, joten alle 1000 g painavia pusseja on

$$100 \% - 95 \% = 5 \% = 0,05.$$

Siis

$$P(X < 1000) = 0,05$$

Odotusarvo μ on tuntematon, joten siirrytään normitettuun jakaumaan $N(0, 1)$.

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,05 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,644 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,05 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 1000 (g) normitettu arvo on siis $-1,644 \dots$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan μ .

$$\frac{1000 - \mu}{8} = -1,644 \dots$$

$$\mu = 1013,158 \dots$$

$$\mu \approx 1014 \text{ (g)}$$

Huomaa: Vastaus on pyöristetty ylöspäin, jotta tehtävänannon ehto toteutuu.

Tarkistus:

Kun $\mu = 1013$, niin

$$P(X \geq 1000) = 0,947 \dots < 95 \%$$

eli ehto ei toteudu.

Kun $\mu = 1014$, niin

$$P(X \geq 1000) = 0,959 \dots > 95 \%$$

eli ehto toteutuu.

207.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"kahvipaketin paino (g)"}.$

$$X \sim N(\mu; 10)$$

Kahvipaketeista enintään 2,0 % sisältää alle 500 g.

Siis

$$P(X < 500) = 0,02.$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,02 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -2,052 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,02 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 500 (g) normitettu arvo on siis $-2,052 \dots$ Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan μ .

$$\frac{500 - \mu}{10} = -2,052 \dots$$

$$\mu = 520,537 \dots$$

$$\mu \approx 521 \text{ (g)}$$

Tarkistetaan tehtävänannossa esiintynyt ehto:

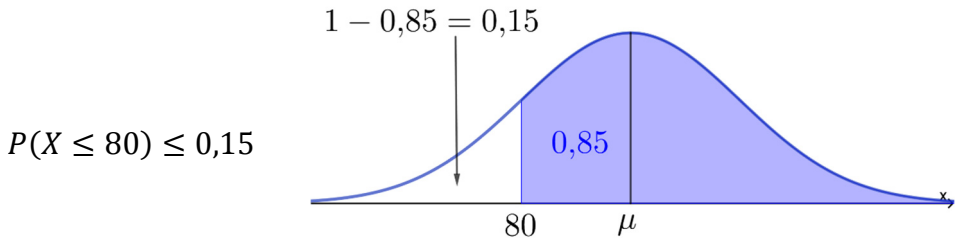
Kun $\mu = 521$, niin

$$P(X < 500) = 0,017 \dots < 2,0 \%$$

208.

$$X \sim N(\mu; 10)$$

$P(X > 80) > 0,85$, joten kertymätodennäköisyydeksi saadaan



Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,15 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,036 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,15 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Kertymätodennäköisyys $P(X \leq 80)$ saa olla korkeintaan 0,15, joten arvon 80 normitettu arvo on korkeintaan $-1,036 \dots$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan μ .

$$\frac{80 - \mu}{10} \leq -1,036 \dots$$

$$\mu \leq 90,364 \dots$$

Odotusarvolle μ saadaan siis ehto $\mu \leq 91$.

209.

Satunnaismuuttuja $X =$ "ohi ajavan auton nopeus (km/h)".

$$X \sim N(68, \sigma)$$

a) Autoilijoista 32 % ajoi nopeudella yli 70 km/h, joten
100 % – 32 % = 68 % ajoi korkeintaan nopeutta 70 km/h. Siis

$$P(X \leq 70) = 0,68$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,68 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = 0,4676 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen
normaalijakaumatoimintoon
syötetään: pinta-ala 0,68 sekä
 $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 70 (km/h) normitettu arvo on siis 0,4676 ... Muodostetaan
yhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{70 - 68}{\sigma} = 0,4676 \dots$$

$$\sigma = 4,276 \dots$$

$$\sigma \approx 4,3 \text{ (km/h)}$$

b) Lasketaan tapahtuman $X > 72$ todennäköisyys käyttämällä a-
kohdassa keskihajonnalle saatua tarkkaa arvoa $\sigma = 4,276 \dots$

$$P(X > 72) = 0,1747 \dots \approx 17 \%$$

Siis mallin mukaan 17 % autoilijoista ylitti nopeuden 72 km/h.

210.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"työhönottohaastattelun pituus (min)"}$.

$$X \sim N(25, \sigma)$$

Tapahtuman $X \leq 30$ todennäköisyys on $95 \% = 0,95$ eli

$$P(X \leq 30) = 0,95$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä $0,95$ vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = 1,644 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala $0,95$ sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 30 (min) normitettu arvo on siis $1,644 \dots$ Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{30 - 25}{\sigma} = 1,644 \dots$$

$$\sigma = 3,039 \dots$$

$$\sigma \approx 3,04 \text{ (min)}$$

Tarkistetaan tehtävänannossa esiintynyt ehto:

Kun $\sigma = 3,04$, niin

$$P(X \leq 30) = 0,945 \dots < 95 \ %.$$

211.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa (°C)"}.$

$$X \sim N(4, \sigma)$$

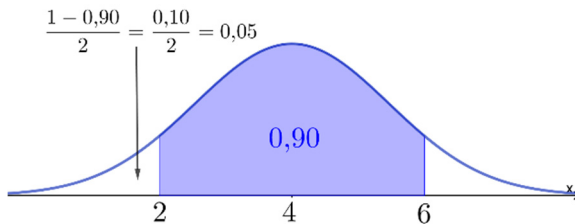
Tapahtuman $2,0 \leq X \leq 6,0$ todennäköisyys on $90 \% = 0,90$ eli

$$P(2 \leq X \leq 6) = 0,90$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyys ylärajalle 6.

Arvot $X = 2$ ja $X = 6$ ovat yhtä kaukana jakauman odotusarvosta $\mu = 4$. Symmetrian perusteella kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq 6) = 0,05 + 0,90 = 0,95$$



Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä $0,95$ vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = 1,644 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala $0,95$ sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 6 (°C) normitettu arvo on siis 1,644 ... Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{6 - 4}{\sigma} = 1,644 \dots$$

$$\sigma = 1,215 \dots$$

$$\sigma \approx 1,2 \text{ (°C)}$$

212.

Satunnaismuuttuja X = "konvehtirasian massa (g)".

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Sekä odotusarvo että keskihajonta ovat tuntemattomia.

Tapahtuman $X > 480$ todennäköisyys on $96 \% = 0,96$ eli

$$P(X \leq 480) = 1 - 0,96 = 0,04.$$

Tapahtuman $X < 500$ todennäköisyys on $14,5 \% = 0,145$ eli

$$P(X \leq 500) = 0,145.$$

a) Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä $0,04$ vastaava normitettu arvo Z_1 .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z_1 = -1,750 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala $0,04$ sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä $0,145$ vastaava normitettu arvo Z_2 .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z_2 = -1,058 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala $0,145$ sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Normitettujen arvojen avulla saadaan kaksi yhtälöä eli yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{480 - \mu}{\sigma} = -1,750 \dots \\ \frac{500 - \mu}{\sigma} = -1,058 \dots \end{cases}$$

Laskimella yhtälöparin ratkaisuksi saadaan: $\mu = 530,556 \dots \approx 531$ (g) ja $\sigma = 28,878 \dots \approx 29$ (g).

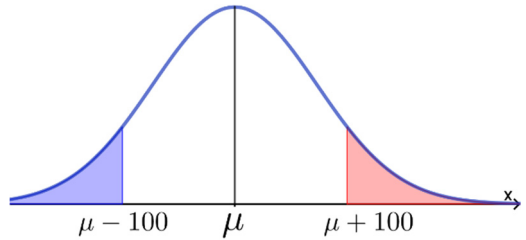
b) Määritetään tapahtuman $X > 525$ todennäköisyys.

$$P(X > 525) = 0,5762 \dots \approx 0,58.$$

213.

Satunnaismuuttuja $X =$
"pakkauksen massa (g)".

$$X \sim N(\mu, 80)$$



Pakkauksen massa poikkeaa keskiarvosta yli 100 g, kun

$$X < \mu - 100 \text{ tai } X > 100 + \mu.$$

Symmetrian perusteella tapahtuman $X < \mu - 100$ todennäköisyys on yhtä suuri kuin tapahtuman $X > 100 + \mu$ todennäköisyys.

Lasketaan tapahtuman $X > 100 + \mu$ todennäköisyys.

$$P(X > 100 + \mu)$$

Jakauman odotusarvo μ on tuntematon, joten siirrytään normitettuun jakaumaan $N(0, 1)$. Arvon $100 + \mu$ normitettu arvo on

$$Z = \frac{(100 + \mu) - \mu}{\sqrt{80}} = 1,25.$$

Sievennä laskimella.

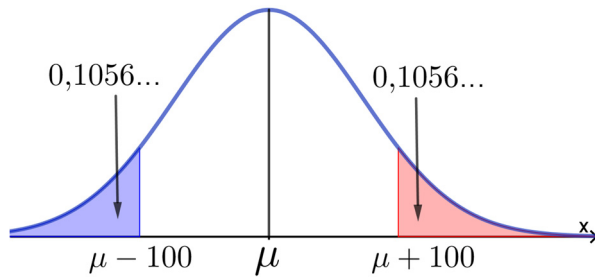
Siis

$$P(X > 100 + \mu) = P(Z > 1,25) = 0,1056 \dots$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 1,25, yläraja ∞ sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Todennäköisyys, että pakkauksen massa poikkeaa yli 100 g odotusarvosta on

$$0,1056 \dots + 0,1056 \dots = 0,2112 \dots \approx 0,21.$$



214.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"yhden akun työskentelyaika (h)"}.$

$$X \sim N(8,5; 1,7)$$

a) Satunnaismuuttuja $Y = \text{"neljän akun kokonaistyöskentelyaika (h)"}.$

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, missä

- odotusarvo on $\mu = 4 \cdot 8,5 = 34$ (h),
- keskihajonta on $\sigma = 1,7 \cdot \sqrt{4} = 3,4$ (h).

b) Neljä akkua riittää 40 tunnin työhön, kun $Y \geq 40$.

$$P(Y \geq 40) = 0,0388 \dots \approx 0,039$$

c) Merkitään akkujen lukumäärää kirjaimella n .

Satunnaismuuttuja $Y = "n \text{ akun kokonaistyöskentelyaika (h)}"$

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, missä

- odotusarvo on $\mu = n \cdot 8,5 = 8,5n$ (tuntia),
- keskihajonta on $\sigma = 1,7 \cdot \sqrt{n}$ (tuntia).

Akut riittävät 50 tunnin työhön 95 % varmuudella, kun $P(Y \geq 50) = 0,95$. Kertymätodennäköisyys on tällöin

$$P(Y \leq 50) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,05 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,644 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,05 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 50 (h) normitettu arvo on siis $-1,644 \dots$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

Normitus:

$$\frac{50 - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{50 - 8,5n}{1,7\sqrt{n}} = -1,644 \dots$$

$$n = 6,736 \dots$$

$$n \approx 7 \text{ (akkua)}$$

215.

Satunnaismuuttuja X = "yhden kananmunan paino (g)".

$$X \sim N(60; 8)$$

a) $P(X > 68) = 0,1586 \dots \approx 0,16$

b) Satunnaismuuttuja Y = "10 munan pakkauksen paino (g)"

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, missä

- odotusarvo on $\mu = 10 \cdot 60 = 600$ (g),
- keskihajonta on $\sigma = 8 \cdot \sqrt{10}$ (g).

c) Pakkaus painaa yli 680 g, kun $Y \geq 680$.

$$P(Y \geq 680) = 0,0007827 \dots \approx 0,00078$$

Laskinohjelmiston normaali-
jakaumatoimintoon syötetään:
alaraja 680, yläraja ∞ sekä
 $\mu = 600$ ja $\sigma = 8 \cdot \sqrt{10}$.

216.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"yhden suklaakeksin paino (g)"}$.

$$X \sim N(7,5; 2,5)$$

a) Satunnaismuuttuja $Y = \text{"9 suklaakeksin paketin paino (g)"}$

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, jossa

- odotusarvo on $\mu = 9 \cdot 7,5 = 67,5$ (g),
- keskihajonta on $\sigma = 2,5 \cdot \sqrt{9} = 7,5$ (g).

Keksipaketti painaa yli 80 g, kun $Y > 80$.

$$P(Y > 80) = 0,04779 \dots \approx 4,8 \%$$

Siis keksipaketeista 4,8 % painaa yli 80 grammaa.

b) Merkitään keksien lukumäärää pussissa kirjaimella n .

Satunnaismuuttuja $Y = \text{"keksipussin paino (g)"}$.

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, jossa

- odotusarvo on $\mu = n \cdot 7,5 = 7,5n$ (g),
- keskihajonta on $\sigma = 2,5 \cdot \sqrt{n}$ (g).

Keksipussi painaa 90 % varmuudella ainakin 500 g, kun

$P(Y \geq 500) = 0,90$. Kertymätodennäköisyys on tällöin

$$P(Y \leq 500) = 1 - 0,90 = 0,10.$$

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,10 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,281 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,10 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 500 (g) normitettu arvo on siis $-1,281 \dots$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

Normitus:

$$\frac{500 - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{500 - 7,5n}{2,5\sqrt{n}} = -1,281 \dots$$

$$n = 70,247 \dots$$

$$n \approx 71 \text{ (keksiä)}$$

Huomaa: Vastaus on pyöristetty ylöspäin, jotta tehtävänannon ehto toteutuu.

Tarkistus:

Kun keksien lukumäärä on $n = 70$, niin satunnaismuuttujan Y

- odotusarvo on $\mu = 70 \cdot 7,5 = 525$,
- keskihajonta on $\sigma = 2,5 \cdot \sqrt{70}$ ja

$$P(Y \geq 500) = 0,884 \dots < 90 \%$$

eli ehto ei toteudu.

Kun keksien lukumäärä on $n = 71$, niin satunnaismuuttujan Y

- odotusarvo on $\mu = 71 \cdot 7,5 = 532,5$,
- keskihajonta on $\sigma = 2,5 \cdot \sqrt{71}$ ja

$$P(Y \geq 500) = 0,938 \dots > 90 \%$$

eli ehto toteutuu.

217.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"mutterin halkaisija (mm)"}.$

$$X \sim N(100, 1)$$

Halkaisijan odotusarvo on $\mu = 100$ (mm).

a) Laadunvalvonta poistaa mutterin (eli mutteri hylätään), jos $X < 99$ tai $X > 101$.

Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman, eli tapahtuman "mutteri hyväksytään", avulla.

Mutteri hyväksytään, jos $99 \leq X \leq 101$.

$$P(\text{mutteri hyväksytään}) = P(99 \leq X \leq 101) = 0,6826 \dots$$

Komplementtisäännön mukaan kysytty todennäköisyys on tällöin

$$\begin{aligned} P(\text{mutteri hylätään}) &= 1 - P(\text{mutteri hyväksytään}) \\ &= 1 - 0,6826 \dots \\ &= 0,3173 \dots \\ &\approx 0,32 \end{aligned}$$

b) Satunnaismuuttuja $Y = \text{"hyväksyttävien mutterien lukumäärä 10 mutterin otoksessa"}.$

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 10 \text{ ja } p = P(\text{mutteri hyväksytään}) = 0,6826 \dots$$

Vähintään 5 mutteria hyväksytään, kun $Y \geq 5$.

$$P(Y \geq 5) = 0,9386 \dots \approx 0,94$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 10$, $p = 0,6826 \dots$ sekä
alaraja 5 ja yläraja 10.

218.

Satunnaismuuttuja X = "testin pistemäärä".

$$X \sim N(50, 12)$$

a) Hakija pääsee jatsoon, kun $X \geq 65$.

$$P(X \geq 65) = 0,1056 \dots \approx 0,11$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 65, yläraja ∞ sekä $\mu = 50$ ja $\sigma = 12$.

b) Satunnaismuuttuja Y = "jatsioon pääsevien hakijoiden lukumäärä 12 hakijan joukossa".

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 12 \text{ ja } p = P(\text{hakija pääsee jatsioon}) = 0,1056 \dots$$

Hakijoiden joukossa on ainakin kolme jatsioon pääsijää, kun $Y \geq 3$.

$$P(Y \geq 3) = 0,1257 \dots \approx 0,13$$

Laskinohjelmiston binomi-jakaumatoimintoon syötetään: $n = 12$, $p = 0,1056 \dots$ sekä alaraja 3 ja yläraja 12.

c) Hakija ei pääse jatsioon, kun $X < 65$.

$$P(X < 65) = 1 - 0,1056 \dots = 0,8943 \dots$$

Todennäköisyys, ettei yksikään 12 hakijasta pääse jatsioon on kertolaskusäännön mukaan

$$(0,8943 \dots)^{12} = 0,2618 \dots \approx 0,26.$$

219.

Satunnaismuuttuja X = ”yhden asiakkaan palvelemiseen kuluva aika (min)”.

$$X \sim N(3,1)$$

a) Asiakkaan palveluaika ylittää 5 min, kun $X > 5$.

$$P(X > 5) = 0,0227 \dots$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 5, yläraja ∞ sekä $\mu = 3$ ja $\sigma = 1$.

Kun asiakkaita on suuri määrä, todennäköisyys ilmaisee myös niiden asiakkaisen prosenttiosuuden, joiden kohdalla palveluaika ylittää 5 min.

$$0,0227 \dots \cdot 180 = 4,095 \dots \approx 4$$

Siis neljän asiakkaan palveluajan voidaan arvioida ylittävän 5 min.

b) Satunnaismuuttuja Y = ”niiden asiakkaiden lukumäärä, joiden palveluaika on yli 5 min”.

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 12 \text{ ja } p = 0,0227 \dots$$

Useamman kuin yhden asiakkaan palvelemiseen menee yli 5 min, kun $Y \geq 2$.

$$P(Y \geq 2) = 0,0293 \dots \approx 0,03$$

Laskinohjelmiston binomi-jakaumatoimintoon syötetään: $n = 12$, $p = 0,0227 \dots$ sekä alaraja 2 ja yläraja 12.

220.

Satunnaismuuttuja Y = "vasenkätisten lukumäärä 32 opiskelijan ryhmässä".

a) Ihmisistä 10 % on vasenkätisiä. Siis, todennäköisyys, että satunnaisesti poimittu henkilö on vasenkätinen 0,10.

Ryhmän muodostuminen voidaan ajatella 32 toiston toistokokeena, jossa "onnistumisen" (vasenkätisyyden) todennäköisyys on jokaisen kohdalla sama: $p = 0,10$.

Siis, satunnaismuuttuja Y noudattaa binomijakaumaa.

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 32 \text{ ja } p = 0,10$$

b) $P(Y = 4) = 0,1881 \dots \approx 0,19$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 32, p = 0,1$ sekä arvo 4.

c) Normaalijakauma-approksimaatiossa $X \sim N(\mu, \sigma)$

- odotusarvo on $\mu = np = 32 \cdot 0,10 = 3,2$
- keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{32 \cdot 0,10 \cdot 0,90} = 1,697 \dots$$

Normaalijakauman avulla kysytylle todennäköisyydelle saadaan arvio

$$P(Y = 4) \approx P(3,5 \leq X < 4,5) = 0,2080 \dots \approx 0,21$$

Laskinohjelmiston normaalijakaumatoimintoon syötetään:
alaraja 3,5, yläraja 4,5 sekä
 $\mu = 3,2$ ja $\sigma = 1,697 \dots$

221.

Paikan ostaneita matkustajia on 184.

Todennäköisyys, että paikan varannut matkustaja saapuu lennolle, on 0,95.

Satunnaismuuttuja Y = "lennolle saapuvien matkustajien lukumäärä".

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 184 \text{ ja } p = 0,95$$

Paikat riittävät, jos lennolle saapuu korkeintaan 180 matkustajaa, eli $Y \leq 180$.

$$\text{a) } P(Y \leq 180) = 0,9835 \dots \approx 0,98$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 184, p = 0,95$ alaraja 0, yläraja 180.

b) Normaalijakauma-approksimaatiossa $X \sim N(\mu, \sigma)$

- odotusarvo on $\mu = np = 184 \cdot 0,95 = 174,8$
- keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{184 \cdot 0,95 \cdot 0,05} = 2,956 \dots$$

Normaalijakauman avulla kysytylle todennäköisyydelle saadaan arvio

$$P(Y \leq 180) \approx P(X < 180,5) = 0,9787 \dots \approx 0,98$$

Laskinohjelmiston normaalijakaumatoimintoon syötetään:
alaraja $-\infty$, yläraja 180,5 sekä
 $\mu = 174,8$ ja $\sigma = 2,956 \dots$

222.

Asiakkaita on 2500.

Todennäköisyys, että asiakas palauttaa tilaamansa tuotteen, on 0,11.

Satunnaismuuttuja Y = "tuotteen palauttavien asiakkaiden lukumäärä".

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 2500 \text{ ja } p = 0,11$$

Lasketaan tapahtuman $Y \geq 300$ todennäköisyys.

Tapa 1: Binomijakauman avulla:

$$P(Y \geq 300) = 0,0600 \dots \approx 0,060$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 2500$, $p = 0,11$ alaraja 300, yläraja 2500.

Tapa 2: Opastuksen mukaan normaalijakauma-approksimaation

$X \sim N(\mu, \sigma)$ avulla, jossa

- odotusarvo on $\mu = np = 2500 \cdot 0,11 = 275$
- keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{2500 \cdot 0,11 \cdot 0,89} = 15,644 \dots$$

Normaalijakauman avulla kysytylle todennäköisyydelle saadaan arvio

$$P(Y \geq 300) \approx P(X \geq 299,5) = 0,0586 \dots \approx 0,059$$

Laskinohjelmiston normaalijakaumatoimintoon syötetään:
alaraja 299,5, yläraja ∞ sekä
 $\mu = 275$ ja $\sigma = 15,644 \dots$

223.

Satunnaismuuttuja X = "siian paino (g)".

$$X \sim N(170, 30)$$

a) Lasketaan todennäköisyys, että siika painaa yli 200 g, eli $X > 200$.

$$P(X > 200) = 0,1586 \dots$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 200, yläraja ∞ sekä $\mu = 170$ ja $\sigma = 30$.

Todennäköisyys ilmaisee myös yli 200 g painavien siikojen prosenttiosuuden.

$$0,1586 \dots \cdot 20 = 3,173 \dots \approx 3$$

Yli 200 g painavia siikoja on kalasaaliissa kolme.

b) Yhden siian painon odotusarvo on $\mu = 170$ g.

Tällöin 20 siian yhteispainon odotusarvo on

$$20 \cdot 170 \text{ g} = 3400 \text{ g} = 3,4 \text{ kg}$$

Kalasaaliin kokonaispaino on arviolta 3,4 kiloa.

224.

Satunnaismuuttuja X = "sytytystulpan kestävyys (ajokm)".

$$X \sim N(25\,000, 2000)$$

Merkitään kysyttyä ajokilometrimäärää kirjaimella a .

Tapahtuman $X > a$ todennäköisyys on 0,95.

$$P(X > a) = 0,95$$

Kertymätodennäköisyys on tällöin

$$P(X \leq a) = 1 - 0,95$$

$$P(X \leq a) = 0,05$$

$$a = 21\,710,292 \dots$$

$$a \approx 21\,700 \text{ (km)}$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,05 sekä $\mu = 25\,000$ ja $\sigma = 2000$.

225.

a) $X \sim N(\mu, 4)$

$$P(X < 14,0) = 0,65$$

Odotusarvo μ on tuntematon, joten siirrytään normitettuun jakaumaan $N(0,1)$.

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,65 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = 0,3853 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,65 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 14,0 normitettu arvo on siis 0,3853 ... Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan μ .

$$\frac{14 - \mu}{4} = 0,3853 \dots$$

$$\mu = 12,458 \dots$$

$$\mu \approx 12,5$$

b) $X \sim N(8, \sigma)$

$$P(X > 10,0) = 0,07$$

Keskihajonta σ on tuntematon, joten siirrytään normitettuun jakaumaan $N(0,1)$.

Kertymätodennäköisyys on $P(X \leq 10,0) = 1 - 0,07 = 0,93$.

Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,93 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = 1,4757 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen
normaalijakaumatoimintoon syötetään:
pinta-ala 0,93 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 10,0 normitettu arvo on siis 1,4757 ... Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{10 - 8}{\sigma} = 1,4757 \dots$$

$$\sigma = 1,355 \dots$$

$$\sigma \approx 1,36$$

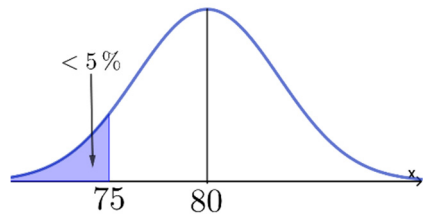
226.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"paperin massa (g/m}^3\text{) "}$.

$$X \sim N(80, \sigma)$$

Tapahtuman $X < 75$ todennäköisyys on pienempi kuin 5 % eli

$$P(X < 75) < 0,05$$



Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,05 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,644 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaali jakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,05 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Kertymätodennäköisyys $P(X < 75)$ on pienempi kuin 0,05, joten arvon 75 normitettu arvo on pienempi kuin $-1,644 \dots$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{75 - 80}{\sigma} < -1,644 \dots$$

$$0 < \sigma < 3,039 \dots$$

Hajonta saa siis olla enintään $\sigma = 3,0 \text{ g/m}^3$.

227.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"pituus (cm)"}$

Perusjoukkona on
kaikki ihmiset.

$$X \sim N(175, 5)$$

$$P(X > 190) = 0,00134 \dots$$

Satunnaismuuttuja $Y = \text{"älykkyyssosamäärä"}$

$$Y \sim N(102, 12)$$

$$P(Y > 140) = 0,000771 \dots$$

Tapahtuman $A = \text{"ihminen on yli 190 cm pitkä ja
älykkyyssosamäärältään yli 140"}$ todennäköisyys on kertolaskusäännön
mukaan

$$\begin{aligned} P(X > 190 \text{ ja } Y > 140) &= 0,00134 \dots \cdot 0,000771 \dots \\ &= 1,040 \dots \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Ihmisen pituus ja
älykkyyssosamäärä
ovat
toisistaan

Vastatapahtuman $\bar{A} = \text{"ihminen on korkeintaan 190 cm pitkä tai
älykkyyssosamäärältään korkeintaan 140"}$ todennäköisyys on tällöin

$$P(\bar{A}) = 1 - 1,040 \dots \cdot 10^{-6} = 0,99999895 \dots$$

Lasketaan tapahtuman "ryhmässä ainakin yksi henkilö, jolle
 $X > 190 \text{ cm}$ ja $Y > 140$ " todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtuma on, että 16 500 ihmisen ryhmässä ei ole yhtään
henkilöä, jonka pituus on yli 190 cm ja älykkyyssosamäärä yli 140, eli
kaikki ovat sellaisilla, joiden pituus on korkeintaan 190 cm tai
älykkyyssosamäärä korkeintaan 140.

Kertolaskusäännön mukaan, vastatapahtuman todennäköisyys on

$$(0,99999895 \dots)^{16\,500} = 0,98297 \dots$$

Todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi ehdon täyttävä henkilö, on siis

$$1 - 0,98297 \dots = 0,0170 \dots \approx 0,017.$$

Samaa päättelyä, eli kertolaskusääntöä, ei voida käyttää, sillä ihmisen pituus ja kengännumero eivät ole toisistaan riippumattomat.

228.

Satunnaismuuttuja $X = \text{"ajoaika leipomosta myymälään (min)"}$.

$$X \sim N(38, 4)$$

a) Ajoaika ei ylitä 45 min, kun $X \leq 45$.

$$P(X \leq 45) = 0,9599 \dots$$

Laskinohjelmiston syötetään: alaraja $-\infty$, yläraja 45, $\mu = 38$ ja $\sigma = 4$. Huomaa: normaalijakaumamallissa alaraja on $-\infty$ vaikka todellisuudessa ajoaika on positiivinen luku.

Todennäköisyys, ettei ajoaika 10 matkalla kertaakaan ylitä 45 min on kertolaskusäännön mukaan

$$(0,9599 \dots)^{10} = 0,6644 \dots \approx 0,66.$$

b) Tapa 1:

Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Tapahtuman "ylittää 50 min ainakin kerran" vastatapahtuma on "ei kertaakaan ylitä 50 min".

Ajoaika ei ylitä 50 min, kun $X \leq 50$.

$$P(X \leq 50) = 0,9986 \dots$$

Laskinohjelmiston normaalijakaumatoimintoon syötetään: alaraja $-\infty$, yläraja 50, $\mu = 38$ ja $\sigma = 4$.

Todennäköisyys, ettei ajoaika 10 matkalla kertaakaan ylitä 50 min on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ei kertaakaan yli 50 min}) = (0,9986 \dots)^{10} = 0,9865 \dots$$

Komplementtisäännön mukaan kysytty todennäköisyys on tällöin

$$\begin{aligned}P(\text{ainakin kerran yli 50 min}) \\&= 1 - P(\text{ei kertaakaan yli 50 min}) \\&= 1 - 0,9865 \dots \\&= 0,0134 \dots \\&\approx 0,013.\end{aligned}$$

Tapa 2:

Satunnaismuuttuja Y = "niiden ajojen lukumäärä, joissa ajoaika ylittää 50 min".

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$n = 10$ ja

$$\begin{aligned}p &= P(\text{ajokaika yli 50 min}) \\&= P(X > 50) \\&= 0,001349 \dots\end{aligned}$$

Laskinohjelmiston
normaalijakaumatoimintoon syötetään:
alaraja 50, yläraja ∞ , $\mu = 38$ ja $\sigma = 4$.

Ajoaika ylittää 50 min ainakin kerran, kun $Y \geq 1$.

$$P(Y \geq 1) = 0,0134$$

Laskinohjelmiston binomi-
jakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 10$, $p = 0,001349\dots$ sekä
alaraja 1 ja yläraja 10.

229.

Satunnaismuuttuja X = "yhden pariston käyttöikä (h)".

$$X \sim N(14; 8)$$

Satunnaismuuttuja Y = "neljän pariston kokonaistyöskentelyaika (h)"

Satunnaismuuttujan $Y \sim N(\mu, \sigma)$, jossa

- odotusarvo on $\mu = 4 \cdot 14 = 56$ (h),
- keskihajonta on $\sigma = 8 \cdot \sqrt{4} = 16$ (h).

Yksi paketti eli neljä paristoa riittää 48 tunnin käyttöön, kun $Y \geq 48$.

$$P(Y \geq 48) = 0,6914 \dots \approx 0,69$$

Laskinohjelmiston normaali-jakaumatoimintoon syötetään: alaraja 48, yläraja ∞ sekä $\mu = 56$ ja $\sigma = 16$.

230.

Heitetään noppaa 600 kertaa.

Satunnaismuuttuja $Y = \text{"kuutosten lukumäärä"}$.

$$Y \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 600 \text{ ja } p = \frac{1}{6}$$

$$\text{a) } P(95 \leq Y \leq 105) = 0,4531 \dots \approx 0,45$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 600, p = \frac{1}{6}$ alaraja 95, yläraja 105.

b) Merkitään heittokertoja kirjaimella n .

Satunnaismuuttuja $Y = \text{"kuutosten lukumäärä"}$. $Y \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{6})$

$$P(Y \geq 10) \geq 0,90$$

Normaalijakauma-approksimaatiossa $X \sim N(\mu, \sigma)$

- odotusarvo on $\mu = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6}$
- keskihajonta on $\sigma = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{5n}$

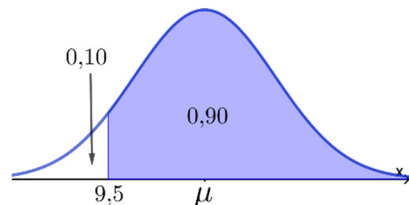
Sievennä laskimella.

Normaalijakauman avulla ehdoksi saadaan:

$$P(X \geq 9,5) \geq 0,90$$

Kertymätodennäköisyys on tällöin

$$P(X < 9,5) \leq 1 - 0,90 = 0,10$$



Ratkaistaan kertymätodennäköisyyttä 0,10 vastaava normitettu arvo Z .

Normitetuksi arvoksi saadaan

$$Z = -1,281 \dots$$

Laskinohjelmiston käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään: pinta-ala 0,10 sekä $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Arvon 9,5 kertymätodennäköisyys $P(X < 9,5)$ on korkeintaan 0,10, joten arvon 9,5 normitettu arvo on korkeintaan $-1,281 \dots$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n .

Normitus:

$$\frac{9,5 - \mu}{\sigma}$$



$$\frac{9,5 - \frac{n}{6}}{\frac{1}{6}\sqrt{5n}} \leq -1,281 \dots$$

$$n \geq 83,127 \dots$$

Siis tarvitaan vähintään 84 heittoa.

Huomautus: Ratkaisussa arvioitiin normaalijakauman avulla, että noppaa on heitettävä vähintään 84 kertaa, jotta tehtävänannossa esiintyvä ehto toteutuu.

Itse asiassa, 83 heittoa riittää.

Satunnaismuuttuja $Y =$ "kuutosten lukumäärä".

$$Y \sim \text{Bin}(83, \frac{1}{6})$$

Tällöin

$$P(Y \geq 10) = 0,9036 \dots > 0,90$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 83$, $p = \frac{1}{6}$ alaraja 10, yläraja 83.

Sen sijaan 82 heittoa ei riitä:

$$P(Y \geq 10) = 0,8956 \dots < 0,90$$

Laskinohjelmiston binomi-
jakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 82$, $p = \frac{1}{6}$ alaraja 10, yläraja 82.

Normaalijakauman avulla saatiin siis melko tarkka arvio tarvittavien heittojen lukumäärälle.