

3 TODENNÄKÖISYYDEN LASKUSÄÄNTÖJÄ

3.1 Komplementtisääntö

ALOITA PERUSTEISTA

- 301.** Lasketaan komplementtisäännön avulla.
 $P(\text{on puna-vihersokeus}) = 8 \% = 0,08$.

$$\begin{aligned} P(\text{ei ole puna-vihersokeutta}) \\ &= 1 - P(\text{on puna-vihersokeus}) \\ &= 1 - 0,08 = 0,92 = 92 \%. \end{aligned}$$

Satunnaisesti valitulla miehellä ei ole puna-vihersokeutta 92 prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 92 %

- 302. a)** Tapahtuman A = ”satunnainen nostettu pähkinä on saksanpähkinä” vastatapahtuma on
 $\bar{A}$ = ”satunnainen nostettu pähkinä ei ole saksanpähkinä”.

Vastaus: $\bar{A}$ = ”satunnainen nostettu pähkinä ei ole saksanpähkinä”

- b)** Kaavion mukaan tapahtumalle A suotuisia alkeistapauksia on 27 ja vastatapahtumalle $\bar{A}$ suotuisia alkeistapauksia on 38.
Alkeistapauksia on yhteensä $27 + 38 = 65$.

$$P(A) = \frac{27}{65} = 0,415... \approx 0,42$$

$$P(\bar{A}) = \frac{38}{65} = 0,584... \approx 0,58$$

Vastaus: $P(A) = 0,42$, $P(\bar{A}) = 0,58$

303. a) Tapahtumalle ”silmäluku on 5” suotuisa alkeistapaus on silmäluku 5.

$$P(\text{silmäluku on } 5) = \frac{1}{6} = 0,166... \approx 0,17$$

$$\text{Vastaus: } 5, \frac{1}{6} \approx 0,17$$

b) Tapahtumalle ”silmäluku on muu kuin 5” suotuisat alkeistapaukset ovat 1, 2, 3, 4 ja 6. Niitä on yhteensä 5, joten

$$P(\text{silmäluku on muu kuin } 5) = \frac{5}{6} = 0,833... \approx 0,83.$$

$$\text{Vastaus: } 1,2,3,4,6; \frac{5}{6} \approx 0,83$$

c) Tapahtumalle ”silmäluku on vähintään 5” suotuisat alkeistapaukset ovat 5 ja 6. Niitä on yhteensä 2, joten

$$P(\text{silmäluku on vähintään } 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333... \approx 0,33.$$

$$\text{Vastaus: } 5,6; \frac{1}{3} \approx 0,33$$

d) Tapahtumalle ”silmäluku on korkeintaan 5” suotuisat alkeistapaukset ovat 1, 2, 3, 4 ja 5. Niitä on yhteensä 5, joten

$$P(\text{silmäluku on korkeintaan } 5) = \frac{5}{6} = 0,833... \approx 0,83.$$

$$\text{Vastaus: } 1,2,3,4,5; \frac{5}{6} \approx 0,83$$

- 304.** A Korttipakassa jokaista maata on kortit, joiden arvo on 1–13. Yhdessä maassa arvoltaan ainakin 9 olevia kortteja ovat kortit 9, 10, 11, 12 ja 13. Niitä on 5. Maita on 4, joten tapahtumalle ”sekoitetusta korttipakasta vedetty kortti on arvoltaan ainakin 9” suotuisia alkeistapauksia on $5 \cdot 4 = 20$. Tapahtuma A ja lukumäärä IV kuuluvat yhteen.
- B Arpakuution heitossa on 6 alkeistapausta: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Tapahtumalle ”silmäluku ei ole 5 tai 6” suotuisia alkeistapauksia ovat 1, 2, 3 ja 4, joten tapahtuma B ja lukumäärä II kuuluvat yhteen.
- C Kahden kolikon heitossa erilaiset heittosarjat ovat KK, KL, LK ja LL. Näistä kolmessa mukana on ainakin yksi klaava, joten tapahtuma C ja lukumäärä I kuuluvat yhteen.
- D Arpajaisten 40 arvasta 25 % on voittoarpoja, joten voittoarpoja on $0,25 \cdot 40 = 12$. Tapahtuma D ja lukumäärä III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV; B: II, C: I ja D: III

- 305.** Laatikon pallojen värit ovat keltainen, punainen, sininen ja violetti.
- A Tapahtuman ”nostettu pallo on keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo ei ole keltainen”. Tapahtuma A ja vaihtoehto II kuuluvat yhteen.
- B Tapahtuman ”nostettu pallo on violetti tai keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on punainen tai sininen”. Tapahtuma B ja vaihtoehto IV kuuluvat yhteen.
- C Tapahtuman ”nostettu pallo ei ole keltainen eikä punainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on keltainen tai punainen”. Tapahtuma C ja vaihtoehto I kuuluvat yhteen.
- D Tapahtuman ”nostettu pallo on sininen, punainen tai keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on violetti”. Tapahtuma D ja vaihtoehto III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

- 306.** a) Tapahtuman ”kaikki heitot menevät koriin” vastatapahtuma on se, että koriin menee 0, 1 tai 2 kaksi heittoa, eli ainakin yksi heitto ei mene koriin.

Vastaus: ainakin yksi heitto menee ohi

- b) Tapahtuman ”täsmälleen yksi heitto menee koriin” vastatapahtuma on se, että joku muu määrä heittoa menee koriin. Muut mahdolliset määrät ovat 0, 2 ja 3.

Vastaus: 0, 2 tai 3 heittoa menee koriin

- c) Tapahtuman ”ainakin yksi heitto menee koriin” vastatapahtuma on se, että yksikään heitoista ei mene koriin.

Vastaus: yksikään heitto ei mene koriin

- 307.** a) Suotuisia alkeistapauksia on 10 sille, että satunnaisesti valittu peli on jokin suosituimmasta kymmenestä pelistä. Kaikkia alkeistapauksia on 200 000, joten

$$P(\text{peli on jokin 10:stä suosituimmasta pelistä}) \\ = \frac{10}{200\,000} = \frac{1}{20\,000} = 0,00005 = 0,005 \, \%$$

Mobiilipeli on jokin kymmenestä vuoden aikana julkaisusta pelistä todennäköisyydellä 0,005 %.

Vastaus: 0,005 %

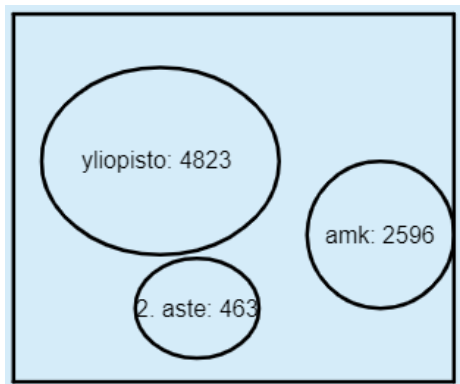
- b) Tapahtuman ”peli ei ole yksikään kymmenestä vuoden aikana julkaisusta pelistä” vastatapahtuma on a-kohdan tapahtuma, joten

$$P(\text{peli ei ole jokin 10:stä suosituimmasta pelistä}) \\ = 1 - \frac{10}{200\,000} = 0,99995 = 99,995 \, \%$$

Vastaus: 99,995 %

VAHVISTA OSAAMISTA

308.



- a) Tilaston mukaan ylioppilaita oli yhteensä 26 243 ja ylioppilaita, jotka jatkoivat heti lukion jälkeen opintoja yliopistossa, oli 4823.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{ylioppilas jatkoi heti lukion jälkeen opintoja yliopistossa})$

$$= \frac{4823}{26\,243} = 0,183... \approx 0,18 = 18 \%$$

Ylioppilas jatkoi heti lukion jälkeen opintoja yliopistossa
18 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 18 %

- b) Tilaston mukaan ylioppilaita, jotka eivät jatkaneet opintoja heti lukion jälkeen oli $26\,243 - (463 + 2596 + 4823) = 18\,388$.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{ylioppilas ei jatkanut opintoja heti lukion jälkeen})$

$$= \frac{18\,388}{26\,243} = 0,700... \approx 0,70 = 70 \%$$

Ylioppilas ei jatkanut opintoja heti lukion jälkeen
69 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 69 %

- 309.** a) Tapahtuman ”arpakuutiota heittämällä saadaan parillinen silmäluku” vastatapahtuma on se, arpakuution silmäluvuista 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 saadaan jokin muu kuin 2, 4 tai 6. Vastatapahtuma voidaan ilmaista muodossa ”arpakuutiota heittämällä saadaan pariton silmäluku”.

Vastaus: ”arpakuutiota heittämällä saadaan pariton silmäluku”

- b) Tapahtuman ”huomenna sää on kylmä ja kirkas” vastatapahtuma on mikä tahansa sää, joka ei ole sekä kylmä että kirkas. Vastatapahtuma voidaan ilmaista ”sää ei ole kylmä tai ei ole kirkas”.

Vastaus: ”sää ei ole kylmä tai ei ole kirkas”

- c) Tapahtuman ”korttipakasta nostettu kortti on ässä tai punainen” vastatapahtumassa nostettu kortti ei saa olla kumpaakaan ässä eikä punainen. Vastatapahtuma voidaan ilmaista ”nostettu kortti on musta, mutta ei ässä”.

Vastaus: ”nostettu kortti on musta, mutta ei ässä”

- d) Tapahtuman ”raveissa ravuri Salama tai Puolukka ei voita kilpailua” vastatapahtumassa jompikumpi Salma tai Puolukka voittaa kilpailun. Vastatapahtuma voidaan ilmaista ”raveissa ravuri Salama tai Puolukka voittaa kilpailun”.

Vastaus: ”raveissa ravuri Salama tai Puolukka voittaa kilpailun”

- e) Tapahtuman ”alueen västäräkeistä yhdelläkään ei ollut kuutta poikasta” vastatapahtumassa alueen västäräkeistä edes yhdellä tulee olla 6 poikasta. Vastatapahtuma voidaan ilmaista ”alueen västäräkeistä ainakin yhdellä on kuusi poikasta”.

Vastaus: ”alueen västäräkeistä ainakin yhdellä on kuusi poikasta”

- 310. a)** Pakassa on neljää eri maata, joista yksi on risti. Kaikki maat ovat yhtä todennäköisiä, joten

$$P(\text{kortti on risti}) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Nostettu kortti on risti todennäköisyydellä 0,25.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{4} = 0,25$$

- b)** Kuvakortteja ovat sotilas, kuningatar ja kuningas. Kortin arvo voi olla mikä tahansa kokonaisluvusta 1–13, ja kuvakorttien arvot ovat 11, 12 ja 13. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kortti on kuvakortti}) = \frac{3}{13} = 0,230... \approx 0,23.$$

Nostettu kortti on kuvakortti todennäköisyydellä 0,23.

$$\text{Vastaus: } \frac{3}{13} \approx 0,23$$

- c)** Pakassa on yhteensä 52 korttia, joista ristejä on 13 ja kuvakortteja $4 \cdot 3 = 12$. Pakassa on kolme korttia, jotka ovat sekä ristejä että kuvia. Kortteja, jotka ovat ristejä tai kuvakortteja, on siis $13 + 12 - 3 = 22$ ja muita kortteja $52 - 22 = 30$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kortti ei ole risti eikä kuvakortti}) = \frac{30}{52} = 0,576... \approx 0,58.$$

Nostettu kortti ei ole risti eikä kuvakortti todennäköisyydellä 0,58.

$$\text{Vastaus: } \frac{30}{52} \approx 0,58$$

- 311.** Merkitään R = kruuna ja L = klaava. Valitaan alkeistapauksiksi kaikki mahdolliset neljän heiton sarjat ja luetellaan ne.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto	4. heitto
Neljä klaavaa	L	L	L	L
Kolme klaavaa ja yksi kruuna	L	L	L	R
	L	L	R	L
	L	R	L	L
	R	L	L	L
Kaksi klaavaa ja kaksi kruunaa	L	L	R	R
	L	R	L	R
	L	R	R	L
	R	R	L	L
	R	L	R	L
Yksi klaava ja kolme kruunaa	R	L	L	R
	R	R	R	L
	R	R	L	R
	R	L	R	R
Neljä kruunaa	R	R	R	R

Alkeistapauksia on yhteensä 16, joista suotuisia ovat kaikki paitsi viimeinen.

$$P(\text{ainakin 1 klaava}) = \frac{15}{16} = 0,9375 \approx 0,94$$

Neljän kolikon heitossa saadaan ainakin yksi klaava todennäköisyydellä 0,94.

Vastaus: $\frac{15}{16} \approx 0,94$

- 312. a)** Valitaan alkeistapauksiksi kahden kortin jonot. Korttipakassa on aluksi kortteja 52 ja yhden noston jälkeen 51, joten kaikkien alkeistapausten määrä on $52 \cdot 51 = 2652$.

Suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa ensimmäinen kortti on ässä ja toinen kortti on ässä. Ässiä on aluksi pakassa 4 ja kun yksi on nostettu, ässiä on vielä kolme. Suotuisten alkeistapausten määrä on siis $4 \cdot 3 = 12$.

$$P(\text{molemmat kortit ovat ässiä}) = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221} = 0,00452... \approx 0,0045$$

Molemmat nostetut kortit ovat ässiä todennäköisyydellä 0,0045.

Vastaus: $\frac{1}{221} \approx 0,0045$

- b)** Tapahtuman ”molemmat kortit ovat ässiä” vastatapahtumassa pakasta saa tulla yksi ässä tai ei yhtään ässiä. Vastatapahtuma on siis ”korkeintaan toinen korteista on ässä”.

$$\begin{aligned} P(\text{korkeintaan toinen korteista on ässä}) \\ &= 1 - P(\text{molemmat kortit ovat ässiä}) \\ &= 1 - \frac{1}{221} = \frac{220}{221} = 0,99547... \approx 0,9955 \end{aligned}$$

Korkeintaan toinen nostetuista korteista on ässä todennäköisyydellä 0,9955.

Vastaus: korkeintaan toinen korteista on ässä, $\frac{220}{221} \approx 0,9955$

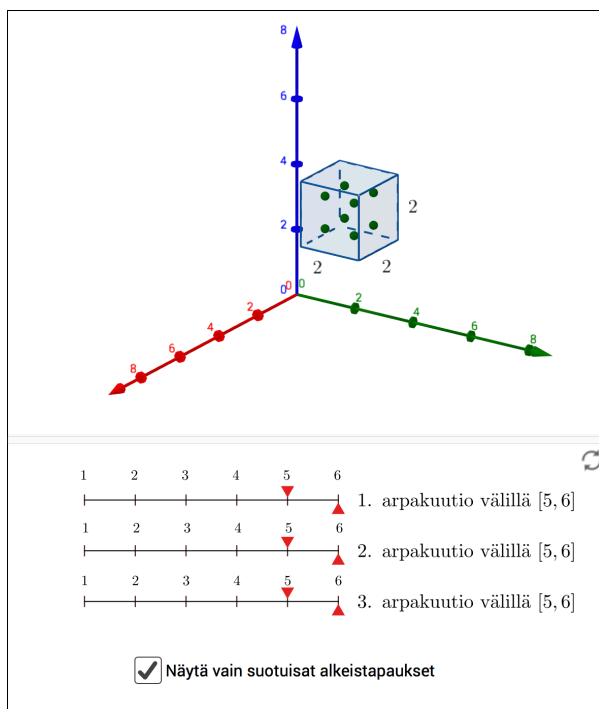
- 313. a)** Pelaamalla peliä esimerkiksi 10 000 peliä havaitaan, että pelaaja jää lähes aina tappiolle. 10 000 pelissä kokonaistuotto voi olla esimerkiksi –3334 euroa eli sataa peliä kohti –33,34 euroa. Pelaaja näyttäisi jäävän sataa peliä kohti noin 30 euroa tappiolle.

Vastaus: n. 30 € tappiolle

- b)** Kun pelipanos otetaan huomioon, niin keskimäärin yksi peli kymmenestä tuottaa $4 \text{ €} - 1 \text{ €} = 3 \text{ €}$ ja yhdeksän peliä kymmenestä tuottaa kukin -1 € . Kokonaistuotto on tällöin $9 \cdot (-1 \text{ €}) + 1 \cdot 3 \text{ €} = -6 \text{ €}$. Pelaaja on odotettavasti 6 euroa alkuperäistä köyhempi.

Vastaus: 6 € köyhempi

- 314. a)** Tutkitaan appletin avulla, kuinka monta suotuisista alkeistapausta on.



Suotuisia alkeistapauksia on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Arpakuution silmäluku voi jokaisella heitolla olla mikä tahansa silmäluvuista 1–6, joten kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6^3 = 216$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{jokaisen arpakuution silmäluku on 5 tai 6}) \\ = \frac{8}{216} = \frac{1}{27} = 0,0370... \approx 0,037.$$

Kaikkien arpakuutioiden silmäluku on 5 tai 6 todennäköisyydellä 0,037.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{27} \approx 0,037$$

- b)** Tapahtumalla ”silmälukujen summa on yli 3” on useita suotuisia alkeistapauksia. Sen vastatapahtumalla ”silmälukujen summa on korkeintaan 3” on vain yksi suotuista alkeistapaus.

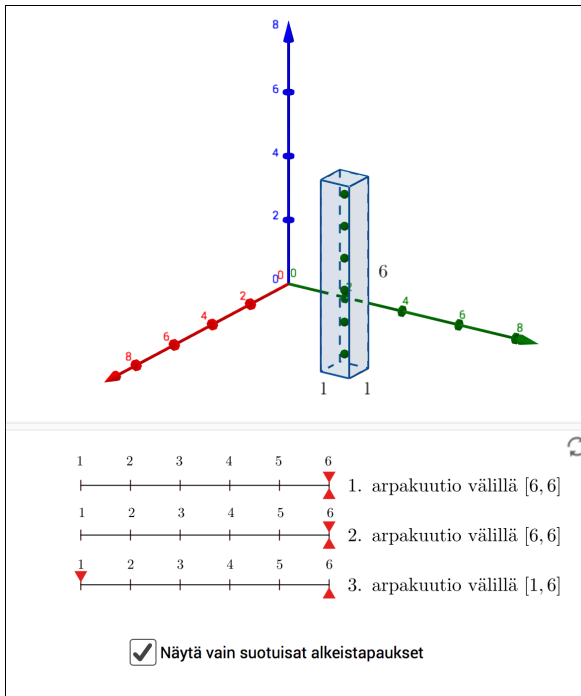
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{silmälukujen summa on yli 3}) \\ = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216} = 0,9953... \approx 0,995.$$

Silmälukujen summa on yli 3 todennäköisyydellä 0,995.

$$\text{Vastaus: } \frac{215}{216} \approx 0,995$$

- c) Tapahtuma ”ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli 5” tapahtuu, jos kahden tai kolmen arpakuution silmäluku on 6.
Tutkitaan appletin avulla suotuisien alkeistapausten lukumäärää.



Sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa ensimmäisen ja toisen arpakuution silmäluku on 6 ja kolmannen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6.

Samoin sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa ensimmäisen ja kolmannen arpakuution silmäluku on 6 ja toisen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6.

Samoin sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa toisen ja kolmannen arpakuution silmäluku on 6 ja ensimmäisen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6.

Kaikissa kolmessa edellä luetellussa tapauksessa on yhtenä alkeistapauksena tapaus, jossa kaikki silmäluvut ovat kuutusia.

Koska sama alkeistapaus on laskettu kolmeen kertaan, vähennetään ylimääräiset kaksi kertaa.

Suotuisia alkeistapauksia on $6 + 6 + 6 - 2 = 16$.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli } 5)$

$$= \frac{16}{216} = \frac{2}{27} = 0,0740... \approx 0,074.$$

Ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli 5 todennäköisyydellä 0,074.

Vastaus: $\frac{2}{27} \approx 0,074$

- 315. a)** Satunnaiseen kohtaan osuneen tikan pistemäärä on vähintään 9, jos tikka osuu tikkataulun keskelle ympyrään, jonka säde on keskiympyrän säde + yhden renkaan paksuus.

Suotuisan alueen ympyrän säde on siis $1,0 \text{ cm} + 1,0 \text{ cm} = 2,0 \text{ cm}$.
Suotuisan alueen pinta-ala on tällöin $\pi \cdot (2,0 \text{ cm})^2$ ($\approx 12,6 \text{ cm}^2$)

Koko tikkataulu on ympyrä, jonka säde on
 $1,0 \text{ cm} + 9 \cdot 1,0 \text{ cm} = 10,0 \text{ cm}$.

Koko alueen pinta-ala on tällöin $\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2$ ($\approx 314,2 \text{ cm}^2$)

$$\begin{aligned} P(\text{tikan pistemäärä on vähintään } 9) &= \frac{\pi \cdot (2,0 \text{ cm})^2}{\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2} \\ &= 0,04 = 4\% \end{aligned}$$

Vastaus: 0,04

- b) Satunnaiseen kohtaan osuneen tikan pistemäärä on alle 8, jos tikka osuu tikkataulun ulkorenkaille, jonka paksuus on seitsemän renkaan paksuus.

Suotuisan alueen pinta-ala voidaan laskea vähentämällä koko pinta-alasta ympyrä, jonka säde koostuu keskiympyrästä ja kahdesta renkaasta.

Vähennettävän ympyrän säde on siis $1,0 \text{ cm} + 2 \cdot 1,0 \text{ cm} = 3,0 \text{ cm}$.

Koko tikkataulun ala on $\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2$, jolloin suotuisa renkaan pinta-ala on $\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2 - \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^2$ ($\approx 285,9 \text{ cm}^2$).

Koko tikkataulu on ympyrä, jonka säde on

$1,0 \text{ cm} + 9 \cdot 1,0 \text{ cm} = 10,0 \text{ cm}$.

Koko alueen pinta-ala on tällöin $\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2$ ($\approx 314,2 \text{ cm}^2$).

$$\begin{aligned} P(\text{tikan pistemäärä on alle } 8) &= \frac{\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2 - \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^2}{\pi \cdot (10,0 \text{ cm})^2} \\ &= 0,91 = 91\% \end{aligned}$$

Vastaus: 0,91

- c) Tikan pistemäärä on tasan 8, jos tikan tulos on yli 7 ja alle 9. Tulos yli 7 on kohdan b vastatapahtuma ja alle 9 on kohdan a vastatapahtuma. Tulos tasan 8 voidaan laskea vähentämällä kaikista tapahtumista molemmat sekä a- että b-kohdan todennäköisyydet.

$$\begin{aligned} P(\text{tikan pistemäärä on tasan } 8) &= 1 - P(\text{tikan pistemäärä on alle } 8) - \\ &P(\text{tikan pistemäärä on vähintään } 9) \\ &= 1 - 0,91 - 0,04 \dots = 0,05 = 5\% \end{aligned}$$

Vastaus: 0,05

- 316. a)** Koska 17 työntekijää on ostanut kahvia ja 10 sekä kahvia että teetä, niin vain kahvia on ostanut $17 - 10 = 7$ työntekijää.

Vastaavasti $15 - 10 = 5$ työntekijää on ostanut vain teetä.

Vain jompaakumpaa juomaa on ostanut $7 + 5 = 12$ työntekijää.

$$P(\text{työntekijä on ostanut vain jompaakumpaa}) = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} = 0,461... \approx 0,46$$

Satunnaisesti valittu työntekijä on ostanut automaattista joko kahvia tai teetä muttei molempia todennäköisyydellä 0,46.

Vastaus: 0,46

- b)** Työntekijöitä on yhteensä 26. Vain kahvia on a-kohdan perusteella ostanut 7 ja vain teetä 5 työntekijää. 10 työntekijää on ostanut molempia. Ainakin jompaakumpaa on siis ostanut $7 + 5 + 10 = 22$ työntekijää. Loput $26 - 22 = 4$ työntekijää eivät ole ostaneet kumpaakaan.

$$P(\text{työntekijä ei ole ostanut kumpaakaan}) = \frac{4}{26} = \frac{2}{13} = 0,153... \approx 0,15$$

Satunnaisesti valittu työntekijä ei ole ostanut automaattista kahvia eikä teetä todennäköisyydellä 0,15.

Vastaus: 0,15

- 317.** Kolmihenkinen johtoryhmä voidaan valita kahdeksan hengen joukosta $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla. Kaikkien alkeistapausten määrä on siis 56.

Albertista, Siiristä ja Iiriksestä ainakin 2 pääsee johtoryhmään, jos heistä pääsee sinne 2 tai 3. Heistä kaksi voidaan valita johtoryhmään $\binom{3}{2} = 3$

tavalla, ja johtoryhmän kolmas jäsen voidaan valita $\binom{5}{1} = 5$ eri tavalla.

Kolmihenkinen johtoryhmä, jossa on mukana täsmälleen kaksi henkilöistä Albert, Siiri ja Iiris, voidaan siten valita $3 \cdot 5 = 15$ eri tavalla.

Kolmihenkinen johtoryhmä, jossa Albert, Siiri ja Iiris ovat kaikki mukana, voidaan valita vain yhdellä tavalla.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $15 + 1 = 16$.

$$P(\text{ainakin kaksi pääsee johtoryhmään}) = \frac{16}{56} = \frac{2}{7} = 0,285\ldots \approx 0,29$$

Ainakin kaksi pääsee johtoryhmään todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

318. a) Kaikkien alkeistapausten määrä on $25 + 20 + 10 + 45 = 100$.

$$P(A) = \frac{20 + 25}{100} = 0,45$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = 0,55$$

$$\text{Vastaus: } P(A) = 0,45, P(\bar{A}) = 0,55$$

b) $P(B) = \frac{10 + 20}{100} = 0,3$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\text{Vastaus: } P(B) = 0,3, P(\bar{B}) = 0,7$$

c) $P(\text{ei } A \text{ eikä } B) = \frac{45}{100} = 0,45$

$$\text{Vastaus: } P(\text{ei } A \text{ eikä } B) = 0,45$$

319. a) Valitaan alkeistapauksiksi 48 numeron joukosta valitut 6 numeron joukot eli kaikki mahdolliset lottorivit. Niiden lukumäärä on $\binom{48}{6} = 12\,271\,512$.

Koska vain yhdellä rivillä voittaa päävoiton, niin suotuisia alkeistapauksia on yksi.

$$P(\text{päävoitto}) = \frac{1}{12\,271\,512} = 8,148... \cdot 10^{-8} \approx 8,1 \cdot 10^{-8}$$

Yhdellä lottorivillä saa päävoiton todennäköisyydellä $8,1 \cdot 10^{-8}$.

$$\text{Vastaus: } 8,1 \cdot 10^{-8}$$

- b)** Viisi oikeaa numeroa voidaan valita 6 numeron joukosta $\binom{6}{5} = 6$

tavalla. Kuudes, väärä numero, voidaan valita 42 väärän numeron joukosta $\binom{42}{1} = 42$ tavalla. Rivejä, joissa on täsmälleen viisi oikein, on siis $6 \cdot 42 = 252$ kappaletta. Tapahtumalle ”vähintään viisi oikein” suotuisat alkeistapaukset saadaan, kun täsmälleen viisi oikein riveihin lisätään kuusi oikein rivi.

$$P(\text{vähintään 5 oikein}) = \frac{252 + 1}{12\,271\,512} = 0,0000206... \approx 0,000021$$

Yhdellä lottorivillä on vähintään 5 oikein todennäköisyydellä 0,000021.

Vastaus: 0,000021

- c)** Lasketaan vastaavalla tavalla muiden voittavien rivien lukumäärät.

$$4 \text{ oikein: } \binom{6}{4} \binom{42}{2} = 12\,915$$

$$3 \text{ oikein: } \binom{6}{3} \binom{42}{3} = 229\,600$$

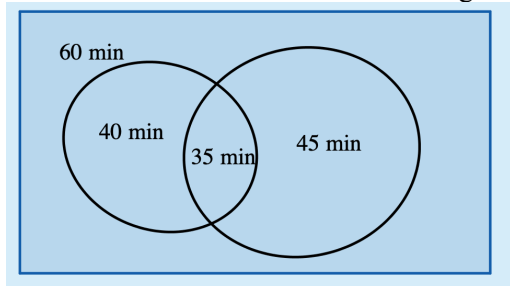
Voittavia rivejä on yhteensä $1 + 252 + 12\,915 + 229\,600 = 242\,768$.

$$P(\text{voittaa jotain}) = \frac{242\,768}{12\,271\,512} = 0,0197... \approx 0,020$$

Viking Lotossa voittaa jotakin todennäköisyydellä 0,020.

Vastaus: 0,020

320. Havainnollistetaan tilannetta Venn-diagrammilla.



Molemmat latauspaikat ovat varattuja 35 minuuttia tunnissa. Satunnainen autoilija löytää vapaan latauspaikan, kun hän saapuu paikalle joskus muulloin, eli suotuisa saapumisaika on $60 \text{ min} - 35 \text{ min} = 25 \text{ min}$.

$$P(\text{Satunnainen autoilija löytää vapaan paikan}) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} = 0,416\ldots \approx 0,42$$

$$\text{Vastaus: } \frac{5}{12} \approx 0,42$$

- 321. a)** Lapsen jokaisessa kromosomiparissa äidiltä saadussa kromosomissa on kaksi vaihtoehtoa, koska äidin kromosomiparissa toinen kromosomi on äidiltä ja toinen isältä. Näin ollen jokaisen kromosomiparin kohdalla on 50 %:n todennäköisyys, että lapset saavat saman kromosomin. Pareja on 23, joten

$$P(\text{kromosomit ovat samat}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{23} = \frac{1}{8\,388\,608} = 1,19... \cdot 10^{-7} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}.$$

Vastaus: $1,2 \cdot 10^{-7}$

- b)** Jotta lapsen kromosomiparin äidiltä saatu kromosomi olisi eri kuin toisen lapsen, on todennäköisyys 50 %. Näin ollen saadaan sama tulos kuin a-kohdassa.

$$P(\text{yksikään ei ole sama}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{23} = \frac{1}{8\,388\,608} = 1,19... \cdot 10^{-7} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$$

Vastaus: $1,2 \cdot 10^{-7}$

- c)** 23:sta kromosomiparista voidaan valita $\binom{23}{11}$ tavalla 11 sellaista, joissa on sama kromosomi äidiltä.

Todennäköisyys, että on 11 samaa kromosomia on $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ ja

todennäköisyys, että loput 12 ovat erilaisia on $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$. Näin ollen

$$P(\text{kromosomeista 11 ovat samoja}) = \binom{23}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0,6118... \approx 0,612.$$

Vastaus: 0,612

3.2 Kertolaskusääntö

ALOITA PERUSTEISTA

- 322. a)** Kertolaskusäännön mukaan

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,70 \cdot 0,89 = 0,623.$$

Vastaus: 0,623

- b)** Kertolaskusäännön mukaan

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,10 \cdot 0,15 = 0,015.$$

Vastaus: 0,015

- b)** Kertolaskusäännön mukaan

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,821 \cdot 0,006 = 0,004926 \approx 0,005.$$

Vastaus: 0,005

- 323.** a) Tapahtumassa “Opiskelija vastaa kaikkiin kysymyksiin oikein.” jokaiseen kolmeen kysymykseen opiskelijan tulee vastata oikein. Ilmaistaan jokainen kysymys erillisenä.

”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen oikein.”

Vastaus: ”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen oikein.”

- b) Tapahtumassa “Vain ensimmäiseen vastaus menee oikein.” jokaiseen kolmeen kysymykseen opiskelijan tulee vastata, mutta ensimmäiseen oikein ja seuraaviin väärin. Ilmaistaan jokainen kysymys erillisenä.

”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen väärin ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen väärin.”

Vastaus: ”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen väärin ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen väärin.”

- c) Tapahtumassa “Kaksi viimeistä vastaus menevät oikein.” jokaiseen kolmeen kysymykseen opiskelijan tulee vastata, mutta ensimmäiseen väärin ja toiseen oikein ja viimeiseen oikein. Ilmaistaan jokainen kysymys erillisenä.

”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen väärin ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen oikein.”

Vastaus: ”Opiskelija vastaa ensimmäiseen kysymykseen väärin ja opiskelija vastaa toiseen kysymykseen oikein ja opiskelija vastaa kolmanteen kysymykseen oikein.”

324. Lapsi unohtaa sekä avaimen että puhelimen todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{unohtaa avaimen ja puhelimen}) \\ &= P(\text{unohtaa avaimen}) \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= 0,2 \cdot 0,1, \end{aligned}$$

joten ilmaisu A ja lauseke II kuuluvat yhteen.

Lapsi muistaa ottaa molemmat mukaan todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{muistaa ottaa molemmat}) \\ &= P(\text{muistaa avaimen}) \cdot P(\text{muistaa puhelimen}) \\ &= [1 - P(\text{unohtaa avaimen})] \cdot [1 - P(\text{unohtaa puhelimen})] \\ &= (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,1) \\ &= 0,8 \cdot 0,9, \end{aligned}$$

joten ilmaisu B ja lauseke III kuuluvat yhteen.

Lapsi muistaa avaimen mutta unohtaa puhelimen todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{muistaa avaimen ja unohtaa puhelimen}) \\ &= P(\text{muistaa avaimen}) \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= [1 - P(\text{unohtaa avaimen})] \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= (1 - 0,2) \cdot 0,1 \\ &= 0,8 \cdot 0,1, \end{aligned}$$

joten ilmaisu C ja lauseke I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

325. a) Arpakuutiossa on kuusi alkeistapausta, joista silmäluku 3 on suotuinen.

$$P(\text{saadaan silmäluku 3}) = \frac{1}{6} = 0,166... \approx 0,17$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{6} \approx 0,17$$

- b)** Ensimmäisen heiton tulos ei vaikuta toisen heiton tulokseen. Heittojen tulokset ovat toisistaan riippumattomia.

Vastaus: ei mitenkään, ovat

- c)** Arpakuution heiton heittotulokset eivät riipu toisistaan.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaksi kertaa peräkkäin tulee silmäluku 3}) \\ &= P(1. \text{ heitolla tulee silmäluku 3 ja } 2. \text{ heitolla tulee silmäluku 3}) \\ &= P(1. \text{ heitolla tulee silmäluku 3}) \cdot P(2. \text{ heitolla tulee silmäluku 3}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,027... \approx 0,03 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että arpakuution heitolla saadaan silmäluku 3 kaksi kertaa peräkkäin on $\frac{1}{36} \approx 0,03$.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{36} \approx 0,03$$

- d)** Lasketaan ensin tarvittavat todennäköisyydet yksittäiselle heitolle.

$$\begin{aligned} P(\text{silmäluku on 1 tai 2}) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(\text{silmäluku on 4}) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{ensimmäisellä heitolla saadaan 1 tai 2 ja toisella heitolla 4}) \\ &= P(\text{silmäluku on 1 tai 2}) \cdot P(\text{silmäluku on 4}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} = 0,0556... \approx 0,056 \end{aligned}$$

Todennäköisyys, että silmäluku on ensimmäisellä heitolla 1 tai 2 ja toisella heitolla 4, on $\frac{1}{18} \approx 0,056$.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{18} \approx 0,056$$

326. a) Arpakuution heiton heittotulokset eivät riipu toisistaan.

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ heitolla tulee silmäluku 4 ja 2. heitolla tulee silmäluku 5}) \\ &= P(1. \text{ heitolla tulee silmäluku 4}) \cdot P(2. \text{ heitolla tulee silmäluku 5}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,027... \approx 0,03 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{36} \approx 0,03$$

b) Kolikonheiton heittotulokset eivät riipu toisistaan.

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ heitolla tulee kruuna ja 2. heitolla tulee klaava}) \\ &= P(1. \text{ heitolla tulee kruuna}) \cdot P(2. \text{ heitolla tulee klaava}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{4} = 0,25$$

c) Kolikonheiton heittotulokset eivät arpakuution tuloksista.

$$\begin{aligned} &P(\text{ensin tulee silmäluku 4 ja sitten tulee klaava}) \\ &= P(\text{ensin tulee silmäluku 4}) \cdot P(\text{sitten tulee klaava}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0,083... \approx 0,08 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{12} \approx 0,08$$

327. Todennäköisyydet valojen väreille:

$$P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) = 0,35$$

$$P(\text{ensimmäinen valo on punainen}) = 1 - 0,35 = 0,65$$

$$P(\text{toinen valo on vihreä}) = 0,75$$

$$P(\text{toinen valo on punainen}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

a) $P(\text{ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo on vihreä})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) \cdot P(\text{toinen valo on vihreä})$
 $= 0,35 \cdot 0,75$
 $= 0,2625$
 $= 26,25 \%$
 $\approx 26 \%$

Todennäköisyys sille, että molemmat valot ovat vihreitä, on 26 %.

Vastaus: 26 %

b) $P(\text{ensimmäinen valo on punainen ja toinen valo on punainen})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on punainen}) \cdot P(\text{toinen valo on punainen})$
 $= 0,65 \cdot 0,25$
 $= 0,1625$
 $= 16,25 \%$
 $\approx 16 \%$

Todennäköisyys sille, että molemmat valot ovat punaisia, on 16 %.

Vastaus: 16 %

c) $P(\text{ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo on punainen})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) \cdot P(\text{toinen valo on punainen})$
 $= 0,35 \cdot 0,25$
 $= 0,0875$
 $= 8,75 \%$
 $\approx 8,8 \%$

Todennäköisyys sille, että ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo punainen, on 8,8 %.

Vastaus: 8,8 %

- 328.** Olkoon A = ”satunnainen suomalainen kuului kirkkoon vuonna 2020”.
Tilastollinen todennäköisyys tapahtumalle A on $P(A) = 0,686$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kolme satunnaisesti valittua suomalaista kuuluivat ev-lut kirkkoon}) \\ = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = P(A)^3 = 0,686^3 = 0,322... = 32,2 \% \approx 32 \%$$

Vuonna 2020 kolme satunnaisesti valittua suomalaista kuului evankelis-luterilaiseen kirkkoon 32 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 32 %

- 329.** $P(\text{Sofia voittaa}) = 0,74$
 $P(\text{Alexandra voittaa}) = 1 - 0,74 = 0,26$

a) $P(\text{Sofia voittaa 3 peräkkäistä peliä})$
 $= 0,74^3$
 $= 0,40522...$
 $= 40,522... \%$
 $\approx 41 \%$

Todennäköisyys sille, että Sofia voittaa 3 peräkkäistä peliä, on 41 %.

Vastaus: 41 %

b) $P(\text{Sofia voittaa ensimmäisen pelin ja Alexandra kaksi seuraavaa peliä})$
 $= 0,74 \cdot 0,26^2$
 $= 0,05002...$
 $= 5,002... \%$
 $\approx 5,0 \%$

Todennäköisyys sille, että Sofia voittaa ensimmäisen pelin ja Alexandra kaksi seuraavaa peliä, on 5,0 %.

Vastaus: 5,0 %

- 330. a)** Jos ensimmäinen kaapista otettu jogurtti on mustikkajogurtti, niin kaapissa on ensimmäisen jogurtin ottamisen jälkeen vielä kolme mansikkajogurttia ja yksi mustikkajogurtti, eli yhteensä neljä jogurttipurkkia. Toinen jogurtti on tällöin mustikkajogurtti todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0,25$.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0,25$

- b)** Eevi ottaa kaksi mustikkajogurttia todennäköisyydellä $P(\text{ensimmäinen on mustikkajogurtti}) \cdot P(\text{toinen on mustikkajogurtti})$
 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0,05$.

Eeva ottaa kaksi mustikkajogurttia todennäköisyydellä 0,1.

Vastaus: $\frac{1}{10} = 0,1$

- 331. a)** Jos pakasta on nostettu yksi ässä eikä ässää ole palautettu pakkaan, pakassa on jäljellä $52 - 1 = 51$ korttia ja $4 - 1 = 3$ ässää.

Vastaus: 51 korttia, 3 ässää

- b)** Jos ensimmäinen kortti on ässä eikä sitä palauteta pakkaan, niin toinen kortti on ässä todennäköisyydellä $\frac{3}{51} = \frac{1}{17} = 0,0588... \approx 0,059$.

Vastaus: $\frac{1}{17} \approx 0,059$

- c)** Jos pakasta nostettu kortti palautetaan pakkaan, pakassa on 52 korttia ja 4 ässää. Toinen kortti on ässä todennäköisyydellä $\frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0,0769... \approx 0,077$.

Vastaus: $\frac{1}{13} \approx 0,077$

- d)** Jos nostettua korttia ei palauteta pakkaan, niin ensimmäisen nostettavan kortin arvo vaikuttaa todennäköisyyteen, jolla toinen kortti on ässä. Tällöin tapahtumat ”ensimmäinen kortti on ässä” ja ”toinen kortti on ässä” eivät ole riippumattomia.

Jos nostettu kortti palautetaan pakkaan, ei ensimmäisen nostettavan kortin arvo vaikuta toisen nostettavan kortin arvoon. Tällöin tapahtumat ”ensimmäinen kortti on ässä” ja ”toinen kortti on ässä” ovat riippumattomia.

Vastaus: b-kohdan tilanteessa eivät ole, c-kohdan tilanteessa ovat

VAHVISTA OSAAMISTA

- 332. a)** Opettajan veriryhmä ja vieruskaverisi veriryhmä eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat ”Sinun veriryhmäsi on O” ja ”Vieruskaverisi veriryhmä on O” ovat toisistaan riippumattomia.

Vastaus: ovat

- b)** Lotossa arvotaan 7 numeroa numeroiden 1–40 joukosta. Parillisia on 20 ja parittomia 20. Jos arvonnän ensimmäinen numero on parillinen, niin parillisia numeroita on jäljellä 19 ja parittomia yhä edelleen 20. Numeroiden kokonaismäärä on vähentynyt 40:stä 39:ään. Koska kaikkien alkeistapausten määrä vähenee toisen numeron arvontaan ensimmäisen numeron arvonnän vaikutuksesta, niin tapahtumat $A = \text{”lottoarvonnän ensimmäinen numero on parillinen”}$ ja $B = \text{”lottoarvonnän toinen numero on pariton”}$ eivät siis ole riippumattomia, kun arvontakerta on sama.

Vastaus: eivät ole

- c)** Ensimmäisen kolikon heiton tulos ei vaikuta toisen kolikon heiton tulokseen, joten tapahtumat ”ensimmäisellä kolikolla saadaan kruuna” ja ”toisella kolikolla saadaan kruuna” ovat riippumattomia.

Vastaus: ovat

- d)** Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja ja 13 patoja. Jos ensimmäinen kortti on pata, niin herttoja on jäljellä 13 ja kaikkia kortteja 51, joten toinen kortti on hertta todennäköisyydellä $\frac{13}{51}$. Jos ensimmäinen kortti ei ole pata, niin se voi olla hertta tai jokin muu maa. Herttoja on siis jäljellä 12 tai 13 ja kaikkia kortteja 51, joten toinen kortti on hertta todennäköisyydellä, joka on lukujen $\frac{12}{51}$ ja $\frac{13}{51}$ välissä. Tapahtumat ”ensimmäisenä korttipakasta jaettu kortti on pata” ja ”toisena samasta korttipakasta jaettu kortti on hertta” eivät siis ole riippumattomia.

Vastaus: eivät ole

- e) Tämän vuoden vappuaaton sää ei vaikuta ensi vuoden vappuaaton säähän, joten tapahtumat ”tämän vuoden vappuaattona on aurinkoista” ja ”ensi vuoden vappuaattona on aurinkoista” ovat riippumattomia.

Vastaus: ovat

333. a) Ensimmäisen paprikan jälkeen korissa on jäljellä 6 paprikaa, joista 3 on vihreitä. Toisella nostolla todennäköisyys saada vihreä paprika on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $\frac{1}{2}$

- b) Kolmannella nostolla korissa on jäljellä 5 paprikaa, joista punaisia on 3. Kolmannella nostolla todennäköisyys saada punainen paprika on $\frac{3}{5}$, joten väite on tosi.

Vastaus: tosi

- c) Ensimmäinen paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{4}{7}$.
Jos ensimmäinen paprika on punainen, niin toinen paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{3}{6}$. Jos kaksi ensimmäistä paprikaa ovat punaisia, niin kolmas paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} P(1., 2. \text{ ja } 3. \text{ paprika ovat punaisia}) \\ &= P(\text{ensimmäinen on punainen}) \cdot P(\text{toinen on punainen}) \\ &\quad \cdot P(\text{kolmas on punainen}) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35} \end{aligned}$$

Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $\frac{4}{35}$

334. a) Puhelinmyyjä saa myytyä kolme lehtitilausta todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{myy tilauksen kaikilla kolmella puhelulla}) \\ &= P(\text{myy tilauksen 1. puhelulla}) \cdot P(\text{myy tilauksen 2. puhelulla}) \\ &\quad \cdot P(\text{myy tilauksen 3. puhelulla}) \\ &= 0,15 \cdot 0,15 \cdot 0,15 \\ &= 0,15^3 \\ &= 0,003375 \\ &= 0,3375 \% \\ &\approx 0,34 \%. \end{aligned}$$

Puhelinmyyjä saa myytyä kolme lehtitilausta todennäköisyydellä 0,34 %.

Vastaus: 0,34 %

b) Kun puhelinmyyjä soittaa yhden puhelun, todennäköisyys sille, että hän ei saa myytyä lehtitilausta, on

$$P(\text{ei myy tilausta}) = 1 - P(\text{myy tilauksen}) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

Lasketaan todennäköisyys sille, että puhelinmyyjä ei saa kolmella puhelulla myytyä yhtään tilausta.

$$\begin{aligned} &P(\text{ei myy kolmella puhelulla yhtään tilausta}) \\ &= [P(\text{ei myy tilausta})]^3 \\ &= 0,85^3 \\ &= 0,61412... \\ &= 61,412 \% \\ &\approx 61 \% \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei puhelinmyyjä saa myytyä yhtään lehtitilausta, on 61 %.

Vastaus: 61 %

- c) Puhelinmyyjä saa myytyä ainakin yhden lehtitilauksen, jos hän saa myytyä 1, 2 tai 3 tilausta. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned}P(\text{myy ainakin yhden tilauksen}) \\&= 1 - P(\text{ei myy yhtään tilausta}) \\&= 1 - 0,61412\dots \\&= 0,38587\dots \\&= 38,587\dots \% \\&\approx 39 \%\end{aligned}$$

Puhelinmyyjä saa myytyä ainakin yhden lehtitilauksen todennäköisyydellä 39 %.

Vastaus: 39 %

335. Jos silmäluku 6 esiintyy neljän heiton sarjassa ainakin kerran, se voi tulla ensimmäisellä, toisella, kolmannella tai neljännellä heitolla tai useaan kertaan. Tapahtuman A = ”silmäluku 6 esiintyy ainakin kerran” vastatapahtuma on B = ”silmäluku 6 ei esiinny yhtään kertaa”. Lasketaan tapahtuman B todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\text{joka heitolla muu silmäluku kuin 6}) \\&= P(1. \text{heitolla muu kuin 6}) \cdot P(2. \text{heitolla muu kuin 6}) \\&\quad \cdot P(3. \text{heitolla muu kuin 6}) \cdot P(4. \text{heitolla muu kuin 6}) \\&= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\&= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\&= 0,482\end{aligned}$$

Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,482\dots = 0,517\dots$$

eli suurempi kuin tapahtuman B , joten kannattaa lyödä vetoa tapahtuman A puolesta.

Vastaus: tapahtuman A

336. a) Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{ei saa yhtään voittoa})$

$$\begin{aligned} &= P(1. \text{ arpa ei voita}) \cdot P(2. \text{ arpa ei voita, kun } 1. \text{ arpa ei voittanut}) \\ &\quad \cdot P(3. \text{ arpa ei voita, kun } 1. \text{ ja } 2. \text{ arpa eivät voittaneet}) \\ &\quad \cdot P(4. \text{ arpa ei voita, kun } 1., 2. \text{ ja } 3. \text{ arpa eivät voittaneet}). \end{aligned}$$

Jos voittoarpoja on 50, niin arpoja, jotka eivät voita, on
 $300 - 50 = 250$.

Lisäksi aina arvan oston jälkeen arpojen kokonaismäärä vähenee yhdellä, joten

$$P(1. \text{ ei voita}) = \frac{250}{300}$$

$$P(2. \text{ ei voita, kun } 1. \text{ ei voittanut}) = \frac{249}{299}$$

$$P(3. \text{ ei voita, kun } 1. \text{ ja } 2. \text{ eivät voittaneet}) = \frac{248}{298}$$

$$P(4. \text{ ei voita, kun } 1., 2. \text{ ja } 3. \text{ eivät voittaneet}) = \frac{247}{297}.$$

Siis

$P(\text{ei saa yhtään voittoa})$

$$= \frac{250}{300} \cdot \frac{249}{299} \cdot \frac{248}{298} \cdot \frac{247}{297} = 0,480... \approx 0,48.$$

Todennäköisyys sille, ettei Perttu saa yhtään voittoa, on 0,48.

Vastaus: 0,48

- b)** Ainakin 1 arvoista voittaa, jos 1, 2, 3 tai 4 arpaa voittaa. Tapahtuman ”ainakin 1 arvoista voittaa” vastatapahtuma on ”yksikään arpa ei voita”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$P(\text{saa ainakin yhden voiton})$

$$= 1 - P(\text{yksikään arpa ei voita})$$

$$= 1 - 0,480... = 0,519... \approx 0,52.$$

Perttu saa ainakin yhden voiton todennäköisyydellä 0,52.

Vastaus: 0,52

- 337. a)** Ensimmäisellä heitolla arpakuution silmäluku voi tulla mikä tahansa kuudesta silmäluvusta. Toisella heitolla voi tulla mikä tahansa muu kuin ensimmäisen heiton silmäluku, joten suotuisia silmälukuja on viisi.

Kolmannella heitolla voi tulla mikä tahansa jäljellä olevista neljästä silmäluvusta.

$P(\text{kolmella heitolla tulee kaikilla eri silmäluku})$

$$= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9} = 0,555... \approx 0,56.$$

Jokaisella kolmella heitolla tulee eri silmäluku todennäköisyydellä 0,56.

Vastaus: 0,56

- b)** Jatketaan a-kohdan tavalla kuudenteen heittoon asti.

$P(\text{kuudella heitolla tulee kaikilla eri silmäluku})$

$$= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,0154... \approx 0,015.$$

Jokaisella kolmella heitolla tulee eri silmäluku todennäköisyydellä 0,015.

Vastaus: 0,015

- c)** Tapahtuma ”seitsemällä heitolla tulee jokaisella eri silmäluku” on mahdoton, koska arpakuutiossa on vain kuusi eri silmälukua. Kysytty todennäköisyys on siis 0.

Vastaus: 0

- 338. a)** Tapahtuma ”5 korttia on herttoja” tapahtuu, jos 1. kortti on hertta, 2. kortti on hertta, 3. kortti on hertta, 4. kortti on hertta ja 5. kortti on hertta.

Pakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja. Jos ensimmäinen kortti on hertta, on pakassa sen nostamisen jälkeen yksi kortti ja yksi hertta vähemmän, eli 51 korttia, joista 12 on herttoja. Jatketaan vastaavalla tavalla.

$$\begin{aligned} P(5 \text{ korttia on herttoja}) &= P(1. \text{ on hertta}) \cdot P(2. \text{ on hertta}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ on hertta}) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} \\ &= 0,000495\dots \\ &\approx 0,00050 \end{aligned}$$

Kaikki nostetut kortit ovat herttoja todennäköisyydellä 0,00050.

Vastaus: 0,00050

- b)** Pakassa on 52 korttia, joista 26 on mustia. Lasketaan kuten a-kohdassa.

$$\begin{aligned} P(5 \text{ korttia on mustia}) &= P(1. \text{ on musta}) \cdot P(2. \text{ on musta}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ on musta}) \\ &= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49} \cdot \frac{22}{48} \\ &= 0,0253\dots \\ &\approx 0,025 \end{aligned}$$

Kaikki nostetut kortit ovat mustia todennäköisyydellä 0,025.

Vastaus: 0,025

- c)** Pakassa on vain neljä kakkosta, joten tapahtuma ”5 korttia ovat kakkosia” on mahdoton. Kysytty todennäköisyys on siis 0.

Vastaus: 0

- 339.** Ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä, jos yhdellä, kahdella, kolmella, ... tai kuudellatoista matkustajalla on syntymäpäivä. Tapahtuman ”ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä” vastatapahtuma on ”kellään matkustajista ei ole syntymäpäivää matkustuspäivänä”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Bussimatka tapahtuu yhtenä päivänä vuodessa, joten kaikilla matkustajilla tulee olla syntymäpäivä jonain muuna vuoden 364 päivästä.

$$P(\text{matkustajalla ei ole syntymäpäivää}) = \frac{364}{365}$$

$$P(\text{kellään kuudestatoista matkustajasta ei ole syntymäpäivää nyt}) \\ = [P(\text{matkustajalla ei ole syntymäpäivää nyt})]^{16} = \left(\frac{364}{365}\right)^{16}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä sinä päivänä}) \\ = 1 - P(\text{kellään 16 matkustajasta ei ole syntymäpäivä sinä päivänä}) \\ = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{16} = 0,0429... \approx 0,043.$$

Ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä todennäköisyydellä 0,043.

Vastaus: 0,043

- 340.** Tapahtuma koostuu kahdesta nostosta, joista joko ensimmäisellä, toisella tai molemmilla voi tulla pari. Nostetuista kahdesta kortista ensimmäinen kortti voi olla mikä tahansa 52 kortista, jolloin toisen on oltava mikä tahansa 48 eriarvoisesta kortista, jotta ei muodostuisi paria. Saman täytyy vielä tapahtua uudestaan toisella nostolla.

$$P(\text{ensimmäisellä nostolla ei tule paria ja toisella nostolla ei tule paria}) \\ = P(\text{ensimmäisellä nostolla ei tule paria}) \cdot P(\text{toisella nostolla ei tule paria}) \\ = [P(\text{nostolla ei tule paria})]^2 = \left(\frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51}\right)^2 = 0,885... \approx 0,89$$

Nostettaessa kaksi kertaa kaksi korttia korttipakasta todennäköisyys sille, ettei saada paria, on 0,89.

Vastaus: 0,89

341. Appletista nähdään, kuinka monta vaihtoehtoa kullekin numerolle on.

1. nro	1				
2. nro	0	2	4	6	8
3. nro	5	6			
4. nro	5/6				

- ☒ Ensimmäinen numero on 1.
- ☒ Toinen numero on parillinen.
- ☒ Kolmas ja neljäs numero ovat 5 ja 6 jommassakummassa järjestyksessä.

Ensimmäinen numero voi olla vain 1, toiselle on mahdollisia numeroita 5 ja viimeiset kaksi numeroa tuottavat 2 mahdollista paria. Vaihtoehtoja PIN-koodille on siis $1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$.

Koodeista vain 1 on oikea, joten vääriä on 9 ja jokaisella uudella yrityksellä kokeillaan koodia, jota ei ole vielä yritetty.

$$\begin{aligned} &P(\text{arvaa koodin oikein korkeintaan kolmella yrityksellä}) \\ &= 1 - P(\text{arvaa väärin jokaisella kolmesta yrityksestä}) \\ &= 1 - P(\text{arvaa väärin ensimmäisellä yrityksellä}) \cdot P(\text{arvaa väärin toisella yrityksellä}) \cdot P(\text{arvaa väärin kolmannella yrityksellä}) \\ &= 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Kristian saa koodin oikein korkeintaan kolmella yrityksellä todennäköisyydellä 0,3.

Vastaus: 0,3

342. Satunnaisesti valittu suomalainen on lääkäri todennäköisyydellä

$$\frac{28\,500}{5\,500\,000} = 0,00518\dots,$$

joten hän on joku muu kuin lääkäri todennäköisyydellä

$$1 - 0,00518\dots = 0,994\dots$$

- a)** Jotta kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta kaikki olisivat lääkäreitä, tulee tapahtuman ”satunnaisesti valittu suomalainen on lääkäri” toistua 10 kertaa. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta kaikki ovat lääkäreitä}) \\ &= [P(\text{suomalainen on lääkäri})]^{10} \\ &= 0,00518\dots^{10} \\ &= 1,395\dots \cdot 10^{-23} \\ &\approx 1,4 \cdot 10^{-23}. \end{aligned}$$

Kaikki kymmenen suomalaista ovat lääkäreitä todennäköisyydellä $1,4 \cdot 10^{-23}$.

Vastaus: $1,4 \cdot 10^{-23}$

- b)** Jotta kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta kukaan ei olisi lääkäri, tulee tapahtuman ”satunnaisesti valittu suomalainen ei ole lääkäri” toistua 10 kertaa. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta kukaan ei ole lääkäri}) \\ &= [P(\text{suomalainen ei ole lääkäri})]^{10} \\ &= 0,994^{10} \\ &= 0,949\dots \\ &\approx 0,95. \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei kukaan kymmenestä suomalaisesta ole lääkäri, on 0,95.

Vastaus: 0,95

- c) Tapahtuma ”ainakin yksi satunnaisesti valitusta kymmenestä suomalaisesta on lääkäri” on vastatapahtuma tapahtumalle ”kukaan kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta ei ole lääkäri”, joten b-kohdan perusteella

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta ainakin yksi on lääkäri}) \\ &= 1 - P(\text{kymmenestä suomalaisesta kukaan ei ole lääkäri}) \\ &= 1 - 0,949\dots = 0,0506\dots \approx 0,051. \end{aligned}$$

Kymmenestä suomalaisesta ainakin yksi on lääkäri todennäköisyydellä 0,051.

Vastaus: 0,051

343. Presidentti saa sairauden yhdellä kättelyllä, jos kättelevällä henkilöllä on sairaus ja sairaus tarttuu kättelyssä.

$$P(\text{presidentti saa sairauden yhdellä kättelyllä}) = 0,03 \cdot 0,05 = 0,0015$$

$$P(\text{Presidentti ei saa sairautta yhdellä kättelyllä}) = 1 - 0,0015 = 0,9985$$

- a) $P(\text{presidentti saa sairauden 12 kättelyllä})$
 $= 1 - P(\text{presidentti ei saa sairautta 12 kättelyllä})$
 $= 1 - P(\text{presidentti ei saa sairautta ensimmäisellä kättelyllä}) \cdot P(\text{ei toisella}) \cdot \dots \cdot P(\text{ei kahdennellatoista})$
 $= 1 - 0,9985^{12}$
 $= 0,01785\dots$
 $= 1,785\dots\%$
 $\approx 1,8 \%$

Kun presidentti kättelee 12 henkilöä, hän saa sairauden 1,8 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 1,8 %

- b) Tapahtuma ”sairaus tarttuu ainakin kerran” on tapahtuman ”sairaus ei tartu kertaakaan” vastatapahtuma.
Kun presidentti kättelee n kertaa, niin
 $P(\text{sairaus tarttuu ainakin kerran}) = 1 - 0,9985^n$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kysytty kättelyjen määrä.
Yhtälön voi ratkaista ohjelmalla tai käsin, kuten tässä.

$$1 - 0,9985^n = 0,5$$

$$-0,9985^n = -0,5 \quad \parallel \cdot (-1)$$

$$0,9985^n = 0,5$$

$$n = \log_{0,9985} 0,5$$

$$n = 461,751\dots$$

Presidentti voi kätellä korkeintaan 461 kertaa, jotta todennäköisyys saada sairaus pysyisi alle 50 prosentissa.

Vastaus: 461 kertaa

344. Määritetään ryhmän koko vastatapahtuman ”kaikilla on eri syntymäpäivä” avulla. Jos ryhmän koko on 2 henkilöä, niin todennäköisyys, jolla heillä on sama syntymäpäivä, saadaan laskettua vastatapahtuman avulla. Jos ensimmäisellä henkilöllä on syntymäpäivä jonakin vuoden 365 päivästä, niin toisella henkilöllä on oltava syntymäpäivä minä tahansa muuna vuoden 364 päivästä.

$P(\text{kahdella henkilöllä on sama syntymäpäivä})$

$$= 1 - P(\text{kahdella henkilöllä ei ole samaa syntymäpäivää})$$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}$$

Vastaavasti jatkamalla saadaan kolmen henkilön ryhmälle

$P(\text{ainakin kahdella kolmesta henkilöstä on sama syntymäpäivä})$

$$= 1 - P(\text{kenelläkään kolmesta henkilöstä ei ole samaa syntymäpäivää})$$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$$

Taulukoidaan taulukkolaskentaohjelmassa todennäköisyyksiä vastaavalla tavalla eteenpäin.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Henkilöitä	Päiviä "vapaana"	Todennäköisyys					
3	1	365	0,000					
4	2	364	0,003					
5	3	363	0,008					
6	4	362	0,016					
7	5	361	0,027					
8	6	360	0,040					
9	7	359	0,056					
10	8	358	0,074					
11	9	357	0,095					
12	10	356	0,117					
13	11	355	0,141					
14	12	354	0,167					
15	13	353	0,194					
16	14	352	0,223					
17	15	351	0,253					
18	16	350	0,284					
19	17	349	0,315					
20	18	348	0,347					
21	19	347	0,379					
22	20	346	0,411					
23	21	345	0,444					
24	22	344	0,476					
25	23	343	0,507	Ensimmäisen kerran yli 50 % todennäköisyys				
26	24	342	0,538					
27	25	341	0,569					
28	26	340	0,598					
29	27	339	0,627					
30	28	338	0,654					
31	29	337	0,681					
32	30	336	0,706					
33	Kaava:		1-PRODUCT(B\$3:B33)/365^A33					
34								

Taulukoinnin perusteella 23 hengen ryhmässä ainakin kahdella on sama syntymäpäivä yli 50 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 23 henkeä

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 345.** Tapahtuma ”yksikään 12 heitosta ei ole kuutonen” tapahtuma voidaan kirjoittaa ”ensimmäinen heitto ei ole kuutonen ja toinen heitto ei ole kuutonen ja ... ja 12. heitto ei ole kuutonen”. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{yksikään 12 heitosta ei ole kuutonen}) \\ &= P(\text{ensimmäinen heitto ei ole kuutonen ja toinen heitto ei ole kuutonen ja} \\ &\quad \dots \text{ ja 12. heitto ei ole kuutonen}) \\ &= P(\text{ensimmäinen heitto ei ole kuutonen}) \cdot P(\text{toinen ei ole kuutonen}) \cdot \dots \\ &\quad \cdot P(12. \text{ heitto ei ole kuutonen}) \\ &= [P(\text{heitto ei ole kuutonen})]^{12}. \end{aligned}$$

Merkitään todennäköisyyttä $P(\text{heitto ei ole kuutonen})$ kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} x^{12} &= 0,014 \\ x &= \pm \sqrt[12]{0,014} \\ x &= \pm 0,700\dots \end{aligned}$$

Hylätään negatiivinen ratkaisu, koska todennäköisyys ei ole negatiivinen.

Koska silmäluku on joku muu kuin kuutonen todennäköisyydellä 0,700... niin silmäluku on kuutonen todennäköisyydellä
 $1 - 0,700\dots = 0,299\dots \approx 0,30$.

Viallisessa arpakuutiossa saadaan yhdellä heitolla kuutonen todennäköisyydellä 0,30.

Vastaus: 0,30

- 346. a)** Yhteensä positiivisen testituloksen on saanut 590 henkilöä, joista sairaus on 95:llä.

$$P(\text{on sairaus, jos testitulos on positiivien}) = \frac{95}{590} = 0,1610\dots \approx 0,16$$

Vastaus: 0,16

- b) Yhteensä negatiivisen testituloksen on saanut 9410 henkilöä, joista 9405:llä ei ole sairautta.

$P(\text{ei ole sairautta, jos testitulos on negatiivinen})$

$$= \frac{9405}{9410} = 0,99946... \approx 0,9995$$

Vastaus: 0,9995

- c) Laaditaan taulukko, kun tiedetään, että testattuja henkilöitä on 590 ja heistä 95:llä on sairaus.

Testi antaa positiivisen, jos henkilöllä on sairaus 95 %:n todennäköisyydellä.

Nyt positiivisia sairastavia on siis $0,95 \cdot 95 \approx 90$ henkilöllä.

Negatiivisen tuloksen sairastuneista saa siis $95 - 90 = 5$.

Testi antaa negatiivisen, jos henkilöllä on ei ole sairautta 95 %:n todennäköisyydellä.

Nyt positiivisia ei sairastavia on siis $0,05 \cdot 495 \approx 25$ henkilöllä.

Negatiivisen tuloksen sairastuneista saa siis $495 - 25 = 470$.

testitulos	on sairaus	ei ole sairautta	yhteensä
positiivinen	90	25	115
negatiivinen	5	470	475
yhteensä	95	495	590

a-kohdan todennäköisyys:

Yhteensä positiivisen testituloksen on saanut 115 henkilöä, joista sairaus on 90:llä.

$$P(\text{on sairaus, jos testitulos on positiivien}) = \frac{90}{115} = 0,7826... \approx 0,78$$

b-kohdan todennäköisyys:

Yhteensä negatiivisen testituloksen on saanut 475 henkilöä, joista sairautta ei ole 470:llä.

$P(\text{ei ole sairautta, jos testitulos on negatiivinen})$

$$= \frac{470}{475} = 0,98947... \approx 0,9895$$

Vastaus:

testitulos	on sairaus	ei ole sairautta	yhteensä
positiivinen	90	25	115
negatiivinen	5	470	475
yhteensä	95	495	590

0,78 ja 0,9895

347. Jokaisella nostolla jommankumman värin määrä kasvaa.

a) Ensimmäisellä nostolla laatikossa on 1 valkoinen ja 1 musta pallo,

$$\text{joten } P(1. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Suotuisassa tapauksessa ensimmäisellä nostolla laatikosta nousi valkoinen pallo, joten nyt laatikossa on 1 musta ja 2 valkoista palloa.

$$P(2. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Suotuisassa tapauksessa ensimmäisellä ja toisella nostolla laatikosta nousi valkoinen pallo, joten nyt laatikossa on 1 musta ja 3 valkoista palloa.

$$P(3. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}.$$

$P(\text{kolmella ensimmäisellä nostolla tulee valkoinen pallo})$

$= P(\text{ensimmäisellä ja toisella ja kolmannella nostolla tulee valkoinen pallo})$

$= P(1. \text{ nostolla tulee valkoinen}) \cdot P(2. \text{ nostolla tulee valkoinen})$
 $\cdot P(3. \text{ nostolla tulee valkoinen})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$= 0,25$$

Todennäköisyys sille, että kaikki kolme palloa ovat valkoisia, on 0,25.

Vastaus: 0,25

b) Listataan pallojen määrät jokaisen noston kohdalla.

Noston järjestysluku	Palloja ennen nostoa	Haluttu pallon väri	Todennäköisyys sille, että saadaan haluttu väri
1	1 musta ja 1 valkoinen	musta	$\frac{1}{2}$
2	2 mustaa ja 1 valkoinen	musta	$\frac{2}{3}$
3	3 mustaa ja 1 valkoinen	valkoinen	$\frac{1}{4}$
4	3 mustaa ja 2 valkoista	valkoinen	$\frac{2}{5}$
5	3 mustaa	valkoinen	$\frac{3}{6}$

Kertolaskusäännön mukaan

$P(1. \text{ musta ja } 2. \text{ musta ja } 3. \text{ valkoinen ja } 4. \text{ valkoinen ja } 5. \text{ valkoinen})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{60}$$

$$= 0,01666\dots$$

$$\approx 0,017.$$

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä palloa ovat mustia ja kolme seuraavaa valkoisia, on 0,017.

Vastaus: 0,017

c) Kun mustia palloja on nostettu n kpl, niin laatikossa on yksi valkoinen ja $n + 1$ mustaa palloa. Todennäköisyys saada valkoinen pallo on

$$\frac{1}{1+n}.$$

Vastaus: $\frac{1}{1+n}$

- 348.** Merkintään kruunaa kirjaimella R ja klaavaa kirjaimella L.
Listataan erilaiset heittosarjat.

RR

RL

LR

LL

Tarkastellaan ensin tapahtumia $A = \text{"1. on kruuna"}$ ja $B = \text{"2. on kruuna"}$.

Alkeistapauksia tutkimalla havaitaan, että todennäköisyys $P(A \text{ ja } B) = \frac{1}{4}$.

Toisaalta $P(A) = \frac{1}{2}$ ja $P(B) = \frac{1}{2}$, joten $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Näin ollen $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$ ja siis tarkastellut tapahtumat ovat riippumattomia.

Samalla tavalla voidaan todeta kaikista muista peräkkäisistä kolikon heittojen tuloksista, että ne ovat riippumattomia.

Vastaus: -

3.3 Yhteenlaskusääntö

ALOITA PERUSTEISTA

- 349. a)** Kuvassa on 24 henkilöä. Raidallinen paita on kahdella henkilöllä, joten

$$P(\text{Henkilöllä on raidallinen paita}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0,0833... \approx 0,083.$$

Kuvasta satunnaisesti valitulla henkilöllä on raidallinen paita todennäköisyydellä 0,083.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{12} \approx 0,083$$

- b)** Kuvassa on 24 henkilöä. Silmälasit on kolmella henkilöllä, joten

$$P(\text{henkilöllä on silmälasit}) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Kuvasta satunnaisesti valitulla henkilöllä on silmälasit todennäköisyydellä 0,125.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{8} = 0,125$$

- c)** Kuvassa on 24 henkilöä. Raidallinen paita on kahdella henkilöllä ja silmälasit on kolmella henkilöllä. Yhdellä henkilöllä on sekä raidallinen paita että silmälasit. Suotuisia alkeistapauksia on siis $2 + 3 - 1 = 4$.

$$\begin{aligned} P(\text{Henkilöllä on raidallinen paita tai silmälasit}) \\ = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0,1666... \approx 0,167 \end{aligned}$$

Kuvasta satunnaisesti valitulla henkilöllä on raidallinen paita tai silmälasit todennäköisyydellä 0,167.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{6} \approx 0,167$$

- 350.** a) Maanantaina tai tiistaina syntyneitä on yhteensä
 $14,7 \% + 15,5 \% = 30,2 \%$.

Henkilö on syntynyt maanantaina tai tiistaina 30,2 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 30,2 %

- b) Lauantaina tai sunnuntaina syntyneitä on yhteensä
 $12,4 \% + 11,7 \% = 24,1 \%$.

Henkilö on syntynyt viikonloppuna 24,1 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 24,1 %

- 351.** Henkilö parani, jos hän sai oikeaa lääkettä ja parani tai sai lumelääkettä ja parani. Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{henkilö parani})$

$= P(\text{henkilö sai oikeaa lääkettä ja parani tai henkilö sai lumelääkettä ja parani})$

$= P(\text{henkilö sai oikeaa lääkettä ja parani}) + P(\text{henkilö sai lumelääkettä ja parani})$

$= P(\text{sai oikeaa lääkettä}) \cdot P(\text{parani}) + P(\text{henkilö sai lumelääkettä}) \cdot P(\text{parani})$

$= 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,1$

$= 0,35$

Vastaus: 0,35

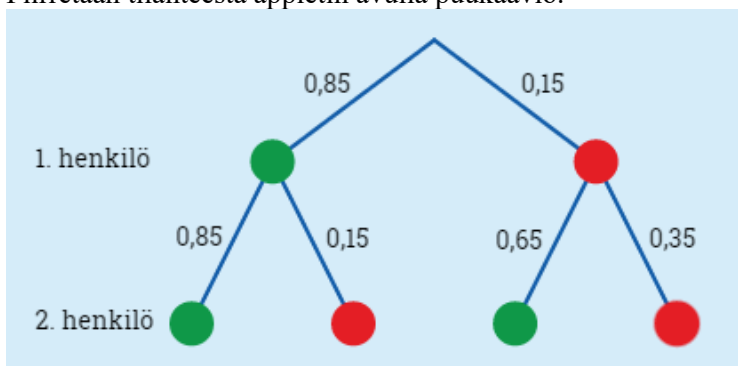
- 352.** Tiedetään, että
 $P(\text{lukiolainen pitää ruotsista ja lukiolainen pitää englannista}) = 0,35$,
joten tapahtumat ”lukiolainen pitää ruotsista” ja ”lukiolainen pitää englannista” eivät ole erillisiä. Käytetään yleistä yhteenlaskusääntöä.

$$\begin{aligned} &P(\text{lukiolainen pitää ruotsista tai englannista}) \\ &= P(\text{lukiolainen pitää ruotsista}) + P(\text{lukiolainen pitää englannista}) \\ &\quad - P(\text{lukiolainen pitää ruotsista ja lukiolainen pitää englannista}) \\ &= 0,45 + 0,60 - 0,35 \\ &= 0,70 \\ &= 70 \% \end{aligned}$$

Satunnainen lukion opiskelija pitää ruotsista tai englannista 70 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 70 %

- 353.** Piirretään tilanteesta appletin avulla puukaavio.



- a) Puumallissa suotuisa haara on oikeanpuoleisin haara, jossa molemmat valot ovat punaisia.

$$P(\text{molemmat kävelevät punaisia päin}) = 0,15 \cdot 0,35 = 0,0525 \approx 0,053$$

Molemmat kävelevät punaisia päin todennäköisyydellä 0,053.

Vastaus: 0,053

- b)** Suotuisa haara on vasemmanpuoleisin haara, jossa molemmat valot ovat vihreitä.

$$P(\text{kumpikaan ei kävele punaisia päin}) = 0,85 \cdot 0,85 = 0,7225 \approx 0,72$$

Todennäköisyys sille, ettei kumpikaan kävele punaisia päin, on 0,72.

Vastaus: 0,72

- c)** Suotuisia haaroja on molemmat keskimmäiset haarat, joissa toinen valo on vihreä ja toinen punainen.

$$\begin{aligned} P(\text{täsmälleen yksi heistä kävelee punaisia päin}) \\ = 0,85 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,65 = 0,225 \approx 0,23 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että täsmälleen yksi jalankulkijoista kävelee punaisia päin, on 0,23.

Vastaus: 0,23

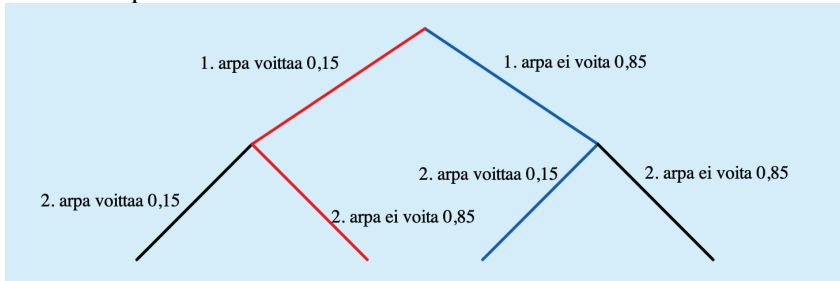
- d)** Suotuisia haaroja on kaikki muut paitsi vasemman reunimmainen haara, joka laskettiin kohdassa b. Käytetään vastatapahtumaa ja b-kohdan tulosta apuina.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi heistä kävelee punaisia päin}) \\ = 1 - P(\text{kumpikaan ei kävele punaisia päin}) \\ = 1 - 0,7225 \\ = 0,2775 \\ \approx 0,28 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että ainakin yksi jalankulkijoista kävelee punaisia päin, on 0,28.

Vastaus: 0,28

- 354.** Matilda saa täsmälleen yhden voittoarvan, jos ensimmäinen voittaa ja toinen ei voita, tai jos ensimmäinen ei voita ja toinen voittaa. Piirretään tilanteesta puukaavio.



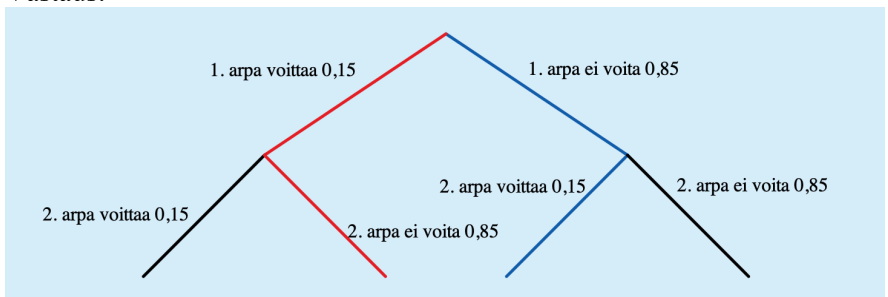
Koska arpoja on suuri määrä, ei yhden voittoarvon poistaminen vaikuta toisen arvan voiton todennäköisyyteen. Ensimmäisen ja toisen arvan voitto ovat siis riippumattomia.

Todennäköisyys sille, että yksittäinen arpa ei voita, on $1 - 0,15 = 0,85$.

$$\begin{aligned} &P(\text{Matilda saa tasan yhden voittoarvan}) \\ &= P(\text{ensimmäinen arpa voittaa ja toinen ei voita}) \\ &+ P(\text{ensimmäinen arpa ei voita ja toinen arpa voittaa}) \\ &= P(\text{arpa voittaa}) \cdot P(\text{arpa ei voita}) + P(\text{arpa ei voita}) \cdot P(\text{arpa voittaa}) \\ &= 0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 \\ &= 0,255 \\ &= 25,5 \% \end{aligned}$$

Matilda saa täsmälleen yhden voittoarvan 25,5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus:



25,5 %

- 355. a)** Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että kaikki kolme lasta ovat poikia, on

$$P(1. \text{ lapsi on poika}) \cdot P(2. \text{ lapsi on poika}) \cdot P(3. \text{ lapsi on poika}) \\ = 0,511 \cdot 0,511 \cdot 0,511 = 0,511^3 = 0,1334\dots = 13,34\dots \% \approx 13,3 \%$$

Kaikki kolme lasta ovat poikia todennäköisyydellä 13,3 %.

Vastaus: 13,3 %

- b)** Koska syntyvistä lapsista 51,1 % on poikia ja 0,05 % muun sukupuolisia, niin tyttöjä on $100 \% - 51,1 \% - 0,05 = 48,85 \%$. Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että kaikki kolme lasta ovat tyttöjä, on

$$P(1. \text{ lapsi on tyttö}) \cdot P(2. \text{ lapsi on tyttö}) \cdot P(3. \text{ lapsi on tyttö}) \\ = 0,4885 \cdot 0,4885 \cdot 0,4885 = 0,4885^3 \\ = 0,1165\dots = 11,65\dots \% \approx 11,7 \%$$

Kaikki kolme lasta ovat tyttöjä todennäköisyydellä 11,7 %.

Vastaus: 11,7 %

- c)** Kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta, jos he ovat kaikki poikia tai he ovat kaikki tyttöjä. Intersukupuolisia ei voida selkeästi sanoa olevan keskenään samaa sukupuolta, joten tarkastellaan vain tapahtumia kaikki kolme ovat tyttöjä tai kaikki kolme poikia. Tapahtumat ”kaikki kolme ovat poikia” ja ”kaikki kolme ovat tyttöjä” ovat erillisiä, joten erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(\text{kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta}) \\ = P(\text{kaikki kolme ovat poikia}) + P(\text{kaikki kolme ovat tyttöjä}) \\ = 13,34\dots \% + 11,65\dots \% = 25,00\dots \% \approx 25,0 \%$$

Kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta todennäköisyydellä 25,0 %.

Vastaus: 25,0 %

- 356.** a) Helteellä ei voi sataa lunta, joten tapahtumat
 $A = \text{"sataa lunta"}$ ja $B = \text{"on hellettä"}$ ovat erillisiä.

Vastaus: ei voi, ovat

- b) Pakkasella voi sataa lunta, joten tapahtumat
 $A = \text{"sataa lunta"}$ ja $B = \text{"on pakkasta"}$ eivät ole erillisiä.

Vastaus: voi, eivät ole

- c) Jari voi treenata samaan aikaan kuin Mari jumppaa, joten tapahtumat
 $A = \text{"Jari treenaa"}$ ja $B = \text{"Mari jumppaa"}$ eivät ole erillisiä.

Vastaus: voi, eivät ole

- d) Ari ei voi luistella ja ajaa autoa yhtä aikaa, joten tapahtumat
 $A = \text{"Ari luistelee"}$ ja $B = \text{"Ari ajaa autoa"}$ ovat erillisiä.

Vastaus: ei voi, ovat

VAHVISTA OSAAMISTA

357. Taulukossa olevien nappuloiden yhteismäärä on

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 12 = 30.$$

a) Tiedetään, että

$$P(\text{1. kiekko on rubiini}) = \frac{2}{30},$$

$$P(\text{1. kiekko on smaragdi}) = \frac{3}{30} \text{ ja}$$

$$P(\text{1. kiekko on topaasi}) = \frac{4}{30}.$$

Tapahtumat ”1. kiekko on rubiini”, ”1. kiekko on smaragdi” ja ”1. kiekko on topaasi” ovat erillisiä.

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(\text{1. kiekko on rubiini, smaragdi tai topaasi})$$

$$= \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{4}{30}$$

$$= \frac{9}{30}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$= 0,3.$$

Ensimmäinen käännetty kiekko on rubiini, smaragdi tai topaasi todennäköisyydellä 0,30.

Vastaus: 0,30

1 Afrikan tähti
2 rubiinia
3 smaragdia
4 topaasia
3 rosvoa
5 hevosenkenkää
12 tyhjää

- b) Koska kiekkoja on käännetty 6, kääntämättömien kiekkojen yhteismäärä on enää $30 - 6 = 24$. Käännettyistä kiekkoista yksikään ei ollut rubiini eikä hevosenkenkä, joten niiden määrät ovat ennallaan.

Sama kiekko ei voi olla sekä rubiini että hevosenkenkä, joten tapahtumat ”7. kiekko on rubiini” ja ”7. kiekko on hevosenkenkä” ovat erillisiä. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(7. \text{ kiekko on hevosenkenkä tai rubiini}) \\ &= P(7. \text{ kiekko on hevosenkenkä}) + P(7. \text{ kiekko on rubiini}) \\ &= \frac{2}{24} + \frac{5}{24} \\ &= \frac{7}{24} \\ &= 0,291\dots \\ &\approx 0,29. \end{aligned}$$

Seuraava käännetty pahvikiekko on hevosenkenkä tai rubiini todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: 0,29

358. Olkoon A = veriryhmä on A, B = veriryhmä on B, C = veriryhmä on AB ja O = veriryhmä on O. Tunnetaan seuraavat todennäköisyydet:

$$P(A) = 0,44$$

$$P(B) = 0,17$$

$$P(C) = 0,08$$

$$P(O) = 0,31.$$

Jos valitaan kaksi henkilöä, muodostuu pareja AA , AB , AC ...

Sama veriryhmä on pareilla AA , BB , CC ja OO .

$$P(AA) = P(A \text{ ja } A) = P(A) \cdot P(A) = 0,44^2$$

$$P(BB) = P(B \text{ ja } B) = P(B) \cdot P(B) = 0,17^2$$

$$P(CC) = P(C \text{ ja } C) = P(C) \cdot P(C) = 0,08^2$$

$$P(OO) = P(O \text{ ja } O) = P(O) \cdot P(O) = 0,31^2$$

Tapahtuma ”puolisot kuuluvat samaan veriryhmään pitää” voidaan kirjoittaa muodossa ” AA tai BB tai CC tai OO ”.

$$P(AA \text{ tai } BB \text{ tai } CC \text{ tai } OO)$$

$$= 0,44^2 + 0,17^2 + 0,08^2 + 0,31^2$$

$$= 0,325$$

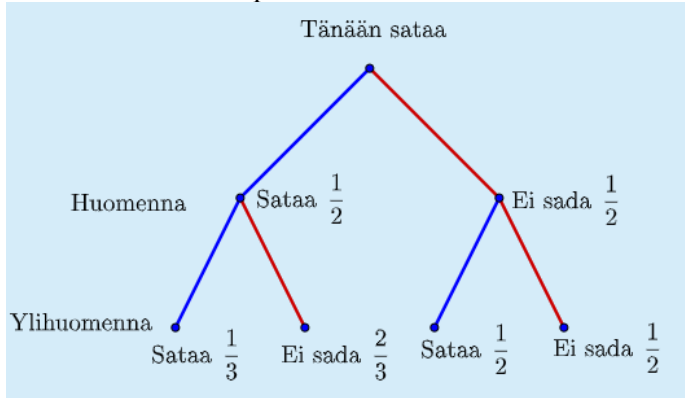
$$= 32,5 \%$$

$$\approx 33 \%$$

Puolisot kuuluvat samaan veriryhmään 33 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 33 %

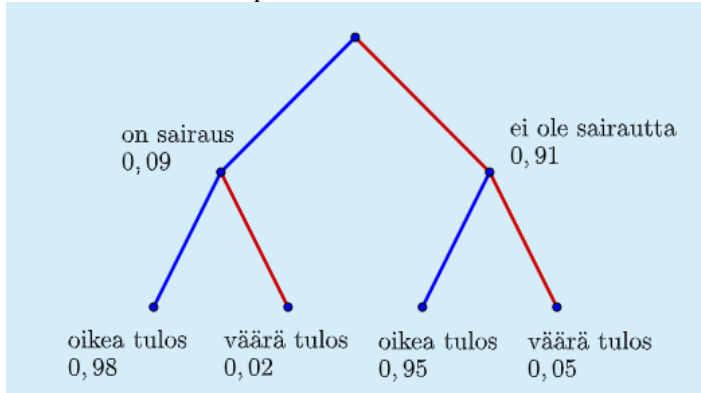
359. Piirretään tilanteesta puukaavio.



$$\begin{aligned} &P(\text{ylihuomenna sataa}) \\ &= P(\text{huomenna sataa ja ylihuomenna sataa TAI huomenna ei sataa ja ylihuomenna sataa}) \\ &= P(\text{huomenna sataa}) \cdot P(\text{ylihuomenna sataa}) + P(\text{huomenna ei sataa}) \cdot P(\text{ylihuomenna sataa}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} = 0,4166... \approx 0,42 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{5}{12} \approx 0,42$$

360. Piirretään tilanteesta puukaavio.



$P(\text{testissä oikea tulos})$

$= P(\text{henkilöllä on sairaus ja testissä oikea tulos TAI henkilöllä ei ole sairautta ja testissä oikea tulos})$

$= P(\text{henkilöllä on sairaus}) \cdot P(\text{testissä oikea tulos}) + P(\text{henkilöllä ei ole sairautta}) \cdot P(\text{testissä oikea tulos})$

$$= 0,09 \cdot 0,98 + 0,91 \cdot 0,95 = 0,9527 \approx 0,95$$

Testi antaa oikean tuloksen 95 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 95 %

- 361. a)** Jos ensimmäinen sukka on vasemman jalan sukka, laatikossa on jäljellä kaksi vasemman jalan sukkaa ja kolme oikean jalan sukkaa, eli yhteensä 5 sukkaa. Toinen sukka on oikean jalan sukka

todennäköisyydellä $\frac{3}{5} = 0,6$.

Vastaus: 0,6

- b) Hanna saa sukkaparin, jos hän ottaa ensin vasemman jalan sukan ja sitten oikean jalan sukan, tai jos hän ottaa ensin oikean jalan sukan ja sitten vasemman jalan sukan.

$$P(\text{sukkapari}) = P(\text{vasen}) \cdot P(\text{oikea}) + P(\text{oikea}) \cdot P(\text{vasen})$$

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Hanna saa sukkaparin todennäköisyydellä 0,6.

Vastaus: 0,6

362. a) Tapahtuma ”molemmat ehtivät lentokoneeseen” voidaan ilmaista muodossa ”Virpi ehtii lentokoneeseen ja Petri ehtii lentokoneeseen.” Väite on oikein.

Vastaus: oikein

- b) Tapahtumaa ”Vain toinen ehtii lentokoneeseen ” tarkoittaa, että Virpi ehtii ja Petri ei ehdi, tai sitten Petri ehtii ja Virpi ei ehdi. Väite on siis väärin.

Vastaus: väärin, ”Virpi ehtii lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen, tai Petri ehtii lentokoneeseen ja Virpi ei ehdi lentokoneeseen”.

- c) Tapahtuma ”Kumpikaan ei ehdi lentokoneeseen” tarkoittaa, että Virpi ei ehdi lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen. Lause ”Virpi ei ehdi lentokoneeseen tai Petri ei ehdi lentokoneeseen” tarkoittaa, että ainakin toinen myöhästyy, mutta ei tarkoita sitä, että molemmat myöhästyvät. Väite on siis väärin.

Vastaus: väärin, ”Virpi ei ehdi lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen”

- 363.** a) Erilliset tapahtumat ovat tapahtumia, joilla ei ole yhteisiä alkeistapauksia. Esimerkiksi tapahtumat ”arpakuution heitossa tulee pariton silmäluku” ja ”arpakuution heitossa tulee parillinen silmäluku” ovat erillisiä.
- b) Riippumattomat tapahtumat ovat tapahtumia, joissa toisen tapahtuminen ei vaikuta toisen todennäköisyyteen. Esimerkiksi tapahtumat ”korttipakan päällimmäinen kortti on ässä” ja ”arpakuution heitossa tulee silmäluku 2” ovat riippumattomia.

- 364.** a) Soittolistalla on kappaleita yhteensä $6 + 5 + 4 = 15$.

Näistä 6 on bluesia, joten $P(\text{1. kappale on bluesia}) = \frac{6}{15}$.

Jos ensimmäinen kappale on bluesia, listalla on vielä jäljellä 14

kappaletta, joista 5 on bluesia, joten $P(\text{2. kappale on bluesia}) = \frac{5}{14}$.

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat bluesia, on

$$P(\text{1. ja 2. kappale ovat bluesia})$$

$$= P(\text{1. kappale on bluesia}) \cdot P(\text{2. kappale on bluesia})$$

$$= \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}$$

$$= 0,142\dots$$

$$\approx 0,14.$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat bluesia todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

- b)** Soittolistan 15 kappaleesta on muuta kuin bluesia 9 kappaletta, joten

$$P(1. \text{ kappale ei ole bluesia}) = \frac{9}{15}.$$

Jos ensimmäinen kappale on muuta kuin bluesia, listalla on vielä jäljellä 14 kappaletta, joista 8 on bluesia, joten

$$P(2. \text{ kappale ei ole bluesia}) = \frac{8}{14}.$$

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat blueskappaleita, on

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ ja } 2. \text{ kappale ovat muuta kuin bluesia}) \\ &= P(1. \text{ kappale ei ole bluesia}) \cdot P(2. \text{ kappale ei ole bluesia}) \\ &= \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0,342... \approx 0,34. \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat muuta kuin bluesia todennäköisyydellä 0,34.

Vastaus: 0,34

- c)** Soittolistan 15 kappaleesta reggaeta tai bluesia on 11, joten

$$P(1. \text{ kappale on reggaeta tai bluesia}) = \frac{11}{15}.$$

Jos ensimmäinen kappale on reggaeta tai bluesia, listalla on vielä jäljellä 14 kappaletta, joista 10 on reggaeta tai bluesia, joten

$$P(2. \text{ kappale on reggaeta tai bluesia}) = \frac{10}{14}.$$

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat reggaeta tai bluesia, on

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ ja } 2. \text{ kappale ovat reggaeta tai bluesia}) \\ &= P(1. \text{ kappale reggaeta tai bluesia}) \cdot P(2. \text{ kappale reggaeta tai bluesia}) \\ &= \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = 0,523... \approx 0,52. \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat reggaeta tai bluesia todennäköisyydellä 0,52.

Vastaus: 0,52

- 365.** Suotuisia arpakuution silmälukujen summia ovat ”ensimmäisellä heitolla 2 ja toisella heitolla 3” sekä ”ensimmäisellä heitolla 3 ja toisella heitolla 2”. Lasketaan todennäköisyydet, joilla kahta arpakuutiota heitettäessä tulee silmälukujen summaksi 2 tai 3.

Kahdella heitolla silmälukujen summa 2 voi tulla ainoastaa parilla $1 + 1$ kaikista 36:sta mahdollisesta parista. Siis $P(\text{summa on } 2) = \frac{1}{36}$.

Kahdella arpakuutiolla silmälukujen summa 3 voi tulla pareilla $1 + 2$ ja $2 + 1$ kaikista 36:sta mahdollisesta parista. Siis $P(\text{summa on } 3) = \frac{2}{36}$.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(\text{yhteensä 5 askelta}) \\ &= P(\text{summa on } 2) \cdot P(\text{summa on } 3) + P(\text{summa on } 3) \cdot P(\text{summa on } 2) \\ &= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{36} \\ &= 0,003086... \\ &\approx 0,0031. \end{aligned}$$

Pelaaja etenee kahden heittovuoron aikana täsmälleen viisi askelta todennäköisyydellä 0,0031.

Vastaus: 0,0031

- 366.** Jaskan tietokone alkaa asentaa päivityksiä tai jumiutuu muuten vaan, jos se alkaa asentaa päivityksiä, tai se ei ala asentaa päivityksiä ja jumiutuu muuten vaan.

Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”kone alkaa asentaa päivityksiä”

B = ”kone jumiutuu muista syistä”.

Tiedetään, että jos tapahtuma A ei tapahdu, niin tapahtuma B tapahtuu todennäköisyydellä 0,04. Koska tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin B voi tapahtua vain silloin, kun A ei tapahdu. Kertolaskusäännön mukaan $P(B) = P(A \text{ ei tapahdu}) \cdot 0,04 = (1 - 0,18) \cdot 0,04 = 0,0328$.

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(A \text{ tai } B) = 0,18 + 0,0328 = 0,2128 \approx 0,21.$$

Jaskan tietokone alkaa asentaa päivityksiä tai jumiutuu muuten vaan todennäköisyydellä $0,21 = 21 \%$.

Vastaus: 21 %

- 367.** Viallinen tuote pääsee läpi jos tarkastaja A ei huomaa virhettä ja tarkastaja C ei huomaa virhettä, tai tarkastaja B ei huomaa virhettä ja tarkastaja C ei huomaa virhettä.

Olkoon A = ”tarkastaja A huomaa virheen”,

B = ”tarkastaja B huomaa virheen” ja

C = ”tarkastaja C huomaa virheen”.

$$P(A) = 0,90, \text{ joten } P(\overline{A}) = 1 - 0,90 = 0,10$$

$$P(B) = 0,92, \text{ joten } P(\overline{B}) = 1 - 0,92 = 0,08$$

$$P(C) = 0,98, \text{ joten } P(\overline{C}) = 1 - 0,98 = 0,02$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"}\overline{A} \text{ ja } \overline{C}\text{" tai "}\overline{B} \text{ ja } \overline{C}\text{"})$$

$$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$$

$$= 0,10 \cdot 0,02 + 0,08 \cdot 0,02$$

$$= 0,0036$$

$$= 0,36 \, \%$$

Satunnainen viallinen tuote pääsee linjastosta läpi 0,36 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,36 %

368. Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”Anni pääsee jatsoon”

E = ”Erno pääsee jatsoon”

P = ”Pazilaiti pääsee jatsoon”.

Listataan kaikki tapahtumat, joissa ainakin kaksi heistä pääsee jatsoon.

Kolme pääsee:

” A ja E ja P ”

Kaksi pääsee:

” A ja E ja $\overline{P}$ ”

” A ja P ja $\overline{E}$ ”

” E ja P ja $\overline{A}$ ”

Lasketaan yksittäisten kilpailijoiden kohdalla todennäköisyydet sille, että kilpailija ei pääse jatsoon.

$$P(A) = 0,90, \text{ joten } P(\overline{A}) = 1 - 0,90 = 0,10$$

$$P(E) = 0,85, \text{ joten } P(\overline{E}) = 1 - 0,85 = 0,15$$

$$P(P) = 0,95, \text{ joten } P(\overline{P}) = 1 - 0,95 = 0,05$$

Todennäköisyys sille, että kaikki kolme pääsevät jatsoon, on

$$P(A \text{ ja } E \text{ ja } P) = P(A) \cdot P(E) \cdot P(P) = 0,90 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,72675.$$

Lasketaan todennäköisyydet kullekin kahden kilpailijan jatsoon pääsijöiden joukolle.

$$P(A \text{ ja } E \text{ ja } \overline{P}) = 0,90 \cdot 0,85 \cdot 0,05 = 0,03825$$

$$P(A \text{ ja } P \text{ ja } \overline{E}) = 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 0,12825$$

$$P(E \text{ ja } P \text{ ja } \overline{A}) = 0,85 \cdot 0,95 \cdot 0,10 = 0,08075$$

P (ainakin kaksi heistä pääsee jatsoon)

$$= P(\text{”}A \text{ ja } E \text{ ja } P\text{” tai ”}A \text{ ja } E \text{ ja } \overline{P}\text{” tai ”}A \text{ ja } P \text{ ja } \overline{E}\text{” tai ”}E \text{ ja } P \text{ ja } \overline{A}\text{”})$$

$$= P(A \text{ ja } E \text{ ja } P) + P(A \text{ ja } E \text{ ja } \overline{P}) + P(A \text{ ja } P \text{ ja } \overline{E}) + P(E \text{ ja } P \text{ ja } \overline{A})$$

$$= 0,72675 + 0,03825 + 0,12825 + 0,08075$$

$$= 0,974$$

$$= 97,4 \%$$

$$\approx 97 \%$$

Ainakin kaksi kilpailijoista pääsee jatkokoon todennäköisyydellä 97 %.

Vastaus: 97 %

- 369. a)** Kyseisessä lukiossa on opiskelijoita yhteensä $133 + 106 = 239$.
Satunnainen opiskelija on tyttö todennäköisyydellä $\frac{133}{239} = 0,556\dots$ ja
poika todennäköisyydellä $\frac{106}{239} = 0,443\dots$

Kysytty todennäköisyys on erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea}) \\ &= P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea tyttö tai värisokea poika}) \\ &= P(\text{satunnainen lukiolainen on tyttö ja värisokea}) \\ &+ P(\text{satunnainen lukiolainen on poika ja värisokea}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on} \\ &0,556\dots \cdot 0,005 + 0,443\dots \cdot 0,10 \\ &= 0,04713\dots \\ &= 4,713\dots \% \\ &\approx 5 \%. \end{aligned}$$

Satunnainen lukion opiskelija on värisokea 5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 5 %

- b)** Värisokeus ja vasenkätisyys voidaan ajatella riippumattomiksi.
 $P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea ja vasenkätinen})$
 $= P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea})$
 $\cdot P(\text{satunnainen lukiolainen on vasenkätinen})$
 $= 0,04713\dots \cdot 0,10 = 0,00471\dots = 0,471\dots \% \approx 0,5 \%$

Satunnainen lukion opiskelija on värisokea ja vasenkätinen 0,5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,5 %

- 370.** Kirjoitetaan taulukkoon tehtävänannossa kerrotut tiedot (sininen tausta) ja täydennetään taulukkoa vaihe vaiheelta.

	Onnistuu biologiassa	Epäonnistuu biologiassa	Yhteensä
Onnistuu kemiassa			
Epäonnistuu kemiassa	210 – 112 = 98	112	210
Yhteensä	1300 – 350 = 950	350	1300

	Onnistuu biologiassa	Epäonnistuu biologiassa	Yhteensä
Onnistuu kemiassa	950 – 98 = 852	350 – 112 = 238	1300 – 210 = 1090
Epäonnistuu kemiassa	98	112	210
Yhteensä	950	350	1300

- a) 1300 kokelaasta 852 onnistuu molemmissa kokeissa, joten
 $P(\text{satunnainen kokelas onnistuu molemmissa kokeissa})$

$$= \frac{852}{1300} = 0,655... \approx 0,66.$$

Kokelas onnistuu molemmissa kokeissa todennäköisyydellä 0,66.

Vastaus: 0,66

- b) 350 biologian kokeessa epäonnistuneesta kokelaasta 112 epäonnistuu myös kemiassa, joten

$$P(\text{satunnainen biologian kokeessa epäonnistunut kokelas epäonnistuu kemiassa}) = \frac{112}{350} = 0,32.$$

Biologian kokeessa epäonnistunut kokelas epäonnistuu myös kemian kokeessa todennäköisyydellä 0,32.

Vastaus: 0,32

- c) 1300 kokelaasta ainakin toisessa kokeessa epäonnistuu
 $238 + 112 + 98 = 448$.

$$P(\text{satunnainen kokelas onnistuu ainakin toisessa kokeessa}) \\ = \frac{448}{1300} = 0,344.. \approx 0,34$$

Kokelas epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa todennäköisyydellä 0,34.

Vastaus: 0,34

371. Merkitään tapahtumia seuraavasti:
 L = ”Linnea onnistuu yksittäisellä yrityksellä”
 K = ”Kalle onnistuu yksittäisellä yrityksellä”

Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea, jos

- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea vain ensimmäisellä yrityksellä
- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea vain toisella yrityksellä
- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä
- Kalle onnistuu vain ensimmäisellä yrityksellä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä
- Kalle onnistuu vain toisella yrityksellä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä.

Merkitään nämä tapahtumat ovat lyhennysmerkintöjä käyttäen:

” K ja K ja L ja $\bar{L}$ ”

” K ja K ja $\bar{L}$ ja L ”

” K ja K ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

” K ja $\bar{K}$ ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

” $\bar{K}$ ja K ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

$$P(K) = 0,7, \text{ joten } P(\bar{K}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

$$P(L) = 0,8, \text{ joten } P(\bar{L}) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$P(\text{Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea})$

$$\begin{aligned} &= P(K \text{ ja } K \text{ ja } L \text{ ja } \bar{L}) + P(K \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } L) + P(K \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) \\ &+ P(K \text{ ja } \bar{K} \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) + P(\bar{K} \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) \\ &= 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\ &+ 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\ &= 0,193\dots \\ &\approx 0,19 \end{aligned}$$

Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea todennäköisyydellä 0,19.

Vastaus: 0,19

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 372.** Jos laatikosta A tulee valkoinen pallo, niin laatikossa B on 4 valkoista kuudesta pallosta. Tällöin $P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) = \frac{4}{6}$.

Jos laatikosta A tulee punainen pallo, niin laatikossa B on 3 valkoista kuudesta pallosta. Tällöin $P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) = \frac{3}{6}$.

Valkoinen pallo nousee B:stä tapauksissa ”A:sta valkoinen ja B:stä valkoinen” tai ”A:sta punainen ja B:stä valkoinen”.

$$\begin{aligned} &P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &= P(\text{laatikosta A tulee valkoinen ja laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &+ P(\text{laatikosta A tulee punainen ja laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &= P(\text{laatikosta A tulee valkoinen}) \cdot P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &+ P(\text{laatikosta A tulee punainen}) \cdot P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = 0,566\dots \approx 0,57 \end{aligned}$$

Toisena otettu pallo on valkoinen todennäköisyydellä 0,57.

Vastaus: 0,57

- 373.** Todennäköisyys sille, että 300 osallistujasta ensimmäinen tarvitsee lääkärin hoitoa ja muut 299 eivät tarvitse, on

$$P(\text{ensimmäinen tarvitsee hoitoa ja muut eivät}) \\ = 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}.$$

Vastaavasti todennäköisyys sille, että 300 osallistujasta toinen tarvitsee lääkärin hoitoa ja muut 299 eivät tarvitse, on

$$P(\text{toinen tarvitsee hoitoa ja muut eivät}) \\ = 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}$$

ja

$$P(\text{kolmas tarvitsee hoitoa ja muut eivät}) \\ = 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}$$

ja niin edelleen. Todennäköisyydet ovat keskenään yhtä suuria, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{täsmälleen yksi tarvitsee lääkärin hoitoa}) \\ = 300 \cdot 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299} \\ = 0,29771\dots \\ = 29,771 \% \\ \approx 30 \%.$$

Todennäköisyys sille, että osallistujista täsmälleen yksi tarvitsee lääkärin hoitoa, on 30 %.

Vastaus: 30 %

374. Sijoitetaan lausekkeeseen $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ heittojen määrä $n = 60$,

kuutosten määrä $k = 10$ ja kuutosen todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} & \binom{60}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{60-10} \\ &= \binom{60}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \\ &= 0,1370... \\ &\approx 0,14 \end{aligned}$$

Kun arpakuutiota heitetään 60 kertaa, saadaan täsmälleen 10 kuutosta todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

375. Tapahtuman ” A tai B tai C ” todennäköisyys voidaan laskea summan $P(A) + P(B) + P(C)$ avulla. Tällöin kuitenkin alueet ” A ja B ”, ” A ja C ” ja ” B ja C ” tulevat laskettua kahdesti, joten vähennetään ne kerran.

Vastaavasti alue ” A ja B ja C ” tulee laskettua kolme kertaa, mutta vähennettäessä alueet ” A ja B ”, ” A ja C ” ja ” B ja C ” alue ” A ja B ja C ” tulee vähennettyä kolmesti. Tällöin $P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$ tulee lisätä takaisin kerran.

$$\begin{aligned} & P(A \text{ tai } B \text{ tai } C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ ja } B) - P(A \text{ ja } C) - P(B \text{ ja } C) + P(A \text{ ja } B \text{ ja } C) \end{aligned}$$

Vastaus: $P(A \text{ tai } B \text{ tai } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ ja } B) - P(A \text{ ja } C) - P(B \text{ ja } C) + P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$

- 376.** a) Esimerkiksi tapahtuman ”arpakuution heitossa tulee kahdesti peräkkäin sama silmäluku” todennäköisyydessä käytetään riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä ja erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöä:

Todennäköisyys sille, että saadaan kahdesti peräkkäin sama silmäluku, on erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 1) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 2) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 3) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 4) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 5) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 6). \end{aligned}$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ heitolla silmäluku } 1) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 1) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 2) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 2) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 3) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 3) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 4) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 4) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 5) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 5) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 6) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 6). \end{aligned}$$

Vastaus: ”arpakuution heitossa tulee kahdesti peräkkäin sama silmäluku”

- b) Esimerkiksi tapahtuman ”korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja” todennäköisyyden laskemisessa tarvitaan riippuvien tapahtumien kertolaskusääntöä ja yleistä yhteenlaskusääntöä:

Todennäköisyys sille, että korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja, on yleisen yhteenlaskusäännön mukaan

$P(\text{kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja})$

$$= P(\text{samaa maata}) + P(\text{molemmat kuvakortteja}) - P(\text{samaa maata ja molemmat kuvakortteja}).$$

Tässä kohtaa tarvitaan myös erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöä, jonka käyttöä ei ole tehtävänannossa kielletty. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$P(\text{molemmat herttoja}) + P(\text{molemmat ruutuja}) + P(\text{molemmat patoja}) + P(\text{molemmat ristejä}) + P(\text{molemmat kuvakortteja}) - P(\text{samaa maata ja molemmat kuvakortteja}).$$

Riippuvien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$\begin{aligned} & P(1. \text{ kortti on hertta}) \cdot P(2. \text{ kortti on hertta}) \\ & + P(1. \text{ kortti on ruutu}) \cdot P(2. \text{ kortti on ruutu}) \\ & + P(1. \text{ kortti on pata}) \cdot P(2. \text{ kortti on pata}) \\ & + P(1. \text{ kortti on risti}) \cdot P(2. \text{ kortti on risti}) \\ & + P(1. \text{ kortti on kuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on kuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on herttakuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on herttakuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on ruutukuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on ruutukuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on patakuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on patakuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on ristikuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on ristikuva}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat herttoja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat ruutuja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat patoja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat ristejä}} + \underbrace{\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51}}_{\text{molemmat kuvia}} \\ &- \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat herttakuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat ruutukuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat patakuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat ristikuvia}}. \end{aligned}$$

Vastaus: ”korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja”