

2 JOHDATUS TODENNÄKÖISYYSLASKENTAAN

2.1 Klassinen ja tilastollinen todennäköisyys

ALOITA PERUSTEISTA

201. a) $P(\text{silmäluku on } 3) = \frac{1}{6} = 0,166\dots \approx 0,17$

Vastaus: $\frac{1}{6} \approx 0,17$

- b)** Silmäluku on alle 5, jos se on 1, 2, 3 tai 4. Suotuisia alkeistapauksia on 4 ja kaikkia alkeistapauksia 6, joten

$$P(\text{silmäluku on alle } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666\dots \approx 0,67.$$

Vastaus: $\frac{2}{3} \approx 0,67$

- c)** Arpakuution heitossa silmäluku ei voi olla yli 6, joten $P(\text{silmäluku on yli } 6) = 0$.

Vastaus: 0

- d)** Arpakuution heitossa silmäluku on aina vähintään 1, joten $P(\text{silmäluku on vähintään } 1) = 1$.

Vastaus: 1

- 202.** a) Satunnaisilmiön ”syntymäpäivän viikonpäivä” alkeistapaukset ovat maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai, perjantai, lauantai ja sunnuntai.

Vastaus: ma, ti, ke, to, pe, la ja su

- b) Tapahtuman ”henkilö on syntynyt viikonloppuna” suotuisat alkeistapaukset ovat lauantai ja sunnuntai.

Vastaus: la ja su

- c) $P(\text{henkilö on syntynyt viikonloppuna}) = \frac{2}{7} = 0,285\dots \approx 0,29$

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

- 203.** A Korttipakassa on neljän eri maan kortteja, ja jokainen maa on yhtä todennäköinen. Padan todennäköisyys on siis $\frac{1}{4} = 25\%$.

Tapahtuma A ja todennäköisyys IV kuuluvat yhteen.

- B Arpakuution heitossa on 6 alkeistapausta: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Todennäköisyys sille, että silmäluku on 1 tai 2, on $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Tapahtuma B ja todennäköisyys I kuuluvat yhteen.

- C Kassissa on kenkäpareja, joten puolet kengistä on oikean jalan kenkiä. Todennäköisyys sille, että sattumanvaraisesti valittu kenkä on oikean jalan kenkä, on $\frac{1}{2} = 0,5$.

Tapahtuma C ja todennäköisyys III kuuluvat yhteen.

- D Ensilumi voi sataa minä tahansa seitsemästä viikonpäivästä, ja kaikki viikonpäivät ovat yhtä todennäköisiä. Todennäköisyys sille, että ensilumi sataa sunnuntaina, on $\frac{1}{7}$.

Tapahtuma D ja todennäköisyys II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV; B: I, C: III ja D: II

- 204. a)** Kutakin arpaa voidaan pitää alkeistapauksena, jolloin kaikkia alkeistapauksia on 3000 ja suotuisia alkeistapauksia 750.
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{satunnainen arpa voittaa}) = \frac{750}{3000} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \, \%.$$

Satunnainen arpa voittaa 25 prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 25 %

- b)** Arpoja, joissa ei ole voittoa, on $3000 - 750 = 2250$ kappaletta.
Alkeistapauksia on 3000 ja suotuisia alkeistapauksia on 2250.
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{satunnainen arpa ei voita}) = \frac{2250}{3000} = 0,75 = 75 \, \%.$$

Satunnainen arpa ei voita 75 prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 75 %

- 205. a)** Koska nasta jäi useammin kärki ylöspäin kuin kärki alaspäin, niin kokeen mukaan on todennäköisempää, että nasta jää kärki ylöspäin.

Vastaus: kärki ylöspäin

- b)** Tilaston mukaan heittoja on yhteensä $135 + 164 = 299$. 135 heitossa nasta tulee maahan kärki alaspäin, joten

$$P(\text{kärki alaspäin}) = \frac{135}{299} = 0,451... \approx 0,45.$$

Vastaus: 0,45

- 206.** Lasketaan tilastolliset todennäköisyydet sille, että jokeri lyö juoksun.

$$P(\text{Jani lyö juoksun}) = \frac{35}{57} = 0,614\dots$$

$$P(\text{Roope lyö juoksun}) = \frac{97}{173} = 0,560\dots$$

Janin todennäköisyys lyödä juoksu on suurempi kuin Roopen, joten ratkaisupaikassa kannattaa laittaa lyömään Jani.

Vastaus: Jani

- 207. a)** Koska purkkeja on 4, ne voidaan asettaa $4! = 24$ eri järjestykseen.

Vastaus: 24:ään eri järjestykseen

- b)** Merkitään purkkeja alkukirjaimillaan ja luetellaan suotuisat järjestykset.

SPTC

SPCT

PSTC

PSCT

Vastaus: SPTC, SPCT, PSTC, PSCT

- c)** Suotuisia järjestyksiä on 4 ja kaikkia järjestyksiä on 24, joten suola ja pippuri ovat vasemmanpuolimmaisella todennäköisyydellä

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0,166\dots \approx 0,17.$$

Vastaus: $\frac{1}{6} \approx 0,17$

- 208.** Kopioidaan taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan. Lasketaan ohjelman avulla syntyneiden poikien ja tyttöjen kokonaismäärät sekä syntyneiden lasten kokonaismäärä. Esimerkiksi syntyneiden poikien kokonaismäärä lasketaan komennolla ”=summa(B2:B22)”. Vastaavalla tavalla saadaan syntyneiden tyttöjen kokonaismäärä. Kaikki yhteensä saadaan komennolla ”=B23+C23”.

	A	B	C
1	Vuosi	Pojat	Tytöt
2	2000	29250	27492
3	2001	28701	27488
4	2002	28563	26992
5	2003	28839	27791
6	2004	29684	28074
7	2005	29400	28345
8	2006	30005	28835
9	2007	30136	28593
10	2008	30415	29115
11	2009	30795	29635
12	2010	31309	29671
13	2011	30546	29415
14	2012	30308	29185
15	2013	29858	28276
16	2014	29272	27960
17	2015	28469	27003
18	2016	26812	26002
19	2017	25674	24647
20	2018	24630	22947
21	2019	23186	22427
22	2020	23778	22685
23	Yhteensä	599630	572578
24			
25	Kaikki yhteensä		1172208

Lasten kokonaismäärä on $599\,630 + 572\,578 = 1\,172\,208$.

Kaikkien havaintojen lukumäärä on 1 172 208 ja tapahtuman ”lapsen sukupuoleksi on määritelty tyttö” esiintymiskertojen lukumäärä on 572 578. Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{lapsen sukupuoleksi on määritelty tyttö})$

$$= \frac{572\,578}{1\,172\,208} = 0,4884... \approx 0,488 = 48,8 \, \%$$

Suomessa syntyvä lapsen sukupuoleksi on määritelty tyttö todennäköisyydellä 48,8 %.

Vastaus: 48,8 %

VAHVISTA OSAAMISTA

- 209.** Merkitään R = kruuna ja L = klaava. Valitaan alkeistapauksiksi kaikki mahdolliset kolmen heiton sarjat ja luetellaan ne.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto
Kolme klaavaa	L	L	L
Kaksi klaavaa ja yksi kruuna	L	L	R
	L	R	L
	R	L	L
Yksi klaava ja kaksi kruunaa	L	R	R
	R	L	R
	R	R	L
Kolme kruunaa	R	R	R

Alkeistapauksia on yhteensä 8, joista suotuisia on kolme.

$$P(\text{tasan 1 klaava}) = \frac{3}{8} = 0,375$$

Kolmen kolikon heitossa saadaan tasan yksi klaava todennäköisyydellä 0,375.

Vastaus: $\frac{3}{8} = 0,375$

- 210. a)** Koska oppilaita on 18 ja heistä valitaan 2, mahdollisia järjestäjäpareja on $\binom{18}{2} = 153$.

Vastaus: 153 järjestäjäparia

- b)** Koska 153 järjestäjäparista on täsmälleen yksi sellainen, jossa ovat Iina ja Iida, Iina ja Iida valitaan järjestäjiksi todennäköisyydellä $\frac{1}{153} = 0,00653... \approx 0,0065$.

Vastaus: $\frac{1}{153} \approx 0,0065$

211. Täydennetään taulukko.

		Isä	
		A	a
Äiti	a	Aa	aa
	a	Aa	aa

Lapselle ei tule pisamia, jos hänellä on alleelipari aa eli kahdessa tapauksessa neljästä. Todennäköisyys on siis $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Vastaus:

		Isä	
		A	a
Äiti	a	Aa	aa
	a	Aa	aa

$$\frac{1}{2} = 50\%$$

212. Tehdään taulukko, josta nähdään kaikki alkeistapaukset ja silmälukujen summat.

		1. arpakuution silmäluku					
		1	2	3	4	5	6
2. arpakuution silmäluku	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Alkeistapauksia on $6 \cdot 6 = 36$.

- a) Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat yli 4.

		1. arpakuution silmäluku					
		1	2	3	4	5	6
2. arpakuution silmäluku	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia alkeistapauksia on 4.

$$P(\text{molemmat yli } 4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,111... \approx 0,11$$

Molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat yli 4 todennäköisyydellä 0,11.

Vastaus: $\frac{1}{9} \approx 0,11$

- b)** Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa silmälukujen summa on pienempi kuin 7.

		1. arpakuution silmäluku					
		1	2	3	4	5	6
2. arpakuution silmäluku	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia alkeistapauksia on $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

$$P(\text{summa alle } 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0,416... \approx 0,42$$

Molempien arpakuutioiden silmälukujen summa on pienempi kuin 7 todennäköisyydellä 0,42.

Vastaus: $\frac{5}{12} \approx 0,42$

- c)** Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 7” on kuusi suotuisaa alkeistapausta. Muiden silmälukujen summien tapahtumille suotuisia alkeistapauksia on vähemmän, joten 7 on todennäköisin arpakuutioiden silmälukujen summa.

Vastaus: 7

213. a) Taulukoidaan kaikki mahdolliset heittotulokset ja väritetään taulukosta ne alkeistapaukset, joissa noppien silmäluvut ovat samat.

12-sivuisen nopan silmäluku

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												

Suotuisia alkeistapauksia on 12 kappaletta.

Kaikkia alkeistapauksia on $12 \cdot 20 = 240$ kappaletta.

$$P(\text{silmäluvut ovat samat}) = \frac{12}{240} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Arpakuutioiden silmäluvut ovat samat todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: $\frac{1}{20} = 0,05$

- b) Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa 12-sivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen nopan.

		12-sivuisen nopan silmäluku											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20-sivuisen nopan silmäluku	1												
	2												
	3												
	4												
	5												
	6												
	7												
	8												
	9												
	10												
	11												
	12												
	13												
	14												
	15												
	16												
	17												
	18												
	19												
	20												

Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $11 + 10 + 9 + \dots + 1 = 66$.

$$P(12\text{-sivuisessa isompi silmäluku}) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40} = 0,275$$

12-sivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen todennäköisyydellä 0,275.

Vastaus: $\frac{11}{40} = 0,275$

TAPA 2:

- a) Kaikkia mahdollisia heittotuloksia on $12 \cdot 20 = 240$. Näistä suotuisia ovat seuraavat: 1 ja 1, 2 ja 2, 3 ja 3, ..., 12 ja 12. Suotuisia alkeistapauksia on siis 12 kpl.

$$P(\text{silmäluvut ovat samat}) = \frac{12}{240} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Molempien noppien silmäluvut ovat samat todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: $\frac{1}{20} = 0,05$

- b) Taulukoidaan suotuisat alkeistapaukset.

20-sivuisen nopan silmäluku	12-sivuisen nopan silmäluku	Suotuisten alkeistapausten lukumäärä
1	2, 3, ..., 12	11
2	3, 4, ..., 12	10
3	4, 5, ..., 12	9
...		...
11	12	1

Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $11 + 10 + 9 + \dots + 1 = 66$.

$$P(12-sivuisessa isompi silmäluku) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40} = 0,275$$

12-sivuisen nopan silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen todennäköisyydellä 0,275.

Vastaus: $\frac{11}{40} = 0,275$

- 214. a)** Käytetään alkeistapauksina 200 henkilön joukosta valittuja kolmen henkilön jonoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $200 \cdot 199 \cdot 198 = 7\,880\,400$.

Oppositiolla on 99 edustajaa, joten suotuisia alkeistapauksia on $99 \cdot 98 \cdot 97 = 941\,094$.

$$P(\text{kaikki opposition edustajia}) = \frac{941\,094}{7\,880\,400} = 0,119... \approx 0,12$$

Kaikki valitut pikkujoulujen järjestäjät ovat opposition edustajia todennäköisyydellä 0,12.

Vastaus: 0,12

- b)** Käytetään alkeistapauksina 200 henkilön joukosta valittuja kolmen henkilön osajoukkoja. Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{200}{3} = 1\,313\,400$.

Oppositiolla on 99 edustajaa, joten suotuisia alkeistapauksia on $\binom{99}{3} = 156\,849$.

$$P(\text{kaikki opposition edustajia}) = \frac{156\,849}{1\,313\,400} = 0,119... \approx 0,12$$

Kaikki valitut pikkujoulujen järjestäjät ovat opposition edustajia todennäköisyydellä 0,12.

Vastaus: 0,12

215. Käytetään alkeistapauksina kuuden sienen joukkoja.

Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{78}{6} = 256\,851\,595$.

Suotuisten alkeistapausten määrä on $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{henkilö tunnisti 6 sientä}) = \frac{13\,983\,816}{256\,851\,595} = 0,0544... \approx 0,054.$$

Kurssilainen tunnisti oikein kuusi erilaista sientä todennäköisyydellä 0,054.

Vastaus: 0,054

216. Lasketaan taulukosta tarvittavat luvut:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Ikäryhmä	Afriikka	Aasia	Eurooppa	Latinalainen Am.	Pohjois-Amerik.	Oseania		
2	0-4	197317	363668	39393	51971	21590	3427		
3	5-9	177842	365240	40800	52266	22275	3337		
4	10-14	155335	362064	39742	52666	23123	3215		
5	15-19	134666	356235	37637	53919	23264	3017	608738	yhteensä
6	20-24	117153	357671	39711	54220	24851	3037		
7	25-29	102376	366820	46472	53118	26454	3092		
8	30-34	89389	378190	52920	50615	25304	3047		
9	35-39	75994	330036	52775	47867	23896	2876		
10	40-44	62140	307291	52216	43467	22583	2593		
11	45-49	50419	310182	51994	39226	22518	2580		
12	50-54	40878	284100	51965	35664	23361	2370		
13	55-59	33166	233765	52765	31317	24477	2270		
14	60-64	25861	190765	48385	25393	22940	1985		
15	65-69	19015	157898	42283	20081	19519	1679		
16	70-74	12844	101396	33832	14362	15483	1391		
17	75-79	7749	66000	24977	9967	10412	943		
18	80-84	3969	41 238	21015	6487	7033	636		
19	85-89	1513	19887	11495	3499	4373	389		
20	90-94	370	6917	5304	1512	2305	186		
21	95-99	62	1763	1386	439	739	54		
22	100+	4	245	118	64	98	5		
23				747185				7713465	yhteensä

a) Eurooppalaisia on 747 185 000 ja maailman koko väestö on 7 713 465 000.

$$P(\text{henkilö on eurooppalainen}) = \frac{747\,185\,000}{7\,713\,465\,000} = 0,0968... \approx 0,097$$

Satunnainen henkilö on eurooppalainen todennäköisyydellä 0,097.

Vastaus: 0,097

- b) Iältään 15–19-vuotiaita on maailmassa 608 738 000, ja maailman koko väestö on 7 713 465 000.

$$P(\text{henkilö on 15-19-vuotias}) = \frac{608\,738\,000}{7\,713\,465\,000} = 0,0789... \approx 0,079$$

Satunnainen henkilö on 15–19-vuotias todennäköisyydellä 0,079.

Vastaus: 0,079

- c) Iältään 15–19-vuotiaita on maailmassa 608 738 000, ja näistä 3 017 000 on Oseaniasta.

$$\begin{aligned} P(15-19-vuotias \text{ henkilö on Oseaniasta}) \\ = \frac{3\,017\,000}{608\,738\,000} = 0,00495... \approx 0,0050 \end{aligned}$$

Satunnainen 15–19-vuotias henkilö on Oseaniasta todennäköisyydellä 0,0050.

Vastaus: 0,0050

217. a) Valitaan alkeistapauksiksi neljän siivousvuoron jonot. Alkeistapausten lukumäärä on $4! = 24$. Suotuisia alkeistapauksia on vain yksi, ABCD.

$$P(\text{aakkosjärjestys}) = \frac{1}{24} = 0,0416... \approx 0,042$$

Kommuunin asukkaat siivoavat aakkosjärjestyksessä todennäköisyydellä 0,042.

Vastaus: $\frac{1}{24} \approx 0,042$

- b) Aaro, Boris ja Carlos siivoavat peräkkäisinä viikkoina, jos Diandra siivoaa ensimmäisenä tai viimeisenä. Valitaan alkeistapauksiksi Diandran siivousvuorot, joita on 4 mahdollista: 1. viikko, 2. viikko, 3. viikko ja 4. viikko. Näistä ensimmäinen ja viimeinen ovat suotuisia.

$$\begin{aligned} P(\text{Aaro, Boris ja Carlos peräkkäin}) \\ &= P(\text{Diandra ensimmäisenä tai viimeisenä}) \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

Aaro, Boris ja Carlos siivoavat peräkkäisinä viikkoina todennäköisyydellä 0,5.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{2} = 0,5$$

218. a) Parillisia numeroita ovat 2, 4, 6 ja 8. Näistä 8 ei kuitenkaan tule kysymykseen, koska kaikki numerot ovat pienempiä kuin 7. Jokaiselle neljälle numerolle on siis kolme mahdollisuutta, joten varas joutuu arvaamaan $3^4 = 81$ tunnusluvun joukosta.

Vastaus: 81 tunnusluvun joukosta

- b) Mahdollisia tunnuslukuja on 81, joista vain yksi on oikea. Varas arvaa oikean tunnusluvun todennäköisyydellä

$$\frac{1}{81} = 0,0123... \approx 0,012.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{81} \approx 0,012$$

219. Tapa 1

Nelinumeroisia lukuja ovat luvut 1000, 1001, 1002, ... ja 9999.

Näitä voidaan pitää alkeistapauksina.

Niitä on $9999 - 999 = 9000$ kappaletta.

Nelinumeroisista luvuista sellaisia, joissa ensimmäiset kaksi numeroa ovat kuutosia, ovat 6600, 6601, 6602, ... 6699.

Näitä on $6699 - 6599 = 100$ kappaletta.

Vastaavasti 67-alkuisia nelinumeroisia lukuja on 100, samoin 68-alkuisia, ja 69-alkuisia. Kuutosella alkavia suotuisia alkeistapauksia on siis $4 \cdot 100 = 400$ kappaletta.

Vastaavasti seitsemällä alkavia suotuisia alkeistapauksia on 400 kappaletta, samoin kahdeksalla ja yhdeksällä alkavia.

Suotuisia alkeistapauksia on siis yhteensä $4 \cdot 400 = 1600$ kappaletta.

Suotuisia alkeistapauksia on 1600 ja kaikkia alkeistapauksia 9000, joten todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä numeroa on suurempia kuin 5, on

$$\frac{1600}{9000} = 0,177... \approx 0,18.$$

Tapa 2

Suotuisia numeroita on neljä eli numerot 6, 7, 8 ja 9. Tuloperiaatteen mukaan suotuisia kahden numeron yhdistelmiä on $4 \cdot 4 = 16$.

Alkeistapauksina ovat kaikki sellaiset kahden numeron yhdistelmät, joissa ensimmäinen numero ei ole 0, koska nollaa suurempi kokonaisluku ei voi alkaa nolalla. Alkeistapauksia on siis $9 \cdot 10 = 90$.

Näin ollen todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä numeroa on suurempia kuin 5, on

$$\frac{16}{90} = 0,177... \approx 0,18.$$

Vastaus: 0,18

- 220. a)** Ruoka-aineita on viisi, ja niistä valitaan kaksi. Alkeistapauksia ovat siis viiden ruoka-aineen joukosta valitut kahden ruoka-aineen osajoukot. Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{5}{2} = 10$.

Kalaruokia on viiden ruoka-aineen joukossa vain 2, joten pelkkiä kalaruokia voidaan tarjota vain yhdellä tavalla.

$$P(\text{vain kalaruokia}) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Illallisella tarjoillaan vain kalaruokia todennäköisyydellä 0,1.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{10} = 0,1$$

- b)** Kasvisruokia on viiden ruoka-aineen joukossa kaksi. Loput 3 ovat ei-kasvisruokia, joten ei-kasvisruokaa voidaan valita $\binom{3}{2} = 3$ tavalla.

$$P(\text{ei kasvisruokia}) = \frac{3}{10} = 0,3$$

Illallisella ei tarjota kasvisruokia todennäköisyydellä 0,3.

$$\text{Vastaus: } \frac{3}{10} = 0,3$$

- 221.** Alkeistapauksia ovat kuuden paikan joukosta valitut kahden paikan osajoukot. Niiden määrä on $\binom{6}{2} = 15$.

Merkitään paikkoja numeroilla 1–6. Suotuisat kahden paikan osajoukot ovat 12, 23, 34, 45 ja 56. Niitä on 5 kappaletta.

$$P(\text{autot pysäköidään vierekkäin}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,333 \approx 0,33$$

Autot pysäköidään vierekkäin todennäköisyydellä 0,33.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{3} \approx 0,33$$

- 222. a)** Opiskelijoista $35 - 25 = 10$ harrastaa ainakin jompaakumpaa harrastusta. Koska 8 opiskelijaa harrastaa kuvataiteita ja 6 draamaa ja $8 + 6 = 14$, niin kuvataiteita ja draamaa harrastaa $14 - 10 = 4$ opiskelijaa.

$$P(\text{opiskelija harrastaa molempia}) = \frac{4}{35} = 0,114... \approx 0,11$$

Satunnaisesti valittu opiskelija harrastaa sekä kuvataiteita että draamaa todennäköisyydellä 0,11.

$$\text{Vastaus: } \frac{4}{35} \approx 0,11$$

- b)** Koska kuvataiteita harrastaa 8 ja molempia 4 opiskelijaa, niin vain kuvataiteita harrastaa $8 - 4 = 4$ opiskelijaa.

Koska draamaa harrastaa 6 ja molempia 4 opiskelijaa, niin vain draamaa harrastaa $6 - 4 = 2$ opiskelijaa.

Vain kuvataiteita tai vain draamaa harrastaa $4 + 2 = 6$ opiskelijaa.

$$P(\text{harrastaa vain jompaakumpaa}) = \frac{6}{35} = 0,171... \approx 0,17$$

Satunnaisesti valittu opiskelija harrastaa vain kuvataiteita tai vain draamaa todennäköisyydellä 0,17.

$$\text{Vastaus: } \frac{6}{35} \approx 0,17$$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 223.** Valitaan alkeistapauksiksi nelinumeroiset positiiviset kokonaisluvut. Pienin niistä on 1000 ja suurin 9999, joten lukuja on $9999 - 999 = 9000$ kappaletta.

Palindromiluvun ensimmäinen numero voidaan valita yhdeksällä eri tavalla (koska se ei voi olla nolla), toinen numero kymmenellä tavalla. Kolmannen numeron on oltava sama kuin toisen, ja viimeisen numeron on oltava sama kuin ensimmäinen. Nelinumeroisia palindromilukuja on siis $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ kappaletta.

$$P(\text{luku on palindromiluku}) = \frac{90}{9000} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Luku on palindromiluku todennäköisyydellä 0,01.

Vastaus: 0,01

- 224. a)** Koska järvestä on yhteensä 5000 kalaa, joista 100 on merkittyjä, niin nostettu kala on merkitty todennäköisyydellä $\frac{100}{5000} = 0,02$.

Vastaus: 0,02

- b)** Koska tarkistusnostolla 43 kalasta 6 oli merkittyjä, voidaan arvioida, että järven kaloista on merkittyjä $\frac{6}{43}$.

Nyt tiedetään, että merkittyjä kaloja on 150, joka on $\frac{6}{43}$ kaikista järven kaloista. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä järven kalojen kokonaismäärä x .

$$\begin{aligned} \frac{6}{43}x &= 150 & \parallel : \frac{6}{43} \\ x &= 1075 \end{aligned}$$

Järvestä on arviolta 1075 kalaa.

Vastaus: 1075 kalaa

- 225. a)** Valitaan alkeistapauksiksi kuuden hengen jonot.
 Kaikkien alkeistapausten määrä on $6! = 720$.
 Pituusjärjestyksiä on kaksi, joten suotuisia alkeistapauksia on 2.

$$P(\text{jompikumpi pituusjärjestys}) = \frac{2}{720} = 0,00277... \approx 0,0028$$

Ryhmän jäsenet asettuvat jompaankumpaan pituusjärjestykseen todennäköisyydellä 0,0028.

Vastaus: 0,0028

- b)** Suotuisia alkeistapauksia ovat a-kohdan kahden alkeistapausten lisäksi ne, joissa järjestys on muuten pituusjärjestys, mutta yksi henkilö on väärässä paikassa. Väärässä paikassa oleva henkilö voidaan valita kuudella tavalla ja hänelle väärä paikka viidellä tavalla (koska yksi paikka on oikea).

Taulukoidaan eri järjestykset, kun henkilöt ovat A, B, C, D, E ja F ja heidän pituusjärjestyksensä on sama kuin aakkosjärjestys. Taulukko on laadittu siten, että sarakkeessa A henkilö on väärässä paikassa jne.

A	B	C	D	E	F
BACDEF	BACDEF	CABDEF	DABCEF	EABCDF	FABCDE
BCADEF	ACBDEF	ACBDEF	ADBCEF	AEBCDF	AFBCDE
BCDAEF	ACDBEF	ABDCEF	ABDCEF	ABECDF	ABFCDE
BCDEAF	ACDEBF	ABDECF	ABCEFD	ABCEFD	ABCFDE
BCDEFA	ACDEFB	ABDEFC	ABCEFD	ABCDFE	ABCDFE

Taulukossa on väritetty ne järjestykset, jotka esiintyvät kahdessa eri sarakkeessa. Eri järjestyksiä on 25. Samanlainen taulukko voidaan laatia myös käänteisellä pituusjärjestyksellä ja silloinkin erilaisia järjestyksiä on 25.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $2 + 2 \cdot 25 = 52$.

$$P(\text{ainakin 5 pituusjärjestyksessä}) = \frac{52}{720} = 0,0722... \approx 0,072$$

Ryhmän jäsenistä ainakin 5 on jommassakummassa pituusjärjestyksessä todennäköisyydellä 0,072.

Vastaus: 0,072

- 226.** Opiskelija saa vähintään 8 pistettä, jos hän vastaa vähintään yhdeksään kysymykseen oikein. Vastausrivejä, joissa on täsmälleen 9 oikein, on 10 kappaletta, koska väärä vastaus voi olla mikä tahansa vastauksista 1–10. Vastausrivejä, joissa on 10 oikein, on vain yksi. Suotuisia vastausrivejä on siis $10 + 1 = 11$.

Koska jokaiseen kysymykseen on kaksi mahdollista vastausta ja kysymyksiä on 10, on kaikkien mahdollisten vastausrivien määrä $2^{10} = 1024$.

$$P(\text{vähintään 8 pistettä}) = \frac{11}{1024} = 0,0107 \approx 0,011$$

Opiskelija saa kokeesta vähintään 8 pistettä todennäköisyydellä 0,011.

Vastaus: 0,011

- 227. a)** Tapa 1: osajoukkojen avulla

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Maavaihtoehtoja on 4 ja samaa maata olevia viiden kortin osajoukkoja on $\binom{13}{5} = 1287$.

Suotuisia alkeistapauksia on $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$.

$$P(\text{kaikki samaa maata}) = \frac{5148}{2\,598\,960} = 0,00198... \approx 0,0020$$

Tapa 2: jonojen avulla

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on
 $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,870\,200$.

Tutkitaan sitten suotuisat alkeistapaukset. Ensimmäisen kortin maalla ei ole merkitystä, se voi olla mikä tahansa 52 kortista. Seuraavan kortin on oltava samaa maata kuin ensimmäinen, joten sille on 12 vaihtoehtoa (yksi tämän maan kortti on jo nostettu). Seuraavalle on 11 vaihtoehtoa, sitä seuraavalle 10 ja niin edelleen.

Suotuisia alkeistapauksia on $52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 617\,760$.

$$P(\text{kaikki samaa maata}) = \frac{617\,760}{311\,875\,200} = 0,00198... \approx 0,0020$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat samaa maata todennäköisyydellä 0,0020.

Vastaus: 0,0020

b) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja.

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Tutkitaan suotuisat alkeistapaukset. Peräkkäisten korttien kombinaatiot ovat:

(1, 2, 3, 4, 5),
(2, 3, 4, 5, 6),
(3, 4, 5, 6, 7),
(4, 5, 6, 7, 8),
(5, 6, 7, 8, 9),
(6, 7, 8, 9, 10),
(7, 8, 9, 10, 11),
(8, 9, 10, 11, 12),
(9, 10, 11, 12, 13),
(10, 11, 12, 13, 14).

Kombinaatioita on 10. Korttien pitää olla saman värisiä ja väri voidaan valita 4 eri tavalla.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $10 \cdot 4 = 40$.

$$P(\text{kortit ovat samaa maata ja arvoltaan peräkkäisiä}) \\ = \frac{40}{2\,598\,960} = 0,0000153... \approx 0,000015$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat samaa maata ja arvoltaan peräkkäisiä todennäköisyydellä 0,000015.

Vastaus: 0,000015

- c) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja.

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Tutkitaan suotuisat alkeistapaukset. Peräkkäisten korttien kombinaatiot ovat: (1, 2, 3, 4, 5), ..., (10, 11, 12, 13, 14). Kombinaatioita on 10. Viiden kortin värit voidaan valita 4^5 eri tavalla.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $10 \cdot 4^5 = 10\,240$.

$$P(\text{kortit arvoltaan peräkkäisiä}) = \frac{10\,240}{2\,598\,960} = 0,00394... \approx 0,0039$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat arvoltaan peräkkäisiä todennäköisyydellä 0,0039.

Vastaus: 0,0039

2.2 Geometrinen todennäköisyys

ALOITA PERUSTEISTA

- 228. a)** Käytetään geometrisena mittana sektorin keskuskulmaa. Koko ympyrän keskuskulma on 360° ja keltaisen sektorin keskuskulma 60° .

$$P(\text{keltainen väri}) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = 0,166\dots \approx 0,17$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan keltaiselle sektorille todennäköisyydellä 0,17.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{6} \approx 0,17$$

- b)** Punaisen sektorin keskuskulma on 90° .

$$P(\text{punainen väri}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan punaiselle sektorille todennäköisyydellä 0,25.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{4} = 0,25$$

- c)** Onnenpyörällä saadaan sininen väri, jos sillä ei saada keltaista eikä punaista väriä. Sinisen sektorin keskuskulma on $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$.

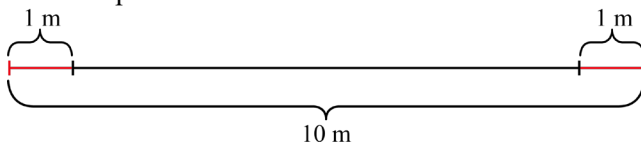
$$P(\text{sininen väri}) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12} = 0,583\dots \approx 0,58$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan siniselle sektorille todennäköisyydellä 0,58.

$$\text{Vastaus: } \frac{7}{12} \approx 0,58$$

- 229.** Tukos voi olla missä tahansa 10 metriä pitkän letkun sisällä. Käytetään geometrisena mittana pituutta. Piirretään mallikuva.

Suotuisa pituus on $1\text{ m} + 1\text{ m} = 2\text{ m}$.



Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{tukos on korkeintaan metrin päässä letkun päästä}) = \frac{2}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{5} = 0,2.$$

Tukos on korkeintaan metrin päässä letkun jommastakummasta päästä todennäköisyydellä 0,2.

Vastaus: $\frac{1}{5} = 0,2$

- 230.** Käytetään geometrisena mittana alueen pinta-alaa. Koko lattian pinta-ala on $7\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 21\text{ m}^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala on $5\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 5\text{ m}^2$.

$$P(\text{putoaa matolle}) = \frac{5}{21} = 0,238... \approx 0,24$$

Vastaus: $\frac{5}{21} = 0,24$

- 231.** Käytetään geometrisena mittana alueen pinta-alaa. Parkkipaikan pinta-ala on $60\text{ m} \cdot 30\text{ m} = 1800\text{ m}^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala on $35 \cdot 7,5\text{ m}^2 = 262,5\text{ m}^2$.

$$P(\text{osuu johonkin autoon}) = \frac{262,5}{1800} = 0,145... \approx 0,15$$

Vastaus: 0,15

- 232.** **A** Tikanheitossa tiettyyn alueeseen osumisen todennäköisyys riippuu alueen pinta-alasta, joten kysymys A ja mitta II kuuluvat yhteen.
- B** Puun kaatumisessa olennainen mitta on 0 asteen ja 360 asteen välillä oleva suunta, johon puu kaatuu, joten kysymys B ja mitta IV kuuluvat yhteen.
- C** Narun katkaisemisessa satunnaisesta kohdasta olennainen mitta on leikkauskohdan etäisyys narun päästä eli pituus, joten kysymys C ja mitta I kuuluvat yhteen.
- D** Neulan etsimisessä heinäsuovasta olennainen mitta on tilavuus, jonka sisältä neula mahdollisesti löytyy, joten kysymys D ja mitta III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

- 233.** **a)** Käytetään geometrisena mittana 24 tunnin mittaista aikajanaa. Suotuista mitta on aikaväli klo 8–16 eli 8 tuntia.

$$P(\text{syntynyt virka-aikaan}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0,333... \approx 0,33$$

Satunnainen henkilö on syntynyt virka-aikaan todennäköisyydellä 0,33.

Vastaus: 0,33

- b)** Käytetään geometrisena mittana 24 tunnin mittaista aikajanaa. Suotuista mitta on aikaväli klo 23–6 eli 7 tuntia.

$$P(\text{yöllä}) = \frac{7}{24} = 0,291... \approx 0,29$$

Satunnainen henkilö on syntynyt yöllä klo 23–6 todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: 0,29

- 234.** Käytetään geometrisenä mittana tilavuutta.
Kolme ensimmäistä puuronottajaa ottaa puuroa yhteensä $3 \cdot 2 \text{ dl} = 6 \text{ dl}$.
Puuroa on yhteensä $5 \text{ l} = 50 \text{ dl}$.

$$P(\text{mantelin saa joku kolmesta ensimmäisestä}) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25} = 0,12$$

Manteli tulee jollekin kolmesta ensimmäisestä puuronottajasta todennäköisyydellä 0,12.

Vastaus: $\frac{3}{25} = 0,12$

- 235.** Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Maapallon pinta-ala on $4\pi r^2 = 4\pi \cdot (6370 \text{ km})^2 = 509\,904\,363,78 \dots \text{ km}^2 \approx 510\,000\,000 \text{ km}^2$.

- a)** Suotuisan alueen pinta-ala on $362\,000\,000 \text{ km}^2$, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{meteoriitti putoaa mereen}) = \frac{362\,000\,000}{510\,000\,000} = 0,709 \dots \approx 0,71.$$

Meteoriitti putoaa mereen todennäköisyydellä 0,71.

Vastaus: 0,71

- b)** Maa-alueen pinta-ala on $510\,000\,000 \text{ km}^2 - 362\,000\,000 \text{ km}^2 = 148\,000\,000 \text{ km}^2$,
joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{meteoriitti putoaa maalle}) = \frac{148\,000\,000}{510\,000\,000} = 0,290 \dots \approx 0,29.$$

Meteoriitti putoaa maalle todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: 0,29

- c) Suotuisan alueen pinta-ala on $337\,000\text{ km}^2$, joten kysytty todennäköisyys on

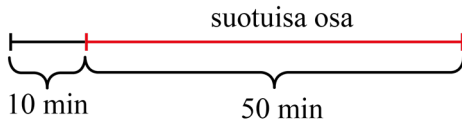
$$P(\text{meteoriitti putoaa Suomeen}) = \frac{337\,000}{510\,000\,000} = 0,000660\dots \approx 0,00066.$$

Meteoriitti putoaa Suomeen todennäköisyydellä 0,00066.

Vastaus: 0,00066

VAHVISTA OSAAMISTA

- 236. a)** Jos Fanni saapuu kello 12.10 jälkeen, niin Elviira joutuu odottamaan yli 10 minuuttia. Määritetään kysytty todennäköisyys geometrisesti käyttämällä mittoina janojen pituuksia.



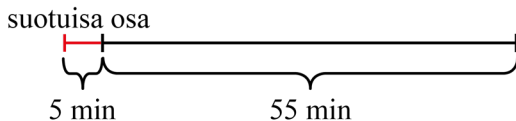
Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{odottaa yli 10 min}) = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0,8333... \approx 0,83$$

Elviira joutuu odottamaan Fannia yli 10 minuuttia todennäköisyydellä 0,83.

Vastaus: $\frac{5}{6} \approx 0,83$

- b)** Jos Fanni saapuu ennen kello 12.05, niin Elviira joutuu odottamaan alle 5 minuuttia.



Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{odottaa yli 10 min}) = \frac{5}{60} = 0,083... \approx 0,083$$

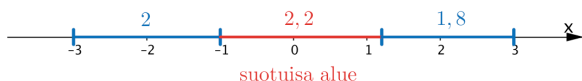
Elviira joutuu odottamaan Fannia alle 5 minuuttia todennäköisyydellä 0,083.

Vastaus: $\frac{5}{60} \approx 0,083$

- 237.** **A** Tilanteessa A vihreä valo palaa 30 s ja punainen valo 2 min = 120 s kerrallaan. Tilanne A ja havainnollistus II kuuluvat yhteen.
- B** Tilanteessa B punainen valo palaa 30 s ja vihreä valo 2 min = 120 s kerrallaan. Tilanne B ja havainnollistus I kuuluvat yhteen.
- C** Tilanteessa C punainen valo palaa 30 s kerrallaan, joten vihreä valo palaa $120 \text{ s} - 30 \text{ s} = 90 \text{ s}$ kerrallaan. Tilanne C ja havainnollistus IV kuuluvat yhteen.
- D** Tilanteessa D punainen valo palaa 90 s ja vihreä valo 30 s kerrallaan. Tilanne D ja havainnollistus III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: I, C: IV ja D: III

- 238.** Määritetään kysytty todennäköisyys käyttämällä mittoina janojen pituuksia.



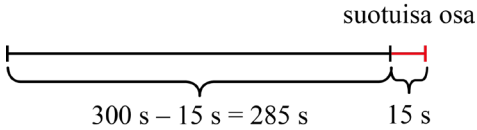
Koko janan pituus on 6 ja suotuisan osan pituus $1,2 - (-1) = 2,2$.
Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{luku on suurempi kuin } -1 \text{ mutta pienempi kuin } 1,2) \\ = \frac{2,2}{6} = 0,366\ldots \approx 0,37$$

Luku on suurempi kuin -1 mutta pienempi kuin $1,2$
todennäköisyydellä $0,37$.

Vastaus: $0,37$

239. a) Määritetään kysytty todennäköisyys käyttämällä mittoina janojen pituuksia. Koko janan pituus on metron vuoroväli $5 \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$. Suotuisan osan pituus on 15 s.

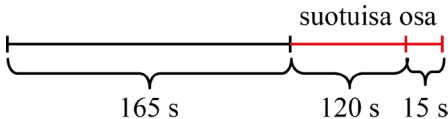


$$P(\text{pääsee suoraan metroon}) = \frac{15}{300} = 0,05$$

Metroasemalle kävelevä pääsee suoraan metroon todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: 0,05

- b) Odotus saa kestää korkeintaan 2 min = 120 s, ja metro seisoo pysäkillä 15 s. Janan suotuisan osan pituus on $120 \text{ s} + 15 \text{ s} = 135 \text{ s}$.



$$P(\text{odottaa alle 2 minuuttia}) = \frac{135}{300} = 0,45$$

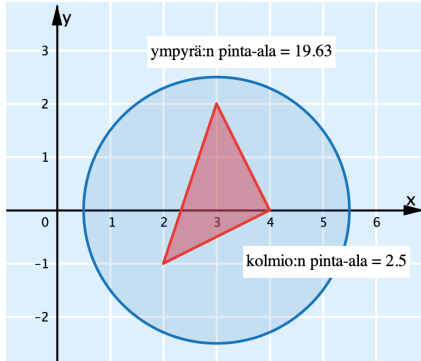
Metroasemalle kävelevä joutuu odottamaan sisäänpääsyä alle 2 minuuttia todennäköisyydellä 0,45.

Vastaus: 0,45

- c) Pisteiden pituus on nolla, joten yksittäisen pisteen todennäköisyys tulla valituksi on 0.

Vastaus: 0

240. Piirretään kuva tilanteesta.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa. Määritetään pinta-alat ohjelmalla.

Ympyrän pinta-ala on 19,63.

Kolmion pinta-ala on 2,5.

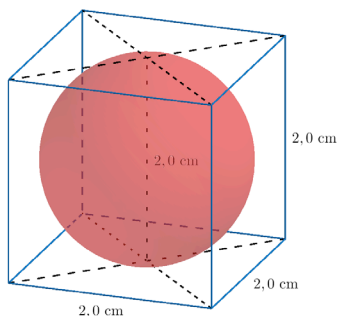
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ympyrän sisältä oleva piste on kolmion sisällä}) \\ = \frac{2,5}{19,63} = 0,127... \approx 0,13.$$

Ympyrän sisällä oleva piste on myös kolmion sisällä todennäköisyydellä 0,13.

Vastaus: 0,13

241. Piirretään kuva tilanteesta.



Koska pallo mahtuu kuution sisälle juuri ja juuri, pallon halkaisija on 2,0 cm eli pallon säde on 1,0 cm.

Käytetään geometrisena mittana tilavuutta.

Kuution tilavuus on $(2,0 \text{ cm})^3 = 8,0 \text{ cm}^3$.

Pallon tilavuus on $\frac{4}{3} \pi \cdot (1,0 \text{ cm})^3 = 4,188... \text{ cm}^3$.

Kysytty todennäköisyys on

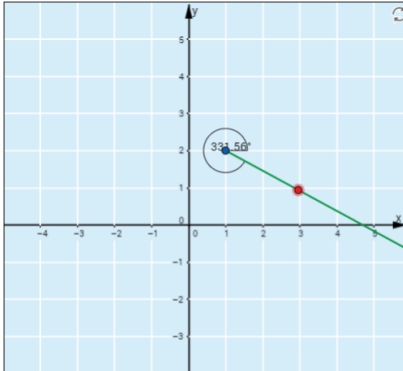
$$P(\text{kuution sisältä valittu piste on pallon sisällä}) \\ = \frac{4,188... \text{ cm}^3}{8,0 \text{ cm}^3} = 0,523... \approx 0,52.$$

Kuution sisältä valittu piste on pallon sisällä todennäköisyydellä 0,52.

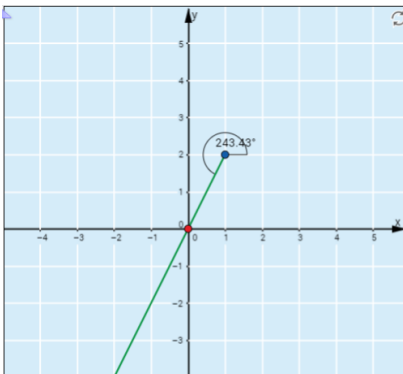
Vastaus: 0,52

242. a) Tutkitaan tilannetta appletin avulla.

Puolisuoran ja positiivisen x -akselin leikkaavuuteen vaikuttaa kulma, jonka vasempana kylkenä on puolisuora ja oikeana kylkenä on positiivisen x -akselin suuntainen puolisuora.



Nousevakin puolisuora voi leikata positiivisen x -akselin, kunhan suora nousee riittävän jyrkästi.



Nousevuus ja laskevuus riippuu kulmasta, jonka suora kiertyy positiiviseen x -akseliin nähden. Kyseinen kulma on vähintään 0° ja alle 360° .

Vastaus: kulman suuruus

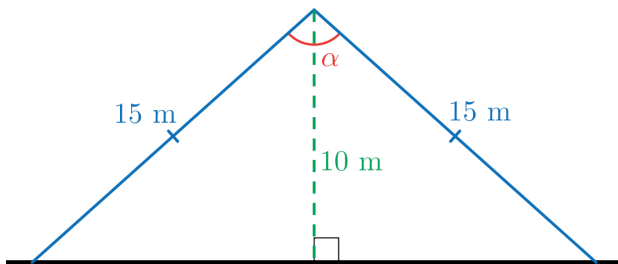
- b)** Suotuisat kulmat ovat appletin mukaan yli $243,43^\circ$ ja alle 360° .
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{leikkaa positiivisen } x\text{-akselin}) = \frac{360^\circ - 243,43^\circ}{360^\circ} = 0,323\dots \approx 0,32.$$

Puolisuora leikkaa positiivisen x -akselin todennäköisyydellä 0,32.

Vastaus: 0,32

243. Piirretään mallikuva.



Kuvassa musta suora esittää tietä ja siniset janat tolpan niitä kaatumissuuntia, joissa tolpan pää juuri ja juuri osuu tielle. Tolpan tyvi on tasakylkisen kolmion huipussa.

Käytetään geometrisena mittana kulmaa, jonka kaatunut puu muodostaa tien normaalin kanssa. Puu voi kaatua mihin tahansa suuntaan, joten kulma voi olla mikä tahansa 0° ja 360° väliltä.

Lasketaan suotuisa osa α . Kuvan kolmio on tasakylkinen, joten 10 m pitkä korkeusjana jakaa sen kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Lasketaan kulman α puolikas β suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{10}{15} \\ \beta &= 48,189\dots^\circ\end{aligned}$$

Suotuisa osa on $\alpha = 2\beta = 2 \cdot 48,189\dots^\circ = 96,379\dots^\circ$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{osuu tielle}) = \frac{96,379\dots}{360} = 0,267\dots \approx 0,27.$$

Tolpan pää osuu tielle todennäköisyydellä 0,27.

Vastaus: 0,27

- 244.** Käytetään geometrisena mittana tilavuutta. Suotuisa mitta on pallo, jonka tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2,5 \text{ m})^3 = 65,449... \text{ m}^3$.

Koko järven tilavuus on $7,452 \cdot 10^9 \text{ m}^3$.

Kysytty todennäköisyys saadaan jakamalla suotuisan osan tilavuus koko järven tilavuudella.

$$P(\text{hirviö syö kalan}) = \frac{65,449...}{7,452 \cdot 10^9} = 8,782... \cdot 10^{-9} \approx 8,8 \cdot 10^{-9}$$

Hirviö syö kalan todennäköisyydellä $8,8 \cdot 10^{-9}$.

Vastaus: $8,8 \cdot 10^{-9}$

- 245. a)** Käytetään geometrisena mittana keskuskulmaa. Merkitään pienimmän sektorin keskuskulmaa kirjaimella α . Muiden sektorien keskuskulmat ovat suoraan verrannollisuuden vuoksi 2α , 3α ja niin edelleen. Koko ympyrän kulma on $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha + 7\alpha + 8\alpha = 36\alpha$. Suotuisen alueen kulma on 8α . Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{sektori 8}) = \frac{8\alpha}{36\alpha} = \frac{2}{9} = 0,222... \approx 0,22.$$

Kilpailija osuu numeroon 8 todennäköisyydellä 0,22.

Vastaus: 0,22

- b)** Suotuisa kulma on $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{sektori 1, 2 tai 3}) = \frac{6\alpha}{36\alpha} = \frac{1}{6} = 0,166... \approx 0,17.$$

Kilpailija osuu korkeintaan numeroon 3 todennäköisyydellä 0,17.

Vastaus: 0,17

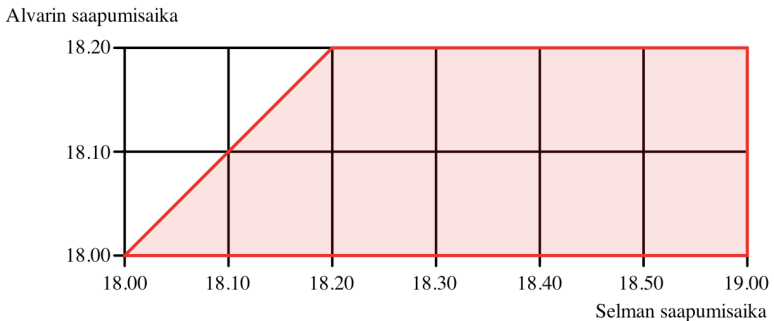
- c) Suotuisa kulma on $\alpha + 3\alpha + 5\alpha + 7\alpha = 16\alpha$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{pariton numero}) = \frac{16\alpha}{36\alpha} = \frac{4}{9} = 0,444\dots \approx 0,44.$$

Kilpailija osuu parittomaan numeroon todennäköisyydellä 0,44.

Vastaus: 0,44

246. a) Selma saapuu satunnaiseen kellonaikaan kello 18.00 ja 19.00 välillä. Alvar saapuu satunnaiseen kellonaikaan kello 18.00 ja 18.20 välillä. Havainnollistetaan Selman ja Alvarin saapumisaikoja koordinaatistossa. Merkitään vaak-akselilla Selman saapumisajankohdat ja pystyakselille Alvarin saapumisajankohdat.



Jos Selma ja Alvar saapuvat yhtä aikaa, ei Alvar joudu odottamaan Selmaan lainkaan. Tätä tilannetta kuvaavat pisteet ovat pisteiden (18.00; 18.00) ja (18.20; 18.20) kautta kulkevalla janalla. Jos Selma saapuu Alvaria myöhemmin, piste on tuon janan oikealla puolella.

Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Koko alueen pinta-ala on $60 \cdot 20 = 1200$. Suotuisa alue on puolisuunnikas, jonka pinta-ala on $\frac{60 + 40}{2} \cdot 20 = 1000$.

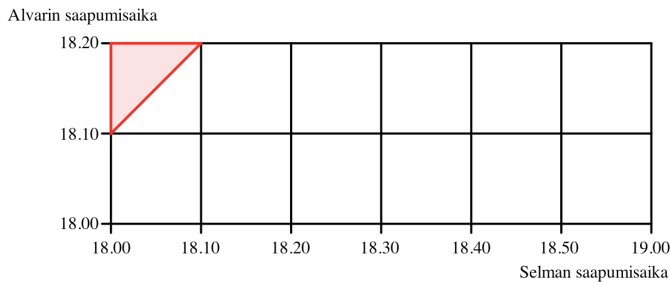
Todennäköisyys sille, ettei Selma joudu odottamaan Alvaria ollenkaan, saadaan jakamalla suotuisan alueen pinta-ala koko alueen pinta-alalla.

$$P(\text{Selma ei odota}) = \frac{1000}{1200} = 0,833\ldots \approx 0,83$$

Selma ei joudu odottamaan Alvaria lainkaan todennäköisyydellä 0,83.

Vastaus: 0,83

- b)** Tilanteet, joissa Selma joutuu odottamaan Alvaria tasan 10 minuuttia, ovat pisteiden (18.00; 18.10) ja (18.10; 18.20) kulkevalla janalla. Jos Selma odottaa tätä kauemmin, on piste tuon janan yläpuolella.



Suotuisan alue on suorakulmainen kolmio, jonka pinta-ala

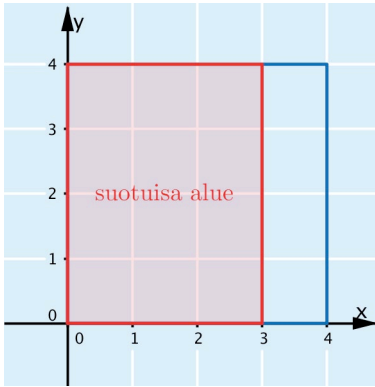
on $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

$$P(\text{Selma odottaa yli 10 min}) = \frac{50}{1200} = 0,0416\ldots \approx 0,042$$

Selma joutuu odottamaan Alvaria yli 10 minuuttia todennäköisyydellä 0,042.

Vastaus: 0,042

247. a) Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Piirretään mallikuva.



Koko neliön pinta-ala on $4 \cdot 4 = 16$. Suotuisan alueen pinta-ala on $3 \cdot 4 = 12$.

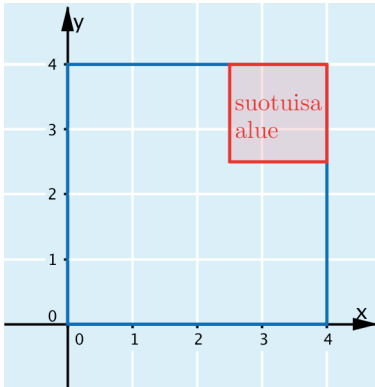
Kysytty todennäköisyys on

$$P(x < 3) = \frac{12}{16} = 0,75.$$

x -koordinaatti on pienempi kuin 3 todennäköisyydellä 0,75.

Vastaus: 0,75

b) Piirretään mallikuva.



Suotuisa alue on neliö, jonka sivun pituus on $4 - 2,5 = 1,5$.
Suotuisan alueen pinta-ala on $1,5^2 = 2,25$.

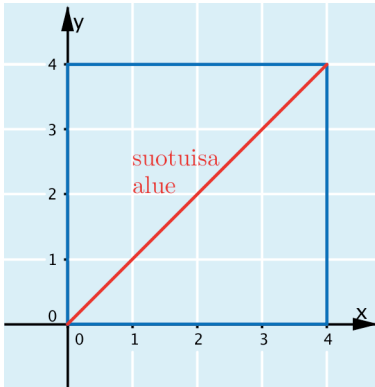
Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(x > 2,5 \text{ ja } y > 2,5) \\ = \frac{2,25}{16} = 0,140\dots \approx 0,14. \end{aligned}$$

x - ja y -koordinaatit ovat suurempia kuin 2,5 todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

c) Piirretään mallikuva.



Suotuisat pisteet ovat janalla, jonka päätepisteet ovat $(0, 0)$ ja $(4, 4)$. Neliön pinta-alasta puolet on janan alapuolella ja puolet janan yläpuolella. Janalla olevan "alueen" pinta-ala on siis 0, joten kysytty todennäköisyys on 0.

Vastaus: 0

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

248. a) Yksisäteisen ympyrän pinta-alan tarkka arvo on $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

Ympyrän neljänneksen pinta-alan tarkka arvo on $\frac{\pi}{4}$.

Vastaus: $\frac{\pi}{4}$

b) Esimerkiksi ympyrän sisälle jää 775 jyvää ja ulkopuolelle 225 jyvää. Tuhannesta jyvistä ympyrän sisäpuolelle jää siis

$$\frac{775}{1000} = 0,775 = 77,5 \, \%$$

Neljännesympyrän säteen ja neliön sivun pituus ovat 1.

Neljännesympyrän pinta-alan ja neliön pinta-alan suhde on siten

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin ympyrän sisäpuolelle pudonneiden jyvien osuus pudotetuista jyvistä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä piin likiarvo.

$$\frac{\pi}{4} = 0,775 \quad \| \cdot 4$$

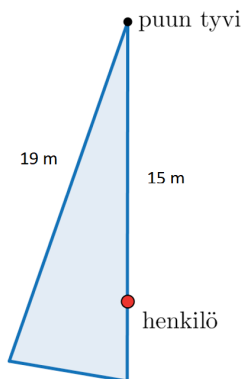
$$\pi = 4 \cdot 0,775$$

$$\pi = 3,1$$

Piin likiarvo on 3,1.

Vastaus: esim. $\frac{\pi}{4} = 0,775$, $\pi \approx 3,1$

- 249.** Ylhäältä katsottuna kaatunut puu näyttää tasakylkiseltä kolmiolta, jonka korkeus on 19 m ja kanta $2 \cdot 3,2 \text{ m} = 6,4 \text{ m}$.



Puun mahdolliset kaatumissuunnat ovat 0° ja 360° välillä. Henkilö jää puun alle, jos hän seisoo sektorissa, jonka keskuskulmana on kolmion huippukulma.

Lasketaan kolmion huippukulman puolikas α .

$$\tan \alpha = \frac{3,2}{19}$$
$$\alpha = 9,560\dots^\circ$$

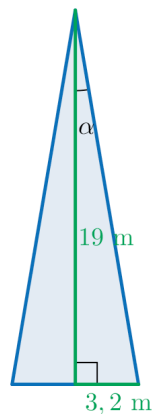
Kolmion huippukulma on siis $2 \cdot 9,560\dots^\circ = 19,120\dots^\circ$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kaatuu henkilön päälle}) = \frac{19,120\dots^\circ}{360^\circ} = 0,0531\dots \approx 0,053.$$

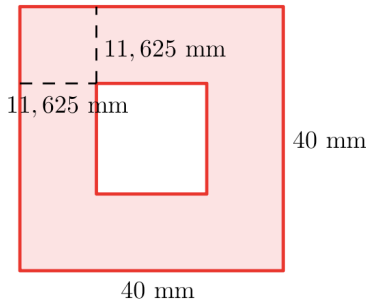
Puu osuu henkilöön todennäköisyydellä 0,053.

Vastaus: 0,053



250. Se, osuuko kolikko neliön sivuun tai kärkeen, riippuu siitä, mihin kohtaan neliötä kolikon keskipiste tulee. Pöytä on suuri, joten voidaan ajatella pöydän reunalle osumisen olevan niin epätodennäköistä, ettei sen mahdollisuutta tarvitse ottaa huomioon. Ajatellaan pöytäliinan koostuvan äärettömän monesta samanlaisesta neliöstä, joten riittää tutkia yhtä neliötä.

- a) Kolikko osuu neliön reunaan, jos kolikon keskipisteen etäisyys neliön sivusta on ympyrän säteen $r = \frac{23,25 \text{ mm}}{2} = 11,625 \text{ mm}$ suuruinen tai pienempi. Piirretään mallikuva.



Koko neliön pinta-ala on $40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} = 1600 \text{ mm}^2$.

Suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä koko neliön pinta-alasta keskellä olevan pienen neliön pinta-ala.

Pienen neliön sivun pituus on $40 \text{ mm} - 23,25 \text{ mm} = 16,75 \text{ mm}$ ja pinta-ala $16,75 \text{ mm} \cdot 16,75 \text{ mm} = 280,5625 \text{ mm}^2$.

Suotuisan alueen pinta-ala on

$$1600 \text{ mm}^2 - 280,5625 \text{ mm}^2 = 1319,4375 \text{ mm}^2.$$

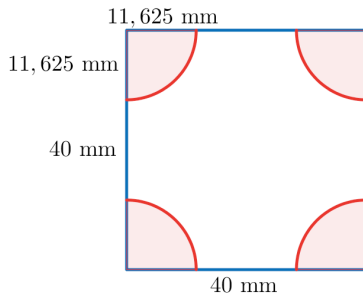
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{osuu neliön sivuun}) = \frac{1319,4375}{1600} = 0,824... \approx 0,82.$$

Kolikko osuu neliön sivuun todennäköisyydellä 0,82.

Vastaus: 0,82

- b) Kolikko peittää neliön kärjen, jos kolikon keskipisteen etäisyys neliön kärjestä on ympyrän säteen $r = \frac{23,25 \text{ mm}}{2} = 11,625 \text{ mm}$ suuruinen tai pienempi. Piirretään mallikuva.



Suotuisa alue koostuu neljästä yhtenevästä ympyräsektorista. Sektorit muodostavat yhdessä kokonaisen ympyrän, jonka säde on $r = 11,625 \text{ mm}$.

Suotuisan alueen pinta-ala on $\pi \cdot (11,625 \text{ mm})^2 = 424,556 \dots \text{ mm}^2$.

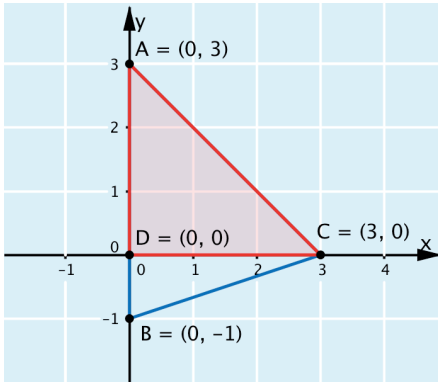
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kolikko osuu neliön kärkeen}) = \frac{424,556 \dots}{1600} = 0,265 \dots \approx 0,27.$$

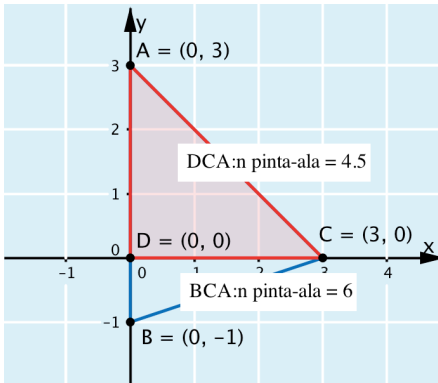
Kolikko osuu neliön kärkeen todennäköisyydellä 0,27.

Vastaus: 0,27

251. a) Piirretään mallikuva. Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka on suoran $y = 0$ eli x -akselin yläpuolella.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa. Määritetään koko alueen ja suotuisan alueen pinta-alat ohjelman avulla.



Koko kolmion pinta-ala on 6 ja suotuisan alueen pinta-ala 4,5.
Kysytty todennäköisyys on

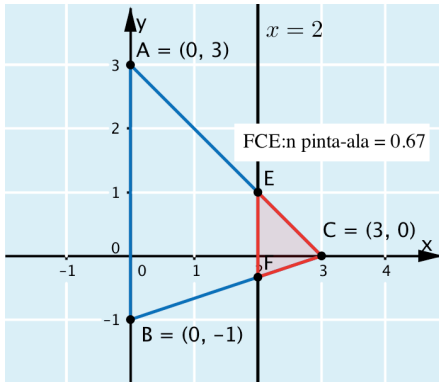
$$P(y \geq 0) = \frac{4,5}{6} = 0,75.$$

$y \geq 0$ todennäköisyydellä 0,75.

Vastaus: 0,75

- b) Piirretään suora $x = 2$ ja määritetään suoran ja kolmion sivujen leikkauspisteet ohjelman avulla.

Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka suoran $x = 2$ oikealla puolella. Piirretään suotuisa kolmio ja määritetään sen pinta-ala ohjelman avulla.



Suotuisan kolmion pinta-ala on 0,66667.
Kysytty todennäköisyys on

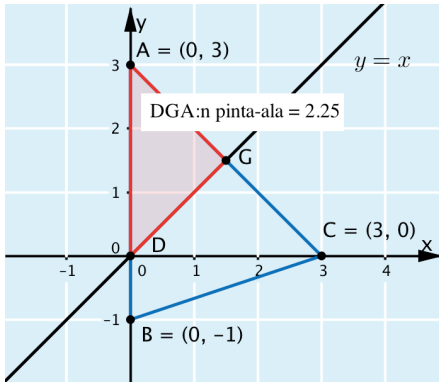
$$P(x \geq 2) = \frac{0,66667}{6} = 0,111... \approx 0,11.$$

$x \geq 2$ todennäköisyydellä 0,11.

Vastaus: 0,11

- c) Piirretään suora $y = x$ ja määritetään suoran ja kolmion sivujen leikkauspisteet ohjelman avulla.

Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka on suoran $y = x$ yläpuolella. Piirretään suotuisa kolmio ja määritetään sen pinta-ala ohjelman avulla.



Suotuisan kolmion pinta-ala on 2,25.
Kysytty todennäköisyys on

$$P(y \geq x) = \frac{2,25}{6} = 0,375... \approx 0,38.$$

$y \geq x$ todennäköisyydellä 0,38.

Vastaus: 0,38