

1 VAIHTOEHTOJEN LUKUMÄÄRIÄ

1.1 Jonot ja joukot

ALOITA PERUSTEISTA

- 101.** Merkitään karkkeja värien alkukirjaimilla.

Musta = M

Valkoinen = V ja

Punainen = P

Pussista otetaan kaksi karkkia. Ne voivat olla
musta ja valkoinen eli MV tai
musta ja punainen eli MP tai
valkoinen ja punainen eli VP.

Vastaus: MV, MP ja VP

- 102.** Merkitään kolikon puolia kirjaimilla siten, että R on kruuna ja L on klaava.

Luetellaan erilaiset kahden heiton tulossarjat.

RR

RL

LL

LR

Vastaus: RR, RL, LL, LR, kun R on kruuna ja L on klaava

- 103. a)** Merkitään henkilöitä nimien alkukirjaimilla:
Anni = A, Elias = E, Onni = O ja Viivi = V

Luetellaan erilaiset halausparit:

Parit, joissa on Anni:

AE, AO, AV

Jäljellä olevat parit, joissa on Elias:

EO, EV

Jäljellä olevat parit, joissa on Onni:

OV

Vastaus: AE, AO, AV, EO, EV ja OV

- b)** a-kohdan perusteella yhteensä halataan 6 kertaa.

Vastaus: 6 kertaa

- c)** Valitaan a-kohdan halauksista ne, joissa Anni on mukana: AE, AO ja AV. Anni halaa kolme kertaa.

Vastaus: 3 kertaa

- 104.** Merkitään kappaleiden nimiä niiden alkukirjainten mukaan:
Bohemian Rhapsody = B
Hotel California = H
Stairway to heaven = S

Luetellaan erilaiset soittojärjestykset:

BHS, BSH

HBS, HSB

SBH, SHB

Järjestyksiä on kuusi.

Vastaus: BHS, BSH, HBS, HSB, SBH ja SHB; kuusi

105. Korttipakassa on 52 korttia, jotka jakaantuvat neljään maahan. Punaisia maita ovat hertta ja ruutu, mustia pata ja risti. Jokaisessa maassa on yksi ässä.

- a) Patoja on 13 kpl ja punaisia on $2 \cdot 13 = 26$ kpl. Yhteensä patoja tai punaisia on $13 + 26 = 39$.

Vastaus: 39

- b) Kaikki padat ovat mustia. Korttipakassa ei ole yhtään korttia, joka olisi pata ja punainen.

Vastaus: 0

- c) Korttipakassa on 13 pataa ja 4 ässää. Yksi ässistä on pataässä. Patoja tai ässiä on yhteensä $13 + 4 - 1 = 16$.

Vastaus: 16

106. Maaliskuussa on 31 päivää. Kokous kestää 3 päivää. Tarkastellaan kokouksen aloituspäivien vaihtoehtoja. Ensimmäinen mahdollinen aloituspäivä on maaliskuun 1. päivä. Viimeinen mahdollinen aloituspäivä on maaliskuun 29. päivä, koska kokouksen täytyy myös päättyä maaliskuussa.

Kokouksen aloituspäivä voidaan valita 29 eri tavalla.

Vastaus: 29:llä eri tavalla

- 107.** Määritetään appletin avulla eri vaihtoehdot, joilla käytettävät häkit voidaan valita.

Laaditaan taulukko erilaisista keskinäisistä asemista, joissa koirat voivat olla.

1. asema:	P		H		
	H		P		
2. asema:	P			H	
	H			P	
3. asema:	P				H
	H				P
4. asema:		P		H	
		H		P	
5. asema:		H			P
		P			H
6. asema:			H		P
			P		H

Pupen ja Haukun paikat voidaan valita 12 eri tavalla.

Vastaus: 12:lla eri tavalla

- 108. a)** Jonossa järjestyksellä on merkitystä.

A: Viesti juostaan tietyssä järjestyksessä, joten siinä kyseessä on jono.

D: Koska kokouksen henkilöillä on eri roolit, on kyseessä jono.

Vastaus: A ja D

- b)** Joukossa järjestyksellä ei ole merkitystä.

B: Mielipidetutkimukseen valittujen henkilöiden järjestyksellä ei ole väliä, eli kyseessä on henkilöiden joukko.

C: Umpimähkään nostettujen lottopallojen numeroiden järjestyksellä ei suomalaisessa lotossa ole väliä, eli kyseessä on pallojen joukko.

E: Kaverien joukosta muodostetussa keilausporukassa on kyse järjestämättömästä joukosta.

Vastaus: B, C ja E

VAHVISTA OSAAMISTA

- 109.** Jonossa ja joukossa on erilaisia kokoonpanoja. Jonossa on järjestys, mutta joukossa ei.
Esimerkiksi 10 henkilön joukosta muodostuu jono, kun siitä valitaan 4 henkilön viestijoukkue. Joukko puolestaan muodostuu, kun 10 henkilön joukosta valitaan 4 henkilön ryhmä, jonka jäsenillä ei ole erityisiä rooleja.
- 110.** Havainnollistetaan tuloksia taulukon avulla. Merkitään riville arpakuution mahdolliset tulokset ja pystysarakkeelle 4-sivuisen nopan mahdolliset tulokset. Lasketaan taulukkoon heittojen tulosten tulot.

		arpakuutio					
		1	2	3	4	5	6
4-sivuisen noppa	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24

Heittojen silmälukujen tulo voi olla 6 kolmella eri tavalla.

Vastaus: 3:lla eri tavalla

- 111. a)** Kahden arpakuution silmälukujen summa on pienimmillään $1 + 1 = 2$. Sadalla pelivuorolla pelaaja voi edetä siis vähintään $2 \cdot 100 = 200$ askelta.

Vastaus: 200 askelta

- b)** Kahden arpakuution silmälukujen summa on suurimmillaan $6 + 6 = 12$. Sadalla pelivuorolla pelaaja voi edetä siis korkeintaan $12 \cdot 100 = 1200$ askelta.

Vastaus: 1200 askelta

- 112.** Merkitään miehiä kirjaimilla M ja P ja naisia kirjaimilla N, T ja A. Luetellaan kaikki pelit:

kaksi miestä:	MP		
yksi mies ja	MN	MT	MA
yksi nainen:	PN	PT	PA
kaksi naista	NT	NA	TA

Pelejä on yhteensä 10 ja niistä 3 pelataan naisten kesken.

Lasketaan naisten välisten pelien osuus prosentteina: $\frac{3}{10} = 0,3 = 30 \%$

Vastaus: 30 prosenttia

- 113.** Viikossa on seitsemän päivää. Yhtenä päivänä ei satanut eikä tuullut. Koska kolmena päivänä satoi ja neljänä päivänä tuuli, niin vain yhtenä päivänä sekä satoi että tuuli.

Vastaus: yhtenä päivänä

- 114.** Ensimmäinen matkaanlähtöpäivävaihtoehto on kuukauden 1. päivä ja viimeinen on 7 päivää ennen kuun loppua. Kaikki muut päivät 1. ja viimeisen mahdollisen lähtöpäivän välillä ovat myös mahdollisia matkaanlähtöpäiviä.

Koska Jere voi valita lähtöpäivän 22 eri tavalla, on kuukaudessa $22 + 6 = 28$ päivää. Kyseessä on helmikuu.

Vastaus: helmikuu

- 115.** Alussa on 16 kilpailijaa. Jokaiseen väentöötteluun osallistuu kaksi kilpailijaa kerrallaan. Häviäjät tippuvat kilpailusta pois. Taulukoidaan otteluiden ja kilpailijoiden määriä.

	Kilpailijoiden määrä kierroksen alussa	Ottelujen määrä kierroksella
1. kierros	16	8
2. kierros	8	4
3. kierros	4	2
4. kierros	2	1

Väentökierroksia tulee yhteensä 4. Näillä kierroksilla kisataan yhteensä $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kädenväentööttelua. Turnauksen voittaja osallistuu jokaisella kierroksella yhteen otteluun, eli hän osallistuu neljään otteluun.

Vastaus: Kisataan yhteensä 15 ottelua. Voittaja osallistuu neljään otteluun.

- 116. a)** Arpakuution kuudesta silmäluvusta yksi on 4 ja viisi muita numeroita, siis $\frac{1}{6}$ silmäluvusta on nelosia. On oletettavaa, että tuhannesta heitosta $\frac{1}{6}$:ssa tulee silmäluvuksi 4.

$$1000 \cdot \frac{1}{6} = 166,666... \approx 167$$

Silmäluvuksi saadaan nelonen noin 167 kertaa.

Vastaus: 167 kertaa

- b)** Arpakuution silmäluvut 2, 4 ja 6 ovat parillisia ja silmäluvut 1, 3 ja 5 parittomia, siis $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ silmäluvusta on parillisia. On oletettavaa, että tuhannesta heitosta puolet saaduista silmäluvusta on parillisia.

$$1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

Silmäluvuksi saadaan parillinen noin 500 kertaa.

Vastaus: 500 kertaa

- c) Arpakuution silmäluvuista yksi on ykkönen ja yksi kuutonen, siis $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ on ykkösiä tai kuutosia.

On oletettavaa, että tuhannesta heitosta $\frac{1}{3}$:ssa tulee silmäluvuksi ykkönen tai kuutonen.

$$1000 \cdot \frac{1}{3} = 333,333... \approx 333$$

Silmäluvuksi saadaan parillinen noin 333 kertaa.

Vastaus: 333 kertaa

117. a) Määritetään appletin avulla uintipäivät. Merkitään uintipäivää kirjaimella U ja taulukoidaan vaihtoehdot. Huomioidaan, että jos uintipäivä on maanantai, niin edellisen viikon sunnuntai ei voi olla uintipäivä.

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
1. vaihtoehto:	U		U		U		
2. vaihtoehto:	U		U			U	
3. vaihtoehto:	U			U		U	
4. vaihtoehto:		U		U		U	
5. vaihtoehto:		U		U			U
6. vaihtoehto:		U			U		U
7. vaihtoehto:			U		U		U

Uintipäivät voi valita seitsemällä tavalla.

Vastaus: 7 tavalla

- b)** Määritetään appletin avulla uintipäivät. Merkitään uintipäivää kirjaimella U ja taulukoidaan vaihtoehdot. Huomioidaan, että jos uintipäivä on maanantai, niin edellisen viikon sunnuntai ei voi olla uintipäivä.

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
1. vaihtoehto:	U		U				
2. vaihtoehto:	U			U			
3. vaihtoehto:	U				U		
4. vaihtoehto:	U					U	
5. vaihtoehto:		U		U			
6. vaihtoehto:		U			U		
7. vaihtoehto:		U				U	
8. vaihtoehto:		U					U
9. vaihtoehto:			U		U		
10. vaihtoehto:			U			U	
11. vaihtoehto:			U				U
12. vaihtoehto:				U		U	
13. vaihtoehto:				U			U
14. vaihtoehto:					U		U

Uintipäivät voi valita 14 tavalla.

Vastaus: 14 tavalla

- c)** Vähintään kaksi uintipäivää tarkoittaa, että uintipäiviä on 2 tai enemmän. b-kohdan mukaan kaksi uintipäivää voi valita 14 tavalla ja a-kohdan mukaan kolme uintipäivää voi valita 7 tavalla. Viikkoon ei mahdu neljää uintipäivää niin, että kaksi uintia ei olisi peräkkäisinä päivinä.

Uintipäivät voi valita $14 + 7 = 21$ tavalla.

Vastaus: 21:lla tavalla

118. Taulukoidaan erilaisia järjestyksiä.

Huomioidaan ratkaisussa, että Petran on käveltävä ensin ja Robert ja Eva eivät voi olla peräkkäin.

	1. henkilö	2. henkilö	3. henkilö	4. henkilö	5. henkilö
1. järjestys	Petra	Makwan	Robert	Mira	Eva
2. järjestys	Petra	Eva	Makwan	Robert	Mira
3. järjestys	Petra	Mira	Eva	Makwan	Robert
4. järjestys	Petra	Robert	Mira	Eva	Makwan
5. järjestys	Petra	Mira	Robert	Makwan	Eva
6. järjestys	Petra	Eva	Mira	Robert	Makwan
7. järjestys	Petra	Makwan	Eva	Mira	Robert
8. järjestys	Petra	Robert	Makwan	Eva	Mira
9. järjestys	Petra	Robert	Makwan	Mira	Eva
10. järjestys	Petra	Robert	Mira	Makwan	Eva
11. järjestys	Petra	Eva	Makwan	Mira	Robert
12. järjestys	Petra	Eva	Mira	Makwan	Robert

Järjestyksiä on 12.

Vastaus: 12:ssa eri järjestyksessä

- 119.** Taulukoidaan kaikki heittosarjat, joissa kolikkoa heitetään 4 kertaa. Merkitään kruunaa kirjaimella R ja klaavaa kirjaimella L.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto	4. heitto
4 kruunaa	R	R	R	R
3 kruunaa ja 1 klaava	R	R	R	L
	R	R	L	R
	R	L	R	R
	L	R	R	R
2 kruunaa ja 2 klaavaa	R	R	L	L
	R	L	R	L
	R	L	L	R
	L	R	R	L
	L	R	L	R
	L	L	R	R
1 kruuna ja 3 klaavaa	L	L	L	R
	L	L	R	L
	L	R	L	L
	R	L	L	L
4 klaavaa	L	L	L	L

- a)** Taulukon perusteella yhtä monta kruunaa ja klaavaa saadaan kuudessa erilaisessa heittosarjassa.

Vastaus: 6:lla eri tavalla

- b)** Vähintään kaksi kruunaa tarkoittaa heittosarjoja, joissa on kaksi, kolme tai neljä kruunaa. Taulukon perusteella niitä on $6 + 4 + 1 = 11$.

Vastaus: 11:llä eri tavalla

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 120.** Taulukoidaan eri rooleja. Merkitään pelaajia etukirjaimen mukaan: Anne = A, Beata = B, Charlotta = C ja Daniel = D.

Vaihtoehto	mafioso	hullu	kansalaiset
1	A	B	CD
2	B	A	CD
3	C	D	AB
4	D	C	AB
5	A	C	BD
6	C	A	BD
7	A	D	BC
8	D	A	BC
9	B	C	AD
10	C	B	AD
11	B	D	AC
12	D	B	AC

Roolit voivat jakautua 12:lla erilaisella tavalla pelaajien kesken.

Vastaus: 12:lla eri tavalla

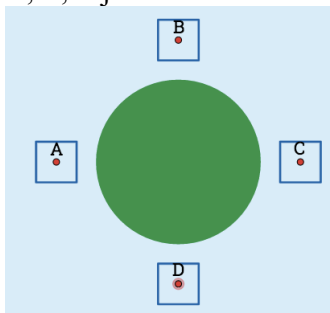
- 121.** Jokaisessa vaunussa pitää olla ainakin yksi matkustaja. Nyt ei tarvitse kiinnittää huomiota siihen, kuka matkustaja on missäkin vaunussa. Taulukoidaan mahdollisia vaunujen miehityksiä. Merkitään matkustajaa x-kirjaimella.

	1. vaunu	2. vaunu	3. vaunu	4. vaunu	5. vaunu
1. vaihtoehto	xxx	x	x	x	x
2. vaihtoehto	x	xxx	x	x	x
3. vaihtoehto	x	x	xxx	x	x
4. vaihtoehto	x	x	x	xxx	x
5. vaihtoehto	x	x	x	x	xxx
6. vaihtoehto	xx	xx	x	x	x
7. vaihtoehto	xx	x	xx	x	x
8. vaihtoehto	xx	x	x	xx	x
9. vaihtoehto	xx	x	x	x	xx
10. vaihtoehto	x	xx	xx	x	x
11. vaihtoehto	x	xx	x	xx	x
12. vaihtoehto	x	xx	x	x	xx
13. vaihtoehto	x	x	xx	xx	x
14. vaihtoehto	x	x	xx	x	xx
15. vaihtoehto	x	x	x	xx	xx

Matkustajat voivat asettua vaunuihin 15:llä eri tavalla.

Vastaus: 15:llä eri tavalla

122. Määritetään erilaiset istumajärjestykset siten, että yksi henkilö pysyy paikallaan ja muut vaihtavat järjestystä. Merkitään henkilöitä kirjaimilla A, B, C ja D.



Taulukoidaan mahdolliset järjestykset. Käytetään taulukossa merkintätapaa, jossa esimerkiksi kuvan istumajärjestys kirjoitetaan ABCD.

1. järjestys	ABCD
2. järjestys	ABDC
3. järjestys	ACBD
4. järjestys	ACDB
5. järjestys	ADBC
6. järjestys	ADCB

Henkilöt voivat muodostaa kuusi erilaista istumajärjestystä.

Vastaus: 6 istumajärjestystä

- 123. a)** Taulukoidaan vastausvaihtoehdot. Merkitään oikein olevaa vastausta kirjaimella O ja väärin mennyttä vastausta kirjaimella V.

	1. tehtävä	2. tehtävä	3. tehtävä	4. tehtävä	5. tehtävä
5 oikein	O	O	O	O	O
4 oikein ja 1 väärin	O	O	O	O	V
	O	O	O	V	O
	O	O	V	O	O
	O	V	O	O	O
	V	O	O	O	O
3 oikein ja 2 väärin	O	O	O	V	V
	O	O	V	V	O
	O	V	V	O	O
	V	V	O	O	O
	O	O	V	O	V
	O	V	O	O	V
	V	O	O	O	V
	V	O	O	V	O
	V	O	V	O	O

Taulukointia ei tarvitse jatkaa loppuun, koska 2 tai vähemmän oikein vaihtoehtoja ei tarvita a- tai b-kohdissa. Kokeesta voi saada kolme tehtävää oikein yhteensä 10 tavalla.

Vastaus: 10:llä tavalla

- b) Kolme pistettä saa niissä tilanteissa, joissa on
- vastannut kolmeen tehtävään oikein ja jättänyt vastaamatta kahteen tehtävään
 - vastannut neljään tehtävään oikein ja yhteen väärin.

Rivejä, joissa on vastattu 3 oikein ja jätetty vastaamatta kahteen kohtaan on yhtä monta kuin rivejä, joissa on vastattu 3 oikein ja 2 väärin.

a-kohdan taulukon perusteella "3 oikein"-vaihtoehtoja on 10 ja "4 oikein"-vaihtoehtoja on 5.

Kokeessa voi saada kolme pistettä $10 + 5 = 15$ tavalla.

Vastaus: 15 tavalla

124. Punaisia kortteja on kaikki hertat ja ruudut. Niitä on $13 + 13 = 26$.
Kuninkaita on herttakuningas, ruutukuningas, patakuningas ja ristikuningas, eli 4 kpl.

Eksklusiivisen "tai":n mukaan "Kortti on punainen tai kuningas" tarkoittaa sitä, että kortti ei saa olla sekä punainen että kuningas.

Kuninkaista lasketaan mukaan siis patakuningas ja ristikuningas.
Punaisista korteista lasketetaan mukaan muut paitsi herttakuningas ja ruutukuningas.

Mahdollisia kortteja on $2 + 24 = 26$

Vastaus: 26 kortille

1.2 Tuloperiaate ja kertoma

ALOITA PERUSTEISTA

125. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360 \cdot 2 = 720$

c) $3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 12$

126. a) $10! = 3\,628\,800$

b) $12! = 479\,001\,600$

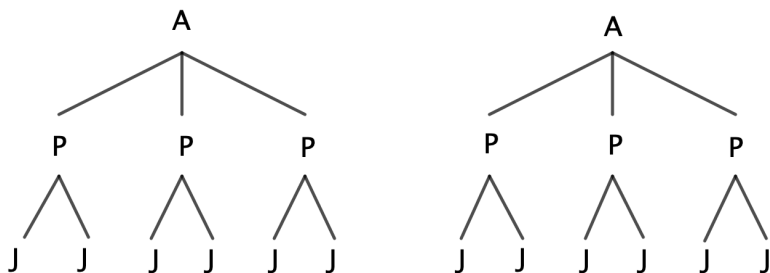
c) $\underbrace{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 7}_{19 \text{ kpl}} = 2,154\dots \cdot 10^{22} \approx 2,15 \cdot 10^{22}$

127. Ensimmäinen esiintyjä voidaan valita seitsemällä eri tavalla, toinen kuudella, kolmas viidellä, jne.

Eri järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan siis
 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

Vastaus: 5040:ssä eri järjestyksessä

- 128.** Merkitään alkuruokia kirjaimella A, pääruokia kirjaimella P ja jälkiruokia kirjaimella J. Piirretään puukaavio.



Puukaaviosta nähdään, että erilaisia kolmen ruokalajin illallisia voidaan muodostaa 12.

Vastaus: 12 illallista

- 129. a)** Kotikaupungistaan myyntiedustaja voi kulkea kolmeen kaupunkiin. Seuraavasta kaupungista on kaksi mahdollista kohdetta jäljellä. Kolmannesta kaupungista on kuljettava viimeiseen jäljellä olevaan kaupunkiin.

Koska jokaista kolmea ensimmäistä kohdetta kohden on kaksi vaihtoehtoa, muodostuu $3 \cdot 2 = 6$ erilaista reitin alkua. Kahden ensimmäisen kaupungin jälkeen myyntiedustajalla on vain yksi mahdollinen reitti jäljellä, joten erilaisia reittejä on 6.

Vastaus: 6 reittiä

- b)** Appletin avulla havaitaan, että lyhimmän reitin pituus on 135 km ja se kuljetaan kiertämällä nelikulmion ulkosivuja pitkin vasta- tai myötäpäivään. Lyhin reitti on kiertää kaupungit järjestyksessä ABC tai CBA.

Vastaus: ABC tai CBA

- 130.** Parittomia numeroita ovat 1, 3, 5, 7 ja 9.
Tutkitaan erilaisten kolminumeroisten lukujen lukumäärää tuloperiaatteen avulla.
Ensimmäinen numero voi olla mikä tahansa luvuista 1, 3, 5, 7 ja 9, joita on 5.
Toinen numero voi myös olla mikä tahansa luvusta 1, 3, 5, 7 ja 9, eli toiselle numerolle on myös 5 vaihtoehtoa.
Vastaavasti kolmas numero voi olla mikä vain pariton numero, eli kolmannellekin numerolle on 5 vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisten vaihtoehtojen lukumäärä on $5 \cdot 5 \cdot 5$ eli vaihtoehto C.

Vastaus: C

- 131. a)** Numeroita ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Niitä on yhteensä 10.
Lukon ensimmäinen numero voi olla jokin 10 vaihtoehdosta.
Lukon toinen numero voi myös olla jokin 10 vaihtoehdosta.
Vastaavasti kolmas ja neljäs numero.

Tuloperiaatteen mukaan mahdollisia lukituskoodin numeroyhdistelmiä on $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$.

Vastaus: 10 000

- b)** Jos yhden koodin kokeiluun kuluu 3 sekuntia, niin 10 000 koodin kokeiluun kuluu $3 \cdot 10\,000 = 30\,000$ sekuntia.

$$30\,000 \text{ s} = \frac{30\,000}{60} \text{ min} = 500 \text{ min} = \frac{500}{60} \text{ h} = 8,333\dots \text{ h} = 8 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Lukon avaamiseen kuluu korkeintaan 8 tuntia ja 20 minuuttia.

Vastaus: 8 h 20 min

- 132. a)** Ensimmäinen opiskelija voi olla kuka vain 38 opiskelijasta. Toinen opiskelija voi olla kuka vain 37 opiskelijasta. Kolmas voi olla kuka vain 36 opiskelijasta, jne.

Tuloperiaatteen mukaan opiskelijat voivat tulla luokkaan
 $38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 1 = 38! = 5,230\dots \cdot 10^{44} \approx 5,2 \cdot 10^{44}$
eri järjestyksessä.

Vastaus: $5,2 \cdot 10^{44}$:ssä eri järjestyksessä

- b)** Nyt ensimmäinen opiskelija voi olla kuka vain 41 opiskelijasta. Toinen opiskelija voi olla kuka vain 40 opiskelijasta, jne. Viimeinen luokkaan tulija voi olla kuka vain jäljellä olevista neljästä opiskelijasta.

Tuloperiaatteen mukaan opiskelijat voivat tulla luokkaan
 $41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 4 = 5,575\dots \cdot 10^{48} \approx 5,6 \cdot 10^{48}$ eri järjestyksessä.

Vastaus: $5,6 \cdot 10^{48}$:ssa eri järjestyksessä

VAHVISTA OSAAMISTA

- 133.** Sanassa LASKU on viisi kirjainta.

Muodostettavan nelikirjaimisen merkkijonon ensimmäinen kirjain voidaan valita viidellä eri tavalla. Toinen kirjain neljällä, kolmas kolmella ja neljäs kahdella.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia nelikirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ kpl.

Vastaus: 120 merkkijonoa

- 134.** Shakkilaudan ensimmäisen ruudun väri voi olla jompikumpi kahdesta vaihtoehdosta, samoin toinen, kolmas, neljäs aina viimeisen 64. ruutuun asti.

Tuloperiaatteen mukaan väriyhdistelmiä on
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{64 \text{ kpl}} = 2^{64} = 1,8446 \dots \cdot 10^{19} \approx 1,84 \cdot 10^{19}$$

Laudalle voidaan muodostaa $1,84 \cdot 10^{19}$ erilaista väritystä.

Vastaus: $1,84 \cdot 10^{19}$ väritystä

135. a) Ylin raita voi olla mikä tahansa kolmesta väristä. Keskimmäiselle raidalle on käytettävissä kaksi värivaihtoehtoa, ja alimmalle raidalle jää vain yksi värivaihtoehto. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia värikokonaisuuksia on $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Voidaan muodostaa 6 erilaista kolmiraitaista lippua.

Vastaus: 6 lippua

- b) Tapa1: Taulukoidaan mahdollisia yhdistelmiä.

Ylin raita	Keskimmäinen raita	Alin raita
violetti	sininen	violetti
violetti	sininen	keltainen
violetti	keltainen	violetti
violetti	keltainen	sininen
sininen	violetti	sininen
sininen	violetti	keltainen
sininen	keltainen	sininen
sininen	keltainen	violetti
keltainen	violetti	keltainen
keltainen	violetti	sininen
keltainen	sininen	keltainen
keltainen	sininen	violetti

Voidaan muodostaa 12 erilaista kolmiraitaista lippua.

Tapa 2:

Ylin raita voi olla mikä tahansa kolmesta väristä. Keskimmäinen raita voi olla kumpi vain jäljelle jääneistä väristä, eli keskimmäiselle raidalle on kaksi värivaihtoehtoa. Alin raita ei voi olla samanvärisen kuin keskimmäinen raita, mutta se voi olla samanvärisen kuin ylin raita tai viimeiseksi jäljelle jäänyt väri. Alimmalle raidalle on siis kaksi värivaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia kolmiraitaisia lippuja voidaan valmistaa $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Vastaus: 12 lippua

- 136.** Rekisterikilvessä mahdolliset kirjaimet ovat A–Z.
Näitä on yhteensä 26 kpl.

Enintään kolminumeroisia lukuja, jotka eivät ala nolllalla, ovat 1–999.
Näitä on 999 kappaletta.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia rekisterikilpiä voidaan muodostaa
 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 999 = 17\,558\,424$.

Vastaus: 17 558 424 rekisterikilpeä

- 137. a)** Kokeessa on 26 kohtaa, ja jokaisessa kohdassa on kolme vastausvaihtoehtoa. Ensimmäiseen kohtaan voi vastata kolmella eri tavalla. Toiseen kohtaan voi myös vastata kolmella eri tavalla. Vastaavasti myös muihin kohtiin voi vastata kolmella eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia vastausrivejä on

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{26 \text{ kpl}} = 3^{26} = 2,541\dots \cdot 10^{12} \approx 2,5 \cdot 10^{12}.$$

Vastaus: $2,5 \cdot 10^{12}$ vastausriviä

- b)** Jokaisen vastauksen täytyy olla oikein. Ensimmäisessä kohdassa on yksi oikea vastaus. Toisessa kohdassa on yksi oikea vastaus. Vastaavasti myös muissa kohdissa on vain yksi oikea vastaus kussakin.

Tuloperiaatteen mukaan rivejä, joissa jokainen vastaus on oikein, on

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{26 \text{ kpl}} = 1^{26} = 1.$$

Vastaus: 1 vastausrivi

- c)** Jokaisella rivillä on kaksi väärää vastausvaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan rivejä, joissa jokainen vastaus on väärin, on
 $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{26 \text{ kpl}} = 2^{26} = 67\,108\,864$.

Vastaus: 67 108 864 vastausriviä

- 138.** a) Mahdollisia puheenjohtajamaita on aluksi 27. Toisena vuonna ensimmäisen vuoden puheenjohtaja ei voi olla puheenjohtajana uudestaan, joten vaihtoehtoja uudeksi puheenjohtajamaaksi on 26. Kolmantena vuonna kaksi edellistä maata ei voi toimia puheenjohtajamaana, joten vaihtoehtoja on 25.

Tuloperiaatteen mukaan kolme seuraavaa puheenjohtajamaata voidaan valita $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550$ eri tavalla.

Vastaus: 17 550:llä eri tavalla

- b) Nyt sama maa voi toimia puheenjohtajamaana useaan kertaan, joten vaihtoehtoja puheenjohtajamaaksi on jokaisena vuonna 27.

Tuloperiaatteen mukaan kolme seuraavaa puheenjohtajamaata voidaan valita $27 \cdot 27 \cdot 27 = 27^3 = 19\,683$ eri tavalla.

Vastaus: 19 683:lla eri tavalla

- 139.** Tiedoston nimessä mahdollisia kirjaimia oli kirjaimet A–Z. Näitä on yhteensä 26 kpl. Käytettävissä olevia numeroita oli 10 kpl ja erikoismerkkejä 16 kpl. Näistä $26 + 10 + 16 = 52$ merkistä valittiin 8 merkkiä tiedoston nimeen.

Jokaiselle tiedoston nimen merkille on 52 vaihtoehtoa, joten erilaisia tiedostonnimiä oli tuloperiaatteen mukaan käytettävissä

$$\underbrace{52 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 52}_{8 \text{ kpl}} = 52^8 = 5,345 \dots \cdot 10^{13} \approx 5,3 \cdot 10^{13} \text{ kpl.}$$

Vastaus: $5,3 \cdot 10^{13}$ tiedostonimeä

- 140. a)** Arpakuution silmäluvuissa on yksi kuutonen.
Ensimmäisessä arpakuution heitossa on yksi mahdollisuus saada kuutonen. Samoin toisessa, kolmannessa ja neljännessä.

Tuloperiaatteen mukaan $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ heittosarjassa saadaan jokaisella kuutonen.

Vastaus: yhdessä heittosarjassa

- b)** Arpakuutiossa on silmäluvut 1–6.
Ensimmäisen heiton silmäluku voi olla mikä tahansa kuudesta vaihtoehdosta.

Toisen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin ensimmäisellä heitolla saatu. Silmäluku voi olla siis jokin viidestä vaihtoehdosta.

Kolmannen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin ensimmäisellä tai toisella heitolla saatu silmäluku.
Silmäluku voi olla siis jokin neljästä vaihtoehdosta.

Vastaavasti neljännen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin aiemmin saadut silmäluvut. Neljännen heiton silmäluvulle on siis kolme vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ heittosarjassa saadaan jokaisella heitolla eri silmäluku.

Vastaus: 360 heittosarjassa

- c)** Ensimmäisen arpakuution silmäluku voi olla mikä tahansa kuudesta vaihtoehdosta.

Koska toisella, kolmannella ja neljännellä heitolla täytyy saada sama silmäluku kuin ensimmäisellä heitolla, on kullakin heitolla vain yksi vaihtoehto.

Tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ heittosarjassa saadaan jokaisella heitolla sama silmäluku.

Vastaus: 6 heittosarjassa

- 141.** Pelikierroksia on yhteensä 10. Jokaisella kierroksella on kolme vaihtoehtoa: kivi, paperi tai sakset.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia pelistrategioita on

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ kpl}} = 3^{10} = 59\,049.$$

Tehtävässä esitetyn pelistrategian lisäksi muita pelistrategioita on $59\,049 - 1 = 59\,048$.

Vastaus: 59 048 muuta pelistrategia

- 142. a)** Kolikko voi olla jokin kuudesta erilaisesta kolikosta. Samoin avain voi olla jokin kuudesta erilaisesta avaimesta.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia yhdistelmiä on $6 \cdot 6 = 36$.

Vastaus: 36 yhdistelmää

- b)** Kolikko voi olla jokin kuudesta erilaisesta kolikosta. Avain voi olla jokin kahdestatoista erilaisesta avaimesta.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia nostettavia yhdistelmiä on $6 \cdot 12 = 72$.

Vastaus: 72 yhdistelmää

143. a) Skoottereita on yhteensä $5 + 4 = 9$.

Jonon ensimmäinen skootteri voi olla jokin yhdeksästä vaihtoehdosta. Toinen voi olla jokin kahdeksasta jäljellä olevasta vaihtoehdosta, jne.

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362\,880$ eri tavalla.

Vastaus: 362 880:llä eri tavalla

b) Punaiset skootterit asettuvat jonoon ensin ja valkoiset perään. Ensimmäinen skootteri on jokin viidestä punaisesta, toinen jokin neljästä jäljelle jääneestä punaisesta, jne.

Kun kaikki punaiset skootterit ovat jonossa, kuudes skootteri on jokin neljästä valkoisesta. Seitsemäs skootteri on jokin jäljelle jääneistä kolmesta valkoisesta, jne.

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon $\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{punaiset}} \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{valkoiset}} = 5! \cdot 4! = 2880$ eri tavalla.

Vastaus: 2880:llä eri tavalla

c) Jonon ensimmäinen skootteri on punainen: 5 vaihtoehtoa.
Jonon toinen skootteri on valkoinen: 4 vaihtoehtoa.
Jonon kolmas skootteri on punainen: 4 vaihtoehtoa.
Jonon neljäs skootteri on valkoinen: 3 vaihtoehtoa.
Jonon viides skootteri on punainen: 3 vaihtoehtoa.
Jonon kuudes skootteri on valkoinen: 2 vaihtoehtoa.
Jonon seitsemäs skootteri on punainen: 2 vaihtoehtoa.
Jonon kahdeksas skootteri on valkoinen: 1 vaihtoehto.
Jonon yhdeksäs skootteri on punainen: 1 vaihtoehto.

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2880$:llä eri tavalla.

Vastaus 2880:llä eri tavalla

144. a) Ensimmäinen kappale voidaan valita 20:llä eri tavalla.
Toinen kappale 20:llä eri tavalla.
Kolmas kappale 20:llä eri tavalla.
Neljäs kappale 20:llä eri tavalla.
Viides kappale 20:llä eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia viiden kappaleen sikermiä voidaan arpoa $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^5 = 3\,200\,000$.

Vastaus: 3 200 000 sikermää

- b) Lasketaan sellaisten viiden kappaleen sikermien lukumäärä, joissa jokainen kappale soitetaan korkeintaan kerran.

Ensimmäinen kappale voidaan valita 20:llä eri tavalla.
Toinen kappale 19:llä eri tavalla.
Kolmas kappale 18:lla eri tavalla.
Neljäs kappale 17:llä eri tavalla.
Viides kappale 16:lla eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan sikermiä, joissa mitään kappaletta ei soiteta enempää kuin kerran, on
 $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480$.

Lasketaan kuinka monta prosenttia 1 860 480 on 3 200 000:sta.

$$\frac{1\,860\,480}{3\,200\,000} = 0,5814$$

Kohdan a) sikermistä noin 58 % on sellaisia, joissa mitään kappaletta ei soiteta enempää kuin kerran.

Vastaus: 58 %

145. Oletetaan, että henkilö syntyy 2000-luvun alkupuolella.

1500-luvun alun jälkeen sukupolvia on ollut $\frac{2000-1500}{25} = 20$.

Näin ollen 2000-luvulla syntyneellä on tuloperiaatteen mukaan ainakin $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{20 \text{ kpl}} = 2^{20} = 1\,048\,576$ esivanhempaa.

Olettaen, että lähes jokainen esivanhempi on eri henkilö ja ettei ulkomailta muutto korvaa koko sukuhaaraa, niin jokaisen 1500-luvulla eläneen 250 000 suomalaisen tulee olla vuonna 2000 syntyneen esivanhempi. Näin ollen kaikki suomalaiset ovat sukua toisilleen.

Vastaus: –

146. a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{30}{1} = 30$

b) $\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{30 \cdot 4}{1} = 120$

c) $\frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{42}{2} = 21$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

147. a) Sanassa HIIRI on viisi kirjainta. Ne voivat olla $5!$ eri järjestyksessä. Kirjaamista kolme on kuitenkin samoja. Nämä kolme I-kirjainta voivat olla $3!$ eri järjestyksessä.

Erilaisten viisikirjaimisten merkkijonojen määrä saadaan jakamalla kaikkien merkkijonojen määrä $5!$ keskenään samanlaisten merkkijonojen määrällä $3!$.

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

Erilaisia viisikirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa 20.

Vastaus: 20 merkkijonoa

- b) Sanassa KANNETTAVA on 10 kirjainta. Ne voivat olla $10!$ eri järjestyksessä. Sanassa KANNETTAVA on kolme A-kirjainta, kaksi N-kirjainta ja kaksi T-kirjainta. Kolme A-kirjainta voi olla $3!$ eri järjestyksessä ja kaksi N-kirjainta voi olla $2!$ eri järjestyksessä, samoin kaksi T-kirjainta.

Erilaisten 10-kirjaimisten merkkijonojen määrä saadaan jakamalla kaikkien merkkijonojen määrä $10!$ keskenään samanlaisten merkkijonojen määrällä $3! \cdot 2! \cdot 2!$.

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$$

Erilaisia 10-kirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa 151 200.

Vastaus: 151 200 merkkijonoa

148. Korttipakassa on 52 korttia, joten tuloperiaatteen mukaan erilaisia viiden pelikortin jonoja on $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200$.

- a) Valitaan korttipakasta ensimmäinen kortti. Se voi olla mikä vain 52 kortista. Toisen kortin täytyy olla samaa maata kuin ensimmäisen. Näitä kortteja on pakassa jäljellä 12. Kolmas kortti on oltava jokin saman maan 11 kortista, neljäs jokin 10 kortista ja viides jokin 9 kortista.

Tuloperiaatteen mukaan viiden kortin jonoja, joissa kaikki kortit ovat samaa maata on $52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 617\,760$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{617\,760}{311\,875\,200} = 0,00198... \approx 0,2 \%$$

Vastaus: 0,2 %

- b) Valitaan korttipakasta ensimmäinen kortti. Se voi olla mikä vain 52 kortista. Toisen kortin täytyy olla saman arvoinen ensimmäisen kortin kanssa. Näitä kortteja on pakassa jäljellä 3. Myös kolmannen kortin on oltava samanarvoinen, eli kaksi vaihtoehtoa. Neljännen kortin on oltava viimeinen pakan samanarvoinen kortti, eli yksi vaihtoehto. Viides kortti voi olla mikä vain pakassa jäljellä olevista korteista. Pakassa on jäljellä $52 - 4 = 48$ korttia.

Tuloperiaatteen mukaan kyseisiä viiden kortin jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 = 14\,976$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{14\,976}{311\,875\,200} = 0,000048... \approx 0,005 \%$$

Vastaus: 0,005 %

- c) Nyt jonossa on neljä samanarvoista korttia ja yksi eriarvoinen kortti. Eriarvoinen kortti voi olla jonon ensimmäinen, toinen, kolmas, neljäs tai viimeinen kortti (kuten b-kohdassa).

Lasketaan eri tilanteiden mahdollisten jonojen lukumäärät.

Eriarvoinen kortti ensin ja samanarvoiset kortit lopussa:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti toisena:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti kolmantena:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti neljäntenä:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti viimeisenä:

b-kohdan mukaan erilaisia jonoja on 14 976.

Erilaisia jonoja on yhteensä $5 \cdot 14\,976 = 74\,880$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{74\,880}{311\,875\,200} = 0,00024... \approx 0,02 \%$$

Vastaus: 0,02 %

- 149. a)** Parittomia numeroita ovat 1, 3, 5, 7 ja 9.
Ovikoodin ensimmäinen numero voidaan valita viidellä eri tavalla, toinen koodi neljällä eri tavalla, kolmas kolmella eri tavalla ja neljäs kahdella eri tavalla.

Huonoimmassa tapauksessa professori joutuu kokeilemaan tuloperiaatteen mukaan $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ koodia.

Vastaus: 120 koodia

- b)** Käytettävissä on nyt numerot 1, 3, 5 ja 7. Näitä on neljä. Luetellaan kaikki mahdolliset neljän numeron ovikoodit. Niitä on yhteensä $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1357	1375	3157	3175
1537	1573	3517	3571
1735	1753	3715	3751
5137	5173	7135	7153
5317	5371	7315	7351
5713	5731	7513	7531

Taulukon perusteella huomataan, että lisäehdot täyttäviä koodeja ovat 3715 ja 5173.

Huonoimmassa tapauksessa pitää kokeilla kaksi koodia.

Vastaus: kaksi koodia

150. Kassakaapissa on neljän luvun koodi. Mahdollisia lukuja ovat luvut 1–100.

Kassakaapin avaamiseksi on

- ensin arvattava oikea pyörityssuunta: 2 vaihtoehtoa
- arvattava oikein ensimmäinen luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 4 kierrosta
- arvattava oikein toinen luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 3 kierrosta
- arvattava oikein kolmas luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 2 kierrosta
- arvattava oikein neljäs luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 1 kierros.

Jos kassakaapin koodi on tiedossa, pyörityksiä tulee $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Jokaiselle luvulle on 100 vaihtoehtoa, joten tuloperiaatteen mukaan erilaisia koodeja on $100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 100^4$.

Jos käydään kaikki koodimahdollisuudet läpi, pyörityksiä joudutaan tekemään $2 \cdot 100^4 \cdot 10 = 2 \cdot (10^2)^4 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10^9$.

Jos yhden pyörityksen tekeminen kestää sekunnin, niin $2 \cdot 10^9$ pyörityksen tekeminen kestää $2 \cdot 10^9$ sekuntia.

$$2 \cdot 10^9 \text{ s} = 63,419... \text{ vuotta} \approx 63 \text{ vuotta}$$

Vastaus: $2 \cdot 10^9$ pyöritystä, n. 63 vuotta

151. On osoitettava, että $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$.

Lähdetään liikkeelle vasemmasta puolesta ja muokataan se oikean puolen muotoon. Lavennetaan murtoluku tulolla, joka täydentää osoittajan lausekkeen kertomaksi.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \overset{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{5!}$$

Vastaus: –

1.3 Kombinaatio

ALOITA PERUSTEISTA

152. a) $\binom{7}{4} = 35$

b) $\binom{6}{1} = 6$

c) $\binom{524}{523} = 524$

153. a) $\binom{11}{2} = 55$

b) $\binom{11}{4} = 330$

c) $\binom{11}{7} = 330$

- 154.** A: Viisihenkisestä ryhmästä valitaan johtaja viidellä eri tavalla. Varajohtaja voidaan valita neljällä eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan vaihtoehtoja on $5 \cdot 4$.

Oikea vaihtoehto on III.

- B: Viisihenkinen ryhmä valitsee kaksi edustajaa. Valinta voidaan tehdä $\binom{5}{2}$ eri tavalla.

Oikea vaihtoehto on II.

- C: Valitaan ensin yksi joukkueen jäsen. Valinta voidaan tehdä viidellä eri tavalla. Pari voidaan valita kahdella eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia valintoja on $5 \cdot 2$.

Oikea vaihtoehto on I.

Vastaus: A: III, B: II ja C: I

- 155.** a) Valitaan neljä henkilöä 79 opiskelijan joukosta. Abishow'n juontajat voidaan valita $\binom{79}{4} = 1\,502\,501$ eri tavalla.

Vastaus: 1 502 501:llä eri tavalla

- b) Valitaan neljä pitsatäytettä neljästätoista mahdollisesta täytteestä. Neljän täytteen pitsa voidaan valita $\binom{14}{4} = 1001$ eri tavalla.

Vastaus: 1001:llä eri tavalla

- c) Valitaan kaksi herttaa kolmentoista hertan joukosta. Kaksi herttaa voidaan valita $\binom{13}{2} = 78$ eri tavalla.

Vastaus: 78:lla eri tavalla

- 156.** Kombinaatio tarkoittaa osajoukkoa. Alkio on joukon jäsen. Permutaatio tarkoittaa järjestettyä jonoa.

Vastaus: A: I, B: III ja C: II

- 157. a)** Kolmesta karhusta voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.

Väite on väärin.

Vastaus: väärin, kolmella

- b)** Seitsemästä veljeksestä voidaan muodostaa $\binom{7}{3} = 35$ erilaista kolmen veljeksen joukkuetta. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

- c)** Viisi pientä elefanttia voi olla $5! = 120$ erilaisessa jonossa.

Vastaus: oikein

- d)** Jonossa Lumikki on ensimmäisenä. Seitsemän kääpiötä voi olla $7!$ erilaisessa järjestyksessä. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on $1 \cdot 7! = 5040$. Väite on väärin.

Vastaus: väärin, 5040

- 158. a)** Kun juoksujärjestystä ei huomioida, viestijoukkue on sama, jos siinä on samat henkilöt.

Erilaisia joukkueita voidaan muodostaa $\binom{10}{4} = 210$

Vastaus: 210 joukkuetta

- b)** Kun juoksujärjestys huomioidaan, joukkue on eri joukkue, jos samat juoksijat ovat eri järjestyksessä. Tutkitaan joukkueiden määrä tuloperiaatteen avulla.

Ensimmäinen juoksija voi olla kuka tahansa 10:stä vaihtoehdosta. Toiselle juoksijalla on 9 vaihtoehtoa, kun ensimmäinen juoksija on nimetty. Vastaavasti kolmannelle on 8 ja neljännelle 7 vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan joukkueita on $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Vastaus: 5040 joukkuetta

- 159.** Matkatoimistossa on 6 retkeä A, B, C, D, E ja F. Maija osallistuu kahteen vaihtoehtosta A, B, C ja D.

Valinta voidaan tehdä $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Näiden lisäksi Maija osallistuu toiseen retkistä E ja F.

Valinta voidaan tehdä kahdella eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan Maija voi valita retket $6 \cdot 2 = 12$ eri tavalla.

Vastaus: 12:lla eri tavalla

- 160.** Tomi sai 15 pistettä. Koska jokaisesta oikein olevasta tehtävästä saa kolme pistettä, oikein olevia tehtäviä on $\frac{15}{3} = 5$.

Lasketaan, kuinka monella eri tavalla nämä viisi tehtävää voidaan valita seitsemästä tehtävästä. Viisitoista pistettä voi saada $\binom{7}{5} = 21$ eri tavalla.

Vastaus: 21:llä eri tavalla

VAHVISTA OSAAMISTA

- 161.** Lasketaan kaikki kombinaatiot $\binom{n}{k}$,
kun n on 5 ja k saa luvut 0, 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

Vastaus: $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$ ja $\binom{5}{5} = 1$

- 162. a)** Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä.
Ässäparin voi muodostaa $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Vastaus: 6 ässäparia

- b)** Kohdan a) mukaan tietynarvoinen pari voidaan muodostaa kuudella eri tavalla. Korttipakassa on 13 eri arvoista korttia, joten pari voidaan saada $13 \cdot 6 = 78$ eri tavalla.

Vastaus: 78 paria

163. Suklaalajeja on 15.

Sampo voi valita kolme suklaalajia $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla.

Ja neljä $\binom{15}{4} = 1365$ eri tavalla.

Sampo voi valita kolme tai neljä suklaata yhteensä

$455 + 1365 = 1820$ eri tavalla.

Sampo voi valmistaa 1820 erilaista lahjarasiasiaa.

Vastaus: 1820

164. a) Eurojackpot-rivi muodostetaan valitsemalla viisi päänumeroa luvuista 1–50 ja kaksi tähtinumeroa luvuista 1–10.

Päänumeron valinta voidaan tehdä $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$ eri tavalla ja

tähtinumeron valinta $\binom{10}{2} = 45$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia rivejä on

$2\,118\,760 \cdot 45 = 95\,344\,200$.

Eurojackpot-rivi voidaan muodostaa 95 344 200:lla eri tavalla.

Vastaus: 95 344 200:lla eri tavalla

b) Kohdan a) perusteella Eurojackpotissa on 95 344 200 riviä.

Eurojackpotin rivien määrä on

$\frac{95\,344\,200}{18\,643\,560} = 5,114\dots \approx 5,11$ -kertainen suhteessa Loton riveihin.

Vastaus: 5,11-kertainen

165. a) $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Vastaus: 21

b) $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Vastaus: 35

c)
$$\binom{12}{11} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{11!}$$
$$= \frac{12 \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{12}{1} = 12$$

Vastaus: 12

166. Ilpo pitää neljä kasvisruokapäivää viikossa.

Jos yksi kasvisruokapäivä on viikonloppuna, on kolme kasvisruokapäivää arkipäivinä.

Viikonloppupäivän voi valita kahdella eri tavalla ja arkipäivät $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan vaihtoehtoja on $2 \cdot 10 = 20$.

Jos kaksi kasvisruokapäivää on viikonloppuna, on kaksi kasvisruokapäivää arkipäivinä.

Viikonlopun molempina päivinä on kasvisruokapäivä ja arkipäivät voi valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla. Vaihtoehtoja on siis 10.

Yhteensä erilaisia vaihtoehtoja on $20 + 10 = 30$.

Ilpo voi valita kasvisruokapäivät 30:llä eri tavalla.

Vastaus: 30:llä eri tavalla

167. a) Kolme arpaa voidaan valita 400 arvan joukosta
$$\binom{400}{3} = 10\,586\,800 \text{ eri tavalla.}$$

Vastaus: 10 586 800 eri tavalla

- b) Yksikään arpa ei voita tarkoittaa rivejä, joissa jokainen arpa on nostettu 350:n ”ei voittoa” arvan joukosta.
Kolme arpaa voidaan valita 350 arvan joukosta
$$\binom{350}{3} = 7\,084\,700 \text{ tavalla.}$$

a-kohdan tavoista 7 084 700 on sellaisia, joissa yksikään arpa ei voita.

Vastaus: 7 084 700

- c) Lasketaan vaihtoehtojen määrä, kun yksi arpa voittaa ja kaksi arpaa ei voita.
Yksi voittava arpa voidaan valita 50 arvan joukosta
$$\binom{50}{1} = 50 \text{ eri tavalla.}$$

Kaksi ei voittavaa arpaa voidaan valita $400 - 50 = 350$ arvan joukosta
$$\binom{350}{2} = 61\,075 \text{ eri tavalla.}$$

Tuloperiaatteen mukaan eri vaihtoehtoja on $50 \cdot 61\,075 = 3\,053\,750$.

Kohdan a) tavoista 3 053 750 on sellaisia, joissa yksi arpa voittaa ja kaksi arpaa ei voita.

Vastaus: 3 053 750

- 168. a)** Kahdeksastatoista opiskelijasta voidaan koota erilaisia kolmen hengen ryhmiä $\binom{18}{3} = 816$.

Vastaus: 816 ryhmää

- b)** Kristiinan ja Vilman täytyy osua ryhmään, joten ryhmään valitaan enää yksi muu henkilö. Tämä valinta voidaan tehdä $18 - 2 = 16$ eri tavalla.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{16}{816} = 0,0196... \approx 2\%$$

Noin 2 % a-kohdan tavoista on sellaisia, joissa ryhmään osuu sekä Kristiina että Vilma.

Vastaus: 2 %

169. a) Ensimmäisen pöydän vieraat voidaan valita

$$\binom{80}{8} = 2,898... \cdot 10^{10} \approx 2,9 \cdot 10^{10} \text{ eri tavalla.}$$

Vastaus: $2,9 \cdot 10^{10}$:llä eri tavalla

- b) Ensimmäiseen pöytään voidaan valita vieraat $\binom{80}{8}$ eri tavalla.

Toiseen pöytään on valittavissa olevia vieraita $80 - 8 = 72$.

Vieraat voidaan valita $\binom{72}{8}$ eri tavalla.

Kolmanteen pöytään voidaan valita vieraat $\binom{64}{8}$ eri tavalla.

Vastaavasti neljänteen $\binom{56}{8}$ eri tavalla,

viidenteen $\binom{48}{8}$ eri tavalla,

kuudenteen $\binom{40}{8}$ eri tavalla,

seitsemänteen $\binom{32}{8}$ eri tavalla,

kahdeksanteen $\binom{24}{8}$ eri tavalla,

yhdeksänteen $\binom{16}{8}$ eri tavalla ja

kymmenenteen $\binom{8}{8}$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$$\binom{80}{8} \cdot \binom{72}{8} \cdot \binom{64}{8} \cdot \binom{56}{8} \cdot \binom{48}{8} \cdot$$

$$\binom{40}{8} \cdot \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = 6,302... \cdot 10^{72} \approx 6,3 \cdot 10^{72}$$

Vastaus: $6,3 \cdot 10^{72}$:lla eri tavalla

- 170.** Tarkastellaan ensiksi kolmea samanarvoista korttia. Aloitetaan tarkastelu ässistä. Neljästä ässistä voidaan valita kolme $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla.

Myös kakkosista valinta voidaan tehdä neljällä eri tavalla. Vastaavasti myös muilla korttien arvoilla.

Korttien arvoja on 13, joten kolme samanarvoista korttia voidaan valita $13 \cdot 4 = 52$:lla eri tavalla.

Tarkastellaan loppuja kahta samanarvoista korttia. Neljästä samanarvoisesta kortista voidaan valita kaksi $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Myös muista korttipakan samanarvoisista korteista voidaan valita kaksi kuudella eri tavalla. Jos pakasta ensin saadut kortit ovat esimerkiksi ässiä, ei ässistä voi muodostaa enää paria.

Kun kolme samanarvoista korttia on valittu, voidaan valita kaksi samanarvoista $12 \cdot 6 = 72$:lla eri tavalla.

Erilaisten täyskäsien määrä on $52 \cdot 72 = 3744$.

Vastaus: 3744 kättä

- 171. a)** Kolmentoista hengen joukosta valitaan viisi. Valinta voidaan tehdä $\binom{13}{5} = 1287$ tavalla.

Vastaus: 1287:llä eri tavalla

- b)** Kolmentoista hengen joukosta valitaan kahdeksan. Valinta voidaan tehdä $\binom{13}{8} = 1287$ tavalla.

Vastaus: 1287:llä eri tavalla

- c)** Kohtien a ja b tulokset ovat yhtä suuret. Tämä voidaan selittää sillä, että koska $5 + 8 = 13$, voidaan esimerkiksi b-kohdan kysymys muotoilla "Kuinka monella tavalla voidaan 13 henkilön joukosta jättää 5 valitsematta".

Vastaus: -

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

172. Kombinaatio on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a) Sievennetään lauseke $\binom{6}{4}$.

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Vastaus: 15

b) Sievennetään lauseke $\binom{10}{2}$.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9}{\cancel{2} \cdot 1} = 45$$

Vastaus: 45

c) Sievennetään lauseke $\binom{100}{100}$.

$$\binom{100}{100} = \frac{100!}{100!(100-100)!} = \frac{100!}{100! \cdot 0!} = \frac{\cancel{100!}}{\cancel{100!} \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Vastaus: 1

d) Sievennetään lauseke $\binom{8}{0}$.

$$\binom{8}{0} = \frac{8!}{0!(8-0)!} = \frac{8!}{0! \cdot 8!} = \frac{\cancel{8!}}{1 \cdot \cancel{8!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Vastaus: 1

- 173. a)** Marja voi valita korurasiansa koruista kaksi viidellätoista eri tavalla. Merkitään korujen määrää kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä korujen määrä x ohjelmalla.

$$\binom{x}{2} = 15$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 6$ tai $x = -5$. Negatiivinen vastaus hylätään.

Korurasiassa on kuusi korua.

Vastaus: 6 korua

- b)** Merkitään ryhmäkoko kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se ohjelmalla.

$$\binom{24}{x} = 134\,596$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 6$ tai $x = 18$.

Ryhmässä on 6 tai 18 henkilöä.

Vastaus: 6 tai 18 henkeä

- 174. a)** Täytteistä voidaan valita 2 erilaista $\binom{15}{2} = 105$ eri tavalla ja kolme erilaista $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla. Erilaiset täytteen voidaan valita siis yhteensä $105 + 455 = 560$ eri tavalla. Jokainen täyteyhdistelmä voidaan valita kolmella eri pitsapohjalla, joten erilaisia pitsoja on $3 \cdot 560 = 1680$. Joka viikko syödään viisi erilaista pitsaa, joten Veetu voi syödä erilaisia pitsoja $\frac{1680}{5} = 336$ viikkoa.

Vastaus: 336 viikkoa

- b)** Kahden täytteen pitsat maksavat yhteensä $105 \cdot 7,5 \text{ €} + 105 \cdot 8,5 \text{ €} + 105 \cdot 10,5 \text{ €} = 2782,5 \text{ €}$.

Kolmen täytteen pitsat maksavat $455 \cdot 8,5 \text{ €} + 455 \cdot 9,5 \text{ €} + 455 \cdot 11,5 \text{ €} = 13422,5 \text{ €}$.

Yhteensä pitsat maksavat $2782,5 \text{ €} + 13422,5 \text{ €} = 16205 \text{ €}$.

Keskimääräinen pitsan hinta on tällöin

$$\frac{16\,205 \text{ €}}{1680} = 9,645... \text{ €} \approx 9,65 \text{ €}.$$

Vastaus: 9,65 euroa

- 175.** On näytettävä, että $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$.

Muokataan vasenta puolta.

$$\overset{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$$

Vastaus: —

176. Korttipakasta nostetaan kahdeksan korttia, joista täsmälleen neljä korttia on patoja. Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on patoja ja 39 muita kortteja.

Kolmestatoista padasta voidaan nostaa neljä $\binom{13}{4}$:llä eri tavalla.

39 muusta kortista voidaan nostaa neljä $\binom{39}{4}$:llä eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia täsmälleen neljä pataa sisältäviä kahdeksan kortin käsiä on $\binom{13}{4} \cdot \binom{39}{4} = 58\,809\,465$.

Kaapo ei huomionnut muiden korttien järjestyksiä.

Uolevi laski oikein.

Johanna on laskenut laskimella väärin, käyttänyt komentoa nPr (permutaatio) kombinaation sijaan.

Iivari ei ole huomionnut ehtoa täsmälleen neljästä padasta.

Roosa ei ole vähentänyt muista korteista patoja.

Ellen on laskenut, kuinka monta erilaista neljän kortin järjestystä kolmestatoista kortista voidaan muodostaa.

Vastaus: Uolevin