107

a) Korttipakasta nostetaan peräkkäin kolme korttia palauttamatta niitä takaisin. Pakassa on 26 mustaa korttia, kortteja on kaikkiaan 52.

$$P(\text{ensimmäinen kortti on musta}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

b) Jos ensimmäinen kortti on musta, pakassa on edelleen 13 ruutua.

$$P(\text{toinen kortti on ruutu} \mid \text{ensimmäinen kortti on musta})$$
$$= \frac{13}{51} = 0{,}2549... \approx 0{,}255$$

c) Jos ensimmäinen kortti on musta ja toinen on ruutu, pakassa on edelleen 13 herttaa.

$$P(\text{kolmas kortti on hertta} \mid$$
$$\text{ensimmäinen kortti on musta ja toinen ruutu})$$
$$= \frac{13}{50} = 0{,}26$$

Vastaus a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{13}{51} \approx 0{,}255$ c) $\frac{13}{50} = 0{,}26$

108

Lintulaudalla käyvistä pikkulinnuista 36 %:lla on höyhenpuvussaan keltaista väriä ja linnuista 12 % on keltasirkkuja.

Olkoot tapahtumat A: ”linnun höyhenpuvussa on keltaista väriä” ja B: ”lintu on keltasirkku”.

$$P(B \mid A) = \frac{0,12}{0,36} = \frac{1}{3} = 0,333... \approx 0,33$$

Vastaus $\frac{1}{3} \approx 0,33$

109

Jääkaapissa on 1 pullo balsamietikkaa, 2 pulloa ruokaöljyä, 3 pulloa punaista ja 5 pulloa keltaista limonadia. Yhteensä jääkaapissa on 11 pulloa.

a) Olkoon tapahtuma A: ”umpimähkään valitussa pullossa ei ole limonadia”.

Sellaisia pulloja, joissa ei ole limonadia, on 3.

$$P(A)=\frac{3}{11}=0,2727...\approx 0,27$$

b) Olkoon tapahtuma B: ”umpimähkään valitussa pullossa on ruokaöljyä”.

$$P(B)=\frac{2}{11}=0,1818...\approx 0,18$$

c) On laskettava ehdollinen todennäköisyys $P(B\mid A)$.

$$P(B\text{ ja A})=\frac{2}{11}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\text{ ja A})}{P(A)}=\frac{\frac{2}{11}}{\frac{3}{11}}=\frac{2}{3}=0,666...\approx 0,67$$

Vastaus a) $\frac{3}{11}\approx 0,27$ b) $\frac{2}{11}\approx 0,18$ c) $\frac{2}{3}\approx 0,67$

110

Korttipakasta nostetaan peräkkäin viisi korttia palauttamatta niitä takaisin pakkaan.

a) $P(1.\text{ ysi ja } 2.\text{ ysi})$

$= P(1.\text{ ysi}) \cdot P(2.\text{ ysi} \mid 1.\text{ ysi})$

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221} = 0{,}004524... \approx 0{,}00452$

b) $P(\text{kolme ensimmäistä ovat mustia})$

$= P(1.\text{ musta}) \cdot P(2.\text{ musta} \mid 1.\text{ musta}) \cdot P(3.\text{ musta} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ musta})$

$= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{2}{17} = 0{,}1176... \approx 0{,}118$

c) $P(\text{kaikki viisi ovat herttoja})$

$= P(1.\text{ hertta}) \cdot P(2.\text{ hertta} \mid 1.\text{ hertta}) \cdot P(3.\text{ hertta} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ hertta}) \cdot$

$P(4.\text{ hertta} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ ja } 3.\text{ hertta}) \cdot P(5.\text{ hertta} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ ja } 3.\text{ ja } 4.\text{ hertta})$

$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66640} = 0{,}0004951... \approx 0{,}000495$

Vastaus a) $\frac{1}{221} \approx 0{,}00452$

b) $\frac{2}{17} \approx 0{,}118$

c) $\frac{33}{66\,640} \approx 0{,}000495$

111

Laatikossa on 6 punaista ja 3 sinistä palloa. Palloja on yhteensä 9. Laatikosta nostetaan peräkkäin palloja palauttamatta niitä takaisin.

a) $P(\text{ensimmäinen pallo on punainen})$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0,666... \approx 0,67$$

b) $P(\text{2. pallo on sininen kun ensimmäinen oli punainen})$

$$= \frac{3}{8} = 0,38$$

c) $P(\text{kolme ensimmäistä ovat sinisiä})$

$$= P(\text{1. sininen}) \cdot P(\text{2. sininen} \mid \text{1. sininen}) \cdot P(\text{3. sininen} \mid \text{1. ja 2. sininen})$$

$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84} = 0,1190... \approx 0,12$$

Vastaus a) $\frac{2}{3} \approx 0,67$ b) $\frac{3}{8} = 0,38$ c) $\frac{1}{84} \approx 0,12$

112

Olkoon tapahtuma
A: ”neljällä nopanheitolla saadaan ainakin yksi kuutonen”.

Tapahtuman A vastatapahtuma on
$\overline{A}$: "neljällä nopan heitolla ei saada yhtään kuutosta".

Lasketaan, millä todennäköisyydellä neljällä heitolla ei saada yhtään kuutosta.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}) &= P(1.\text{ ei kuutonen})\cdot P(2.\text{ ei kuutonen} \mid 1.\text{ ei kuutonen})\\&\quad\cdot P(3.\text{ ei kuutonen} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ ei kuutonen})\\&\quad\cdot P(4.\text{ ei kuutonen} \mid 1.\text{ ja } 2.\text{ ja } 3.\text{ ei kuutonen})\\&= \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{625}{1296}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\overline{A})\\&= 1 - \frac{671}{1296}\\&= 0{,}5177...\end{aligned}$$

Tapahtuman ”neljällä nopanheitolla saadaan ainakin yksi kuutonen” puolesta kannattaa lyödä vetoa, koska todennäköisyys on yli 0,5.

Vastaus Kannattaa

113

Olkoot tapahtumat
A: ” 1. valo on punainen”,
B: ”2. valo on punainen” ja
C: ”3. valo on punainen”.

$P(A) = P(B) = P(C) = 0,40$

a) $P(\text{ei joudu pysähtymään valoihin kertaakaan})$
$= P(\overline{A} \text{ ja } \overline{B} \text{ ja } \overline{C})$
$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$
$= (1-0,4) \cdot (1-0,4) \cdot (1-0,4)$
$= 0,6^3 = 0,216$

b) $P(\text{joutuu pysähtymään kaikkiin valoihin})$
$= P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$
$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
$= 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4$
$= 0,4^3 = 0,064$

c) $P(\text{joutuu pysähtymään ainakin kerran})$
$= 1 - P(\text{ei joudu pysähtymään valoihin kertaakaan})$
$= 1 - 0,216 = 0,784$

d) Tapahtuma ”kävelijä joutuu pysähtymään täsmälleen kerran” voi tapahtua kolmella tavalla. Hän voi joutua pysähtymään ensimmäisissä, toisissa tai kolmansissa valoissa.

Koska kaikki valot näyttävät punaista yhtä pitkän ajan, riittää, että lasketaan yhden tapauksen todennäköisyys.

$$P(\text{kävelijä joutuu pysähtymään täsmälleen kerran})$$

$$= P(A\ \overline{B}\ \overline{C}\ \text{ tai }\ \overline{A}\ B\ \overline{C}\ \text{tai }\ \overline{A}\ \overline{B}\ C)$$

Tapahtumat erilliset

$$= P(A\ \overline{B}\ \overline{C}) + P(\overline{A}\ B\ \overline{C} + P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)$$

Tapahtumien todennä-
köisyydet samat

$$= 3 \cdot P(A\ \overline{B}\ \overline{C})$$

$$= 3 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4) \cdot (1-0,4)$$

$$= 3 \cdot 0,144 = 0,432$$

Vastaus a) 0,216 b) 0,064 c) 0,784 d) 0,432

114

Astiassa on lappuja, joihin on kuhunkin kirjoitettu yksi kirjain. Kirjaimet ovat S, O, U, T, U, V, E, N, E. Kirjaimia on yhteensä 9 kappaletta. Astiasta nostetaan umpimähkään peräkkäin neljä lappua.

a) Kun laput palautetaan takaisin aina noston jälkeen, nostot ovat riippumattomia.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"VETO"})\\
&= P(\text{V})\cdot P(\text{E}|\text{V})\cdot P(\text{T}|\text{VE})\cdot P(\text{O}|\text{ VET})\\
&=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{6561}\\
&=0{,}0003048...\approx 0{,}000305
\end{aligned}
$$

b) Kun lappuja ei palauteta takaisin nostojen jälkeen, tapahtumat eivät ole riippumattomia.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"SUUT"})\\
&=\text{P(S)}\cdot P(U\,|\,S)\cdot P(U\,|\,SU)\cdot P(T\,|SUU)\\
&=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3024}=\frac{1}{1512}\\
&=0{,}0006613...\approx 0{,}000661
\end{aligned}
$$

c) $P(\text{"ESSU"})$

$$=\mathrm{P(E)}\cdot P(S|E)\cdot P(S|ES)\cdot P(U\,|\,ESS)$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{0}{7}\cdot 0=0$$

Vastaus a) $\dfrac{2}{6561}\approx 0,000305$ b) $\dfrac{1}{1512}\approx 0,000661$ c) 0

115

Penalla uimahousut putoavat mutkassa 10 % todennäköisyydellä.

a) $P(\text{uimahousut putosivat 1. mutkassa}) = 0,10 = 10\%$

b) Tapahtuma ”uimahousut putosivat toisessa mutkassa” tarkoittaa, että ne eivät ole pudonneet ensimmäisessä mutkassa.

$P(\text{uimahousut eivät pudonneet 1. mutkassa ja putosivat 2. mutkassa})$
$= (1-0,10)\cdot 0,10 = 0,09 = 9\%$

c) Tapahtuma ”uimahousut putosivat kolmannessa mutkassa” tarkoittaa, että ne eivät ole pudonneet ensimmäisessä tai toisessa mutkassa.

$P(\text{uimahousut eivät pudonneet 1. mutkassa}$
$\quad\text{ja eivät pudonneet 2. mutkassa}$
$\quad\text{ja putosivat 3. mutkassa})$
$= (1-0,10)\cdot(1-0,10)\cdot 0,10$
$= 0,081 = 8,1\%$

d) Tapahtuma ”uimahousut eivät pudonneet” tarkoittaa, että uimahousut eivät pudonneet yhdessäkään kolmesta mutkasta.

P(uimahousut eivät pudonneet 1. mutkassa

ja eivät pudonneet 2. mutkassa

ja eivät pudonneet 3. mutkassa)

$= (1-0,10)\cdot(1-0,10)\cdot(1-0,10)$

$= 0,729 = 72,9\%$

e) Tapahtuman ”uimahousut putosivat” vastatapahtuma on ”uimahousut eivät pudonneet”.

P(uimahousut putosivat)

$= 1 - P$(uimahousut eivät pudonneet)

$= 1 - 0,729$

$= 0,271 = 27,1\%$

Vastaus a) 10% b) 9% c) 8,1% d) 72,9% e) 27,1%

116

A: ”Mikko myöhästyy” $P(A)=0,3$
B: ”Tiina myöhästyy” $P(B)=0,2$

Tiedetään että $P(A \text{ ja } B)=0,05$.

Tapahtumat ovat riippumattomat, jos niille pätee

$P(A \text{ ja } B)=P(A)\cdot P(B)$.

$P(A)\cdot P(B)=0,3\cdot 0,2=0,06\neq 0,05$

Tapahtumat eivät ole riippumattomat, koska

$P(A \text{ ja } B)\neq P(A)\cdot P(B)$.

Vastaus eivät ole

117

Matematiikan ryhmässä on 14 vuonna 2001 syntynyttä opiskelijaa.

Olkoon tapahtuma
A: ”ainakin kahdella opiskelijalla on sama syntymäpäivä”.

Tapahtuman A vastatapahtuma on
$\overline{A} = \text{"kaikki opiskelijat ovat syntyneet eri päivinä"}$.

Jos kaikki opiskelijat ovat syntyneet eri päivinä, ensimmäinen opiskelija on voinut syntyä minä päivänä tahansa.

Toisen on pitänyt syntyä eri päivänä, joten vaihtoehtoja on 364.

Kolmannen on pitänyt syntyä eri päivänä kuin kaksi edellistä, joten vaihtoehtoja on 363 jne.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

$$= 1 - \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365}\cdot\frac{360}{365}\cdot\frac{359}{365}\cdot\frac{358}{365}$$
$$\cdot\frac{357}{365}\cdot\frac{356}{365}\cdot\frac{355}{365}\cdot\frac{354}{365}\cdot\frac{353}{365}\cdot\frac{352}{365}$$

$$= 1 - \frac{\frac{365!}{351!}}{365^{14}} = 0,2231\ldots \approx 0,22$$

Vastaus 0,22

118

a) Korttipakasta nostetaan peräkkäin kolme korttia palauttamatta niitä takaisin.

Pakassa on 13 herttaa ja lisäksi 3 ässää, jotka eivät ole herttoja.

P(ensimmäinen kortti on hertta tai ässä)

$$=\frac{13+4-1}{52}=\frac{4}{13}=0,3076...\approx 0,31$$

b) Pakasta on nostettu yksi kolmonen, joten pakassa on jäljellä 51 korttia, joista 3 on kolmosia.

P(2. kortti on kolmonen | 1. kortti on herttakolmonen)

$$=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}=0,0588...\approx 0,059$$

c) Pakassa on jäljellä 50 korttia, joista 12 on patoja.

P(3. kortti on pata | 1. on hertta-3 ja 2. pata-3)

$$=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}=0,24$$

Vastaus a) $\frac{4}{13}\approx 0,31$ b) $\frac{1}{17}\approx 0,059$ c) $\frac{6}{25}=0,24$

119

Työpöydällä olevassa kiinnikerasiassa on 5 messinkiruuvia, 3 sinkittyä ruuvia, 17 ruosteista naulaa ja 15 kuparinaulaa.

Ruuveja on rasiassa yhteensä 8.

$$P(\text{rasiasta otettu ruuvi on messinkiä}) = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Vastaus $\frac{5}{8} = 0{,}625$

120

Korttipakasta nostetaan peräkkäin viisi korttia palauttamatta niitä takaisin pakkaan.

a) $P(1.\text{ ruutu ja } 2.\text{ ruutu})$

$= P(1.\text{ ruutu}) \cdot P(2.\text{ ruutu} \mid 1.\text{ ruutu})$

$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17} = 0{,}05882...... \approx 0{,}0588$

b) Korttipakassa on $52 - 13 = 39$ korttia, jotka eivät ole patoja.

$P(\text{mikään korteista ei ole pata})$

$= \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50} \cdot \frac{36}{49} \cdot \frac{35}{48} = \frac{2109}{9520} = 0{,}2215... \approx 0{,}222$

c) Viidettä korttia nostettaessa pakassa on jäljellä 48 korttia, joista 26 ovat mustia.

$P(\text{viides kortti on musta} \mid \text{neljä ensimmäistä olivat punaisia})$

$= \frac{26}{48} = \frac{13}{24} = 0{,}5416... \approx 0{,}542$

Vastaus a) $\frac{1}{17} \approx 0{,}0588$ b) $\frac{2109}{9520} \approx 0{,}222$ c) $\frac{13}{24} \approx 0{,}542$

121

Olkoon tapahtuma
A: ”kahden nopan heitossa saadaan kuutospari”.

$$\begin{aligned}P(A) &= P(1.\text{ kuutonen ja }2.\text{ kuutonen})\\ &= P(1.\text{ kuutonen})\cdot P(2.\text{ kuutonen})\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

Tapahtuman A vastatapahtuma on
$\overline{A} =$ "kahden nopan heitossa ei saada kuutosparia".

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

Olkoon tapahtuma
B: ” heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari” .

Tapahtuman B vastatapahtuma on
$\overline{B}$:” heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa ei saada yhtään kuutosparia”.

$$\begin{aligned}P(B) &= 1 - P(\overline{B})\\ &= 1 - (P(\overline{A}))^{24}\\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}491... < 0{,}5\end{aligned}$$

Tapahtuman B: ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari” puolesta ei kannata lyödä vetoa, koska sen todennäköisyys on alle 0,5.

Vastaus ei kannata

122

a) Laput palautetaan noston jälkeen, joten lappujen määrä säilyy samana.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"TIKKU"})\\
&= P(\text{T})\cdot P(\text{I}|\text{T})\cdot P(\text{K}|\text{TI})\cdot P(\text{K}|\text{TIK})\cdot P(\text{U}|\text{TIKK})\\
&= \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}\\
&= 0{,}00001077.... \approx 0{,}000011
\end{aligned}
$$

b) Lappuja ei palauteta noston jälkeen, joten lappujen määrä vähenee nostojen myötä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"TÄKKI"})\\
&P(\text{T})\cdot P(\text{Ä}|\text{T})\cdot P(\text{K}|\text{TÄ})\cdot P(\text{K}|\text{TÄK})\cdot P(\text{I}|\text{TÄKK})\\
&= \frac{1}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\\
&= 0{,}0000259... \approx 0{,}000026
\end{aligned}
$$

c) Lappuja ei palauteta noston jälkeen, joten lappujen määrä vähenee nostojen myötä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"KEPPI"})\\
&= P(\text{K})\cdot P(\text{E}|\text{K})\cdot P(\text{P}|\text{KE})\cdot P(\text{P}|\text{KEP})\cdot P(\text{I}|\text{KEPP})\\
&= \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot 0\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,000011 b) 0,000026 c) 0

123

K: ”umpimähkään valittu cuplostanilainen kävelee töihin”

S: ”umpimähkään valittu cuplostanilainen kuljettaa salkkua”

Tiedetään, että

$P(K) = 0,47$

$P(S) = 0,32$

$P(K \text{ ja } S) = 0,17$.

Jos tapahtumat ovat riippumattomat, niille pätee

$P(K \text{ ja } S) = P(K) \cdot P(S)$.

$P(K) \cdot P(S) = 0,47 \cdot 0,32 = 0,1504 \neq 0,17$

Tapahtumat eivät ole riippumattomia, koska

$P(K \text{ ja } S) \neq P(K) \cdot P(S)$.

Vastaus eivät ole

124

Noppaa heitetään kerran.

A: ”nopan silmäluku on 3:lla jaollinen”
B: ”nopan silmäluku on vähintään nelonen”
C: ”Nopan silmäluku on vähintään viitonen”.

a) Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos pätee

$$P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B).$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Silmälukuja, jotka ovat vähintään 4 ja jaollisia 3:lla, on yksi (kuutonen).
Siis

$$P(A \text{ ja } B) = \frac{1}{6}$$

Koska $P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B)$, tapahtumat A ja B ovat riippumattomia.

b) Tapahtumat A ja C ovat riippumattomia, jos pätee

$$P(A \text{ ja } C) = P(A)P(C).$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ja } P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Silmälukuja, jotka ovat vähintään 5 ja jaollisia 3:lla, on yksi. Siis

$$P(A \text{ ja } C) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9}$$

Koska $P(A \text{ ja } C) \neq P(A)P(C)$, tapahtumat A ja C eivät ole riippumattomia.

Vastaus a) ovat b) eivät ole

125

A:”kalenteri unohtui takin taskuun” $P(A)=0{,}12$
B:”kalenteri unohtui lokeroon” $P(B)=0{,}05$
C:”kalenteri unohtui luokkaan” $P(C)=0{,}08$

a) $P(\text{kalenteri unohtui takin taskuun})=0{,}12=12\ \%$

b) Jotta kalenteri voisi unohtua lokeroon, se ei voi unohtua takin taskuun.

$$\begin{aligned}&P(\text{kalenteri unohtui lokeroon})\\&=P(\overline{A}\text{ ja }B)\\&=P(\overline{A})\cdot P(B)\\&=(1-0{,}12)\cdot 0{,}05\\&=0{,}044=4{,}4\ \%\end{aligned}$$

c) Jotta kalenteri voisi unohtua luokkaan, se ei voi unohtua takin taskuun eikä lokeroon.

$$\begin{aligned}&P(\text{kalenteri unohtui luokkaan})\\&=P(\overline{A}\text{ ja }\overline{B}\text{ ja }C)\\&=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)\\&=(1-0{,}12)\cdot(1-0{,}05)\cdot 0{,}08\\&=0{,}06688\approx 6{,}7\ \%\end{aligned}$$

d) $P(\text{kalenteri ei unohtunut minnekään})$

$= P(\overline{A} \text{ ja } \overline{B} \text{ ja } \overline{C})$

$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$

$= (1 - 0{,}12) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}08)$

$= 0{,}7691... \approx 77\ \%$

e) $P(\text{kalenteri unohtui jonnekin})$

$= 1 - P(\text{kalenteri ei unohtunut minnekään})$

$= 1 - 0{,}7691...$

$= 0{,}2308... \approx 23\ \%$

Vastaus a) 12 % b) 4,4 % c) 6,7 % d) 77 % e) 23 %

126

a) Palkinto on yhdessä kolmesta laatikosta ja kilpailija valitsee umpimähkään laatikon.

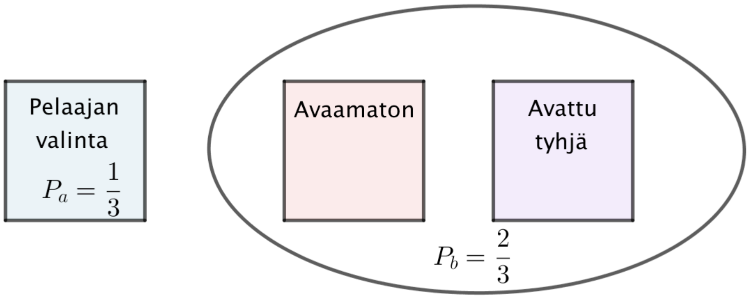
P(palkinto on voittajan alunperin valitsemassa laatikossa)

$= \frac{1}{3} = 0,333...$

b) P(palkinto ei ole kilpailijan valitsemassa laatikossa)

$= 1 - P$(palkinto on kilpailijan valitsemassa laatikossa)

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,666...$



Kun juontaja avaa tyhjän laatikon, todennäköisyys, että palkinto on kyseisessä laatikossa, on 0.

Tällöin todennäköisyys, että palkinto on suljetussa laatikossa, jota kilpailija ei ole valinnut, on $\frac{2}{3}$.

c) Kilpailijan kannattaa vaihtaa laatikkoa, koska palkinto on suuremmalla todennäköisyydellä alun perin valitsematta jääneessä avaamattomassa laatikossa.

Vastaus a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) kannattaa vaihtaa

127

Olkoon tapahtuma A: ”arvassa on voitto” ja $P(A) = 0,15$.

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\overline{A}$: ”arvassa ei ole voittoa” ja

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,15 = 0,85$.

Ostetaan x määrä arpoja ja halutaan, että ainakin yhdessä arvassa on voitto vähintään todennäköisyydellä 0,99.

Tapahtuman ”ainakin yhdessä arvassa on voitto” vastatapahtuma on ”yhdessäkään arvassa ei ole voittoa”.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yhdessä } x \text{ arvasta on voitto}) &\geq 0,99 \\ 1 - P(\text{yhdessäkään } x \text{ arvasta ei ole voittoa}) &\geq 0,99 \\ 1 - (P(\overline{A}))^x &\geq 0,99 \\ 1 - 0,85^x &\geq 0,99 \\ x &\geq 28,33... \\ x &= 29,\ 30,\ 31,\ ... \end{aligned}$$

Arpoja on ostettava vähintään 29 kappaletta.

Vastaus vähintään 29

128

Kurssin kaikki opiskelijat ovat syntyneet vuonna 2001.
Olkoon kurssilla n opiskelijaa.

Halutaan, että tapahtuman A: ”ainakin kaksi opiskelijaa on syntynyt samana päivänä” todennäköisyys on suurempi kuin 0,5.

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\overline{A}$: ”ketkään kaksi opiskelijaa eivät ole syntyneet samana päivänä”.

$$
\begin{aligned}
P(A) &> 0,5 \\
1 - P(\overline{A}) &> 0,5 \\
P(\overline{A}) &< 0,5
\end{aligned}
$$

Vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyyden on siis oltava pienempi kuin 0,5.

Vastatapahtumassa ensimmäinen opiskelija on voinut syntyä minä päivänä tahansa. Toiselle jää $365 - 1 = 364$ mahdollista syntymäpäivää. Kolmannelle jää $364 - 2$ mahdollista syntymä päivää. Ja viimeiselle jää $365 - (n - 1) = 366 - n$ mahdollista syntymäpäivää.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{366-n}{365} \\
&= \frac{\frac{365!}{(366-n-1)!}}{365^n} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^2}
\end{aligned}
$$

Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$P(\overline{A}) < 0,5$$

$$\frac{\dfrac{365!}{(365-n)!}}{365^2} < 0,5$$

Kun n kasvaa, niin saadun epäyhtälön vasen puoli pienenee.
Ratkaistaan epäyhtälö kokeilemalla sopivia n:n kokonaislukuarvoja.

Kun $n = 22$, $P(\overline{A}) = 0,5243... > 0,5$ ei riitä

Kun $n = 23$, $P(\overline{A}) = 0,4927... < 0,5$ riittää

Opiskelijoita on oltava vähintään 23, jotta todennäköisyys, että ainakin kaksi opiskelijaa on syntynyt samana päivänä, on yli 0,5.

Vastaus vähintään 23 opiskelijaa

129

Olkoot tapahtumat
A: ”asiakas ostaa kahvin” ja
B: ”asiakas ostaa pullan”.

$P(A) = 0,74$, $P(B) = 0,39$ ja $P(A \text{ ja } B) = 0,26$.

a) $$\begin{aligned} P(A \text{ tai } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B) \\ &= 0,74 + 0,39 - 0,26 \\ &= 0,87 \end{aligned}$$

b) Tapahtuma ”asiakas ei osta kahvia eikä pullaa” on tapahtuman ”asiakas ostaa kahvin tai pullan” vastatapahtuma.

$$\begin{aligned} P(\text{asiakas ei osta kahvia eikä pullaa}) &= 1 - P(A \text{ tai } B) \\ &= 1 - 0,87 \\ &= 0,13 \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,87 b) 0,13

130

a) Korttipakassa on 52 korttia ja niistä 13 on patoja.

$$P(\text{korttipakasta nostettu kortti on pata}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

b) Korttipakassa on 4 kakkosta.

$$P(\text{korttipakasta nostettu kortti on kakkonen})$$
$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0{,}07692... \approx 0{,}0769$$

c) Korttipakassa on patakakkosia yksi kappale, joten

$$P(\text{korttipakasta nostettu kortti on pata ja kakkonen}) = \frac{1}{52}.$$

$$P(\text{korttipakasta nostettu kortti on pata tai kakkonen})$$
$$= P(\text{pata}) + P(\text{kakkonen}) - P(\text{pata ja kakkonen})$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$
$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13} = 0{,}3076... \approx 0{,}308$$

Vastaus a) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ b) $\frac{1}{13} \approx 0{,}0769$ c) $\frac{4}{13} \approx 0{,}308$

131

52 kortin korttipakasta nostetaan kaksi korttia palauttamatta kortteja nostojen välissä pakkaan.

a) Pakassa on 26 punaista korttia.

$$P(\text{saadaan kaksi punaista korttia})$$
$$= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102} = 0{,}2450... \approx 0{,}245$$

b) Pakassa on 4 ässää.

$$P(\text{saadaan kaksi ässää})$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221} = 0{,}004524... \approx 0{,}00452$$

c) Pakassa on kaksi punaista ässää.

$$P(\text{saadaan kaksi punaista ässää}) = \frac{2}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{1326}$$

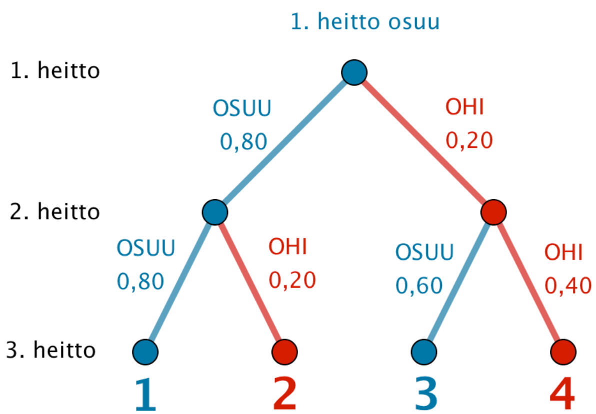
$$P(\text{saadaan kaksi punaista korttia tai kaksi ässää})$$
$$= P(\text{kaksi punaista}) + P(\text{kaksi ässää}) - P(\text{kaksi punaista ässää})$$
$$= \frac{25}{102} + \frac{1}{221} - \frac{1}{1326}$$
$$= \frac{55}{221} = 0{,}2488... \approx 0{,}249$$

Vastaus a) $\frac{25}{102} \approx 0{,}245$ b) $\frac{1}{221} \approx 0{,}00452$ c) $\frac{55}{221} \approx 0{,}249$

132

Koripalloilija osuu vapaaheitolla koriin 80 % todennäköisyydellä, mikäli edellinen heitto on osunut koriin, ja 60 % todennäköisyydellä, mikäli edellinen heitto on mennyt ohi.

Piirretään puukaavio, kun ensimmäinen heitto osuu koriin.



Suotuisat alkeistapaukset ovat 1 ja 3, koska niissä kolmas heitto osuu koriin.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kolmas osuu} \mid \text{ensimmäinen osuu}) \\
&= P(\text{1. osuu ja 2. osuu tai 1. ohi ja 2. osuu}) \\
&= 0,80 \cdot 0,80 + 0,20 \cdot 0,60 \\
&= 0,76 = 76\ \%
\end{aligned}
$$

Vastaus 76 %

133

A: ”lapsi on poika” $P(A) = 0,511$
B: ”lapsi on tyttö” $P(B) = 0,489$

Oletetaan, että tapahtumat ovat erilliset eli lapsi ei voi olla poika ja tyttö. Tällöin $P(A \text{ ja } B) = 0$.

$P(\text{kolmilapsisen perheen kaikki lapset samaa sukupuolta})$
$= P(AAA \text{ tai } BBB)$
$= P(AAA) + P(BBB)$
$= 0,511^3 + 0,489^3$
$= 0,2503... \approx 0,250$

Vastaus 0,250

134

Olkoon tapahtuma A: ”kukkasipuli itää” ja $P(A)=0,82$.

Maahan istutetaan kaksi kukkasipulia.

a) $P(\text{molemmat itävät})$

$=P(A \text{ ja } A)$

$=P(A)\cdot P(A)$

$=0,82\cdot 0,82$

$=0,6724\approx 0,67$

b) $P(\text{vain toinen itää})$

$=P(A \text{ ja } \overline{A} \text{ tai } \overline{A} \text{ ja } A)$

$=P(A)\cdot P(\overline{A})+P(\overline{A})\cdot P(A)$

$=0,82\cdot(1-0,82)+(1-0,82)\cdot 0,82$

$=0,2952\approx 0,30$

c) Tapahtuman ”ainakin toinen itää” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei idä”.

$P(\text{ainakin toinen itää})$

$=1-P(\text{kumpikaan ei idä})$

$=1-P(\overline{A} \text{ ja } \overline{A})$

$=1-(1-0,82)\cdot(1-0,82)$

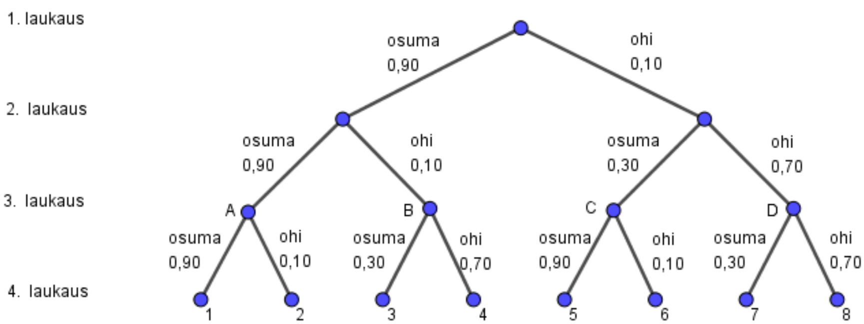
$=0,9676\approx 0,97$

Vastaus a) 0,67 b) 0,30 c) 0,97

135

Jos laukaus osuu tauluun, niin seuraava laukaus osuu tauluun todennäköisyydellä 0,90. Jos laukaus ei osu tauluun, niin seuraavakaan laukaus ei osu todennäköisyydellä 0,70.

Laaditaan puukaavio, kun ensimmäinen laukaus osuu tauluun.



Merkitään s = osuma ja h = ohi.

a) Suotuisat tapaukset ovat A ja C, koska niissä kolmas laukaus osuu tauluun.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kolma laukaus osuu}) \\
&= P(ss \text{ tai } hs) \\
&= 0,90 \cdot 0,90 + 0,10 \cdot 0,30 \\
&= 0,84
\end{aligned}
$$

b) Suotuisat tapaukset ovat 2, 4, 6 ja 8, koska niissä neljäs laukaus ei osu tauluun.

$$\begin{aligned}
&P(\text{neljäs laukaus ei osu})\\
&= P(ssh \text{ tai } shh \text{ tai } hsh \text{ tai } hhh)\\
&= 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}10+0{,}90\cdot 0{,}10\cdot 0{,}70+0{,}10\cdot 0{,}30\cdot 0{,}10\\
&\quad +0{,}10\cdot 0{,}70\cdot 0{,}70\\
&= 0{,}196\approx 0{,}20
\end{aligned}$$

Vastaus a) 0,84 b) 0,20

136

A: ”1. automaatti on rikki” $P(A) = 0{,}15$

B: ”2. automaatti on rikki” $P(B) = 0{,}15$

$P(A \text{ ja } B) = 0{,}03$

a) $P(\text{ainakin toinen automaatti toimii})$
$= 1 - P(\text{molemmat ovat rikki})$
$= 1 - P(A \text{ ja } B)$
$= 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

b)

$P(\text{molemmat automaatit toimivat})$
$= 1 - P(\text{ainakin toinen automaatti rikki})$
$= 1 - P(\text{1. tai 2. automaatti on rikki})$
$= 1 - P(A \text{ tai } B)$
$= 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)\big)$
$= 1 - (0{,}15 + 0{,}15 - 0{,}03)$
$= 1 - 0{,}27$
$= 0{,}73$

Vastaus a) 0,97 b) 0,73

137

1. rasiassa on yhteensä 9 lankarullaa, 4 mustaa ja 5 punaista.

2. rasiassa on yhteensä 8 lankarullaa, 6 valkoista ja 2 punaista.

Valitaan umpimähkään rasia ja sieltä lankarulla.

a) $P(\text{valittu lankarulla on valkoinen})$

$$= P(\text{valitaan 1. rasia ja valkoinen tai 2. rasia ja valkoinen})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}$$
$$= \frac{3}{8} = 0{,}375$$

b) $P(\text{valittu lankarulla on punainen})$

$$= P(\text{valitaan 1. rasia ja punainen tai 2. rasia ja punainen})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}$$
$$= \frac{29}{72} = 0{,}4027\ldots \approx 0{,}403$$

Vastaus a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ b) $\frac{29}{72} \approx 0{,}403$

138

A: ”jalankulkijalla on heijastin” $P(A) = 0,65$
B: ”jalankulkijalla on sadetakki” $P(B) = 0,24$

$P(A \mid B) = 0,75$

a) $P(\text{jalankulkijalla on sadetakki ja heijastin})$
$= P(B \text{ ja } A)$
$= P(B) \cdot P(A \mid B)$
$= 0,24 \cdot 0,75 = 0,18$

b) $P(\text{jalankulkijalla on sadetakki tai heijastin})$
$= P(A \text{ tai } B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$
$= 0,24 + 0,65 - 0,18 = 0,71$

c) $P(\text{jalankulkijalla ei ole heijastinta eikä sadetakkia})$
$= 1 - P(\text{jalankulkijalla on sadetakki tai heijastin})$
$= 1 - 0,71 = 0,29$

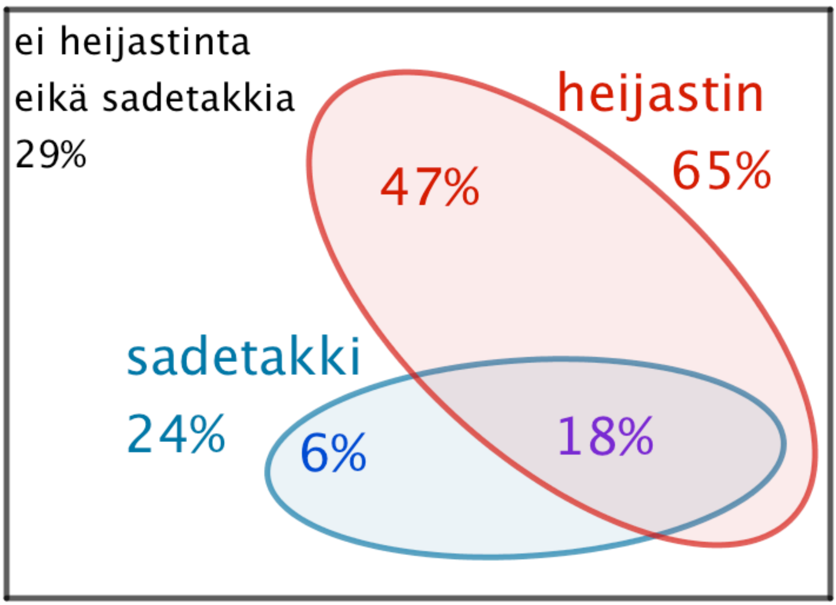
d) $P(\text{jalankulkijalla on sadetakki muttei heijastinta})$

$$= P(\text{sadetakki}) - P(\text{sadetakki ja heijastin})$$
$$= P(B) - P(B \text{ ja } A)$$
$$= 0{,}24 - 0{,}18 = 0{,}06$$

e) $P(\text{jalankulkijalla on heijastin muttei sadetakkia})$

$$= P(\text{heijastin}) - P(\text{sadetakki ja heijastin})$$
$$= P(A) - P(B \text{ ja } A)$$
$$= 0{,}65 - 0{,}18 = 0{,}47$$

Vastaus a) 0,18 b) 0,71 c) 0,29 d) 0,06 e) 0,47



139

A: ”asiakas haluaa mansikkahilloa”

B: ”asiakas haluaa kermavaahtoa”

$P(A) = 0,68$, $P(B) = 0,46$ ja $P(A \text{ ja } B) = 0,24$

$$\begin{aligned}
&P(\text{asiakas ei halua mansikkahilloa eikä kermavaahtoa})\\
&= 1 - P(\text{asiakas haluaa mansikkahilloa tai kermavaahtoa})\\
&= 1 - P(A \text{ tai } B)\\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B))\\
&= 1 - (0,68 + 0,46 - 0,24)\\
&= 0,10
\end{aligned}$$

Vastaus 0,10

140

Noppaa heitetään kaksi kertaa.

A: ” ensimmäisellä heitolla tulee kolmonen” $P(A)=\frac{1}{6}$

B: ” toisella heitolla tulee ykkönen” $P(B)=\frac{1}{6}$

$$
\begin{aligned}
&P(A \text{ tai } B)\\
&=P(A)+P(B)-P(A \text{ ja } B)\\
&=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\\
&=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\\
&=\frac{11}{36}=0{,}3055...\approx 0{,}306
\end{aligned}
$$

Vastaus $\frac{11}{36}\approx 0{,}306$

141

A: ”ampumahiihtäjä osuu kaikilla 5 laukauksella pystyammuntapaikalla”

B: ”ampumahiihtäjä osuu kaikilla 5 laukauksella makuuammuntapaikalla”

$P(A) = 0{,}59$, $P(B) = 0{,}72$ ja $P(A \text{ ja } B) = 0{,}39$

a) $P(\text{osuu } 5 \text{ laukauksella pysty- tai makuuammuntapaikalla})$

$$
\begin{aligned}
&= P(A \text{ tai } B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B) \\
&= 0{,}59 + 0{,}72 - 0{,}39 = 0{,}92
\end{aligned}
$$

b) $P(\text{osuu } 5 \text{ laukauksella pystyammuntapaikalta, muttei makuuammuntapaikalta})$

$$
\begin{aligned}
&= P(A) - P(A \text{ ja } B) \\
&= 0{,}59 - 0{,}39 = 0{,}20
\end{aligned}
$$

c) $P(\text{ei osu } 5 \text{ laukauksella kummallakaan ammuntapaikalla})$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(\text{osuu } 5 \text{ laukauksella pysty- tai makuuammuntapaikalla}) \\
&= 1 - P(A \text{ tai } B) \\
&= 1 - 0{,}92 = 0{,}08
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,92 b) 0,20 c) 0,08

142

Rasiassa 1 on 8 käytettyä paristoa ja 5 rikkinäistä akkuparistoa, yhteensä 13 paristoa.

Rasiassa 2 on 12 uutta paristoa.

Rasiassa 3 on 6 ehjää akkuparistoa.

Valitaan umpimähkään rasia ja sieltä kaksi paristoa.

a) Ainoastaan rasiassa 1 on rikkinäisiä akkuparistoja.

$$\begin{aligned}
&P(\text{saadaan kaksi rikkinäistä akkuparistoa})\\
&= P(\text{valitaan rasia 1 ja rikkinäinen akkuparisto ja rikkinäinen}\\
&\quad \text{akkuparisto})\\
&= P(\text{valitaan rasia 1}) \cdot P(\text{valitaan rikkinäinen akkuparisto}|\\
&\quad \text{valitaan rasia 1}) \cdot P(\text{valitaan rikkinäinen akkuparisto}|\\
&\quad \text{valitaan rasia 1 ja rikkinäinen akkuparisto})\\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12}\\
&= \frac{5}{117} = 0{,}0427... \approx 0{,}043
\end{aligned}$$

b) Akkuparistoja on rasioissa 1 ja 3.
Rasiassa 1 on kolme rikkinäistä ja rasiassa 3 kuusi ehjää akkuparistoa.

$$\begin{aligned}
&P(\text{saadaan kaksi akkuparistoa}) \\
&= P(\text{valitaan rasia 1 ja sieltä kaksi akkuparistoa} \\
&\qquad \text{tai rasia 3 ja sieltä kaksi akkuparistoa}) \\
&= \frac{5}{117} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{5} \\
&= \frac{5}{117} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{44}{117} = 0,376... \approx 0,38
\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{5}{117} \approx 0,043$ b) $\frac{44}{117} \approx 0,38$

143

A: ”1. pysäköintipaikka on varattu”
B: ”2. pysäköintipaikka on varattu”

$$P(A)=P(B)=\frac{40\,\text{min}}{60\,\text{min}}=\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad P(A \text{ ja } B)=\frac{32\,\text{min}}{60\,\text{min}}=\frac{8}{15}$$

$$\begin{aligned}
&P(\text{molemmat paikat ovat vapaita})\\
&=1-P(\text{1. tai 2. paikka on varattu})\\
&=1-P(A \text{ tai } B)\\
&=1-(P(A)+P(B)-P(A \text{ ja } B))\\
&=1-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{15}\right)\\
&=\frac{1}{5}=0{,}2
\end{aligned}$$

Vastaus 0,2

144

a) Tapahtuman ”3 heitolla saadaan ainakin yksi ykkönen tai ainakin yksi kuutonen” vastatapahtuma on ” 3 heitolla ei saada yhtään kolmosta eikä yhtään kuutosta”.

Tällöin suotuisia tapauksia ovat silmäluvut 2, 3, 4 ja 5.

$$\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi ykkönen tai ainakin yksi kuutonen})\\
&= 1 - P(\text{ei yhtään ykköstä eikä kutosta})\\
&= 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\\
&= \frac{19}{27} = 0,7037... \approx 0,704
\end{aligned}$$

b) Tapahtuman ”3 heitolla saadaan ainakin yksi ykkönen ja ainakin yksi kuutonen” vastatapahtuma on ”3 heitolla ei saada yhtään ykköstä tai ei saada yhtään kuutosta”.

$$\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi ykkönen ja ainakin yksi kuutonen})\\
&= 1 - P(\text{ei yhtään ykköstä tai ei yhtään kuutosta})\\
&= 1 - \big(P(\text{ei ykköstä}) + P(\text{ei kuutosta})\\
&\qquad\qquad - P(\text{ei ykköstä eikä kutosta})\big)\\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)\\
&= \frac{5}{36} = 0,1388... \approx 0,139
\end{aligned}$$

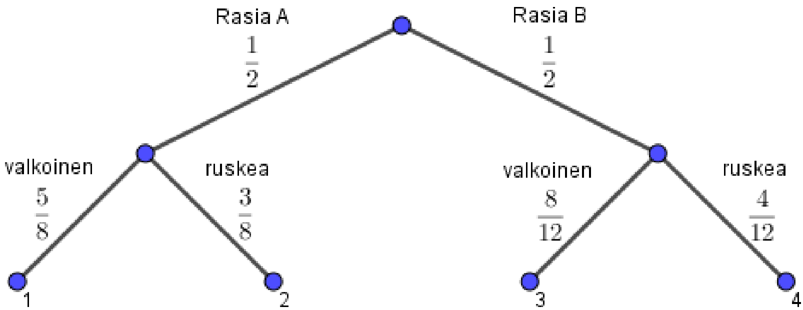
Vastaus a) $\frac{19}{27} \approx 0,704$ b) $\frac{5}{36} \approx 0,139$

145

Rasiassa A on 5 valkoista ja 3 ruskeaa kananmunaa.
Rasiassa B on 8 valkoista ja 4 ruskeaa kananmunaa.

Rasian A munat ovat kaikki pilaantuneita. Rasian B munat ovat kaikki tuoreita.

Luetellaan kaikki mahdolliset tapaukset puukaavion avulla.



Leipurin muna on ruskea, joten toteutuneena on vaihtoehto 2 tai 4.

On laskettava ehdollinen todennäköisyys

$$P(\text{muna pilaantunut} \mid \text{muna ruskea}) = \frac{P(\text{muna pilaantunut ja ruskea})}{P(\text{muna ruskea})}$$

Mikäli muna on pilaantunut, se on otettu rasiasta A.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{muna pilaantunut ja ruskea}) \\
&= P(\text{muna pilaantunut}) \cdot P(\text{ruskea} \mid \text{muna pilaantunut}) \\
&= P(\text{valittu rasia A}) \cdot P(\text{ruskea} \mid \text{valittu rasia A}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(\text{muna ruskea}) \\
&= P(\text{rasia A ja ruskea \ tai \ rasia B ja ruskea}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12} = \frac{17}{48}
\end{aligned}
$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{muna pilaantunut} \mid \text{muna ruskea}) \\
&= \frac{P(\text{muna pilaantunut ja ruskea})}{P(\text{muna ruskea})} \\
&= \frac{\frac{3}{16}}{\frac{17}{48}} = \frac{9}{17} = 0{,}5294... \approx 0{,}53
\end{aligned}
$$

Vastaus $\frac{9}{17} \approx 0{,}53$

146

Olkoot tapahtumat
E: ”Emil heittää kuutosen” ja
M: ”Mikael heittää kuutosen”.

a) Emil aloittaa nopan heiton.

P(Emil voittaa 1. kierroksella)
$= P(E) = \frac{1}{6}$

P(Emil voittaa 2. kierroksella)
$= P(\bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } E)$
$= P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(E) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

P(Emil voittaa 3. kierroksella)
$= P(\bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } \bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } E)$
$= P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(E)$
$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{625}{7776}$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

P(Emil voittaa viimeistään kolmannella kierroksella)
$= P$(Emil voittaa 1. tai 2. tai 3. kierroksella)
$= \frac{1}{6} + \frac{25}{216} + \frac{625}{7776} = 0{,}3627... \approx 0{,}363$

b) Mikael aloittaa nopan heiton.

$P(\text{Emil voittaa 1. kierroksella})$

$= P(\bar{M} \text{ ja } A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$P(\text{Emil voittaa 2. kierroksella})$

$= P(\bar{M} \text{ ja } \bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } E)$

$= P(\bar{M}) \cdot P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(E)$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

$P(\text{Emil voittaa 3. kierroksella})$

$= P(\bar{M} \text{ ja } \bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } \bar{E} \text{ ja } \bar{M} \text{ ja } E)$

$= P(\bar{M}) \cdot P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(\bar{E}) \cdot P(\bar{M}) \cdot P(E)$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3125}{46\,656}$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

$P(\text{Emil voittaa viimeistään kolmannella kierroksella})$

$= P(\text{Emil voittaa 1. tai 2. tai 3. kierroksella})$

$= \frac{5}{36} + \frac{125}{1296} + \frac{3125}{46\,656} = 0,3023... \approx 0,302$

Vastaus a) 0,363 b) 0,302

147

Kaksitoista henkilöä asettuu jonoon umpimähkäisesti.
Olkoon tapahtuma
C: ”Henkilöiden A ja B välissä on korkeintaan kaksi henkilöä”.

Henkilö A voi asettua jonoon mihin kohtaan tahansa.

Tutkitaan, millä todennäköisyydellä henkilö B asettuu jonoon niin, että henkilöiden A ja B välissä on korkeintaan kaksi henkilöä.

1° Jos A asettuu jonon ensimmäiseksi tai viimeiseksi, suotuisia paikkoja on 3 ja $P(C)=\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot 2=\frac{6}{132}$.

A	B	B	B								

2° Jos henkilö A asettuu jonoon toiseksi tai toiseksi viimeiseksi, suotuisia paikkoja on 4 ja $P(C)=\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot 2=\frac{8}{132}$.

B	A	B	B	B							

3° Jos henkilö A asettuu jonoon kolmanneksi tai kolmanneksi viimeiseksi, suotuisia paikkoja on 5 ja $P(C)=\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot 2=\frac{10}{132}$.

B	B	A	B	B	B						

4° Jos henkilö A asettuu jonoon mihin tahansa muuhun jäljellä olevista kuudesta paikasta, on suotuisia paikkoja 6 ja

$$P(C)=\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot 6=\frac{36}{132}.$$

B	B	B	A	B	B	B					

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

Tapaukset 1°, 2°, 3° ja 4° ovat erillisiä.

$P(\text{Henkilöiden A ja B välissä on korkeintaan kaksi henkilöä})$

$$=\frac{6}{132}+\frac{8}{132}+\frac{10}{132}+\frac{36}{132}$$

$$=\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots\approx 0{,}455$$

Vastaus $\frac{5}{11}\approx 0{,}455$

148

Raimon laatikossa on 3 punaista ja 5 sinistä superpalloa.

Leenan laatikossa on 1 musta ja 4 punaista superpalloa.

Kun Raimo on palauttanut pallonsa Leenan laatikkoon, Leenan laatikossa on 6 palloa.

a) $P(\text{Leenan ottama pallo on musta})$

$$= \frac{1}{6} = 0{,}1666... \approx 1{,}167$$

$P(\text{Leena nostaa punaisen pallon})$

$= P(\text{Raimon pallo pun ja Leena nostaa pun}$

$\quad\text{tai Raimon pallo ei pun ja Leena nostaa pun})$

$= P(\text{Raimon pallo pun ja Leena nostaa pun})$

$\quad + P(\text{Raimon pallo ei pun ja Leena nostaa pun})$

b) $$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{16} + \frac{5}{12} = \frac{35}{48} = 0{,}7291... \approx 0{,}729$$

c) Leenan laatikossa ei ole valmiiksi yhtään sinistä palloa. Jotta Leena voi nostaa laatikostaan sinisen pallon, on Raimon pallon oltava sininen.

$P(\text{Leena nostaa sinisen pallon})$

$= P(\text{Raimon pallo sin ja Leena nostaa sin})$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{48} = 0{,}1041... \approx 0{,}104$

Vastaus a) $\frac{1}{6} \approx 1{,}167$ b) $\frac{35}{48} \approx 0{,}729$ c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}104$

Kohdat b ja c voi laskea myös toisin:

b) Leenan laatikossa oli valmiiksi 4 punaista palloa.

Tapaus 1:

$P(\text{Leena nostaa oman pallonsa ja pallo on punainen})$
$= P(\text{Leena nostaa oman pallonsa}) \cdot$
$P(\text{pallo on punainen} \mid \text{Leena nostaa oman pallonsa})$
$= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

Tapaus 2:

Raimon palauttama pallo on todennäköisyydellä $\frac{3}{8}$ punainen.

$$P(\text{Leena nostaa Raimon pallon ja pallo on punainen})$$
$$= P(\text{Leena nostaa Raimon pallon}) \cdot$$
$$P(\text{pallo on punainen} \mid \text{Leena nostaa Raimon pallon})$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$

$$P(\text{Leenan nostama pallo on punainen})$$
$$= P(\text{Leena nostaa oman pallonsa ja pallo on punainen}) +$$
$$P(\text{Leena nostaa Raimon pallon ja pallo on punainen})$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{16} = \frac{35}{48} = 0,7291... \approx 0,729$$

c) Leenan laatikossa ei ole valmiiksi yhtään sinistä palloa. Jotta Leena voi nostaa laatikostaan sinisen pallon, on hänen nostettava Raimon pallo ja pallon tulee olla sininen.

Raimon palauttama pallo on todennäköisyydellä $\frac{5}{8}$ sininen.

$$P(\text{Leenan nostama pallo on sininen.})$$
$$= P(\text{Leena nostaa Raimon pallon ja pallo on sininen})$$
$$= P(\text{Leena nostaa Raimon pallon}) \cdot$$
$$P(\text{pallo on sininen} \mid \text{Leena nostaa Raimon pallon})$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{48} = 0,1041... \approx 0,104$$

149

A: ”kännykkä unohtui opettajanhuoneeseen” $P(A)=0{,}12$
B: ”kännykkä unohtui ruokalaan” $P(B)=0{,}08$
C: ”kännykkä unohtui monistushuoneeseen” $P(C)=0{,}06$
D: ”kännykkä unohtui johonkin”

$$\begin{aligned}P(D) &= 1-P(\text{kännykkä ei unohtunut minnekään})\\ &= 1-P(\overline{A}\ \text{ ja }\ \overline{B}\ \text{ ja }\ \overline{C})\\ &= 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})\\ &= 1-(1-0{,}12)\cdot(1-0{,}08)\cdot(1-0{,}06)\\ &= 1-0{,}88\cdot 0{,}92\cdot 0{,}94\\ &= 0{,}238976...\end{aligned}$$

Opettaja kävi ensin opettajanhuoneessa, sitten ruokalassa ja lopuksi monistushuoneessa.

Lasketaan kysytyt ehdolliset todennäköisyydet.

a) $P(\text{kännykkä unohtui opettajanhuoneeseen} \mid \text{kännykkä unohtui})$

$$= P(A \mid D)$$

$$= \frac{P(A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0{,}12}{0{,}238976...} = 0{,}5021... \approx 50\ \%$$

b) Kännykkä voi unohtua ruokalaan vain, mikäli se ei ole unohtunut opettajanhuoneeseen.

P(kännykkä unohtui ruokalaan | kännykkä unohtui)

$$= \frac{P(\overline{A} \text{ ja } B)}{P(D)}$$

$$= \frac{0,88 \cdot 0,08}{0,238976} = 0{,}2945... \approx 29 \ \%$$

c) Kännykkä voi unohtua monistushuoneeseen vain, mikäli se ei ole unohtunut opettajanhuoneeseen eikä ruokalaan.

P(kännykkä unohtui monistushuoneeseen | kännykkä unohtui)

$$= \frac{P(\overline{A} \text{ ja } \overline{B} \text{ ja } C)}{P(D)}$$

$$= \frac{0,88 \cdot 0,92 \cdot 0,06}{0,238976} = 0{,}2032... \approx 20 \ \%$$

Vastaus a) $0,502... \approx 50 \ \%$

b) $0{,}294... \approx 29 \ \%$

c) $0{,}203... \approx 20 \ \%$

150

Lajin A siemenet itävät keskimäärin 70 % todennäköisyydellä ja lajin B siemenet keskimäärin 90 % todennäköisyydellä.

Puutarhuri kylvää 3 lajin A siementä ja 2 lajin B siementä. Vain yksi siemenistä itää.

Tapahtuma ”lajin A kolmesta siemenestä vain yksi itää” voi tapahtua 3 tavalla: vain 1. siemen itää, vain 2. siemen itää tai vain 3. siemen itää.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{yksi siemen itää lajista A ja ei yksikään lajista B})\\
&= P(\text{vain yksi A-siemen itää}) \cdot P(\text{kumpikaan B-siemen ei idä})\\
&= 3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,00189
\end{aligned}
$$

Tapahtuma ”lajin B kahdesta siemenestä vain yksi” voi tapahtua 2 tavalla: vain 1. siemen itää tai vain 2. siemen itää.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{viidestä siemenestä itää yksi})\\
&= P(\text{yksi siemen itää lajista A ja ei yksikään lajista B}\\
&\qquad \text{tai yksi siemen itää lajista B ja ei yksikään lajista A})\\
&= P(\text{yksi siemen itää lajista A ja ei yksikään lajista B})\\
&\qquad + P(\text{yksi siemen itää lajista B ja ei yksikään lajista A})\\
&= 0,00189 + 2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,00675
\end{aligned}
$$

Lasketaan ehdollinen todennäköisyys.

$$P(\text{yksi lajin A siemen itää} \mid \text{viidestä siemenestä vain yksi itää})$$
$$= \frac{P(\text{yksi siemen itää lajista A ja ei yksikään lajista B})}{P(\text{viidestä siemenestä itää yksi})}$$
$$= \frac{0{,}00189}{0{,}00675} = 0{,}28 = 28\ \%$$

Vastaus 28 %

151

Nopan heittoa voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että nopanheitolla saadaan silmäluku 1 on $\frac{1}{6}$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kaksi ykköstä.

$$P(\text{täsmälleen kaksi ykköstä})$$
$$=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$=\frac{625}{3888}=0{,}160...\approx 0{,}16$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kolme ykköstä.

$$P(\text{täsmälleen kolme ykköstä})$$
$$=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$=\frac{125}{3888}=0{,}0321...\approx 0{,}32$$

Vastaus a) $0{,}16$ b) $0{,}32$

152

Hedelmien pakkaaminen 18 kappaleen myyntipakkauksiin voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 18 toistoa. Todennäköisyys, että yksittäinen hedelmä on pilaantunut, on 3 % = 0,03.

a) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päätyy täsmälleen yksi pilaantunut hedelmä.

$$\begin{aligned}&P(\text{täsmälleen yksi pilaantunut})\\&=\binom{18}{1}\cdot 0{,}03^1\cdot 0{,}97^{17}\\&=0{,}3217\ldots\approx 0{,}32\end{aligned}$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päätyy täsmälleen kaksi pilaantunutta hedelmää.

$$\begin{aligned}&P(\text{täsmälleen kaksi pilaantunutta})\\&=\binom{18}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^{16}\\&=0{,}08458\ldots\approx 0{,}085\end{aligned}$$

Vastaus a) 0,32 b) 0,085

153

Todennäköisyys, että tavaraerässä on virheellinen yksilö,
on 2 % = 0,02.

Lasketaan todennäköisyys, että 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä.

$$\begin{aligned}
&P(\text{enintään 2 virheellistä})\\
&= P(\text{0 virheellistä tai 1 virheellinen tai 2 virheellistä})\\
&= P(\text{0 virheellistä}) + P(\text{1 virheellinen}) + P(\text{2 virheellistä})\\
&= \binom{20}{0}\cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{20} + \binom{20}{1}\cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{19} + \binom{20}{2}\cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{18}\\
&= 0,9929\ldots \approx 0,993
\end{aligned}$$

Vastaus 0,993

154

Todennäköisyys, että koira on valkoruskea, on 72 % = 0,72.

a) Lasketaan todennäköisyys, että näyttelyn 23 koirasta tasan 20 on valkoruskeita.

$$P(20\text{ valkoruskeaa})$$
$$=\binom{23}{20}\cdot 0,72^{20}\cdot 0,28^{3}$$
$$=0,05449...\approx 0,054$$

b) Tapahtuman ”enintään 20 koirista on valkoruskeita” vastatapahtuma on ”21, 22 tai 23 koiraa on valkoruskeita”. Lasketaan todennäkäköisyys.

$$P(\text{enintään 20 valkoruskeaa})$$
$$=1-P(21\text{ tai }22\text{ tai }23\text{ valkoruskeaa})$$
$$=1-(P(21)+P(22)+P(23))$$
$$=1-(\binom{23}{21}\cdot 0,72^{21}\cdot 0,28^{2}+\binom{23}{22}\cdot 0,72^{22}\cdot 0,28^{1}+\binom{23}{23}\cdot 0,72^{23}\cdot 0,28^{0})$$
$$=0,9747...\approx 0,97$$

Vastaus a) 0,054 b) 0,97

155

a) Koska arpojen määrä on suuri voidaan olettaa, että yksittäisen arvan voittotodennäköisyys on $\frac{1}{4}$. (Kyseessä on siis toistokoe.)

Lasketaan todennäköisyys, että viidestä ostetusta arvasta täsmälleen kaksi voittaa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{täsmälleen kaksi voittaa}) \\
&= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\
&= 0,2636... \approx 0,26
\end{aligned}
$$

b) Arpoja on jäljellä 16. Koska arpojen määrä on pieni, kyseessä ei ole toistokoe.

16 arvasta voidaan ostaa 5 arpaa $\binom{16}{5}$ tavalla.

Neljästä voittoarvasta voidaan ostaa 2 arpaa $\binom{4}{2}$ tavalla ja

loput 3 arpaa 12 tyhjästä arvasta $\binom{12}{3}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{täsmälleen kaksi voittaa})$$
$$= \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{16}{5}}$$
$$= 0,3021... \approx 0,30$$

Vastaus a) 0,26 b) 0,30

156

Viiden tikanheittoa voidaan ajatella toistokokeena. Todennäköisyys, että Pekka osuu kymppiin, on 8 % = 0,08. Todennäköisyys, että Pekka ei osu kymppiin on 92 % = 0,92.

a) $P(\text{osuu ensimmäisellä, muttei muilla})$
$= P(\text{osuu ensimmäisellä}) \cdot P(\text{ei osu seuraavalla neljällä})$
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92^4$
$= 0{,}05731... \approx 0{,}057$

b) Tapahtuman ”osuu ainakin yhdellä” vastatapahtuma on ”ei osu yhdelläkään”.

$P(\text{osuu ainakin yhdellä})$
$= 1 - P(\text{ei osu yhdelläkään})$
$= 1 - 0{,}92^5$
$= 0{,}3409... \approx 0{,}34$

c) Lasketaan todennäköisyys, että viidestä heitosta täsmälleen yhdellä tikalla.

$P(\text{osuu täsmälleen yhdellä})$
$= \binom{5}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^4$
$= 0{,}2865... \approx 0{,}29$

Vastaus a) 0,057 b) 0,34 c) 0,29

157

Lentokoneessa on 138 paikaa ja lennolle on myyty 141 matkalippua. Lentomatkan varannut matkustaja saapuu lennolle todennäköisyydellä 95 % = 0,95 ja ei saavu lennolle todennäköisyydellä 5 % = 0,05.

a) Jos tasan yksi matkustaja ei mahdu koneeseen, niin lennolle saapuu tasan 139 matkustajaa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{yksi ei mahdu koneeseen}) \\
&= P(139 \text{ matkustajaa}) \\
&= \binom{141}{139} \cdot 0{,}95^{139} \cdot 0{,}05^{2} \\
&= 0{,}01976... \approx 0{,}0198
\end{aligned}
$$

b) Jos kaikki matkustajat mahtuvat koneeseen, matkustajia saapuu lennolle korkeintaan 138. Tapahtuman ”korkeintaan 138 matkustajaa saapuu lennolle” vastatapahtuma on ”lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kaikki mahtuvat koneeseen}) \\
&= P(\text{lennolle saapuu korkeintaan 138 matkustajaa}) \\
&= 1 - P(\text{lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa}) \\
&= 1 - (\binom{141}{139} \cdot 0{,}95^{139} \cdot 0{,}05^{2} + \binom{141}{140} \cdot 0{,}95^{140} \cdot 0{,}05^{1} \\
&\qquad + \binom{141}{141} \cdot 0{,}95^{141} \cdot 0{,}05^{0}) \\
&= 0{,}9741... \approx 0{,}974
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,0198 b) 0,974

158

Todennäköisyys, että mies on punavihersokea on 8 % = 0,08 ja todennäköisyys, että nainen on punavihersokea on 0,4 % = 0,004.

Kurssin opiskelijoista 19 on tyttöjä ja 15 poikia. Kurssilla on yhteensä 34 opiskelijaa.

Tapahtuman ”ainakin kaksi opiskelijaa on punavihersokeita” vastatapahtuma on ”0 tai 1 on punavihersokeita”.

$$P(\text{ainakin } 2)$$

$$= 1 - P(\text{korkeintaan } 1)$$

$$= 1 - P(0 \text{ tai } 1)$$

$$= 1 - \big(P(0 \text{ p ja } 0 \text{ t}) + P(1 \text{ p ja } 0 \text{ t}) + P(0 \text{ p ja } 1 \text{ t})\big)$$

$$= 1 - (\underbrace{0{,}92^{15} \cdot 0{,}996^{19}}_{\text{0 poikaa ja 0 tyttöä}} + \underbrace{\binom{15}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^{14} \cdot 0{,}996^{19}}_{\text{1 poika ja 0 tyttöä}}$$

$$\underbrace{+\, 0{,}92^{15} \cdot \binom{19}{1} \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996^{18}}_{\text{0 poikaa ja 1 tyttö}})$$

$$= 0{,}3684\ldots \approx 0{,}37$$

Vastaus 0,37

159

Laatikossa on 20 punaista ja 15 keltaista palloa. Laatikosta nostetaan 8 palloa ja pallot palautetaan aina nostojen välissä takaisin laatikkoon.

Punaisen pallon saamisen todennäköisyys on $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$.

Tapahtuma ”saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja” on sama kuin tapahtuma ”saadaan 5, 6, 7 tai 8 punaista palloa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja})\\
&= P(5,\ 6,\ 7 \text{ tai } 8 \text{ punaista palloa})\\
&= P(5)+P(6)+P(7)+P(8)\\
&= \binom{8}{5}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3+\binom{8}{6}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\\
&\qquad +\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^1+\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^0\\
&= 0{,}5272... \approx 0{,}53
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,53

160

Tapahtuman ”toinen kuutonen tulee ennen 10. heittoa” vastatapahtuma on ”9 ensimmäisellä heitolla tulee 0 tai 1 kuutosta”.

Kuutosen todennäköisyys yksittäisess heitossa on $\frac{1}{6}$.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kuutonen tulee ennen 10. heittoa}) \\
&= 1 - P(\text{9 heitolla saadaan 0 tai 1 kuutosta}) \\
&= 1 - (P(\text{0 kuutosta}) + P(\text{1 kuutonen})) \\
&= 1 - (\left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8) \\
&= 0,4573... \approx 0,46
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,46

161

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että 8-sivuisella nopalla saadaan silmäluku 7 on $\frac{1}{8}$.

Lasketaan todennäköisyys, että kymmenellä nopanheitolla puolet heitoista antaa silmäluvun 7 eli saadaan täsmälleen viisi seiskaa.

$$P(\text{täsmälleen viisi seiskaa})$$
$$=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^5$$
$$=0{,}003944\ldots\approx 0{,}0039$$

Vastaus 0,0039

162

Janin laskussa toinen todennäköisyyden laskulauseke on ylimääräinen. Jos heitettäessä kolikkoa 12 kertaa saadaan neljä kruunaa, niin silloin loput kahdeksan on klaavoja.

Lasketaan siis todennäköisyys, että 12 rahanheitolla saadaan täsmälleen 4 kruunaa.

$$P = \binom{12}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^8 = 0,1208... \approx 0,12 .$$

Huomaa, että Janin laskema todennäköisyys oli kaksinkertainen.

163

Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat $P(B)=0{,}17$ ja $P(\mathrm{O})=0{,}33$.

Vampyyri puree 12 ihmistä.

a) Tapahtuman ”joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O” vastatapahtuma on ”joukossa on 10, 11 tai 12 ihmistä, joiden veriryhmä on O”.

Lasketaan todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{enintään 9, joiden veriryhmä on O})\\
&=1-P(\text{10, 11 tai 12, joiden veriryhmä on O})\\
&=1-(P(10)+P(11)+P(12))\\
&=1-\left(\binom{12}{10}\cdot 0{,}33^{10}\cdot 0{,}67^{2}+\binom{12}{11}\cdot 0{,}33^{11}\cdot 0{,}67^{1}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\binom{12}{12}\cdot 0{,}33^{12}\cdot 0{,}67^{0}\right)\\
&=0{,}99950\ldots\approx 0{,}9995
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
&P(\text{joukossa 3 tai 4, joiden veriryhmä on B})\\
&=P(3)+P(4)\\
&=\binom{12}{3}\cdot 0{,}17^{3}\cdot 0{,}83^{9}+\binom{12}{4}\cdot 0{,}17^{4}\cdot 0{,}83^{8}\\
&=0{,}2951\ldots\approx 0{,}295
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,9995 b) 0,295

164

Opiskelija tietää vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput 15 vastausta. Todennäköisyys vastata oikein on $\frac{1}{2}$.

Opiskelijan pitää saada arvatuista vastauksista vähintään 5 oikein, jotta hän läpäisee testin. Tapahtuman ”opiskelija arvaa ainakin 5 vastausta oikein” vastatapahtuma on ”opiskelija arvaa 0, 1, 2, 3 tai 4 oikein”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{opiskelija arvaa ainakin 5 oikein}) \\
&= 1 - P(\text{opiskelija arvaa 0, 1, 2, 3 tai 4 oikein}) \\
&= 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)) \\
&= 1 - (\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \\
&\qquad + \binom{15}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{15}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{30\ 827}{32\ 768} = 0,9407... \approx 0,94$$

Vastaus $0,94$

165

a) Todennäköisyys, että satunnainen kaupungin asukas vastustaa rakentamista on $\frac{1}{5} = 0,2$.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla 2 vastustajaa. Koska kaupunki on suuri, tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi.

P(10 hengestä täsmälleen kaksi vastustaa rakentamista)

$$= \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8$$

$$= 0,3019... \approx 0,302$$

b) Lukion 40 opettajasta joka viides eli $\dfrac{40}{5}=8$ opettajaa vastustaa rakentamista.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla 2 vastustajaa.

Opettajista voidaan 10 hengen otos $\dbinom{40}{10}$ tavalla.

2 vastustajaa voidaan valita kahdeksan vastustajan joukosta $\dbinom{8}{2}$ tavalla ja 8 kannattajaa 32 kannattajan joukosta $\dbinom{32}{8}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(10$ valitusta opettajasta 2 vastustaa rakentamista$)$

$$=\frac{\dbinom{8}{2}\dbinom{32}{8}}{\dbinom{40}{10}}$$

$= 0,3474... \approx 0,347$

Vastaus a) 0,302 b) 0,347

166

Paras tulos ennen Mirvan ja Virven joukkuetta on 4 kymppiä. Voittaakseen Mirvan ja Virven on heitettävä 5 tai 6 kymppiä.

Mirva osuu kymppiin todennäköisyydellä 0,75 ja Virve todennäköisyydellä 0,35.

Lasketaan todennäköisyydet.

$$
\begin{aligned}
&P(6 \text{ kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä ja Virve saa 3 kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä}) \cdot P(\text{Virve saa 3 kymppiä}) \\
&= 0,75^3 \cdot 0,35^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(5 \text{ kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva saa 3 ja Virve 2 TAI Mirva saa 2 ja Virve 3 kymppiä}) \\
&= P(\text{Mirva 3 ja Virve 2}) + P(\text{Mirva 2 ja Virve 3}) \\
&= 0,75^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^1 + \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 \cdot 0,35^3
\end{aligned}
$$

Lasketaan voiton todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{Mirva ja Virve voittavat}) \\
&= P(6 \text{ kymppiä}) + P(5 \text{ kymppiä}) \\
&= 0,75^3 \cdot 0,35^3 + 0,75^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^1 + \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1 \cdot 0,35^3 \\
&= 0,1369... \approx 0,14
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,14

167

Tavallisesta korttipakasta nostetaan kortteja umpimähkään niin, että nostettu kortti palautetaan aina pakkaan.

a) Tapahtuman ”ainakin yksi ässä” vastatapahtuma on ”ei yhtään ässää”. Ässän todennäköisyys on $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että n:stä kortista ainakin yksi on ässä.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi ässä}) &= 1-P(\text{ei yhtään ässää}) \\ &= 1-\left(\frac{12}{13}\right)^n \end{aligned}$$

Todennäköisyyden tulee olla yli $0{,}8$. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{48}{52}\right)^n &> 0{,}8 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.} \\ n &> 20{,}107... \end{aligned}$$

Kortteja on nostettava vähintään 21 kappaletta.

b) Tapahtuman ”ainakin kaksi ässää” vastatapahtuma on ”0 tai 1 ässä”.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että n:stä kortista ainakin kaksi on ässää.

$$
\begin{aligned}
& P(\text{ainakin kaksi ässä}) \\
& = 1 - P(\text{ei yhtään ässää tai yksi ässä}) \\
& = 1 - P(\text{ei yhtään ässää}) + P(\text{yksi ässä}) \\
& = 1 - (\left(\frac{12}{13}\right)^n + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^1 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1}) \\
& = 1 - (\left(\frac{12}{13}\right)^n + \frac{n}{13} \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1})
\end{aligned}
$$

Todennäköisyys, että saadaan ainakin kaksi ässää, on sitä suurempi, mitä enemmän kortteja nostetaan. Epäyhtälön $P > 0{,}8$ ratkaisu voidaan selvittää kokeilemalla esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	1	0
2	2	0,00592
3	3	0,01684
…	…	…
36	36	0,77581
37	37	0,78874
38	38	0,80101
39	39	0,81264

Kaava soluun B1:

=1–((12/13)^A1+A1/13*(12/13)^(A1–1))

Kortteja on nostettava vähintään 38 kappaletta.

Vastaus a) 21 b) 38

168

Kuukauden aikana Ava ja Severi pelaavat tennistä n peliä. Ava voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä 0,40.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että Ava voittaa täsmälleen 2 peliä.

$$P(\text{Ava voittaa täsmälleen kaksi peliä})$$
$$= \binom{n}{2} \cdot 0{,}40^2 \cdot 0{,}60^{n-2}$$
$$= 2 \cdot 0{,}6^n \cdot n \cdot (n-1)$$

Mitä enemmän pelejä pelataan, sitä suurempi on todennäköisyys, että Ava voittaa täsmälleen kaksi peliä. Yhtälö $P = 0{,}121$ voidaan ratkaista kokeilemalla esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	**B**
1	1	0
2	2	0,160
3	3	0,288
…	…	
9	9	0,161
10	10	0,121
11	11	0,089

Ava ja Severi pelaavat 10 peliä.

Vastaus 10 peliä

169

Tehtaan arvion mukaan sen tuottamista LED-lampuista viallisia on 1 %. Lamput pakataan kahdeksan lampun pakkauksiin.

a) Tapauksen ”pakkauksessa on ainakin yksi viallinen lamppu” vastatapahtuma on ”kaikki lamput ovat ehjiä”. Lamppu on ehjä todennäköisyydellä 0,99.

$$\begin{aligned}&P(\text{ainakin yksi viallinen lamppu})\\&=1-P(\text{kaikki lamput ehjiä})\\&=1-0{,}99^8\\&=0{,}07725...\approx 0{,}077\end{aligned}$$

b) $P(\text{pakkauksessa on täsmälleen kaksi viallista lamppua})$

$$\begin{aligned}&=\binom{8}{2}\cdot 0{,}01^2\cdot 0{,}99^6\\&=0{,}002636\approx 0{,}0026\end{aligned}$$

c) Kyseessä on ehdollinen todennäköisyys: pakkauksessa on täsmälleen kaksi viallista, kun tiedetään, että pakkauksessa on ainakin yksi viallinen.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{täsmälleen kaksi viallista} \mid \text{ ainakin yksi viallinen})\\
&= \frac{P(\text{täsmälleen kaksi viallista ja ainakin yksi viallinen})}{P(\text{ainakin yksi viallinen})}\\
&= \frac{P(\text{täsmälleen kaksi viallista})}{P(\text{ainakin yksi viallinen})}\\
&= \frac{\binom{8}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^6}{1-0{,}99^8}\\
&= 0{,}03412 \approx 0{,}034
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,077 b) 0,0026 c) 0,034

170

Olkoon tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä toistossa p.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p.

$$P(3 \text{ toistossa kerran}) = 0,27$$
$$\binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 0,27$$
$$3p(1-p)^2 = 0,27$$

Ratkaistaan laskimella.

$p = 0,1148\ldots$ tai $p = 0,6185\ldots$ tai $p = 1,266\ldots$

Koska todennäköisyys $0 \le p \le 1$, niin $p = 0,1148\ldots$ tai $p =$ $0,6185\ldots$.

Lasketaan todennäköisyys, että A tapahtuu 6 toistossa täsmälleen kaksi kertaa.

1) $p = 0,1148\ldots$

$$P(A \text{ tapahtuu 6 toistossa 2 kertaa})$$
$$= \binom{6}{2} \cdot 0,1148...^2 \cdot (1-0,1148...)^4$$
$$= 0,1215 \approx 0,12$$

2) $p = 0{,}6185\ldots$

$P(A$ tapahtuu 6 toistossa 2 kertaa$)$

$= \binom{6}{2} \cdot 0{,}6185...^2 \cdot (1 - 0{,}6185...)^4$

$= 0{,}1215 \approx 0{,}12$

Vastaus 0,12

171

HPV voittaa pelin todennäköisyydellä 60 % = 0,6.

Koska voittoon tarvitaan neljän ottelun voitto, pelataan loppuotteluissa korkeintaan seitsemän ottelua. HPV voittaa mestaruuden seuraavissa tapauksissa:

1) Pelataan 4 ottelua: HPV voittaa kaikki 4.
2) Pelataan 5 ottelua: HPV voittaa neljästä ensimmäisestä kolme ja viidennen ottelun.
3) Pelataan 6 ottelua: HPV voittaa viidestä ensimmäisestä kolme ja kuudennen ottelun.
4) Pelataan 7 ottelua: HPV voittaa kuudesta ensimmäisestä kolme ja seitsemännen ottelun.

Lasketaan tapahtumien todennäköisyydet.

1) $P(\text{HPV 4 ekaa}) = 0,60^4 = 0,1296$

2) $P(\text{HPV 3, PPS 1, HPV})$
$$= \binom{4}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^1 \cdot 0,60 = 0,20736$$

3) $P(\text{HPV 3, PPS 2, HPV})$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^2 \cdot 0,6 = 0,20736$$

4) $P(\text{HPV3, PPS 3, HPV})$
$$= \binom{6}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^3 \cdot 0,60 = 0,165888$$

Lasketaan todennäköisyys, että HPV voittaa mestaruuden.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{HPV voittaa mestaruuden}) \\
&= 0{,}1296 + 0{,}20736 + 0{,}20736 + 0{,}165888 \\
&= 0{,}7102... \approx 0{,}71
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,71

172

Kun rahaa on heitetty 17 kertaa on Paulilla 8 pistettä ja Ollilla 9 pistettä.

Jotta Pauli voi voittaa eli saada 12 pistettä, kolikkoa on heitettävä vielä ainakin 4 kertaa.

Olli voi saada korkeintaan 2 pistettä, jotta Pauli voi voittaa. Siis kolikkoa voidaan heittää korkeintaan 6 kertaa niin, että Pauli voittaa.

Pauli voittaa seuraavissa tapauksissa:

1) Neljällä seuraavalla heitolla saadaan kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12.)

$P(4 \text{ kruunaa})$

$= 0,5^4 = 0,0625$

2) Neljällä seuraavalla heitolla saadaan kolme kruunaa ja yksi klaava ja viides heitto on kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12, Ollin 9 + 1 = 10.)

$P(3 \text{ kruunaa, 1 klaava, kruuna})$

$= \binom{4}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5 = 0,125$

3) Viidellä seuraavalla heitolla saadaan kolme kruunaa ja kaksi klaavaa ja kuudes heitto on kruuna.
(Paulin pisteet 8 + 4 = 12, Ollin 9 + 2 = 11.)

$$P(3 \text{ kruunaa, } 2 \text{ klaavaa, kruuna})$$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 0,15625$$

Lasketaan todennäköisyys, että Pauli voittaa pelin.

$$P(\text{Pauli voittaa pelin})$$
$$= 0,0625 + 0,125 + 0,15625$$
$$= 0,34375 \approx 0,34$$

Vastaus 0,34