1

a) Laatikossa on punaisia tennispalloja $24-10-8=6$ kappaletta.

$$\begin{aligned}&P(\text{punainen pallo})\\&=\frac{n(\text{"punainen pallo"})}{n(\text{"kaikki pallot"})}\\&=\frac{6}{24}\\&=\frac{1}{4}=0,25\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&P(\text{valkoinen tai keltainen pallo})\\&=\frac{n(\text{"valkoinen tai keltainen pallo"})}{n(\text{"kaikki pallot"})}\\&=\frac{8+10}{24}\\&=\frac{18}{24}\\&=\frac{3}{4}=0,75\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{4}=0,25$ b) $\frac{3}{4}=0,75$

2

a) Sateenvarjoja on telineessä $2+1+1=4$ kappaletta ja esineitä on yhteensä $2+1+1+1+1+6=12$ kappaletta.

$$P(\text{sateenvarjo}) = \frac{n(\text{"sateenvarjo"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

b) $$P(\text{musta sateenvarjo}) = \frac{n(\text{"musta sateenvarjo"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

c) $$P(\text{golfmaila}) = \frac{n(\text{"golfmaila"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

d) Esineitä, jotka eivät ole sateenvarjoja on yhteensä $1+1+6=8$ kappaletta.

$$P(\text{ei sateenvarjo}) = \frac{n(\text{"ei sateenvarjo"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

Vastaus a) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ b) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ c) $\frac{1}{2} = 0{,}5$ d) $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$

3

a) Punaisia numeroita on yhteensä 18 kappaletta.

$$P(\text{punainen}) = \frac{n(\text{"punainen"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{18}{37} \approx 0{,}486$$

b) Parittomia numeroita on yhteensä 18 kappaletta.

$$P(\text{pariton}) = \frac{n(\text{"pariton"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{18}{37} \approx 0{,}486$$

c) Oikeanpuolimmaisessa sarakkeessa on yhteensä 12 numeroa.

$$P(\text{oikea sarake}) = \frac{n(\text{"oikea sarake"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{12}{37} \approx 0{,}324$$

d) Numeroita on yhteensä 4 kappaletta.

$$P(5,\ 6,\ 8 \text{ tai } 9) = \frac{n(\text{"5, 6, 8 tai 9"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{4}{37} \approx 0{,}108$$

Vastaus a) $\frac{18}{37} \approx 0{,}486$

b) $\frac{18}{37} \approx 0{,}486$

c) $\frac{12}{37} \approx 0{,}324$

d) $\frac{4}{37} \approx 0{,}108$

4

Luetellaan kaikki alkeistapaukset taulukoimalla.

1. nro \ 2. nro	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

Alkeistapausten lukumäärä on $4 \cdot 4 = 16$.

a) $$P(13) = \frac{n(\text{"13"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

b) $$P(\text{suurempi kuin 21}) = \frac{n(\text{"suurempi kuin 21"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{11}{16} = 0,6875$$

c) $$P(\text{korkeintaan 19}) = \frac{n(\text{"korkeintaan 19"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

d) $$P(\text{pienempi kuin 64}) = \frac{n(\text{"pienempi kuin 64"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{16}{16} = 1$$

Vastaus a) $\dfrac{1}{16} = 0,0625$ b) $\dfrac{11}{16} = 0,6875$ c) $\dfrac{1}{4} = 0,25$ d) 1

5

a) Kolikkoa heitetään kolme kertaa. Merkitään L = klaava ja R = kruuna.

Luetellaan kaikki alkeistapaukset: LLL, LLR, LRL, LRR, RRR, RRL, RLR, RLL

b) Alkeistapauksia on yhteensä 8.

$$P(\text{täsmälleen yksi klaava}) = \frac{n(\text{"täsmälleen yksi klaava"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{3}{8} = 0,375$$

c) $$P(\text{ainakin kaksi klaava}) = \frac{n(\text{"ainaki kaksi klaava"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Vastaus a) LLL, LLR, LRL, LRR, RRR, RRL, RLR, RLL

b) $\frac{3}{8} = 0,375$ c) $\frac{1}{2} = 0,5$

6

Merkitään E = Elina ja O = Oskari sekä kaksi muuta odottajaa X ja Y.

Luetellaan kaikki mahdolliset lentokoneeseen pääsevät parit:

EO, EX, EY, OX, OY, XY

Alkeistapauksia on 6 kappaletta.

a) $P(\text{Elina ja Oskari pääsevät koneeseen}) = \dfrac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$

$$= \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

b) $P(\text{Elina pääsee koneeseen}) = \dfrac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Vastaus a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ b) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

7

Kirjataan silmälukujen summat taulukkoon.

2. heiton tulos						
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

1. heiton tulos

Alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta.

a) $$P(\text{summa on } 8) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$$

b) $$P(\text{summa on korkeintaan } 5) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$$

c) $$P(\text{summa on } 1) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{0}{36} = 0$$

Vastaus a) $\frac{5}{36} \approx 0,139$ b) $\frac{5}{18} \approx 0,278$ c) 0

8

Kirjataan silmälukujen tulot taulukkoon.

kuusisivuinen noppa	6	6	12	18	24
	5	5	10	15	20
	4	4	8	12	16
	3	3	6	9	12
	2	2	4	6	8
	1	1	2	3	4
		1	2	3	4
		nelisivuinen noppa			

Alkeistapausten lukumäärä on $4 \cdot 6 = 24$.

a) Silmälukujen tulo on vähintään 9 kymmenessä alkeistapauksessa.

$$P(\text{tulo vähintään } 9) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$$

kuusisivuinen noppa

6	6	12	18	24
5	5	10	15	20
4	4	8	12	16
3	3	6	9	12
2	2	4	6	8
1	1	2	3	4
	1	2	3	4

nelisivuinen noppa

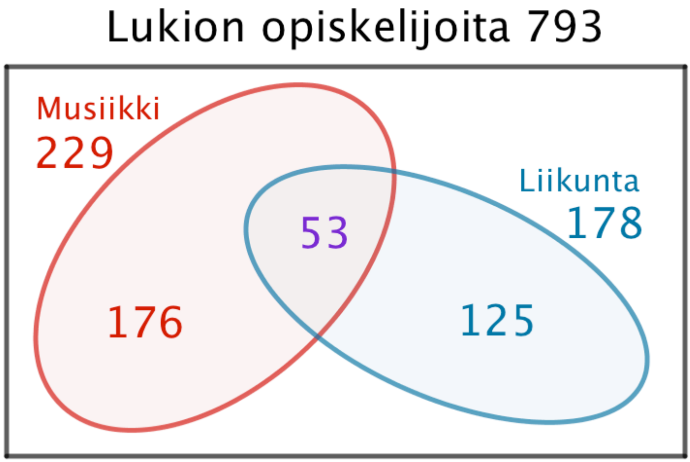
b) Alkeistapauksissa kahdessakymmenessä ainakin toisen silmäluku on vähintään 3.

$$P(\text{ainakin toinen silmäluku vähintään 3}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

Vastaus a) $\frac{5}{12} \approx 0,417$ b) $\frac{5}{6} \approx 0,833$

9



a) Opiskelijoista liikuntaa ja musiikkia harrastaa 53.

$$P(\text{harrastaa liikuntaa ja musiikkia}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{53}{793} \approx 0,067$$

b) Opiskelijoista $178-53=125$ harrastaa liikuntaa, mutta ei musiikkia ja $229-53=176$ harrastaa musiikkia, mutta ei liikuntaa.

Musiikkia tai liikuntaa (tai molempia) harrastaa $125+176+53=354$ opiskelijaa.

$$P(\text{harrastaa liikuntaa tai musiikkia}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{354}{793} \approx 0{,}446$$

c) Opiskelijoista 176 harrastaa musiikkia, mutta ei liikuntaa.

$$P(\text{harrastaa vain musiikkia}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{176}{793} \approx 0{,}222$$

Vastaus a) 0,067 b) 0,446 c) 0,222

10

$\overline{A} =$ "minä puhun aina totta"

$\overline{B} =$ "ainakin yhdellä oppilaista ei ole laskinta mukana"

$\overline{C} =$ "tornin korkeus on vähintään 27 metriä"

$\overline{D} =$ "laitumella olevista hevosista yksikään ei ole valkoinen"

11

a) $P(\text{ei voita mitään})$

$=1-P(\text{voittaa ainakin yhden palkinnon})$

$=1-0,36=0,64$

b) $P(\text{saa korkeintaan yhden voiton})$

$=1-P(\text{voittaa kaksi palkintoa})$

$=1-0,04=0,96$

Vastaus a) 0,64 b) 0,96

12

Mahdollisia syntymäpäiviä on 365.

Näistä kuukauden ensimmäisiä tai viimeisiä päiviä on 24 kappaletta.

$$P(\text{syntymäpäivä ei ole kuukauden ensimmäinen tai viimeinen})$$
$$= 1 - P(\text{syntymäpäivä on kuukauden ensimmäinen tai viimeinen})$$
$$= 1 - \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= 1 - \frac{24}{365} = \frac{341}{365} \approx 0{,}934$$

Vastaus $\frac{341}{365} \approx 0{,}934$

13

a) $P(\text{asukas ei kävele})$
$=1-P(\text{asukas kävelee})$
$=1-0,47=0,53$

b) $P(\text{asukas ei kuljeta salkkua})$
$=1-P(\text{asukas kuljettaa salkkua})$
$=1-0,32=0,68$

c) $P(\text{asukas ei kävele tai ei kuljeta salkkua})$
$=1-P(\text{asukas kävelee kuljettaen salkkua})$
$=1-0,17=0,83$

Vastaus a) 0,53 b) 0,68 c) 0,83

14

Kolikkoa heitetään 3 kertaa. Alkeistapausten lukumäärä on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Merkitään L = klaava ja R = kruuna.
Luetellaan alkeistapaukset:

LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR

a) Alkeistapauksissa yhdessä on kolme kruunaa.

$$P(\text{saadaan kolme kruunaa}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{1}{8} = 0{,}125$$

b) $P(\text{ainakin yksi klaava})$
$$= 1 - P(\text{ei yhtään klaavaa})$$
$$= 1 - P(\text{kolme kruunaa})$$
$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Vastaus a) $\frac{1}{8} = 0{,}125$ b) $\frac{7}{8} = 0{,}875$

15

a) Riittää tarkastella ainoastaan viimeistä heittoa, koska ensimmäisellä ja toisella heitolla saa tulla mikä tahansa kuudesta vaihtoehdosta.

Kolmannella heitolla on tultava silmäluku 5 tai 6, joten suotuisten tapausten lukumäärä on 2.

Kaikkiaan kolmannella heitolla on 6 eri tulosmahdollisuutta.

$$P(\text{kolmannen heiton tulos vähintään } 5)$$
$$=\frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$$

b) Kolmen nopan heitossa alkeistapauksien lukumäärä on $6\cdot 6\cdot 6=216$.

Suotuisten tapausten lukumäärä on $1\cdot 1\cdot 1=1$.

$$P(\text{kaikkien heittojen tulos on } 6)$$
$$=\frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$=\frac{1}{216}\approx 0{,}00463$$

c) Kaikista nopista on saatava $1, 2, 3$ tai 4.
Suotuisten tapausten lukumäärä on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

$$P(\text{kaikkien heittojen tulos korkeintaan } 4)$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{64}{216} = \frac{8}{27} \approx 0,296$$

d) Käytetään apuna vastatapahtumaa.

$$A = \text{"ainakin yksi silmäluvuista on vähintään } 5\text{"}$$

$$\overline{A} = \text{"kaikki silmäluvut ovat alle } 5\text{"}$$
$$= \text{"kaikkien heittojen tulos on korkeintaan } 4\text{"}$$

$$P(\text{ainakin yksi silmäluvuista vähintään } 5)$$
$$= 1 - P(\text{kaikkien heittojen tulos on korkeintaan } 4)$$
$$= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 0,704$$

Vastaus a) $\frac{1}{3} \approx 0,333$ b) $\frac{1}{216} \approx 0,00463$

c) $\frac{8}{27} \approx 0,296$ d) $\frac{19}{27} \approx 0,704$

16

a) Suotuisia alkeistapauksia ovat villasukka-voittoarvat, joita on 3 kpl.

$$P(\text{voittaa villasukat}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9} = 0{,}111$$

b) Suotuisia alkeistapauksia ovat patalappu- ja villasukka-voittoarvat, joita on yhteensä $8+3=11$ kpl.

$$P(\text{voittaa patalapun tai villasukat}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{11}{27} \approx 0{,}407$$

Vastaus a) $\frac{1}{9} = 0{,}111$ b) $\frac{11}{27} \approx 0{,}407$

17

Esan taskussa on yhteensä $3+5+2+1+7+1=19$ esinettä.

a) Kolikkoja on yhteensä $3+5+2+1=11$.

$$P(\text{esine on kolikko})=\frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$=\frac{11}{19}\approx 0{,}579$$

b) Kolikkoja, jotka riittävät maksuksi, on yhteensä 3 kappaletta.

$$P(\text{esine riittää maksuksi mutterista})=\frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$=\frac{3}{19}\approx 0{,}158$$

c) Tiedetään, että Esan taskusta ottama esine on kolikko, joita on 11 kpl. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on siis 11. Suotuisia alkeistapauksia on 3.

$$P(\text{esine riittää maksuksi, kun esine on kolikko})$$
$$=\frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$=\frac{3}{11}\approx 0{,}273$$

Vastaus a) $\frac{11}{19}\approx 0{,}579$ b) $\frac{3}{19}\approx 0{,}158$ c) $\frac{3}{11}\approx 0{,}273$

18

Merkitään A = Aaro, B = Birgitta ja C = Cecilia.

Luetellaan kaikki mahdolliset alkeistapaukset. Parissa ensimmäinen on puheenjohtaja ja toinen sihteeri.

AB, AC, BA, BC, CA, CB

Alkeistapauksia on 6 kappaletta.

a) $$\begin{aligned} P(\text{Birgitta pj ja Aaro sihteeri}) &= P(\text{BA}) \\ &= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} \\ &= \frac{1}{6} \approx 0{,}167 \end{aligned}$$

b) Alkeistapauksista kahdessa Aaro ei tule valituksi puheenjohtajaksi eikä sihteeriksi.

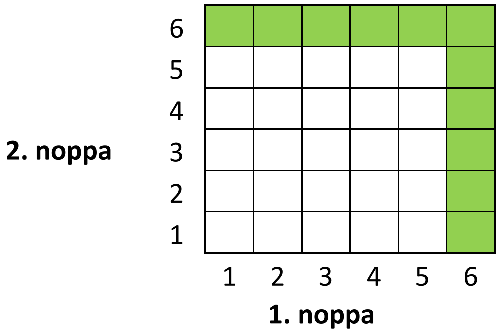
$$\begin{aligned} P(\text{Aaroa ei valita ollenkaan}) &= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

19

Kahta noppaa heitettäessä alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 = 36$.

a) Merkitään taulukkoon suotuisat tapaukset.

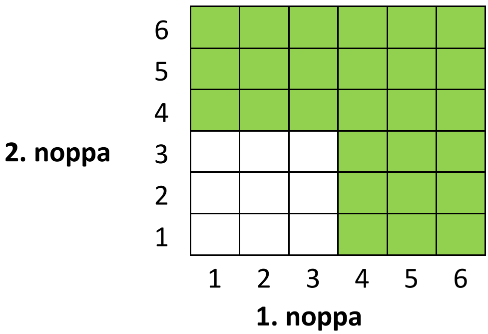


Suotuisia alkeistapauksia on 11.

$$P(\text{ainakin toisella nopalla saadaan 6}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{11}{36} \approx 0{,}306$$

b) Merkitään taulukkoon suotuisat tapaukset.



Suotuisia tapauksia on 27.

$$P(\text{ainakin toisella nopalla saadaan vähintään 4})$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Vastaus a) $\frac{11}{36} \approx 0,306$ b) $\frac{3}{4} = 0,75$

20

Kun noppaa heitetään kolme kertaa, kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Merkitään 6×6-ruudukkoon suotuisten alkeistapausten lukumäärä kolmannella heitolla.

2. heitto

6	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0
4	2	2	2	2	1	0
3	3	3	3	2	1	0
2	4	4	3	2	1	0
1	5	4	3	2	1	0
	1	2	3	4	5	6

1. heitto

Taulukon perusteella suotuisia tapauksia on yhteensä 55 kappaletta.

P(kolmannella heitolla tulee suurempi silmäluku kuin edellisillä)

$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{55}{216} \approx 0,255$$

Vastaus $\frac{55}{216} \approx 0,255$

21

a) Syötetään suora $y = kx + s$ geometriaohjelmistoon ja luodaan liukusäätimet kertoimille k ja s. Tutkitaan suoran ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion pinta-alaa, kun kertoimiin sijoitetaan luvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Pinta-ala on suurempi kuin 3 seuraavilla (k, s)-lukupareilla:

(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 5), (3, 6),
(4, 5), (4, 6),
(5, 6).

b) Mahdollisia lukupareja on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta. Suotuisten tapausten määrä on 12.

$$P(\text{pinta-ala on suurempi kuin 3})$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Vastaus $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

22

a) Tutkitaan funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kulkua derivaatan avulla.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Kerroin d vaikuttaa ainoastaan funktion kuvaajan sijaintiin pystysuunnassa, ei kasvavuuteen tai vähenevyyteen.

Jotta funktio f olisi vähenevä, derivaatan on oltava epäpositiivinen eli $f'(x) \leq 0$ kaikilla x.
Tällöin derivaatan kuvaajan on oltava alaspäin aukeava paraabeli, jolla on korkeintaan yksi nollakohta.

Koska kerroin $a > 0$, niin $3a > 0$. Siis kuvaaja $y = f'(x)$ on aina ylöspäin aukeava paraabeli kaikilla $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$P(\text{funktio} f \text{ on vähenevä}) = 0$

b) Jotta funktio olisi kasvava, on derivaatan saatava ainoastaan epänegatiivisia arvoja eli $f'(x) \geq 0$ kaikilla x.
Derivaatan kuvaajan $y = f'(x)$ on oltava ylöspäin aukeava paraabeli, jolla on korkeintaan yksi nollakohta.

Yhtälössä $3ax^2 + 2bx + c = 0$

on diskriminantin siis oltava negatiivinen tai nolla.

$$
\begin{aligned}
D &\le 0 \\
4b^2 - 12ac &\le 0 \\
4b^2 &\le 12ac \qquad \Big| :(12a) \quad (>0) \\
\frac{4b^2}{12a} &\le c \\
c &\ge \frac{b^2}{3a}
\end{aligned}
$$

Merkitään 6×6-ruudukkoon saadun epäyhtälön mukaisesti kolmannella heitolla (c) suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

2. heitto (*b*) \ 1. heitto (*a*)	1	2	3	4	5	6
6	0	1	3	4	4	5
5	0	2	4	4	5	5
4	1	4	5	5	5	6
3	4	5	6	6	6	6
2	5	6	6	6	6	6
1	6	6	6	6	6	6

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Suotuisten tapausten lukumäärä on 167.

$$P(\text{funktio on kasvava}) = \frac{167}{216} = 0{,}7731\ldots \approx 0{,}773$$

Vastaus a) 0 b) $\frac{167}{216} \approx 0{,}773$

23

a) Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.
Luetellaan kaikki mahdolliset jonot (a, b, c), jotka ovat aidosti kasvavia ja aritmeettisia.

(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)

Suotuisia tapauksia on 6.

$$P(\text{jono on aidosti kasvava ja aritmeettinen})$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$$

b) Luetellaan kaikki mahdolliset jonot (a, b, c), jotka ovat geometrisia.

(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6),
(1, 2, 4), (4, 2, 1)

Suotuisia tapauksia on 8.

$$P(\text{jono on geometrinen})$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{8}{216} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$$

Vastaus a) $\frac{1}{36} \approx 0{,}0278$ b) $\frac{1}{27} \approx 0{,}0370$

24

$\overline{A}$ = "Ainakin yhdellä luokan oppilaista
ei ole kumisaappaita jalassa"

$\overline{B}$ = "Kissa ei ole musta"

$\overline{C}$ = "Korkeintaan yhteen parkkipaikan
autoon on unohtunut ajovalot päälle"

25

a) $P(\text{ei halua mansikkahilloa})$

$= 1 - P(\text{haluaa mansikkahilloa})$

$= 1 - 0,32 = 0,68$

b) $P(\text{ei halua kermavaahtoa})$

$= 1 - P(\text{haluaa kermavaahtoa})$

$= 1 - 0,54 = 0,46$

c) $P(\text{ei halua mansikkahilloa tai kermavaahtoa})$

$= 1 - P(\text{haluaa kermavaahtoa ja mansikkahilloa})$

$= 1 - 0,24 = 0,76$

Vastaus a) 0,68 b) 0,46 c) 0,76

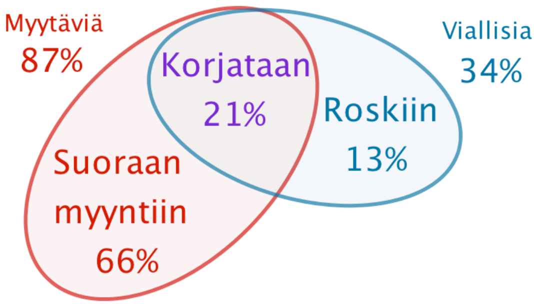
26

a) Tontuista suoraan myyntikelpoisia on
$100\% - 21\% - 13\% = 66\%$.

$P(\text{tonttu on suoraan myyntikelpoinen}) = 0,66$

b) $P(\text{tonttu on myyntikelpoinen})$
$= 1 - P(\text{tonttu on kokonaan myyntiin kelpaamaton})$
$= 1 - 0,13 = 0,87$

c) Valmistetuista tontuista myyntiin menee $66\% + 21\% = 87\%$.
Näistä korjattuja on 21%.



$P(\text{myynnissä oleva tonttu on korjattu yksilö})$
$= \dfrac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$
$= \dfrac{0,21}{0,87} \approx 0,24$

Vastaus a) 0,66 b) 0,87 c) 0,24

27

Merkitään toimivat lamput A, B ja C sekä
rikkinäiset lamput X ja Y.
Luetellaan kaikki mahdolliset parit, jotka lampuista voidaan muodostaa:

AB, AC, AX, AY, BC, BX, BY, CX, CY, XY.

Alkeistapauksia on yhteensä 10.

a) $\overline{A} =$ "ainakin toinen lampuista toimii"

Pareja, joissa on ainakin yksi toimiva lamppu, on 9.

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

b) $\overline{B} =$ "ainakin toinen lampuista on rikki"

Pareja, joissa ainakin toinen lampuista on rikki, on 7.

$$P(\overline{B}) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Vastaus

a) $\overline{A} =$ "ainakin toinen lampuista toimii", $P(\overline{A}) = \frac{9}{10} = 0{,}9$

b) $\overline{B} =$ "ainakin toinen lampuista on rikki", $P(\overline{B}) = \frac{7}{10} = 0{,}7$

28

Kun noppaa heitetään kolme kertaa, alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Tutkitaan tapahtuman
A: ”ainakin yhdellä heitolla tulee pariton silmäluku”
vastatapahtumaa
$\overline{A} = \text{"kaikilla heitoilla saadaan parillinen silmäluku"}$.

Laaditaan 6×6-ruudukko, johon merkitään kolmannella heitolla suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

2. heitto \ 1. heitto	1	2	3	4	5	6
6	0	3	0	3	0	3
5	0	0	0	0	0	0
4	0	3	0	3	0	3
3	0	0	0	0	0	0
2	0	3	0	3	0	3
1	0	0	0	0	0	0

Tapahtumalle $\overline{A}$ suotuisten tapausten lukumäärä on 27.

$$P(\text{ainakin yhdellä heitolla tulee pariton silmäluku})$$
$$= 1 - P(\text{kaikilla heitoilla saadaan parillinen silmäluku})$$
$$= 1 - \frac{27}{216} = \frac{189}{216} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Vastaus $\frac{7}{8} = 0{,}875$

29

a) Silmälukujen summa on $1+2+3+4=10$.

$P(\text{nopalla tulee 3})=\dfrac{3}{10}=0,3$

b) $P(\text{nopalla ei tule 4})$

$=1-P(\text{nopalla tulee 4})$

$=1-\dfrac{4}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}=0,6$

c) $P(\text{nopalla tulee vähintään 2})$

$=1-P(\text{nopalla tulee 1})$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}=0,9$

Vastaus a) $\dfrac{3}{10}=0,3$ b) $\dfrac{3}{5}=0,6$ c) $\dfrac{9}{10}=0,9$

30

Kun kahdeksansivuista noppaa heitetään kolme kertaa,
alkeistapauksia on $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.
Sivuista 3 on punaisia, 1 keltainen ja 4 vihreää.
Tutkitaan tapahtuman $A =$ "ainakin yksi väreistä jää esiintymättä"
vastatapahtumaa $\overline{A} =$ "kaikki värit esiintyvät".

Merkitään 8×8-ruudukon kuhunkin ruutuun kolmannella heitolla suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

2. heitto

1	1	1	1	4	0	0	0
1	1	1	1	4	0	0	0
1	1	1	1	4	0	0	0
3	3	3	3	0	4	4	4
0	0	0	0	3	1	1	1
0	0	0	0	3	1	1	1
0	0	0	0	3	1	1	1
0	0	0	0	3	1	1	1

1. heitto

Tapahtumalle $\overline{A}$ suotuisten alkeistapausten lukumäärä on 72.

$$P(\text{ainakin yksi väreistä jää esiintymättä})$$
$$= 1 - P(\text{kaikki värit esiintyvät})$$
$$= 1 - \frac{72}{512} = \frac{440}{512} = \frac{55}{64} \approx 0{,}859$$

Vastaus $\frac{55}{64} \approx 0{,}859$

31

Todennäköisyyden aksioomat:

1) Todennäköisyys on aina epänegatiivinen.
2) Varman tapahtuman todennäköisyys on 1.
3) Jos A ja B ovat erilliset tapahtumat, niin $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$.

Väite: Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on aina nolla.

Todistus:

Olkoon E varma tapahtuma (eli satunnaisilmiön perusjoukko) ja sen vastatapahtuma M mahdoton tapahtuma (eli tyhjä joukko).

Aksiooman 2 mukaan tapahtuman E todennäköisyys on 1 eli $P(E) = 1$.

Tapahtuma ”E tai M” on myös varma tapahtuma, joten $P(E \text{ tai } M) = 1$.

Tapahtuma ja sen vastatapahtuma ovat aina erilliset, joten myös E ja M ovat erilliset.

Aksiooman 3 mukaan on

$$P(E \text{ tai } M) = P(E) + P(M)$$

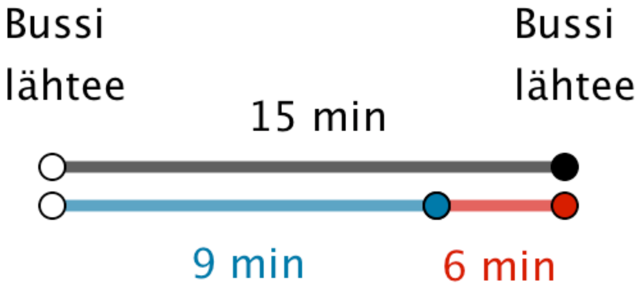
$$1 = 1 + P(M)$$

$$P(M) = 0$$

Näin väite on todistettu. □

32

a) Olkoon tapahtuma A: ”matkustaja joutuu odottamaan bussia yli 6 minuuttia”.

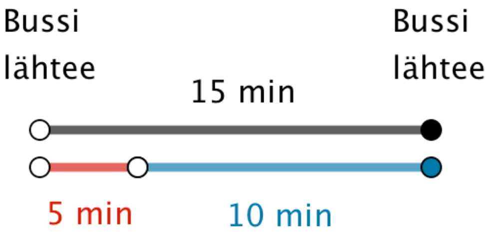


Tapahtumalle A suotuisan ajanjakson pituus on $m(A) = 15 \text{ min} - 6 \text{ min} = 9 \text{ min}$.

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on $m(E) = 15 \text{ min}$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{9\,\text{min}}{15\,\text{min}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

b) Olkoon tapahtuma B:”matkustaja joutuu odottamaan bussia alle 10 minuuttia”.



Tapahtumalle B suotuisan ajanjakson pituus on $m(B) = 10\,\text{min}$.

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{10\,\text{min}}{15\,\text{min}} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

c) Olkoon tapahtuma C:”matkustaja joutuu odottamaan bussia vähintään 3 minuuttia ja korkeintaan 8 minuuttia”.

Tapahtumalle C suotuisan ajanjakson pituus on $m(C) = 8\,\text{min} - 3\,\text{min} = 5\,\text{min}$.

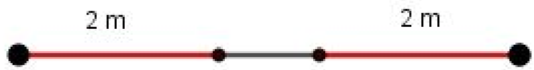
$$P(C) = \frac{m(C)}{m(E)} = \frac{5\,\text{min}}{15\,\text{min}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Vastaus a) $\frac{3}{5} = 0,6$ b) $\frac{2}{3} \approx 0,67$ c) $\frac{1}{3} \approx 0,33$

33

Olkoon tapahtuma A:” kalastajalle jää vielä vähintään 3,0 metrin pituinen ongenvapa”.

Jotta vapaa jäisi 3,0 metriä, vauriokohta voi sijaita kummassa päässä vapaa tahansa korkeintaan 2,0 metrin etäisyydellä vavan päästä.



Tapahtumalle A suotuisa pituus on
$m(A) = 2{,}0 \text{ m} + 2{,}0 \text{ m} = 4{,}0 \text{ m}$.

Koko perusjoukkoa kuvaava pituus on
$m(E) = 5 \text{ m}$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{4 \text{ m}}{5 \text{ m}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Vastaus $\frac{4}{5} = 0{,}8$

34

a) Olkoon tapahtuma A: ”Sini voittaa karvanallen”.

Tapahtumalle A suotuisan kulman suuruus on
$m(A) = 30°$.

Koko perusjoukkoa kuvaavan kulman suuruus on
$m(E) = 360°$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{30°}{360°} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$$

b) Olkoon tapahtuma B: ”Sini voittaa uusintapyöräytyksen”.

Tapahtumalle B suotuisan kulman suuruus on
$m(B) = 45° + 90° = 135°$.

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{135°}{360°} = \frac{3}{8} \approx 0{,}38$$

c) Olkoon tapahtuma C: ”Sini ei voita mitään”.

Tapahtumalle C suotuisan kulman suuruus on
$m(C) = 360° - 45° - 90° - 30° = 195°$.

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(E)} = \frac{195°}{360°} = \frac{13}{24} \approx 0{,}54$$

Vastaus a) $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$ b) $\frac{3}{8} \approx 0{,}38$ c) $\frac{13}{24} \approx 0{,}54$

35

Tikkataulun säde on $9 \cdot 2,0\ \text{cm} + 1,0\ \text{cm} = 19,0\ \text{cm}$. Koko perusjoukkoa kuvaava pinta-ala on siis
$m(E) = \pi \cdot (19,0\ \text{cm})^2 = 361\pi\ \text{cm}^2$.

a) Olkoon tapahtuma A: ”yhdellä heitolla saadaan pistemääräksi vähintään 8”.

Tapahtumalle A suotuisa pinta-ala on
$m(A) = \pi \cdot (2 \cdot 2,0\ \text{cm} + 1,0\ \text{cm})^2 = \pi \cdot (5,0\ \text{cm})^2 = 25\pi\ \text{cm}^2$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{25\pi\ \text{cm}^2}{361\pi\ \text{cm}^2} = \frac{25}{361} \approx 0,069$$

b) Tapahtuma B: ”yhdellä heitolla saadaan pistemääräksi korkeintaan 7” on a-kohdan tapahtuman A vastatapahtuma.

a-kohdan tuloksen avulla saadaan

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{25}{361} = \frac{336}{361} \approx 0,93.$$

c) Olkoon tapahtuma C: ”yhdellä heitolla saadaan pistemääräksi 5”.

Ympyrärenkaiden, joiden pistemäärä on $5-10$, pinta-ala on $\pi\cdot(5\cdot 2{,}0\text{ cm}+1{,}0\text{ cm})^2=121\pi\text{ cm}^2$.

Ympyrärenkaiden, joiden pistemäärä on $6-10$, pinta-ala on $\pi\cdot(4\cdot 2{,}0\text{ cm}+1{,}0\text{ cm})^2=81\pi\text{ cm}^2$.

Tapahtumalle C suotuisa pinta-ala on $m(C)=121\pi\text{ cm}^2-81\pi\text{ cm}^2=40\pi\text{ cm}^2$.

$$P(C)=\frac{m(C)}{m(E)}=\frac{40\pi\text{ cm}^2}{361\pi\text{ cm}^2}=\frac{40}{361}\approx 0{,}11$$

Vastaus a) $\dfrac{25}{361}\approx 0{,}069$ b) $\dfrac{336}{361}\approx 0{,}93$ c) $\dfrac{40}{361}\approx 0{,}11$

36

Olkoon tapahtuma
B: "kolmion pinta-ala on suurempi kuin $4{,}0\ \text{m}^2$".

Katkaistaan puurima kohdasta S.

Tällöin suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksiksi saadaan x ja $6-x$.

Kolmion pinta-ala on $A = \dfrac{x\cdot(6-x)}{2}$.

Selvitetään, milloin kolmion pinta-ala on suurempi kuin 4.

$$\frac{x\cdot(6-x)}{2} > 4$$
$$2 < x < 4$$

Tapahtumalle B suotuisan osan pituus on
$m(B) = 4{,}0\ \text{m} - 2{,}0\ \text{m} = 2{,}0\ \text{m}$.

Koko perusjoukkoa kuvaava pituus on
$m(E) = 6{,}0\ \text{m}$.

$$P(B) = \frac{2{,}0\ \text{m}}{6{,}0\ \text{m}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

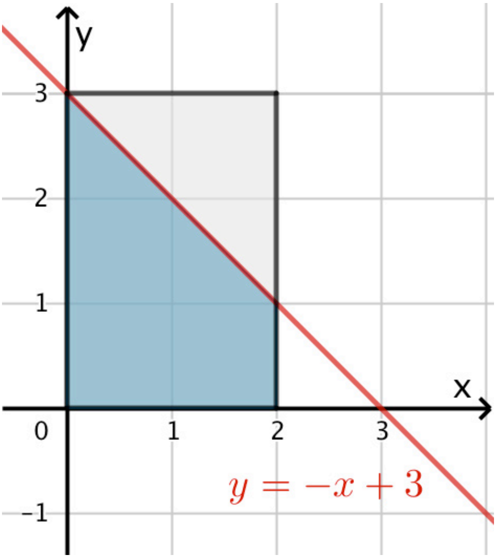
Vastaus $\dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$

37

Arvonnassa saadaan tulokseksi piste (x, y), missä $0 \le x \le 2$ ja $0 \le y \le 3$.

Olkoon tapahtuma A : ”valittu piste (x, y) toteuttaa ehdon $x + y \le 3$ ”

Piirretään tilanne *xy*-koordinaatistoon.



Perusjoukko E on kuvan mukainen suorakulmio, jonka kanta on 2 ja korkeus 3. Suotuisa alue muodostuu niistä suorakulmion E pisteistä, jotka jäävät suoran $y = -x + 3$ alapuolelle.
Suotuisa alue on puolisuunnikas, jonka pinta-ala on

$$m(A) = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4 .$$

Perusjoukon E pinta-ala on $m(E) = 2 \cdot 3 = 6$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

Vastaus $\frac{2}{3} \approx 0,67$

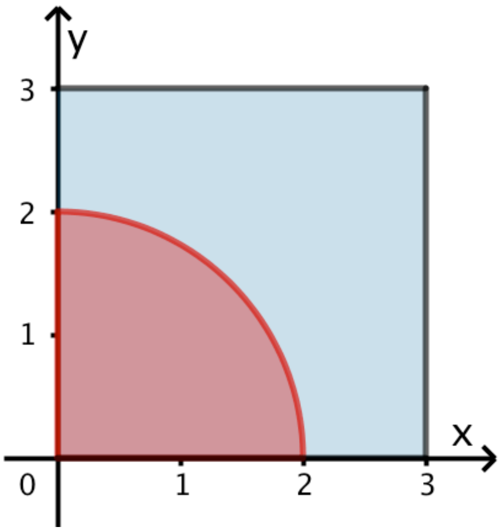
38

Arvonnassa saadaan tulokseksi piste (x, y), missä $0 \le x \le 3$ ja $0 \le y \le 3$.

Halutaan, että pisteen (x, y) etäisyys origosta on suurempi kuin kaksi yksikköä, joten saadaan.

Olkoon tapahtuma A : ”pisteen (x, y) etäisyys origosta on suurempi kuin 2”.

Piirretään tilanne xy-koordinaatistoon.



Perusjoukko E on kuvan mukainen suorakulmio, jonka kanta on 3 ja korkeus 3.

Perusjoukon E pinta-ala on $m(E) = 3 \cdot 3 = 9$

Suotuisa alue muodostuu niistä suorakulmion E pisteistä, jotka jäävät 2-säteisen, origokeskisen ympyräneljänneksen ulkopuolelle.

Ympyräneljänneksen pinta-ala on $\dfrac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$.

Suotuisan alueen A pinta-ala on $m(A) = 9 - \pi$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{9-\pi}{9} \approx 0,65$$

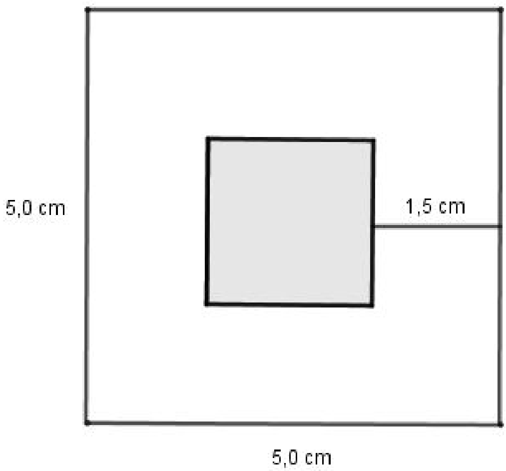
Vastaus 0,65

39

Tutkitaan keksin keskipisteen sijaintia. Jotta keksi ei osu minkään ruudun reunalle, keksin keskipisteen ja ruudun reunan välisen etäisyyden on oltava vähintään keksin säteen suuruinen.

Keksin säde on $r = \dfrac{3\text{ cm}}{2} = 1{,}5\text{ cm}$.

Koska pöytäliina koostuu samanlaisista ruuduista, riittää tutkia yhtä ruutua. Piirretään yhdelle ruudulle alueet, joilla keksin keskipisteen on sijaittava, jotta keksi ei osu minkään ruudun reunalle.



Tapahtumalle A: ”keksi ei osu minkään ruudun reunalle” suotuisa alue muodostuu neliöstä, jonka sivun pituus on
$5{,}0\text{ cm} - 2\cdot 1{,}5\text{ cm} = 2{,}0\text{ cm}$.

Alueen pinta-ala on $m(A) = 2{,}0\text{ cm}\cdot 2{,}0\text{ cm} = 4{,}0\text{ cm}^2$.

Perusjoukkona E on pöytäliinan ruutu, jonka pinta-ala on

$m(E) = 5{,}0\ \text{cm} \cdot 5{,}0\ \text{cm} = 25{,}0\ \text{cm}^2$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{4{,}0\ \text{cm}^2}{25{,}0\ \text{cm}^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

Vastaus $\frac{4}{25} = 0{,}16$

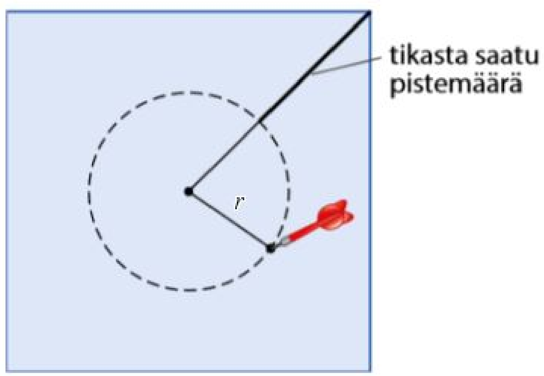
40

Lasketaan taulun lävistäjä d.

$$d^2 = 40^2 + 40^2$$
$$d^2 = 3200$$
$$d = \pm\sqrt{3200} \qquad (d > 0)$$
$$d = 40\sqrt{2}$$

Taulun lävistäjän puolikas on $\frac{d}{2} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$.

Merkitään tauluun heitetyn tikan ja keskipisteen välistä etäisyyttä kirjaimella r.



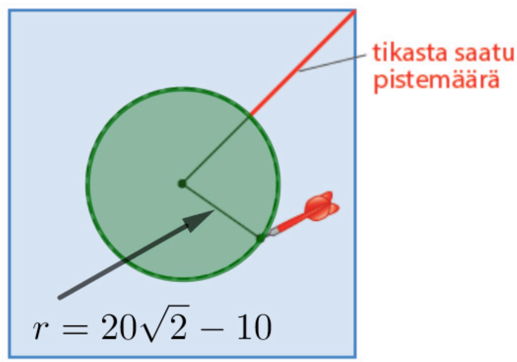
Tällöin tikasta saatu pistemäärä on $20\sqrt{2} - r$.

a) Olkoon tapahtuma A: ”yhdellä heitolla saadaan pistemääräksi vähintään 10”.

Saadaan

$$20\sqrt{2} - r \geq 10$$
$$r \leq 20\sqrt{2} - 10$$

Suotuisa alue on ympyrä, jonka säde on $20\sqrt{2} - 10$.



Lasketaan suotuisan alueen pinta-ala.

$$m(A) = \pi \cdot (20\sqrt{2} - 10)^2$$

Perusjoukko E on koko tikkataulu.
Perusjoukon E pinta-ala on $m(E) = 40 \cdot 40 = 1600$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{\pi \cdot (20\sqrt{2} - 10)^2}{1600} \approx 0,656$$

b) Olkoon tapahtuma B: ”yhdellä heitolla saadaan pistemääräksi tasan 20”.

Saadaan

$$20\sqrt{2}-r=20$$
$$r=20\sqrt{2}-20$$

Suotuisa alue on $20\sqrt{2}-20$ säteisen ympyrän kehä.

Ympyräviivan pinta-ala on 0, joten $m(B)=0$.

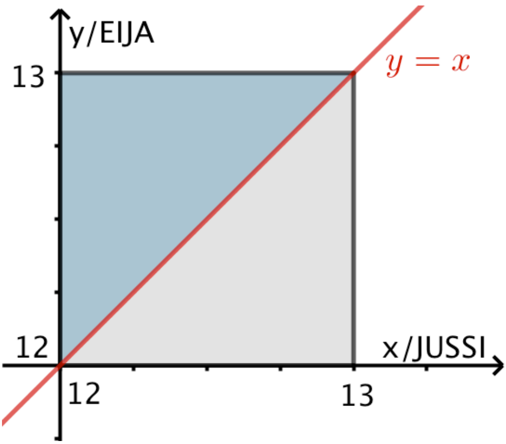
$$P(B)=\frac{m(B)}{m(E)}=\frac{0}{1600}=0$$

Vastaus a) 0,656 b) 0

41

a) Olkoon tapahtuma A: ”Jussi saapuu paikalle ennen Eijaa”.

Merkitään Jussin saapumisaikaa kirjaimella x ja Eijan saapumisaikaa kirjaimella y. Kuvataan tilannetta xy-koordinaatistossa, jolloin kaikki mahdolliset lukuparit (x, y) sijaitsevat neliössä. Tilannetta, jossa Jussi ja Eija saapuvat paikalle yhtä aikaa, vastaa neliön sisällä oleva piste, joka on suoralla $y = x$. Mikäli Jussi saapuu paikalle ennen Eijaa, on $x < y$ eli $y > x$, ja suotuisa alue on neliön osa, joka on lävistäjän $y = x$ yläpuolella.



Perusjoukkoa E kuvaa neliö, jonka pinta-ala on
$m(E) = 60 \cdot 60 = 3600$.

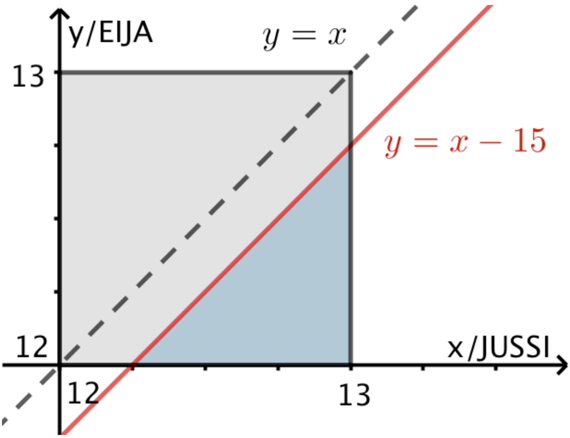
Suotuisia tapauksia kuvaa kolmio, jonka kanta on 60 ja korkeus 60. Kolmion pinta-ala on

$$m(A) = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1800.$$

Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{1800}{3600} = 0,5 .$$

b) Olkoon tapahtuma B: ”Eija joutuu odottamaan yli 15 minuuttia”. Pisteet (x, y) sijaitsevat neliön siinä osassa, jossa toteutuu ehto $x > y + 15$ eli $y < x - 15$.



Suotuisia tapauksia kuvaa suoran $y = x - 15$ alapuolelle jäävä alue, jonka pinta-ala saadaan laskemalla kolmion, jonka kanta on $60 - 15 = 45$ ja korkeus $60 - 15 = 45$, pinta-ala.

$$m(B) = \frac{45 \cdot 45}{2} = 1012,5$$

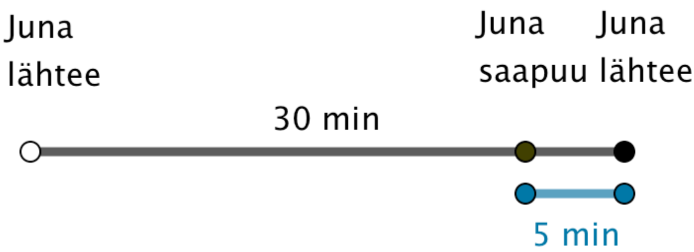
Tapahtuman B todennäköisyys on

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{1012,5}{3600} \approx 0,28 .$$

Vastaus a) 0,5 b) 0,28

42

a) Olkoon tapahtuma A:”matkustaja pääsee heti junaan”.



Tapahtumalle A suotuisan ajanjakson pituus on

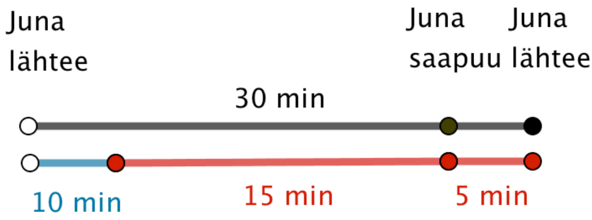
$m(A) = 5$ min .

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on

$m(E) = 30$ min .

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{5\,\text{min}}{30\,\text{min}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

b) Olkoon tapahtuma B:”matkustaja joutuu odottamaan junaan pääsyä yli 15 minuuttia”.

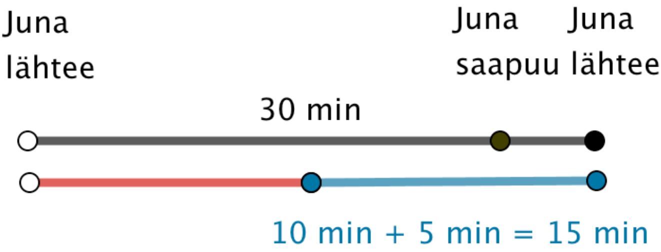


Matkustaja ei voi tulla asemalle silloin, kun junaan pääsee suoraan sisälle ja hänen on tultava asemalla vähintään 15 minuuttia ennen junan saapumista.

Tapahtumalle B suotuisan ajanjakson pituus on
$m(B) = 30 \text{ min} - 5 \text{ min} - 15 \text{ min} = 10 \text{ min}$.

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{10\,\text{min}}{30\,\text{min}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

c) Olkoon tapahtuma C: ”matkustaja joutuu odottamaan junaan pääsyä korkeintaan 10 minuuttia”



Matkustajan on tultava asemalle korkeintaan 10 minuuttia ennen junan saapumista tai silloin, kun junaan pääsee suoraan sisään.

Tapahtumalle C suotuisan ajanjakson pituus on

$m(C) = 10 \text{ min} + 5 \text{ min} = 15 \text{ min}$.

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(E)} = \frac{15 \text{ min}}{30 \text{ min}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Vastaus a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ c) $\frac{1}{2} = 0{,}5$

43

Olkoon tapahtuma A: ” Raimolle jää vähintään 16 metriä pitkä liina”.

Jotta ankkuriliinaa jäisi 16 metriä, leikkauskohta voi sijaita kummassa päässä liinaa tahansa korkeintaan 4 metrin etäisyydellä liinan päästä.

Tapahtumalle A suotuisa pituus on
$m(A) = 4 \text{ m} + 4 \text{ m} = 8 \text{ m}$.

Koko perusjoukkoa kuvaava pituus on
$m(E) = 20 \text{ m}$.

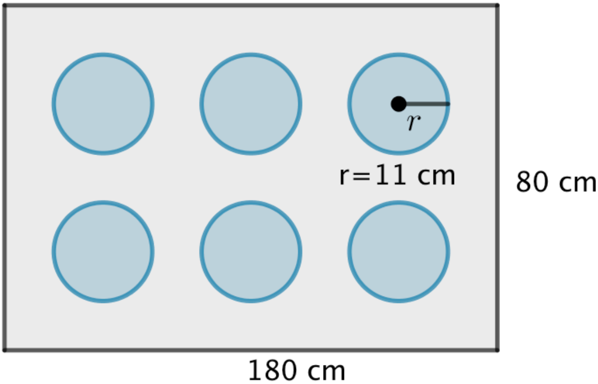
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{8 \text{ m}}{20 \text{ m}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Vastaus $\frac{2}{5} = 0,4$

44

Olkoon tapahtuma A: ”pallo osuu lautaseen”.

Lautasten säde on $r = \dfrac{22 \text{ cm}}{2} = 11 \text{ cm}$.



Suotuisa alue koostuu kuudesta lautasesta. Lasketaan suotuisan alueen pinta-ala.

$$m(A) = 6 \cdot \pi \cdot (11 \text{ cm})^2 = 726\pi \text{ cm}^2$$

Perusjoukko E on koko pöytä. Perusjoukon E pinta-ala on

$$m(E) = 180 \text{ cm} \cdot 80 \text{ cm} = 14\,400 \text{ cm}^2.$$

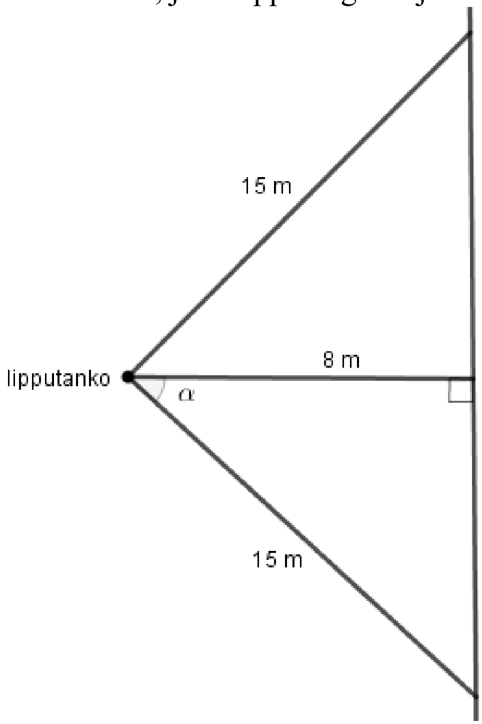
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{726\pi \text{ cm}^2}{14\,400 \text{ cm}^2} = \frac{121\pi}{2400} \approx 0{,}16$$

Vastaus 0,16

45

Olkoon tapahtuma A:”lipputako osuu tielle”.

Piirretään alue, jolla lipputangon sijaittava, jotta se osuu tiehen.



Lasketaan kulman α suuruus.

$$\cos\alpha = \frac{8}{15}$$
$$\alpha \approx 57,769°$$

Tapahtumalle A suotuisan kulman suuruus on

$$m(A) = 2\alpha = 2\cdot 57,769° = 115,538°.$$

Koko perusjoukkoa E kuvaavan kulman suuruus on

$m(E) = 360°$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{115{,}538°}{360°} \approx 0{,}32$$

Vastaus 0,32

46

Arvonnassa saadaan tulokseksi sivun pituus x, jossa $0 \le x \le 5$.
Neliön pinta-ala on $A = x^2$.

Perusjoukon E pituus on $m(E) = 5 - 0 = 5$.

a) Olkoon tapahtuma B: ”pituus x toteuttaa ehdon $x^2 < 2$”.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$x^2 < 2$$
$$x^2 - 2 < 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

$x^2 - 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $x^2 - 2 < 0$ kun $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Kun otetaan huomioon määrittelyehto, saadaan $0 \le x < \sqrt{2}$.

Tapahtumalle B suotuisa pituus on $m(B) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$.

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}28$$

b) Olkoon tapahtuma C: ”pituus x toteuttaa ehdon $x^2 = 2$”.

$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2} \qquad (x \geq 0)$$
$$x = \sqrt{2}$$

Tapahtumalle C suotuisa pituus on $m(C) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(E)} = \frac{0}{5} = 0$$

Vastaus a) $\frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}28$ b) 0

47

Valitaan umpimähkään kertoimet a ja b, siten että $0 \le a \le 1$ ja $0 \le b \le 1$.

Muutetaan annettu suora ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} ax - by &= 0 \\ -by &= -ax \qquad \mid (b \ne 0) \\ y &= \frac{a}{b}x \end{aligned}$$

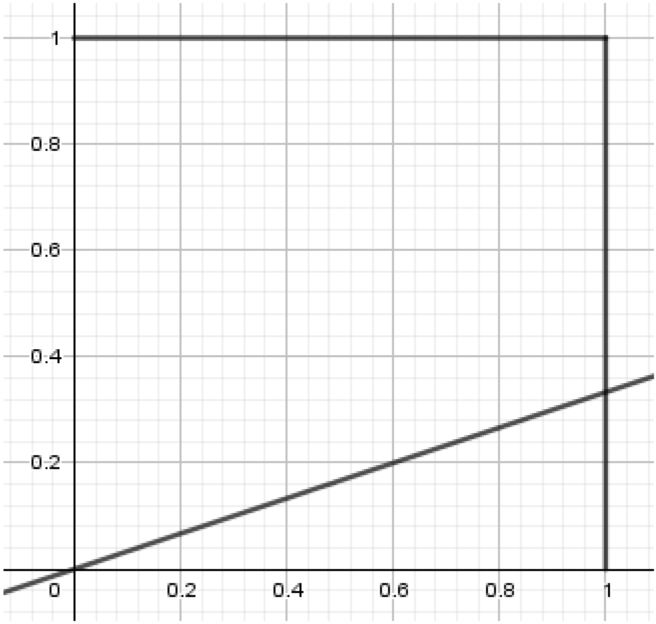
Suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{a}{b}$.

Olkoon tapahtuma
A: ”kertoimet a ja b toteuttavat ehdon $\dfrac{a}{b} \le \dfrac{1}{3}$”.

Piirretään tilanne xy-koordinaatistoon siten, että kerroin a on y-akselilla ja kerroin b x-akselilla. Tällöin saadaan

$$\frac{y}{x} \le \frac{1}{3}$$

$$y \le \frac{1}{3}x$$



Perusjoukko E on kuvan mukainen neliö, jonka sivun pituus on 1.

Suotuisa alue muodostuu niistä neliön E pisteistä, jotka jäävät suoran $y = \frac{1}{3}x$ alapuolelle.

Suotuisan alueen A pinta-ala saadaan laskemalla kolmion, jonka kanta on 1 ja korkeus $\frac{1}{3}$ pinta-ala.

$$m(A) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

Perusjoukon E pinta-ala on $m(E) = 1 \cdot 1 = 1$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

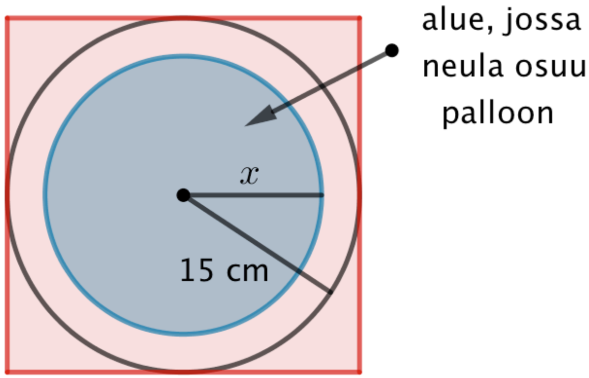
Vastaus $\frac{1}{6} \approx 0,17$

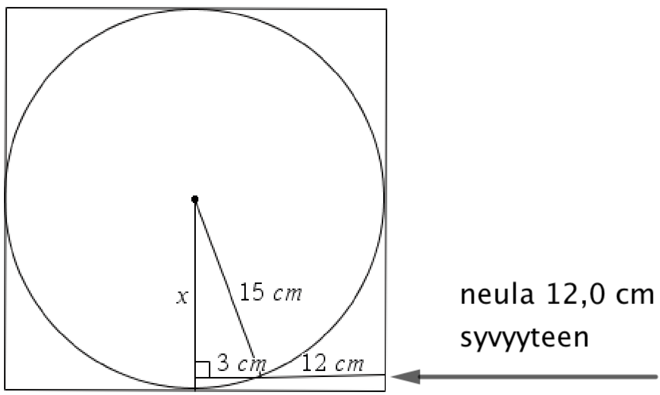
48

Olkoon tapahtuma A: ”neula osuu ilmapalloon”.

Ilmapallon säde on $r = \dfrac{30\text{ cm}}{2} = 15\text{ cm}$.

Koska koko laatikko koostuu samanlaisista tahkoista, riittää tutkia yhtä tahkoa.





Tapahtumalle A suotuisa alue muodostuu ympyrästä, jonka säde on x. Lasketaan säteen x pituus.

$$\begin{aligned} x^2 + 3^2 &= 15^2 \\ x &= \pm\sqrt{216} \qquad (x \geq 0) \\ x &= \sqrt{216} \end{aligned}$$

Suotuisan alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} m(A) &= \pi \cdot (\sqrt{216}\ \text{cm})^2 \\ &= \pi \cdot 216\ \text{cm}^2 \\ &= 216\pi\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Perusjoukkona on laatikon tahko, jonka pinta-ala

$$m(E) = 30\ \text{cm} \cdot 30\ \text{cm} = 900\ \text{cm}^2$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{216\pi\ \text{cm}^2}{900\ \text{cm}^2} = 0,7539... \approx 0,754$$

Vastaus 0,754

49

Valitaan umpimähkään parametrin p arvo siten, että $0 \le p \le 1$.

Yhtälön $x^2 + px + 1 - p = 0$ ratkaisuna on

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1-p)}}{2 \cdot 1} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4p - 4}}{2}.$$

a) Olkoon tapahtuma A: ”yhtälöllä on kaksi ratkaisua”.

Yhtälöllä $x^2 + px + 1 - p = 0$ on kaksi ratkaisua, kun diskriminantti $D = p^2 + 4p - 4$ on positiivinen.

$p^2 + 4p - 4 > 0$ Ratkaistaan laskimella.

$p < -2\sqrt{2} - 2 \approx -4{,}8$ tai $p > 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}8$ $\quad | -1 \le p \le 1$

ei kelpaa $\qquad 2\sqrt{2} - 2 < p < 1$

Suotuisa alue on siis $2\sqrt{2} - 2 < p < 1$.

Suotuisan alueen pituus on $m(A) = |1 - (2\sqrt{2} - 2)| = 3 - 2\sqrt{2}$.

Perusjoukon E pituus on $m(E) = |1 - (-1)| = 2$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}0858$$

b) Olkoon tapahtuma B: ”yhtälöllä on tasan yksi ratkaisu”.

Yhtälöllä $x^2 + px + 1 - p = 0$ on tasan yksi ratkaisu, kun diskriminantti $D = p^2 + 4p - 4 = 0$.

$$p^2 + 4p - 4 > 0$$

$$p = -2\sqrt{2} - 2 \qquad \text{tai} \qquad p = 2\sqrt{2} - 2$$

Ratkaisuista $p = 2\sqrt{2} - 2$ on välillä $[-1,\ 1]$.

Pisteen pituus on 0, joten $m(B) = 0$.

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{0}{2} = 0$$

c) Olkoon tapahtuma C:”yhtälöllä ei ole ratkaisua”.

Yhtälöllä $x^2 + px + 1 - p = 0$ ei ole ratkaisua, kun diskriminantti $D = p^2 + 4p - 4 < 0$. A-kohdan perusteella tämä toteutuu, kun $-1 < p < 2\sqrt{2} - 2$. Suotuisa alue on siis $-1 < p < 2\sqrt{2} - 2$.

Suotuisan alueen pituus on $m(C) = \left|2\sqrt{2} - 2 - (-1)\right| = 2\sqrt{2} - 1$.

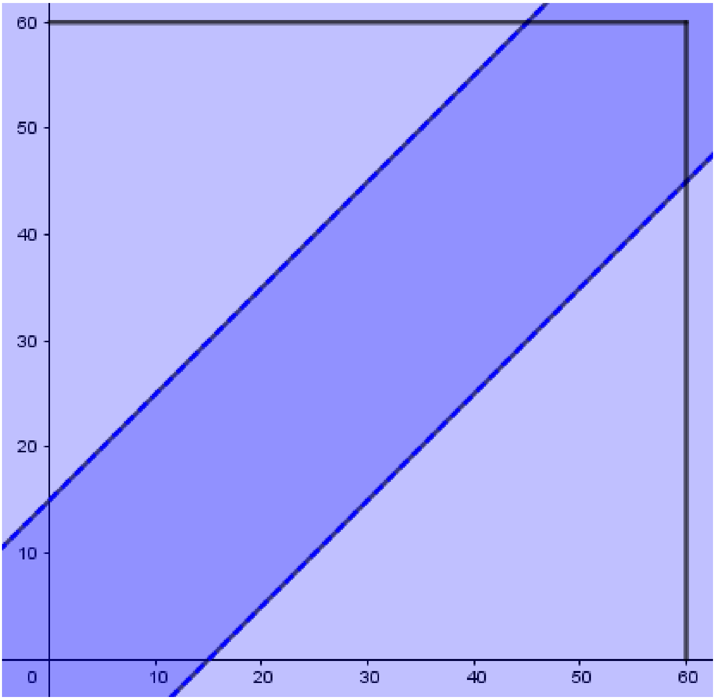
$$P(C) = \frac{m(C)}{m(E)} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0{,}914$$

Vastaus a) 0,0858 b) 0 c) 0,914

50

Olkoon tapahtuma A: ”henkilöt A ja B ovat kahvilassa samalla hetkellä”.

Piirretään tilanne xy-koordinaatistoon, jossa x-koordinaatti kuvaa henkilön A saapumisaikaa ja y-koordinaatti henkilön B saapumisaikaa minuutteina kello 9 jälkeen.



Perusjoukkoa E kuvaa neliö, jonka pinta-ala on $m(E) = 60 \cdot 60 = 3600$.

Suotuisia tapauksia kuvaa tumman sininen alue, jolloin henkilöt ovat kahvilassa yhtä aikaa. Alue koostuu perusjoukkona olevan neliön niistä pisteitä, jotka toteuttavat ehdot

$$\begin{cases} y < x + 15 \\ x < y + 15 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} y < x + 15 \\ y > x - 15 \end{cases}.$$

Eli niistä neliön pisteistä, jotka jäävät suorien $y = x + 15$ ja $y = x - 15$ väliin.

Suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä koko pinta-alasta suotuisan alueen ulkopuolelle jäävät kolmiot, joiden kanta ja korkeus ovat $60 - 15 = 45$.

$$m(A) = 3600 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 1575$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{1575}{3600} = 0,4375... \approx 0,44$$

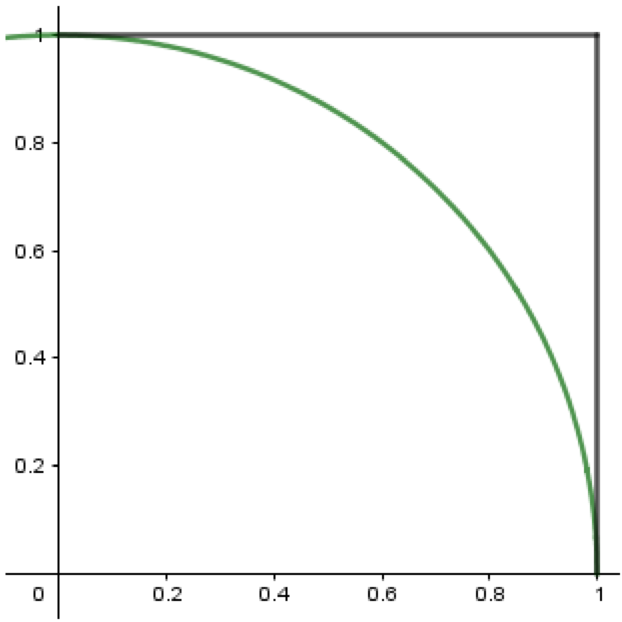
Vastaus 0,44

51

Arvonnan tuloksena saadaan piste (x, y), missä $0 \le x \le 1$ ja $0 \le y \le 1$.

a) Olkoon tapahtuma A : ”valittu piste (x, y) toteuttaa ehdon $x^2 + y^2 < 1$”.

Piirretään tilanne *xy*-koordinaatistoon.



Perusjoukko E on kuvan mukainen neliö, jonka sivun pituus on 1.

Suotuisa alue muodostuu niistä neliön E pisteistä, jotka jäävät ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolelle.

Suotuisan alueen A pinta-ala saadaan laskemalla ympyrän neljänneksen pinta-ala.

$$m(A) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$$

Perusjoukon E pinta-ala on $m(E) = 1 \cdot 1 = 1$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$$

Vastaus a) $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$