K1

a) Laatikossa on oransseja pingispalloja $18-9-4=5$ kappaletta.

$$P(\text{oranssi pallo})=\frac{n(\text{"oranssi pallo"})}{n(\text{"kaikki pallot"})}$$
$$=\frac{5}{18}\approx 0,278$$

b) Laatikossa ei-valkoisia pingispalloja ovat keltaiset ja oranssit pallot, joita on yhteensä $5+4=9$ kappaletta.

$$P(\text{ei-valkoinen pallo})=\frac{n(\text{"ei-valkoinen pallo"})}{n(\text{"kaikki pallot"})}$$
$$=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}=0,5$$

c) Laatikossa ei ole yhtään punaista palloa.

$$P(\text{punainen pallo})=\frac{n(\text{"punainen pallo"})}{n(\text{"kaikki pallot"})}$$
$$=\frac{0}{18}=0$$

Vastaus a) $\frac{5}{18}\approx 0,278$ b) $\frac{1}{2}=0,5$ c) 0

K2

Arvotaan kaksinumeroinen luku heittämällä kaksi kertaa kuusisivuista noppaa.

Olkoon tapahtuma A:"saadun luvun neliöjuuri on kokonaisluku".

Taulukoidaan heittojen tulokset ja merkitään taulukkoon suotuisat tapaukset.

1. heitto \ 2. heitto	1	2	3	4	5	6
6	61	62	63	64	65	66
5	51	52	53	54	55	56
4	41	42	43	44	45	46
3	31	32	33	34	35	36
2	21	22	23	24	25	26
1	11	12	13	14	15	16

Alkeistapausten lukumäärä on 36.
Suotuisten tapausten lukumäärä on 4.

$$P(A) = \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$

$$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

Vastaus $\frac{1}{9} \approx 0{,}111$

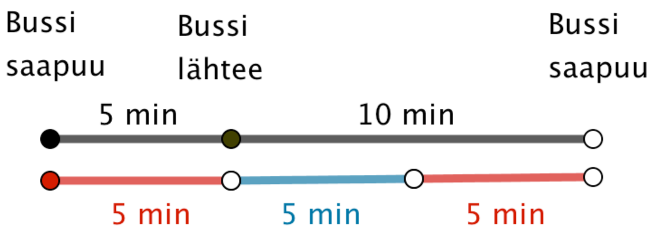
K3

Bussi saapuu pysäkille 15 minuutin välein ja seisoo pysäkillä 5 minuuttia.

a) Olkoon tapahtuma

A: ”odotusaika yli 5 minuuttia”.

Jotta matkustaja joutuu odottamaan bussiin pääsyä yli 5 minuuttia, hänen on saavuttava pysäkille 5 minuuttia ennen bussia, eikä hän voi tulla pysäkille, kun bussi seisoo pysäkillä.



Tapahtumalle A suotuisan ajanjakson pituus on

$m(A) = 15\text{ min} - 5\text{ min} - 5\text{ min} = 5\text{ min}$.

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on

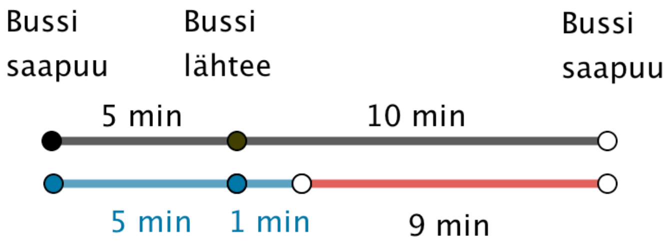
$m(E) = 15\text{ min}$.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{5\text{ min}}{15\text{ min}} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

b) Olkoon tapahtuma

B: ”odotusaika alle minuutin”.

Jotta matkustaja joutuisi odottamaan bussiin pääsyä alle minuutin, hänen on saavuttava pysäkille korkeintaan 1 minuuttia ennen bussia tai sinä aikana, kun bussi seisoo pysäkillä.



Tapahtumalle B suotuisan ajanjakson pituus on

$$m(B) = 5\,\text{min} + 1\,\text{min} = 6\,\text{min}\ .$$

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on

$$m(E) = 15\,\text{min}\ .$$

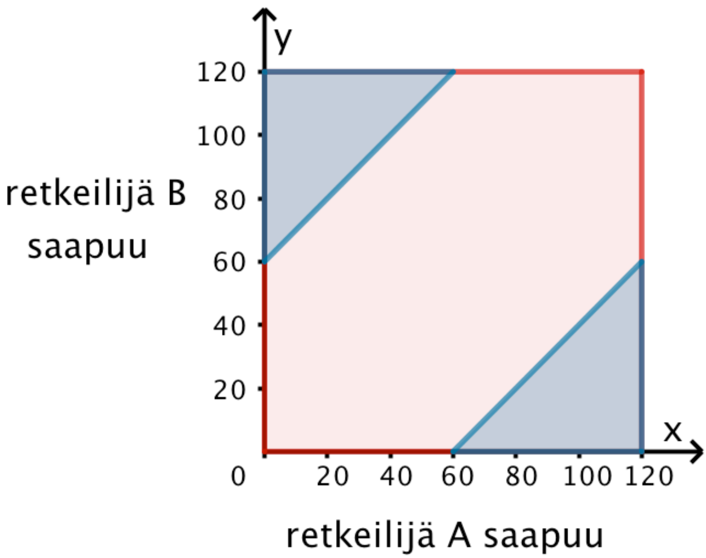
$$P(B) = \frac{m(B)}{m(E)} = \frac{6\,\text{min}}{15\,\text{min}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Vastaus a) $\frac{1}{3} \approx 0,333$ b) $\frac{2}{5} = 0,4$

K4

Olkoon tapahtuma T: ”ensin saapunut retkeilijä joutuu odottamaan myöhemmin saapuvaa retkeilijää yli tunnin”.

Piirretään tilanne xy-koordinaatistoon, jossa x- ja y-koordinaatit kuvaavat henkilöiden saapumisaikaa minuutteina kello 16 jälkeen.



Perusjoukkoa E kuvaa neliö, jonka pinta-ala on

$m(E) = 120 \cdot 120 = 14400$.

Olkoon x retkeilijän A saapumisaika ja y retkeilijän B saapumisaika.

Retkeilijä A joutuu odottamaan B:tä yli tunnin, mikäli

$$y > x + 60$$

(suoran $y = x + 60$ yläpuoli, kuvassa vasemman ylänurkan kolmio).

Retkeilijä B joutuu odottamaan A:ta yli tunnin, mikäli

$$x > y + 60 \quad \text{eli} \quad y < x - 60$$

(suoran $y = x - 60$ alapuoli, kuvassa oikean alanurkan kolmio).

Suotuisan alueen pinta-ala saadaan laskemalla yhteen kolmioiden, joiden kanta ja korkeus ovat $120 - 60 = 60$, pinta-alat.

$$m(T) = 2 \cdot \frac{60 \cdot 60}{2} = 3600$$

$$P(T) = \frac{m(T)}{m(E)} = \frac{3600}{14400} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Vastaus $\frac{1}{4} = 0{,}25$

K5

Kolmea noppaa heitettäessä kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Silmäluvun pitää jokaisella heitolla olla suurempi, kuin edellisellä heitolla. Merkitään 1. ja 2. heittoa kuvaavaan taulukkoon 3. heitolla suotuisten alkeistapausten lukumäärä.

2. noppa \ 1. noppa	1	2	3	4	5	6
6	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0
4	2	2	2	0	0	0
3	3	3	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Taulukon perusteella suotuisia tapauksia on yhteensä 20 kappaletta.

$$P(\text{saatu silmäluku on aina suurempi kuin edellisen heiton silmäluku})$$
$$= \frac{n(\text{"suotuisat"})}{n(\text{"kaikki"})}$$
$$= \frac{20}{216} = \frac{5}{54} \approx 0{,}0926$$

Vastaus $\frac{5}{54} \approx 0{,}0926$

K6

a) Leipää ostaa 74,0 % asiakkaista.
Leivän ostajista 60,0 % ostaa myös maitoa.

$P(\text{asiakas ostaa leipää ja maitoa})$
$= 0,74 \cdot 0,60 = 0,444$

b) Maitoa ostaa 48,0 % asiakkaista.

$P(\text{asiakas ostaa maitoa mutta ei leipää})$
$= P(\text{asiakas ostaa maitoa}) - P(\text{asiakas ostaa leipää ja maitoa})$
$= 0,48 - 0,444 = 0,036$

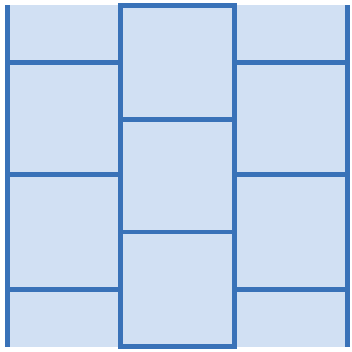
c) $P(\text{asiakas ei osta maitoa eikä leipää})$
$= 1 - (P(\text{leipää}) + P(\text{maitoa mutta ei leipää}))$
$= 1 - (0,74 + 0,036) = 0,224$

Vastaus a) 0,444 b) 0,036 c) 0,224

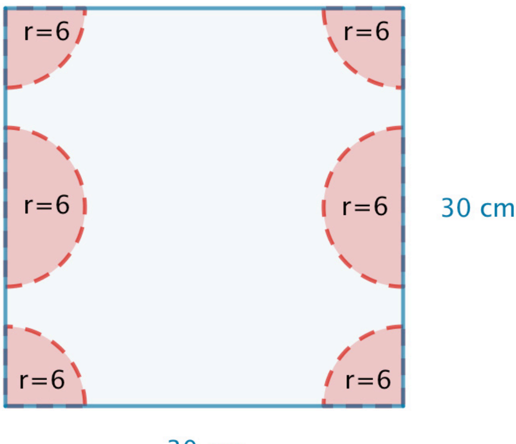
K7

Tutkitaan CD-levyn keskipisteen sijaintia. Jotta CD-levy peittäisi jonkin laatan nurkan, kolikon keskipisteen ja laatan nurkan välisen etäisyyden on oltava pienempi, kuin CD-levyn säde. CD-levyn säde on

$$r = \frac{120 \text{ mm}}{2} = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm} .$$



Koska koko lattia koostuu täsmälleen samanlaisista laatoista, riittää tutkia yhtä laattaa. Piirretään yhdelle lattialaatalle alueet, joilla CD-levyn keskipisteen on sijaittava, jotta jokin laatan nurkista peittyisi.



Tapahtumalle A: "CD-levy peittää laatan nurkan" suotuisa alue muodostuu neljästä samanlaisesta neljännesympyrästä ja kahdesta puoliympyrästä, joiden kaikkien säde on sama kuin CD-levyn säde. Katkoviivalla merkityt nollamittaiset reunat eivät kuulu mukaan suotuisaan alueeseen.

Suotuisan alueen pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
m(A) &= 4 \cdot \frac{\pi \cdot (6\ \text{cm})^2}{4} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot (6\ \text{cm})^2}{2} \\
&= \pi \cdot 36\ \text{cm}^2 + \pi \cdot 36\ \text{cm}^2 \\
&= 2 \cdot \pi \cdot 36\ \text{cm}^2 \\
&= 72\pi\ \text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Perusjoukkona on neliölaatta, jonka pinta-ala

$$m(E) = 30\ \text{cm} \cdot 30\ \text{cm} = 900\ \text{cm}^2.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{72\pi\ \text{cm}^2}{900\ \text{cm}^2} = 0,2513... \approx 0,251$$

Vastaus 0,251

K8

Silva voi valita varustelun 5 tavalla, moottorin 3 tavalla, värin 9 tavalla, sisäverhoilun 3 tavalla ja vaihteet 2 tavalla.

Auton mallivaihtoehtoja on yhteensä $5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 = 810$ kappaletta.

Vastaus 810

K9

Pallokenttiä on yhteensä 4. Pallokentät voidaan laittaa $4! = 24$ järjestykseen.

Ainoastaan yksi järjestys on virallisen koon mukainen suuruusjärjestys suurimmasta pienimpään.

P(kentät saa arvaamalla oikeaan järjestykseen)

$$= \frac{1}{24} = 0{,}0416... \approx 0{,}042$$

Vastaus $\frac{1}{24} \approx 0{,}042$

K10

a) Kymmenen kirjaa voidaan järjestää riviin $10! = 3\ 628\ 800$ tavalla.

b) Seitsemän Harry Potter -romaania voidaan järjestää riviin $7! = 5040$ tavalla.

Kolme Taru sormusten herrasta -romaania voidaan järjestää riviin $3! = 6$ tavalla.

Kirasarjojen järjestys voidaan valita 2 tavalla, joko Taru sormusten herrasta -romaanit tai Harry Potter -romaanit ensin.

Rivejä, joissa saman romaanisarjan kirjat ovat peräkkäin, on

$7! \cdot 3! \cdot 2 = 60\ 480$.

Vastaus a) 3 628 800 b) 60 480

K11

Kolmenumeroisen luvun numerot valitaan heittämällä noppaa kolme kertaa.

a) Jokainen luvun numero voidaan saada nopalla 6 tavalla.
Erilaisia lukuja on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ kappaletta.

b) Jotta luku olisi vähintään 400, ensimmäisellä nopan heitolla on saatava 4, 5 tai 6. Suotuisia silmälukuja on 3 kappaletta.

Jotta luku olisi parillinen, viimeisellä nopan heitolla on saatava 2, 4 tai 6. Suotuisia silmälukuja on 3 kappaletta.

Keskimmäinen numero voi olla mikä tahansa 6 silmäluvusta.

Lukuja, jotka ovat vähintään 400 ja parillisia on $3 \cdot 6 \cdot 3 = 54$.

Vastaus a) 216 b) 54

K12

a) 52 kortin pakasta voidaan nostaa 3 korttia 52^3 tavalla, jos kortit palautetaan pakkaan aina noston jälkeen.

Pakassa on 13 herttaa. Kolme herttaa voidaan nostaa 13^3 tavalla.

$$P(\text{saadaan 3 herttaa}) = \frac{13^3}{52^3} = \frac{1}{64} = 0{,}01562... \approx 0{,}0156$$

b) 52 kortin pakasta voidaan nostaa 3 korttia $52 \cdot 51 \cdot 50 = 132\ 600$ tavalla, jos kortteja ei palauteta pakkaan noston jälkeen.

Kolme herttaa voidaan nostaa $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$ tavalla.

$$\begin{aligned} P(\text{saadaan 3 herttaa}) &= \frac{1716}{132\ 600} \\ &= \frac{11}{850} = 0{,}01294... \approx 0{,}0129 \end{aligned}$$

Vastaus a) $0{,}0156$ b) $0{,}0129$

K13

a) Yhdeksän lasta voivat sijoittua istumaan yhdeksälle paikalle

$9! = 362\ 880$ tavalla.

b) Yhdeksän lasta voivat sijoittua istumaan 15 paikalle

$(15)_9 = 1\ 816\ 214\ 400$ tavalla.

Vastaus a) 362 880 b) 1 816 214 400

K14

Kuusi sientä voidaan valita 78 opiskelijalle opetetun sienen joukosta $\binom{78}{6}$ tavalla.

Kuusi sientä voidaan valita 49 kurssilaisen oppiman sienen joukosta $\binom{49}{6}$ tavalla.

$P(\text{opiskelija tunnistaa hänelle esitetyt 6 sientä})$

$$= \frac{\binom{49}{6}}{\binom{78}{6}} = 0{,}0544... \approx 0{,}054$$

Vastaus 0,054

K15

a) 42 jäsenen joukkueesta voidaan tehdä erilaisia 6 jäsenen otoksia $\binom{42}{6} = 5\ 245\ 786$.

b) Urheilujoukkueen urhelijoista $42 - 3 = 39$ ei ole käyttänyt dopingaineita. 39 jäsenen joukosta voidaan tehdä erilaisia 6 jäsenen otoksia $\binom{39}{6}$.

Lasketaan todennäköisyys.

P(otoksessa ei ole dopingaineita käyttäneitä urheilijoita)

$$= \frac{\binom{39}{6}}{\binom{42}{6}} = \frac{51}{82} = 0,621... \approx 0,62$$

Vastaus a) 5 245 786 b) 0,62

K16

a) Noppaa heitetään viisi kertaa. Jokaisella heitolla on 6 tulosvaihtoehtoa.

Tulosrivejä on yhteensä $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$.

b) Jos sama silmäluku ei saa olla kahta kertaa peräkkäin, niin ensimmäisellä heitolla on 6 tulosvaihtoehtoa ja muilla heitoilla 5 tulosvaihtoehtoa.

Tulosrivejä on yhteensä $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^4 = 3750$.

c) Lasketaan, millä todennäköisyydellä mikään silmäluku ei tule kahta kertaa peräkkäin.

$P(\text{sama silmäluku ei tule kahta kertaa peräkkäin})$

$$= \frac{3750}{7776} = 0,482...$$

Tuloksen puolesta ei kannata lyödä vetoa, koska sen todennäköisyys on alle 0,5.

Vastaus a) 7776 b) 3750 c) ei kannata

K17

Laatikossa olevista seitsemästä kirjaimesta L I P A S T O voidaan nostaa viisi kirjainta tietyssä järjestyksessä

$(7)_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$ tavalla.

a) Ainoastaan yhdestä nostojärjestyksestä muodostuu sana LISTA.

$P(\text{kirjaimista muodostuu sana LISTA})$

$= \frac{1}{2520} = 0{,}0003968... \approx 0{,}000397$

b) Sanan, joka alkaa ALI, kolme ensimmäistä kirjainta voidaan nostaa yhdellä tavalla. Neljäs kirjain voidaan nostaa neljällä tavalla ja viides kolmella tavalla.

Sana, joka alkaa ALI, voidaan nostaa $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ tavalla.

$P(\text{kirjaimista muodostuu sana, joka alkaa ALI})$

$= \frac{12}{2520} = \frac{1}{210} = 0{,}004762... \approx 0{,}00476$

Vastaus a) $0{,}000397$ b) $0{,}00476$

K18

Laatikossa on 5 keltaista ja 7 punaista palloa.

a) Kaksi keltaista palloa voidaan valita 5 pallon joukosta $\binom{5}{2}$ tavalla.

Kaksi punaista palloa voidaan valita 7 pallon joukosta $\binom{7}{2}$ tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan 2 keltaista ja 2 punaista palloa voidaan valita $\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{2}=210$ tavalla.

b) Neljä keltaista palloa voidaan valita $\binom{5}{4}=5$ tavalla.

Neljä punaista palloa voidaan valita $\binom{7}{4}=35$ tavalla.

Neljä palloa laatikossa olevista 12 pallosta voidaan valita kaikkiaan $\binom{12}{4}=495$ tavalla.

Valintoja, joissa on ainakin yksi kumpaakin väriä, on

$495-5-35=455$.

Vastaus a) 210 b) 455

K19

Tavalliseen vikinglottoriviin arvotaan kuusi päänumeroa lukujen $1-48$ joukosta sekä yksi vikingnumero lukujen $1-8$ joukosta.

Kaikkiaan vikinlottorivejä on $\binom{48}{6}\binom{8}{1}$.

a) Kolme oikeaa päänumeroa kuuden joukosta voidaan valita $\binom{6}{3}$ tavalla ja kolme muuta päänumeroa voidaan valita 42 numeron joukosta $\binom{42}{3}$ tavalla.

Väärä vikingnumero voidaan valita 7 tavalla.

Suotuisia vikinlottorivejä on siis $\binom{6}{3}\binom{42}{3}\cdot 7$.

Lasketaan todennäköisyys.

P(kolme päänumeroa oikein, vikingnumero väärin)

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{42}{3}\cdot 7}{\binom{48}{6}\binom{8}{1}} = \frac{50\,225}{3\,067\,878} = 0{,}01637... \approx 0{,}0164$$

b) Oikea vikingnumero voidaan valita yhdellä tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

P(kolme päänumeroa oikein, vikingnumero oikein)

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{42}{3}\cdot 1}{\binom{48}{6}\binom{8}{1}} = \frac{7175}{3\,067\,878} = 0{,}002338... \approx 0{,}00234$$

Vastaus a) 0,0164 b) 0,00234

K20

Tasosssa on merkittynä n pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

Kolmio muodostuu valitsemalla pisteistä 3 missä tahansa järjestyksessä. Kolmioiden lukumäärä on siis yhtä suuri, kuin n alkion joukosta valittujen 3-alkioisten osajoukkojen lukumäärä.

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Lasketaan kolmioiden lukumäärä kun $n = 7$.

$$\frac{7(7-1)(7-2)}{6} = 35$$

Vastaus $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Jos $n = 7$, niin kolmioita on 35.

K21

Korttipakasta nostetaan kaksi korttia palauttamatta niitä takaisin.

a) $P(\text{2. kortti on ruutu} \mid \text{1. oli pata}) = \frac{13}{51} \approx 0{,}255$

b) $P(\text{1. kortti on pata ja 2. ruutu}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{15}{204} \approx 0{,}0637$

c) $P(\text{saadaan pata ja ruutu})$

$= P\big((\text{1. pata ja 2. ruutu}) \text{ tai } (\text{1. ruutu ja 2. pata})\big)$

$= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} + \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{102} \approx 0{,}127$

Vastaus a) $\frac{13}{51} \approx 0{,}255$ b) $\frac{13}{204} \approx 0{,}0637$ c) $\frac{13}{102} \approx 0{,}127$

K22

Korissa on yhteensä 20 hedelmää, joista 8 on vihreää omenaa ja 4 punaista omenaa.

Risto nappaa korista umpimähkää hedelmän ja myöhemmin muistaa ottaneensa omenan. Omenoita oli korissa 12 kappaletta.

$P(\text{omena on punainen})$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}3333... \approx 0{,}333$$

Vastaus $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

K23

Onnenpyörässä päävoiton todennäköisyys on $\dfrac{30°}{360°}=\dfrac{1}{12}$,

uuden pyöräytyksen todennäköisyys on $\dfrac{90°+45°}{360°}=\dfrac{3}{8}$ ja

ei voittoa -todennäköisyys on $\dfrac{360°-30°-45°-90°}{360°}=\dfrac{13}{24}$.

Sini maksaa yhdestä pyöräytyksestä.

a) Jotta Sini voittaisi päävoiton viimeistään kolmannella pyöräytyksellä, hänen pitää

1) pyörittää päävoittoon ensimmäisellä kerralla,
2) pyöräyttää uusi pyöräytys ja sen jälkeen päävoitto tai
3) pyöräyttää uusi pyöräytys kaksi kertaa ja sen jälkeen päävoitto.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{Sini voittaa viimeistään kolmannella pyöräytyksellä})\\
&=P(\text{voittaa 1. pyör})+P(\text{voittaa 2. pyör})+P(\text{voittaa 3. pyör})\\
&=\frac{1}{12}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}\\
&=\frac{97}{768}=0{,}1263\ldots\approx 0{,}13
\end{aligned}
$$

b) Tapahtuman
”Sini saa pyöräyttää onnenpyörää vähintään 3 kertaa”
vastatapahtuma on
”Sini saa pyöräyttää täsmälleen kerran tai kaksi”.

Jos Sini saa pyöräyttää vain kerran, hän saa ensimmäisellä pyöräytyksellä joko ei voittoa -sektorin tai päävoitto-sektorin.

$$P(\text{saa pyöräyttää vain kerran}) = \frac{13}{24} + \frac{1}{12}$$

Jos Sini saa pyöräyttää tasan kaksi kertaa, hän saa ensimmäisellä pyöräytyksellä uusi pyöräytys -sektorin ja toisella joko ei voittoa -sektorin tai päävoitto -sektorin.

$$P(\text{saa pyöräyttää tasan 2 kertaa}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{13}{24} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{12}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
&P(\text{saa pyöräyttää vähintään 3 kertaa}) \\
&= 1 - P(\text{saa pyöräyttää 1 tai 2 kertaa}) \\
&= 1 - \big(P(\text{saa pyöräyttää kerran}) + P(\text{saa pyöräyttää 2 kertaa})\big) \\
&= 1 - \left(\frac{13}{24} + \frac{1}{12} + \frac{3}{8} \cdot \frac{13}{24} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{12}\right) \\
&= \frac{9}{64} = 0{,}1406\ldots \approx 0{,}14
\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{97}{768} \approx 0{,}13$ b) $\frac{9}{64} \approx 0{,}14$

K24

Arpajaisissa on 50 arpaa, joista 10 voittoarpoja.

Ostetaan 3 arpaa.

Tapahtuman ”saadaan ainakin yksi voitto”

vastatapahtuma on ”ei saada yhtään voittoa”.

Koska arpoja on 50, arpojen määrä vähenee sitä mukaa, kun arpoja ostetaan.

$$\begin{aligned}
&P(\text{saadaan ainakin yksi voitto}) \\
&= 1 - P(\text{ei saada yhtään voittoa}) \\
&= 1 - P(\text{1. ei voita}) \cdot P(\text{2. ei voita}) \cdot P(\text{3. ei voita}) \\
&= 1 - \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} \\
&= \frac{243}{490} = 0{,}4959\ldots \approx 0{,}496
\end{aligned}$$

Vastaus $\frac{243}{490} \approx 0{,}496$

K25

Arpajaisissa on suuri määrä arpoja, ja joka viides arpa voittaa.

Koska arpoja on suuri määrä, arpojen määrä ei käytännössä muutu, vaikka muutama arpa ostetaankin. Näin voiton todennäköisyys on koko ajan $\frac{2}{5}$.

Ei voittoa -arvan todennäköisyys on $\frac{4}{5} = 0,8$.

Ostetaan 3 arpaa.

Tapahtuman ”saadaan ainakin yksi voitto”
vastatapahtuma on ”ei saada yhtään voittoa”.

$$P(\text{ainakin yksi voitto})$$
$$= 1 - P(\text{ei yhtään voittoa})$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3$$
$$= \frac{61}{225} = 0,488$$

Vastaus $\frac{61}{225} = 0,488$

K26

Järvestä on pyydystetty 120 ahventa, jotka ovat merkitsemisen jälkeen laskettu takaisin järveen. Tämän jälkeen on suoritettu useita koekalastuksia ja huomattu, että pyydystetyistä ahvenista 3,8 % on merkittyjä.

a) Merkitään $x =$ ahventen lukumäärä.

$$\frac{120}{x} = 0{,}038$$

$$x = \frac{120}{0{,}038}$$

$$x = 3157{,}89... \approx 3200$$

b) Pyydystetään 4 ahventa.

Tapahtuman ”ainakin yksi ahvenista on merkitty”

vastatapahtuma on ”yksikään ahven ei ole merkitty”.

$$P(\text{ainakin yksi ahvenista on merkitty})$$

$$= 1 - P(\text{yksikään ahven ei ole merkitty})$$

$$= 1 - \left(\frac{3157{,}89... - 120}{3157{,}89...}\right)^4$$

$$= 0{,}143... \approx 14\ \%$$

Vastaus a) noin 3200 ahventa b) 14 %

K27

Joukkue A johtaa koripallo-ottelua yhdellä pisteellä peliajan päättyessä. Joukkue B on saanut kuitenkin vielä kolme vapaaheittoa, joista kustakin se saa sen onnistuessa yhden pisteen. Kunkin vapaaheiton onnistumistodennäköisyys on 75 % eli $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

Jotta joukkue B voi voittaa, vapaaheitoista pitää onnistua 2 tai 3.

$P(\text{joukkue B voittaa})$
$= P(\text{vapaaheitoista onnistuu 2 tai 3})$
$= P(\text{vapaaheitoista onnistuu 2})+P(\text{vapaaheitoista onnistuu 3})$
$=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{3}{4}\right)^3$
$=\frac{27}{32}=0{,}8437\ldots\approx 0{,}84=84\ \%$

Vastaus $\frac{27}{32}\approx 0{,}84=84\ \%$

K28

Rahaa heitetään viisi kertaa.

Jotta kruuna voi sattua toisen kerran viimeisessä heitossa, niin neljän ensimmäisen joukossa on oltava 1 kruuna ja 3 klaavaa sekä viimeisen heiton on oltava kruuna.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{toinen kruuna viimeisellä heitolla}) \\
&= P(\text{yksi neljästä on kruuna}) \cdot P(\text{kruuna}) \\
&= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} = 0{,}125
\end{aligned}
$$

Vastaus $\frac{1}{8} = 0{,}125$

K29

Vuoden 2012 presidentinvaalien toisella kierroksella Sauli Niinistö sai 62,6 % äänistä ja Pekka Haavisto 37,4 % äänistä.

Valitaan äänestäjistä satunnaisesti viiden hengen otos. Haaviston kannattajia on oltava otoksessa ainakin kolme, jotta hän voittaisi.

Lasketaan todennäköisyys, että 5 hengen otoksessa on 3, 4 tai 5 Haaviston kannattajaa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{Haavisto voittaisi}) \\
&= P(3,\ 4 \text{ tai } 5 \text{ Haaviston kannattajaa}) \\
&= P(3 \text{ kannattajaa}) + P(4 \text{ kannattajaa}) + P(5 \text{ kannattajaa}) \\
&= \binom{5}{3} \cdot 0{,}374^3 \cdot 0{,}626^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}374^4 \cdot 0{,}626^1 + 0{,}375^5 \\
&= 0{,}2735\ldots \approx 0{,}274
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,274

K30

Taulukoidaan a- ja b-kohdassa kysytyt frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit.

x	*f*	*f* %
4	2	6
5	4	11
6	12	33
7	10	28
8	5	14
9	3	8
10	0	0
	36	100

c) Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 12 + 7\cdot 10 + 8\cdot 5 + 9\cdot 3}{36}$$
$$= 6{,}583... \approx 6{,}6$$

d) Frekvenssien summa on 36, joka on parillinen luku. Järjestyksessä 18. arvosana on 6 ja 19. arvosana on 7. Lasketaan keskimmäisten arvosanojen keskiarvo.

$$\frac{6+7}{2} = 6{,}5$$

Arvosanojen mediaani on Md = 6,5.

e) Arvosanan 6 frekvenssi on suurin. Moodi on Mo = 6.

Vastaus c) 6,6 d) 6,5 e) 6

K31

Käyntitiheyden ”harvemmin” suhteellinen frekvenssi on suurin. Käyntitiheyden moodi on "harvemmin kuin kerran kuukaudessa".

Tarkastellaan, missä kohdassa suhteellisen frekvenssin summa ylittää 50 %.

3 % + 7 % + 14 % = 24 %
3 % + 7 % + 14 % + 29 % = 53 %

Käyntitiheyden mediaani on "kerran kuukaudessa".

Vastaus moodi: harvemmin kuin kerran kuukaudessa
mediaani: kerran kuukaudessa

K32

a) Lasketaan poissaolotuntien keskiarvo.

$$x = \frac{3+1+2+3+6+5}{6} = \frac{10}{3} = 3,333... \approx 3,3$$

Poissaolotuntien keskiarvo on 3,3 h.

b) Lasketaan poissaolotuntien keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-\frac{10}{3})^2 + (1-\frac{10}{3})^2 + (2-\frac{10}{3})^2 + (3-\frac{10}{3})^2 + (6-\frac{10}{3})^2 + (5-\frac{10}{3})^2}{6}}$$
$$= 1,699... \approx 1,7$$

Poissaolotuntien keskihajonta on 1,7 h.

Vastaus a) 3,3 h b) 1,7 h

K33

Ryhmissä oli yhteensä $27+24=51$ opiskelijaa.

Lasketaan ryhmien yhteinen keskiarvo.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{27\cdot 6{,}95+24\cdot 7{,}54}{51} \\ &= 7{,}2276... \approx 7{,}23\end{aligned}$$

Vastaus 7,23

K34

Lasketaan opiskelijoiden pisteitä vastaavat normitetut arvot.

Frans:

$\bar{x} = 24$
$\sigma = 9$
$x = 20$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$
$$= \frac{20 - 24}{9} = -0{,}444... \approx -0{,}44$$

Fanny:

$\bar{x} = 27$
$\sigma = 8$
$x = 23$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$
$$= \frac{23 - 27}{8} = -0{,}5$$

Frans menestyi suhteellisesti paremmin, koska hänen pisteitään vastaava normitettu arvo on suurempi.

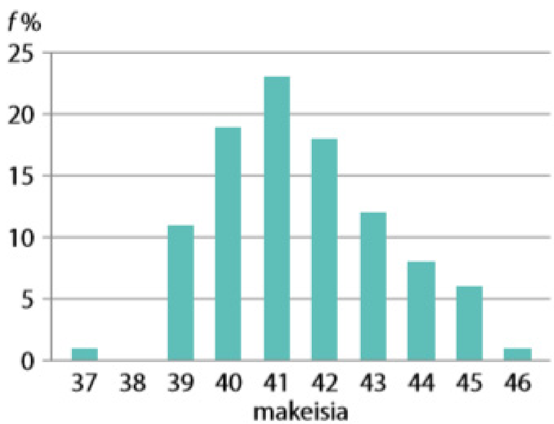
Vastaus Fransin tuloksen normitettu arvo –0,44 ja Fannyn $-0{,}5$. Frans menestyi suhteellisesti paremmin.

K35

Lasketaan suhteelliset frekvenssit laskimen taulukkolaskentatoiminnon avulla.

makeisia	*f*	*f* %
37	1	1,2
38	0	0,0
39	9	10,8
40	16	19,3
41	19	22,9
42	15	18,1
43	10	12,0
44	7	8,4
45	5	6,0
46	1	1,2
yhteensä	**83**	**100**

Piirretään aineistosta pylväsdiagrammin.



K36

Määritetään tiedot taulukkolaskentatyökalujen avulla.

$\overline{x}$	41,5181…
σ_x	1,79934…
median	41

Makeisten lukumäärän keskiarvo on noin 41,5 makeista.
Keskihajonta on noin 1,80 makeista.
Mediaani on 41 makeista.

Vastaus a) 41,5 b) 1,80 c) 41

K37

a) Pusseja on yhteensä 83. 16 pussissa on 40 makeista.

$$P(\text{pussissa on 40 makeista}) = \frac{16}{83} = 0{,}192... \approx 0{,}19$$

b) Pusseja, joissa on 40 – 44 makeista, on 67.

$$P(\text{pussissa on 40 - 44 makeista}) = \frac{67}{83} = 0{,}807... \approx 0{,}81$$

c) Pusseja, joissa on alle 40 makeista, on 10 ja pusseja, joissa on yli 44 makeista, on 6.

$$P(\text{pussissa on alle 40 tai yli 44 makeista}) = \frac{10+6}{83}$$

$$= 0{,}192... \approx 0{,}19$$

Vastaus a) 0,19 b) 0,81 c) 0,19

K38

a) Pituudet ovat luokiteltu sentin tarkkuudella. Esimerkiksi luokan 110–114 todellinen alaraja on 109,5 cm ja todellinen yläraja on 114,5 cm. Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

Lasketaan luokkakeskukset.

$$\frac{109{,}5\text{ cm}+114{,}5\text{ cm}}{2}=112\text{ cm}$$

$$\frac{114{,}5\text{ cm}+119{,}5\text{ cm}}{2}=117\text{ cm}$$

$$\frac{119{,}5\text{ cm}+124{,}5\text{ cm}}{2}=122\text{ cm}$$

$$\frac{124{,}5\text{ cm}+129{,}5\text{ cm}}{2}=127\text{ cm}$$

b) Lasketaan pituuksien keskiarvo.

$$\overline{x}=\frac{15\cdot 112+40\cdot 117+35\cdot 122+10\cdot 127}{100}=119$$

Pituuksien keskiarvo on 119 cm.

c) Lasketaan pituuksien keskihajonta.

$$\sigma=\sqrt{\frac{15(112-119)^2+\ldots+10(127-119)^2}{100}}\approx 4{,}30$$

Pituuksien keskihajonta on 4,30 cm.

Vastaus a) 112 cm, 117 cm, 122 cm ja 127 cm
b) 119 cm c) 4,30 cm

K39

a) Histogrammissa on 100 ruutua.

5–14-vuotiaina kotoa muuttaneiden alue on 4 ruutua.

$$\frac{4}{100}=0,04=4\ \%$$

b) 15–19-vuotiaina kotoa muuttaneiden alue on 36 ruutua.

$$\frac{36}{100}=0,36=36\ \%$$

c) 20–24-vuotiaina kotoa muuttaneiden alue on 44 ruutua.

$$\frac{44}{100}=0,44=44\ \%$$

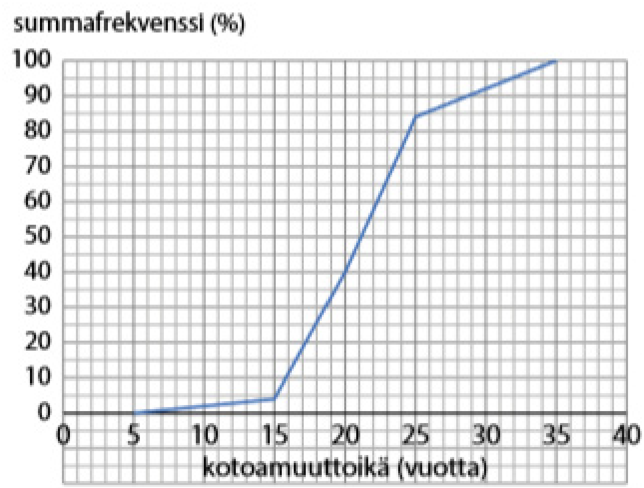
d) 24–34-vuotiaina kotoa muuttaneiden alue in 16 ruutua.

$$\frac{16}{100}=0,16=16\ \%$$

Vastaus a) 4 % b) 36 % c) 44 % d) 16 %

K40

a) Piirretään aineistosta kertymäkuvaaja.



b) Kuvaaja yli 50 %:n kohdassa 21.
Kotoamuuttoiän mediaani on 21 vuotta.

c) Kuvaaja ylittää 10 %:n kohdassa 16.
Nuorimmat 10 % muuttivat kotoa alle 16-vuotiaina.

Kuvaaja ylittää 90 %:n kohdassa 29.
Vanhimmat 10 % muuttivat kotoa yli 29-vuotiaina.

Vastaus b) 21 vuotta c) alle 16-vuotiaina, yli 29-vuotiaina

K41

a) Kertymäkuvaajan perusteella alle 10-vuotiaana kotoa muuttaneita on noin 2 %.

$P(\text{satunnaisesti valittu henkilö muuttanut alle 10-vuotiaana}) = 2\ \%$

b) Kertymäkuvaajan perusteella alle 20-vuotiaana kotoa muuttaneita on noin 40 %.

$P(\text{satunnaisesti valittu henkilö muuttanut alle 20-vuotiaana}) = 40\ \%$

c) Kertymäkuvaajan perusteella alle 30-vuotiaana kotoa muuttaneita on noin 92 %.

$P(\text{satunnaisesti valittu henkilö muuttanut alle 30-vuotiaana}) = 92\ \%$

Vastaus a) 2 % b) 40 % c) 92 %

K42

Laatikosta, jossa on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa, nostetaan umpimähkään kaksi palloa. Olkoon satunnaismuuttuja *X*:”nostossa saatujen mustien pallojen lukumäärä”.

a) Määritetään satunnaismuuttujan X jakauma.

X	***P***
0	$\dfrac{\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{1}{10}=0,1$
1	$\dfrac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{5}=0,6$
2	$\dfrac{\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}=0,3$

b) Määritetään satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X)=0\cdot 0,1+1\cdot 0,6+2\cdot 0,3=1,2$$

Vastaus b) $E(X)=1,2$

K43

Laatikosta, jossa on 2 punaista ja 4 vihreää sukkaa, nostetaan sukkia, kunnes saadaan kaksi vihreää sukkaa.

a) Olkoon satunnaismuuttuja X:”nostojen lukumäärä”. Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma.

X	***P***
2	$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=0,4$
3	$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{5}=0,4$
4	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{5}=0,2$

Määritetään satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X)=2\cdot 0,4+3\cdot 0,4+4\cdot 0,2=2,8$$

b) Olkoon satunnaismuuttuja Y ”nostettujen punaisten sukkien lukumäärä”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma edellisen jakauman avulla käyttäen havaintoja $Y = 0 \leftrightarrow X = 2$, $Y = 1 \leftrightarrow X = 2$ ja $Y = 2 \leftrightarrow X = 4$.

Y	***P***
0	0,4
1	0,4
2	0,2

Määritetään satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(Y) = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 = 0,8$$

Vastaus a) 2,8 b) 0,8

K44

Satunnaismuuttuja X noudattaa jakaumaa $X \sim \text{Bin}(12;\ 0{,}65)$.

a) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X > 10) = P(X = 11 \text{ tai } X = 12)$$
$$= \binom{12}{11} \cdot 0{,}65^{11} \cdot 0{,}35^{1} + \binom{12}{12} \cdot 0{,}65^{12} \cdot 0{,}35^{0}$$
$$= 0{,}04244... \approx 0{,}042$$

b) Lasketaan todennäköisyys laskimella.

$$P(5 < X \leq 9) = P(6 \leq X \leq 9) = 0{,}7640... \approx 0{,}764$$

c) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 12 \cdot 0{,}65 = 7{,}8$$

Vastaus a) 0,042 b) 0,764 c) 7,8

K45

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”näyttelyyn saapuvien mustien kissojen määrä”. Satunnaismuuttuja noudattaa jakaumaa $X \sim \text{Bin}(44;\ 0{,}55)$.

a) Lasketaan todennäköisyys laskimella.

$$P(\text{korkeintaan puolet kissoista on mustia}) = P(X \leq 22)$$
$$= P(0 \leq X \leq 22) = 0{,}30217... \approx 0{,}30$$

b) Määritetään satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = 44 \cdot 0{,}55 = 24{,}2$$

Vastaus a) 0,30 b) 24,2 mustaa kissaa

K46

a) Tikanheitto on toistokoe, jossa on 5 toistoa.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”saatujen kymppien lukumäärä” ja $E(X) = 1{,}6$.

Lasketaan kympin todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1{,}6 \\
np &= 1{,}6 \\
5p &= 1{,}6 \\
p &= 0{,}32
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että saadaan vähintään neljä kymppiä, kun satunnaismuuttuja noudattaa jakaumaa $X \sim \text{Bin}(5;\, 0{,}32)$.

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 4) = P(X = 4 \ \text{tai} \ X = 5) \\
&= \binom{5}{4} \cdot 0{,}32^4 \cdot 0{,}68^1 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}32^4 \cdot 0{,}68^1 \\
&= 0{,}03900\ldots \approx 0{,}039
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $p = 0{,}32$ b) 0,039

K47

a) Määritetään luku $k > 0$ niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat, kun $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } 0 \le x \le k \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$.

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Tämä ehto on nyt voimassa.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $0 \le x \le k$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, k]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$\int_0^k x^2 \mathrm{d}x = 1$$

$$k = \sqrt[3]{3} \ (= 1{,}4422...)$$

b) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X < 1) = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

Vastaus a) $k = \sqrt[3]{3}$ b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

K48

Määritetään todennäköisyydet kertymäfunktion

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ kun } x<0\\ -\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x, \text{ kun } 0\le x<3\\ 1, \text{ kun } x\ge 3\end{cases}$$ avulla.

a) $P(1<X\le 2)=F(2)-F(1)$

$$=-\frac{1}{9}\cdot 2^2+\frac{2}{3}\cdot 2-(-\frac{1}{9}\cdot 1^2+\frac{2}{3}\cdot 1)$$

$$=\frac{1}{3}=0,3333...\approx 0,33$$

b)

$$P(X>2,5)=1-P(X\le 2,5)=1-F(2,5)$$

$$=1-\left(-\frac{1}{9}\cdot 2,5^2+\frac{2}{3}\cdot 2,5\right)$$

$$=\frac{1}{36}=0,02777...\approx 0,028$$

Vastaus a) $\frac{1}{3}\approx 0,33$ b) $\frac{1}{36}\approx 0,028$

K49

a) Olkoon satunnaismuuttuja X television kestoikä.
Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 5,5$ vuotta ja keskihajonta $\sigma = 2,8$ vuotta.

Määritetään, millä todennäköisyydellä televisio hajoaa alle kahdessa vuodessa.

$P(X \leq 2) = 0,1056... \approx 0,11$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi toimii kymmenen vuoden kuluttua” vastatapahtuma on ”yksikään ei toimi kymmenen vuoden kuluttua”.

Lasketaan todennäköisyys, että televisio toimii korkeintaan kymmenen vuotta.

$P(X \leq 10) = 0,945988...$

P(12 televisiosta ainakin yksi toimii 10 vuoden kuluttua)

$= 1 - P$(12 televisiosta yksikään ei toimi 10 vuoden kuluttua)

$= 1 - 0,945988...^{12}$

$= 0,4863... \approx 0,49$

Vastaus a) 0,11 b) 0,49

K50

Olkoon satunnaismuuttuja X pelaajan pituus. Satunnaismuuttujan keskihajonta $\sigma = 4,80$ cm. Merkitään keskiarvoa μ.

Arvoa $x = 200$ cm vastaava normitettu arvo $z = \dfrac{200-\mu}{4,8}$.

Saadaan seuraava yhtälö.

$$P(X > 200\,\text{cm}) = 0,0480$$
$$P(z > \frac{200-\mu}{4,8}) = 0,0480$$
$$\frac{200-\mu}{4,8} = 1,66456...$$
$$\mu = 192,01... \approx 192$$

Pituuksien keskiarvo on 192 cm.

Vastaus 192 cm

K51

Olkoon satunnaismuuttuja Y oikeiden veikkausten lukumäärä 500:ssa veikkauksessa. Kyseessä on toistokoe ja satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa. Toistojen lukumäärä $n = 500$ ja todennäköisyys veikata oikein $p = \frac{1}{3}$.

Odotusarvo $\mu = 500 \cdot \frac{1}{3} = \frac{500}{3}$.

Keskihajonta $\sigma = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{3})} = \frac{10 \cdot \sqrt{10}}{3}$

Koska $Y \sim \text{Bin}(500, \frac{1}{3})$, niin satunnaismuuttujan Y todennäköisyyksiä voidaan arvioida satunnaismuuttujan $X \sim \text{N}(\frac{500}{3}, \frac{10 \cdot \sqrt{10}}{3})$ avulla.

a) Määritetään todennäköisyys, että veikkaamalla saadaan korkeintaan 150 ottelun tulos oikein.

$$P(Y \leq 150) = P(X \leq 150{,}5) = 0{,}0569... \approx 0{,}057$$

b) Määritetään todennäköisyys, että veikkaamalla saadaan tasan 200 ottelun tulos oikein.

$$P(Y = 200) = P(199{,}5 \leq X \leq 200{,}5) = 0{,}0002558... \approx 0{,}00026$$

Vastaus a) 0,057 b) 0,00026

K52

Olkoon a-vaihtoehdon todennäköisyys p. Tällöin b-vaihtoehdon todennäköisyys on $\frac{1}{2}p$ ja c-vaihtoehdon $\frac{1}{3}p$.

Määritetään p.

$$p+\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}p=1$$
$$p=\frac{6}{11}$$

Olkoon satunnaismuuttuja X oikeiden c-vaihtoehtojen lukumäärä viikossa.

C-vaihtoehdon todennäköisyys on $\frac{1}{3}\cdot p=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{11}=\frac{2}{11}$.

Opettaja tekee viikoittain kolme monivalintatehtävää. Lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X)=np=3\cdot\frac{2}{11}=\frac{6}{11}$$

1500 viikkoa kestäneen työuran aikana oikeita c-vaihtoehtoja oli

$$1500\cdot\frac{6}{11}=818{,}18...\approx 820$$

Vastaus noin 820 kpl

K53

Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, \text{ kun } 0\le x\le 6 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$$

Määritetään vakiot a ja b niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat ja $P(1\le X<3)=\frac{4}{9}$.

1) Pitää olla $f(X)\ge 0$ kaikilla x.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $0\le x\le 6$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä [0, 6] rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

   Muodostetaan yhtälö.

$$\int_0^6 (ax+b)\mathrm{d}x=1$$

Muodostetaan yhtälö, kun tiedetään $P(1\le X<3)=\frac{4}{9}$.

$$\int_1^3 (ax+b)\mathrm{d}x=\frac{4}{9}$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \int_0^6 (ax+b)\mathrm{d}x = 1 \\ \int_1^3 (ax+b)\mathrm{d}x = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{18} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tarkistetaan, että tiheysfunktion ensimmäinen ehto toteutuu.

$$-\frac{1}{18}x + \frac{1}{3} \geq 0$$

$$x \leq 6$$

Välillä $0 \leq x \leq 6$ lausekkeen arvot ovat epänegatiivisia.

Vastaus $a = -\frac{1}{18}$ ja $b = \frac{1}{3}$

M1

Laatikosta, jossa on 3 punaista, 4 sinistä ja 5 keltaista palloa, nostetaan umpimähkään yksi pallo. Palloja on yhteensä 12.

Lasketaan todennäköisyydet.

$$P(\text{nostettu pallo on punainen}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Palloja, jotka eivät ole sinisiä, on yhteensä 8 kappaletta.

$$P(\text{nostettu pallo ei ole sininen}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Laatikossa on 0 valkoista palloa.

$$P(\text{nostettu pallo on valkoinen}) = \frac{0}{12} = 0$$

Vastaus a, b, c

M2

Tapahtuma ”ainakin kolme autoista on valkoisia” tarkoittaa, että valkoisia autoja on kolme tai enemmän.

Vastatapahtumalle suotuisia ovat kaikki ne alkeistapaukset, jotka eivät ole suotuisia tapahtumalle ”ainakin kolme autoista on valkoisia”.

Vastatapahtumalle suotuisia alkeistapauksia ovat siis tapaukset, joissa valkoisia autoja on alle kolme eli korkeintaan kaksi.

Vastaus b

M3

Kuusisivuisen nopan heitossa mahdolliset alkeistapaukset
ovat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Tapahtuman A: ”nopan silmäluvuksi saadaan 7” vastatapahtumalle $\overline{A}$ suotuisia ovat kaikki ne alkeistapaukset, jotka eivät ole suotuisia tapahtumalle A eli $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nopan silmäluku voi siis olla korkeintaan 6 (a).

Todennäköisyys että saadaan silmäluvuksi korkeintaan 6 on

$P(\overline{A}) = \dfrac{6}{6} = 1$ eli tapahtuma $\overline{A}$ on varma tapahtuma (c).

Vastaus a, c

M4

Heitetään noppaa kaksi kertaa.

Yhdellä heitolla kolmosen todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{kaksi kolmosta}) \\
&= P(1.\text{ kolmonen ja }2.\text{ kolmonen}) \\
&= P(\text{kolmonen}) \cdot P(\text{kolmonen}) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Vastaus c

M5

Tynnyrin tilavuus on 300 L.

Jotta tynnyriin jää vähintään 60 litraa vettä, pitää luodin lävistää tynnyri kohdasta, jonka yläpuolella on korkeintaan 240 L vettä.

$$P(\text{tynnyriin jää vähintään } 60\text{ L vettä}) = \frac{240\text{ L}}{300\text{ L}} = \frac{4}{5} \quad \text{(c)}$$

Vastaus c

M6

Luku x arvotaan väliltä [0, 10].

Tutkitaan, milloin luvun x neliö on pienempi kuin 17.

$$x^2 < 17 \qquad | \; 0 \le x \le 10$$
$$x < \sqrt{17}$$

On siis oltava $0 \le x < \sqrt{17}$.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{luvun } x \text{ neliö pienempi kuin } 17) = \frac{\sqrt{17}-0}{10-0} = 0{,}4123... \approx 0{,}41$$

Vastaus b

M7

Olkoon tikkataulun säde r.

Tällöin suotuisan alueen säde on $\frac{r}{2}$.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{tikka on lähempänä taulun keskipistettä kuin reunaa})$

$$= \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi \cdot r^2}$$

$$= \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Vastaus b

M8

Kumpikin numero voidaan valita 6 tavalla, joten erilaisia lukuja on kaikkiaan $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta.

Ensimmäinen numero voi olla neljä, viisi tai kuusi eli vaihtoehtoja on 3.

Toinen numero voi olla kaksi, neljä tai kuusi eli vaihtoehtoja on 3.

Suotuisia vaihtoehtoja on kaikkiaan siis $3 \cdot 3 = 9$ kappaletta.

Todennäköisyys on $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Vastaus c

M9

Ensimmäinen kortti voidaan valita 52 tavalla.
Toinen ei voi olla saman arvoinen, joten se voidaan valita 48 tavalla.
Kolmas 44 tavalla ja neljäs 40 tavalla.

Neljä korttia voidaan valita $52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 = 4\ 392\ 960$ tavalla.

Vastaus c

M10

Sukupuolella ei ole merkitystä, kun henkilöt asetetaan jonoon.

Seitsemän henkilöä voidaan asettaa jonoon $7!$ tavalla.

Vastaus c

M11

15 kappaleen soittolistasta voidaan muodostaa 5 kappaleen soittolista (jossa kappalejärjestys on merkitsevä)

$(15)_5 = 360\,360$ tavalla.

Vastaus a

M12

Lottorivi voidaan arpoa $\binom{40}{7}$ tavalla.

Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita viisi $\binom{7}{5}$ tavalla ja 33 väärästä numerosta kaksi $\binom{33}{2}$.

$$P(\text{lottorivissä on 5 oikein}) = \frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{33}{2}}{\binom{40}{7}}$$

Vastaus b

M13

Riviin tulee 10 palloa. Sijoitetaan riviin ensin kuusi keltaista palloa.
Kymmenestä paikasta kuusi voidaan valita $\binom{10}{6}$ tavalla.

Jäljellä olevien 4 punaisen pallon paikat voidaan valita yhdellä tavalla.

Pallot voidaan siis asettaa riviin $\binom{10}{6} \cdot 1 = 210$ tavalla.

Vastaus a

M14

Korttipakassa on jäljellä 50 korttia, joista 13 on herttoja.

$$P(\text{kolmas kortti on hertta}) = \frac{13}{50}$$

Vastaus b

M15

Ensimmäinen T voidaan nostaa 2 tavalla, muut kolme kirjainta 1 tavalla.

Lappuja ei palauteta nostojen välissä astiaan.

$P(\text{laput nostetaan järjestyksessä TATU})$
$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{60}$

Vastaus a

M16

Liikennevalot näyttävät vihreää valoa 40 % ajasta, joten todennäköisyys, että valo on vihreä ja autoilija ei joudu pysähtymään, on 0,40.

Tapahtuman ”autoilija joutuu pysähtymään valoihin ainakin kerran” vastatapahtuma on ”autoilija ei joudu pysähtymään valoihin”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{autoilija joutuu pysähtymään ainakin kerran})\\
&=1-P(\text{autoilija ei joudu pysähtymään})\\
&=1-0,40^4\\
&=0,9744\approx 0,97
\end{aligned}
$$

Vastaus b

M17

Asiakas pääsee ruuhkassa suoraan kassalle, jos ainakin yksi 13:sta kassasta on vapaana.

Tapahtuman ”ainakin yksi kassa on vapaana” vastatapahtuma on ”yksikään kassa ei ole vapaana”.

Todennäköisyys, että kassa ei ole vapaana, on 0,95.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi kassa on vapaana}) \\
&= 1 - P(\text{yksikään kassa ei ole vapaana}) \\
&= 1 - 0{,}95^{13} \\
&= 0{,}4866... \approx 0{,}49
\end{aligned}
$$

Vastaus b

M18

Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on ruutuja ja 4 kolmosia.

Korttipakasta nostetaan kaksi korttia ja kortteja ei palauteta pakkaan nostojen välissä.

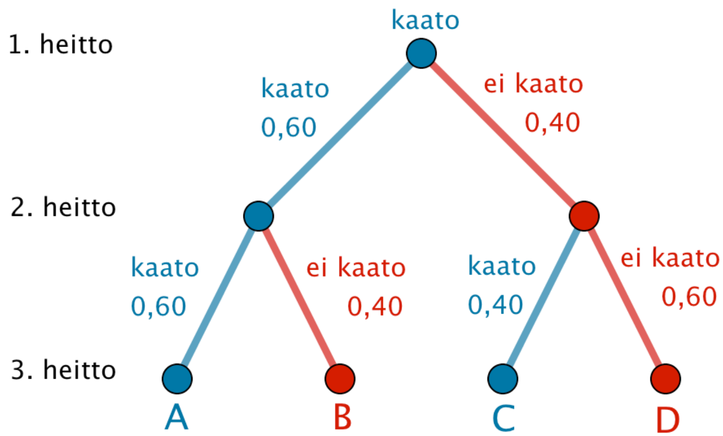
Tapahtumat ”kaksi ruutua” ja ”kaksi kolmosta” ovat erilliset.

$$\begin{aligned}
&P(\text{kahdella nostolla molemmat ovat ruutuja tai kolmosia})\\
&= \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51} + \frac{4\cdot 3}{52\cdot 51}\\
&= 0{,}063348\ldots \approx 0{,}0633
\end{aligned}$$

Vastaus b

M19

Muodostetaan puukaavio.



Ensimmäinen heitto oli kaato.
Kolmas heitto on kaato tapauksissa A ja C eli kaato–kaato–kaato ja kaato–ei kaato–kaato.

Lasketaan todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
&P(3.\text{ heitto on kaato})\\
&= 0,60 \cdot 0,60 + 0,40 \cdot 0,40\\
&= 0,52\\
&= 52\ \%
\end{aligned}
$$

Vastaus a

M20

Kyseessä on toistokoe ja tapahtuman A todennäköisyys $p = 0,05$.

Toistojen lukumäärä $n = 5$. Halutaan, että A tapahtuu viidessä toistossa täsmälleen kaksi kertaa, joten $r = 2$.

$P(A$ tapahtuu 5 toistossa täsmälleen 2 kertaa)

$$= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \binom{5}{2} \cdot 0,05^2 \cdot (1-0,05)^{5-2}$$

$$= \binom{5}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^3$$

Vastaus c

M21

Tilannetta voidaan ajatella toistokokeena.
Tapahtuman ”kissa on musta” todennäköisyys on 0,25.

Toistojen lukumäärä $n = 10$.

$$P(5 \text{ mustaa kissaa})$$
$$= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$
$$= \binom{10}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot (1-0{,}25)^{10-5}$$
$$= \binom{10}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5 \quad \text{(a)}$$

Toisaalta

$$P(5 \text{ mustaa kissaa})$$
$$= P(5 \text{ muun väristä kissaa})$$
$$= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$
$$= \binom{10}{5} \cdot 0{,}75^5 \cdot (1-0{,}75)^{10-5}$$
$$= \binom{10}{5} \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^5 \quad \text{(b)}$$

Vastaus a, b

M22

Taulukossa yleisimmät havainto arvot ovat 1 ja 2, koska niissä frekvenssi on suurin. Muuttujan x moodi on 1 ja 2.

Vastaus c

M23

Arvoja on 48, joka on parillinen määrä. Tarkastellaan keskimmäisiä arvoja. Järjestyksessä 24. arvo on 2 ja 25. arvo on 3.

Lasketaan näiden havaintoarvojen keskiarvo.

$$\frac{2+3}{2}=2,5$$

Muuttujan x mediaani on 2,5.

Vastaus b

M24

Lasketaan muuttujan x keskiarvo.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1\cdot 12+2\cdot 12+3\cdot 10+4\cdot 8+5\cdot 6}{48}\\ &= 2,666.... \approx 2,67\end{aligned}$$

Vastaus a

M25

Muuttujan x keskiarvo $\overline{x} \approx 2,67$. Lasketaan keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{12(1-2,67)^2 + 12(2-2,67)^2 + 10(3-2,67)^2 + 8(4-2,67)^2 + 6(5-2,67)^2}{48}}$$

$$= 1,3437... \approx 1,34$$

Vastaus b

M26

Ikä ilmaistaan alaspäin pyöristettynä kokonaislukuna. Luokan 7–8 todelliset rajat ovat 7 ja 9.

Vastaus a

M27

Luokan 7–8 todelliset rajat ovat 7 ja 9. Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

Lasketaan luokkakeskus.

$$\frac{7+9}{2}=8$$

Vastaus a

M28

Koko kuvio on 36 ruutua. Luokka 7–8 on kuviossa 6 ruutua.

Lasketaan suhteellinen frekvenssi.

$$\frac{6}{36}=0,1666...\approx 17\ \%$$

Vastaus c

M29

Koko kuvio on 36 ruutua. Luokka 13–15 on kuviossa 12 ruutua.

Lasketaan suhteellinen frekvenssi.

$$\frac{12}{36} = 0,3333... \approx 33\ \%$$

Vastaus c

M30

Pussissa on 6 palloa, joista neljässä on numero 1 ja kahdessa numero 2. Olkoon satunnaismuuttuja X:”pussista nostettujen kahden pallon summa”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma.

X	***P***
2	$\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{2}{5}$
3	$\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{8}{15}$
4	$\dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{1}{15}$

Lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X)=2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{8}{15}+4\cdot\frac{1}{15}=2,666...\approx 2,7$$

Vastaus c

M31

Noppaa heitetään 4 kertaa. Jos ainakin yhdellä heitolla tulee ykkönen, henkilö joutuu maksamaan 5 euroa. Muussa tapauksessa hän voittaa 5 euroa.

Olkoon satunnaismuuttuja *X*:” henkilön voitto euroina”. Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma.

X	***P***
5	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$
-5	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$

Lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X) = 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 - 5\cdot(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4)$$
$$= -0,1,774... \approx -0,18\ (€)$$

Vastaus b

M32

Pelaajalla on alussa 0 pistettä. Hän voi heittää noppaa niin monta kertaa kun haluaa. Jos pelaaja heittää 3, 4, 5 tai 6, hän saa kaksi pistettä. Todennäköisyys tapahtumalle on $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Jos pelaaja heittää 1 tai 2, hänen pisteensä nollautuu ja heittovuoro vaihtuu. Tapahtuman todennäköisyys on $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Olkoon x pelaajan kierroksen tämän hetkinen pistemäärä ja satunnaismuuttuja X:”pelaajan kierroksen pistemäärä seuraavan heiton jälkeen”. Muodostetaan jakauma.

X	**P**
$x+2$	$\frac{2}{3}$
0	$\frac{1}{3}$

Pelaajan kannattaa lopettaa heittäminen, kun seuraavan heiton odotusarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin pelaajan nykyinen pistemäärä eli $E(X)\le x$.

$$(x+2)\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{3}\le x$$
$$x\ge 4$$

Pelaajan kannattaa lopettaa heittäminen, jos hänen pistemääränsä on vähintään 4.

Vastaus b

(HUOM! Pelaajan kannattaa lopettaa myös 6 pisteen jälkeen, jos hän on jatkanut peliä näin pitkälle).

M33

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(12; 0{,}25)$.

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = np = 12 \cdot 0,25 = 3$$

Lasketaan keskihajonta.

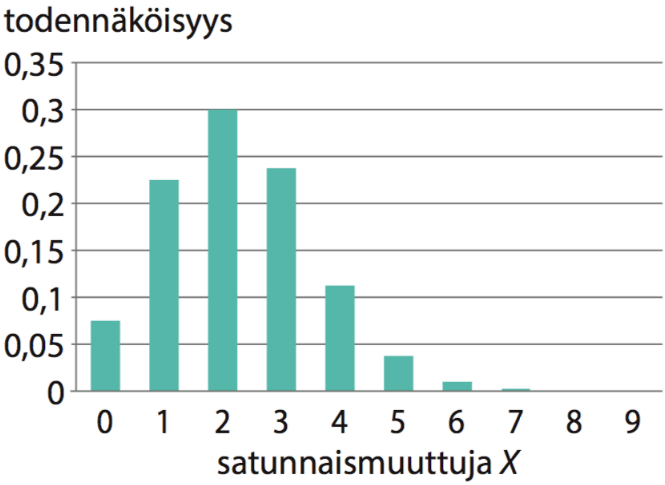
$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{12 \cdot 0,25(1-0,25)} = 1,5$$

Vastaus a, c

M34

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(9;\, 0{,}25)$

Koska $p = 0{,}25 < 0{,}5$, on jakauma painottunut keskikohdan vasemmalle puolelle. Jakaumaa kuvaa siis a-kohdan pylväskaavio.



Vastaus a

M35

Todennäköisyys $P(X < 3)$ on funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $x < 3$ rajaaman alueen pinta-ala

Koska funktion f arvo on nolla kun $x < 0$, on pinta-ala yhtä suuri kuin välille $[0, 3]$ rajautuvan alueen pinta-ala.

$$P(X < 3) = \left(\int_0^3 -\frac{3}{56}x^2 + \frac{15}{56}x \right) \mathrm{d}x = 0,7232... \approx 0,72$$

Vastaus b

M36

Jotta osakkeen omistaja saa vähintään 1000 euroa, osinkoprosentin on oltava vähintään $\frac{1000}{12\ 000} = 0,08333... \approx 8,33\ \%$.

Todennäköisyys on jakautunut tasaisesti. Lasketaan todennäköisyys, että todennäköisyys asettuu välille [8,33; 12].

$P(\text{todennäköisyys asettuu välille } [8{,}33;\ 12])$

$= \frac{12 - 8,33}{12 - 6} = 0,611... \approx 0,61$

Vastaus c

M37

Tiheysfunktio $f(x)=\begin{cases}2-|4x|, \text{ kun } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$.

Lasketaan kertymäfunktion arvo $F(0,3)$.

$$F(0,3)=P(X\le 0,3)=\int_{-\frac{1}{2}}^{0,3}(2-|4x|)\,\mathrm{d}x=0,92$$

Vastaus a

M38

Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{N}(25, 5)$.

Olkoon arvoa $x = 35$ vastaava normitettu arvo z.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\
&= \frac{35-25}{5} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Vastaus c

M39

Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{N}(25\text{ cm}, 5\text{ cm})$.

Olkoon arvoa x vastaava normitettu arvo $z = -1$.

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$-1 = \frac{x - 25\text{ cm}}{5\text{ cm}}$$

$$x = 20\text{ cm}$$

Vastaus b

M40

Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{N}(25\text{ cm}, 5\text{ cm})$.

Lasketaan todennäköisyys, että kukkakepin pituus on korkeintaan 30 cm.

$P(X \leq 30\text{ cm}) = 0,8413... \approx 0,84$

Vastaus b

A1

Yleisin havaintoarvo on 18 vuotta.
Siis ikäjakauman moodi Mo = 18 vuotta.

Keskimmäiset havaintoarvot ovat 17 vuotta ja 18 vuotta.
Lasketaan näiden havaintoarvojen keskiarvo.

$$\frac{17+18}{2}=17,5$$

Ikäjakauman mediaani Md = 17,5 vuotta.

Lasketaan ikäjakauman keskiarvo.

$$\overline{x}=0,30\cdot 16+0,20\cdot 17+0,50\cdot 18 \ =17,2$$

Ikäjakauman keskiarvo $\overline{x}=17,2$ vuotta.

Lasketaan ikäjakauman keskihajonta.

$$\sigma=\sqrt{0,30\cdot(16-17,2)^2+0,20\cdot(17-17,2)^2+0,50\cdot(18-17,2)^2}$$
$$=0,87177...\approx 0,87$$

Ikäjakauman keskihajonta $\sigma=0,87$ vuotta.

Vastaus Mo = 18 v, Md = 17,5 v, $\overline{x}=17,2$ v, $\sigma=0,87$ v

A2

a) Kahdeksan kirjaa voidaan järjestää hyllyyn $8! = 40\ 320$ tavalla.

b) Kahdeksasta kirjasta voidaan valita järjestyksessä kolme luettavaa kirjaa $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ tavalla.

c) Kahdeksasta kirjasta voidaan valita mukaan kolme kirjaa $\binom{8}{3} = 56$ tavalla.

Vastaus a) 40 320 b) 336 c) 56

A3

Ryhmässä on 6 poikaa ja 4 tyttöä. Ryhmästä valitaan kolmihenkinen toimikunta, jossa on sekä tyttöjä että poikia.

Toimikunta voidaan valita niin, että se muodostuu joko kahdesta tytöstä ja yhdestä pojasta tai kahdesta pojasta ja yhdestä tytöstä.

Kaksi tyttöä ja yksi poika voidaan valita $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}=36$ tavalla.

Kaksi poikaa ja yksi tyttö voidaan valita $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}=60$ tavalla.

Toimikunta voidaan valita $36+60=96$ tavalla.

Vastaus 96

A4

Kirjaimet LUMIKENKÄ on kirjoitettu lapuille. Kirjaimia on yhteensä 9 kappaletta. Lapuista nostetaan umpimähkään viisi.

a) Lappuja ei palauteta noston jälkeen.

Sanan NIELU kaikki kirjaimet voidaan nostaa vain yhdellä tavalla.

$$\begin{aligned}&P(\text{"NIELU"})\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{15\,120}\\&=0{,}00006613...\approx 0{,}000066\end{aligned}$$

b) Laput palautetaan noston jälkeen.

Sanan LUKKI muut kirjaimet voidaan nostaa yhdellä tavalla paitsi K-kirjaimet kahdella tavalla.

$$\begin{aligned}&P(\text{"LUKKI"})\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}\\&=\frac{4}{59\,049}\\&=0{,}00006774...\approx 0{,}000068\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{15\,120}\approx 0{,}000066$ b) $\frac{4}{59\,049}\approx 0{,}000068$

A5

Lasketaan otoksen keskiarvo ja keskihajonta ja arvioidaan niiden avulla pakatuissa pusseissa olevien ruuvien keskiarvo ja keskihajonta.

a) $\overline{x} = \dfrac{\sum f \cdot x_i}{n}$

$$= \frac{1\cdot 17 + 3\cdot 18 + 2\cdot 19 + ... + 6\cdot 24 + 3\cdot 25 + 1\cdot 26}{1+3+2+5+9+12+7+6+3+1}$$

$$= 21{,}79... \approx 22$$

b)

$$\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x_i - \overline{x}^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1\cdot(17-21{,}79...)^2 + 3\cdot(18-21{,}79...)^2 + ... + 1\cdot(26-21{,}79...)^2}{49}}$$

$$= 1{,}979... \approx 2{,}0$$

Keskiarvon ja keskihajonnan voi laskea myös suoraan laskimella.

Vastaus a) 22 ruuvia b) 2,0 ruuvia

A6

Luokalla on 39 opiskelijaa, joista 21 on tyttöjä ja 18 poikaa. Koko luokan keskiarvo kokeessa oli 7,34 ja tyttöjen keskiarvo oli 7,96. Olkoon x poikien keskiarvo.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan poikien keskiarvo.

$$\frac{21\cdot 7{,}96+18\cdot x}{39}=7{,}34$$

$$\frac{167{,}16+18\cdot x}{39}=7{,}34$$

$$167{,}16+18\cdot x=286{,}26$$

$$18\cdot x=119{,}1$$

$$x=6{,}6166...\approx 6{,}62$$

Vastaus 6,62

A7

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<-1\\ \frac{1}{5}(x+1)(a-x), & \text{kun } -1\le x\le 2\\ 0, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

a) Funktio f on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, kun

1) $f(x)\ge 0$ kaikilla x ja

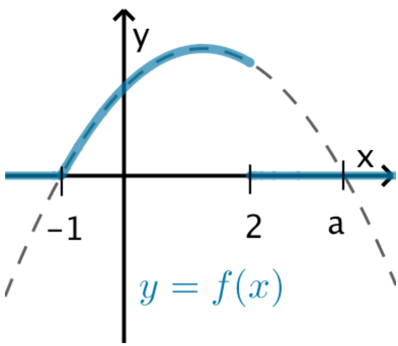
2) funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on 1.

1) $f(x)\ge 0$ kun $x<-1$ tai $x>2$ kaikilla a.

Kun $-1\le x\le 2$, niin funktion

$$f(x)=\frac{1}{5}(x+1)(a-x)$$

$$=-\frac{1}{5}x^2+\frac{(a-1)}{5}x+\frac{1}{5}a$$



kuvaaja on osa alaspäin aukeavaa paraabelia, jonka nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=a$.

Jotta $f(x)\ge 0$ myös välillä $-1\le x\le 2$, on oltava $a\ge 2$.

2) Lasketaan funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala. $f(x) \geq 0$, joten $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

$$A = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$f(x)$ eroaa nollasta vain välillä $-1 \leq x \leq 2$, joten integrointi voidaan rajoittaa tälle välille.

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{5}(x+1)(a-x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} = 1$$

$$a = \frac{19}{9} \approx 2{,}1$$

Koska $a \geq 2$, niin saatu arvo $a = \frac{19}{9}$ kelpaa.

b)

$$P(X > 0) = P(X \geq 0) = \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{5}(x+1)(\frac{19}{9} - x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{5}(x+1)(\frac{19}{9} - x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{34}{45} = 0{,}7555\ldots \approx 0{,}756$$

Vastaus a) $a = \dfrac{19}{9}$ b) $P(X > 0) = \dfrac{34}{45} \approx 0,756$

A8

Todennäköisyys saada työpäivän aikana pysäköintivirhemaksu on $9{,}3\% = 0{,}093$.

a) Lasketaan todennäköisyys, ettei autoilija saa yhtään pysäköintivirhemaksua 5 päivän aikana.

$$P(\text{autoilija ei saa pysäköintivirhemaksua 5 päivän aikana})$$
$$= (1-0{,}093)^5$$
$$= 0{,}6138... \approx 0{,}61$$

b) Kyseessä on toistokoe. Olkoon satunnaismuuttuja X: ”pysäköintivirhemaksujen määrä” jolloin $X \sim \text{Bin}(5;\ 0{,}093)$.

$$P(\text{autoilija saa korkeintaan 2 pysäköintivirhemaksua})$$
$$= P(X \le 2) = P(X = 0 \text{ tai } X = 1 \text{ tai } X = 2)$$
$$= 0{,}6138... + \binom{5}{1} \cdot 0{,}093^1 \cdot (1-0{,}093)^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}093^2 \cdot (1-0{,}093)^3$$
$$= 0{,}9930... \approx 0{,}99$$

c) Tapahtuman ”saa ainakin yhden pysäköintivirhemaksun” vastatapahtuma on ”ei saa yhtään pysäköintivirhemaksua”.

$$P(\text{autoilija saa ainakin yhden pysäköintivirhemaksun})$$
$$= 1 - P(\text{autoilija ei saa pysäköintivirhemaksua})$$
$$= 1 - (1-0{,}093)^5$$
$$= 0{,}3861... \approx 0{,}39$$

Vastaus a) 0,61 b) 0,99 c) 0,39

A9

Arpajaisissa on suuri määrä arpoja. Joka viides arpa voittaa, joten voiton todennäköisyys $p = \frac{1}{5} = 0,2$.

a) Olkoon satunnaismuuttuja X: ”ompeluseuran voitto yhdellä arvalla” ja x arvan hinta.

Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma.

X	P
x	0,8
$-10+x$	0,2

Jotta arpajaiset tuottaisivat järjestöllä voittoa, on odotusarvon oltava $E(X) > 0$.

Lasketaan arvan hinta.

$$\begin{aligned} E(X) &> 0 \\ 0,8x + 0,2(-10+x) &> 0 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Arpojen kappalehinta on oltava yli 2 euroa.

b) Jos arpajaisissa palautuu 40 % arpojen hinnasta voittoina pelaajille, niin järjestölle jää 60 % arpojen hinnoista.

Tällöin ompeluseuran voiton odotusarvo $E(X)=0,60x$.

Lasketaan arvan hinta.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,60x \\ 0,8x+0,2(-10+x) &= 0,60x \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Arpojen kappalehinta on oltava 5 euroa.

c) Olkoon satunnaismuuttuja *Y*: ”arvan ostajan voitto yhdellä arvalla”, kun yksi arpa maksaa 5 euroa.

Muodostetaan satunnaismuuttujan jakauma.

Y	***P***
$10-5=5$	0,2
-5	0,8

Lasketaan voiton odotusarvo.

$$E(Y)=5\cdot 0,2-5\cdot 0,8=-3$$

Voiton odotusarvo on -3 euroa.

Vastaus a) yli 2 euroa b) 5 euroa c) -3 euroa

A10

Avaimet katoavat ruokalassa todennäköisyydellä 0,1, keittiössä todennäköisyydellä 0,3 ja kopiohuoneessa todennäköisyydellä 0,2.
Lasketaan todennäköisyys, että avaimet katoavat jononkin.

$P(\text{avaimet katoavat})$

$= P(\text{avaimet katoavat ruokalaan tai}$

$\quad \text{keittiöön tai kopiohuoneeseen })$

$= 0,1 + 0,9 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,496$

Opettaja käy järjestyksessä ruokalassa, keittiössä ja kopiohuoneessa ja huomaa avaimensa kadonneen.
Jotta avaimet olisivat voineet jäädä keittiöön, ne eivät ole jääneet ruokalaan.

Kyseessä on ehdollinen todennäköisyys: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \text{ ja } B)}{P(B)}$

$P(\text{avaimet ovat keittiössä} \mid \text{avaimet kadonneet })$

$= \dfrac{P(\text{avaimet jääneet keittiöön})}{P(\text{avaimet kadonneet})}$

$= \dfrac{P(\text{avaimet eivät jääneet ruokalaan ja jäivät keittiöön})}{P(\text{avaimet kadonneet})}$

$= \dfrac{0,9 \cdot 0,3}{0,496}$

$= 0,5443... \approx 0,54$

Huomaa, että tapahtuma "avaimet ovat keittiössä ja avaimet kadonneet" on sama tapahtuma kuin "avaimet jääneet keittiöön".

Vastaus 0,54

B1

Liisa on saanut kursseista arvosanat 8, 7, 7, 8, 6, 7, 8, 9 ja 8.

Alin mahdollinen arvosana, jonka Liisa voi saada viimeisestä kurssista, on 4. Lasketaan alin mahdollinen päättöarvosana.

$$\frac{8+7+7+8+6+7+8+9+8+4}{10}=7,2\approx 7$$

Ylin mahdollinen arvosana, jonka Liisa voi saada viimeisestä kurssista, on 10. Lasketaan ylin mahdollinen päättöarvosana.

$$\frac{8+7+7+8+6+7+8+9+8+10}{10}=7,8\approx 8$$

Vastaus alin 7 ja ylin 8

B2

luokka	luokkakeskus	frekvenssi
0–5	2,75	10
6–10	8	13
11–15	13	5
16–20	18	8
	yhteensä	**36**

Lasketaan luokitellun aineiston keskiarvo ja keskihajonta laskimella luokkakeskusten avulla.

$\overline{x} = 9{,}458... \approx 9{,}5 \ \text{(kg)}$

$\sigma = 5{,}587... \approx 5{,}6 \ \text{(kg)}$

Vastaus a) 9,5 kg b) 5,6 kg

B3

Noppaa heitetään kolme kertaa.

a) Lasketaan todennäköisyys, että kolmannella heitolla saadaan vähintään viitonen eli saadaan viitonen tai kuutonen.

$P(\text{kolmannella heitolla saadaan vähintään viitonen})$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3333.... \approx 0{,}333$$

b) Jotta seuraavalla heitolla voitaisiin saada aina yhtä suurempi silmäluku kuin edellisellä heitolla, ensimmäisellä heitolla on saatava 1, 2, 3 tai 4. Tämän jälkeen todennäköisyys saada yhtä suurempi on aina $\frac{1}{6}$.

$P(\text{seuraavalla saadaan yksi suurempi kuin edellisellä})$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{54} = 0{,}01851... \approx 0{,}0185$$

Vastaus a) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ b) $\frac{1}{54} \approx 0{,}0185$

B4

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”jauhopussin paino” .
Oletuksen mukaan $X \sim \mathrm{N}(1000 \text{ g}, 78\text{g})$.

a) Määritetään laskimella todennäköisyys, että umpimähkään valittu jauhopussi painaa alle 900 g.

$$P(X < 900 \text{ g}) = P(X \leq 900 \text{ g}) = 0{,}09991... \approx 0{,}0999$$

b) Olkoon x hylkäämisraja. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$P(X \geq x) = 0{,}027$$
$$x = 1150{,}29... \text{ g} \approx 1150 \text{ g}$$

Vastaus a) 0,0999 b) 1150 g

B5

Kupit pakataan 6 kappaleen pakkauksiin. Kuppi on virheellinen todennäköisyydellä 0,02. Tulkitaan pakkaus toistokokeeksi, jossa on 6 toistoa.

a) Lasketaan todennäköisyys, että pakkauksessa on täsmälleen kaksi virheellistä kuppia.

P(pakkauksessa täsmälleen 2 virheellistä kuppia)

$$= \binom{6}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot (1-0{,}02)^{6-2} = 0{,}005534... \approx 0{,}0055$$

b) Kuppi ei ole virheellinen todennäköisyydellä $1-0{,}02=0{,}98$.
Lasketaan todennäköisyys, että yksikään kuudesta kupista ei ole virheellinen.

P(pakkauksessa ei ole yhtään virheellistä kuppia)

$$= 0{,}98^6 = 0{,}8858... \approx 0{,}89$$

c) Tapahtuman ”pakkauksessa on ainakin yksi virheellinen” vastatapahtuma on ”pakkauksessa ei ole yhtään virheellistä”.

P(pakkauksessa on ainakin yksi virheellinen kuppi)

$= 1 - P$(pakkauksessa ei ole yhtään virheellistä kuppia)

$$= 1 - 0{,}98^6 = 0{,}1141... \approx 0{,}11$$

Vastaus a) 0,0055 b) 0,89 c) 0,11

B6

Lasketaan voiton odotusarvot tapauksissa A ja B.

Vaihtoehto A:

palkinto/€	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{p}$
100	4	$\frac{4}{9}$
200	3	$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
500	1	$\frac{1}{9}$
1000	1	$\frac{1}{9}$
Yhteensä	**9**	

Odotusarvo:

$$\mu_A = \frac{4}{9}\cdot 100 + \frac{1}{3}\cdot 200 + \frac{1}{9}\cdot 500 + \frac{1}{9}\cdot 1000 = 277,77... \approx 278 \quad (€)$$

Vaihtoehto B:

palkinto/€	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{p}$
0	1	$\frac{1}{3}$
1000	1	$\frac{1}{3}$
2000	1	$\frac{1}{3}$
Yhteensä	**3**	

Odotusarvo:

$$\mu_B = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1000 + \frac{1}{3}\cdot 2000 = 1000 \quad (€)$$

Vaihtoehdossa B voiton odotusarvo on suurempi, joten kannattaa valita B.

Vastaus Kannattaa valita B.

B7

Laatikossa 2 valkoista ja x mustaa palloa, jossa x on epänegatiivinen kokonaisluku. Palloja on yhteensä $x+2$ kappaletta.

Laatikosta nostetaan umpimähkään kolme palloa. Todennäköisyys, että täsmälleen yksi palloista on valkoinen, on $\frac{4}{7}$.

Yksi valkoinen ja kaksi mustaa palloa voidaan nostaa 3 tavalla, valkoinen ensimmäisenä, toisena tai kolmantena.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$P(\text{3 pallosta täsmälleen 1 valkoinen}) = \frac{4}{7}$$

$$3 \cdot \frac{2 \cdot x \cdot (x-1)}{(x+2)(x+1)x} = \frac{4}{7}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Koska $x \geq 0$, niin saaduista ratkaisuista $x = 5$ kelpaa.

Vastaus mustia palloja on 5 kpl

B8

Olkoon satunnaismuuttuja X paikalle saapuvien matkustajien lukumäärä.

Yksittäinen matkustaja saapuu junaan todennäköisyydellä 0,98.

Satunnaismuuttuja noudattaa jakaumaa $X \sim \text{Bin}(82;\ 0{,}98)$.

Jotta kaikki matkustajat saavat paikan, 82 matkustajasta paikalle voi saapua korkeintaan 80.

$P(X \leq 80) = 0{,}4899... \approx 0{,}49$ Ratkaisu laskimella.

Vastaus 0,49

Huomaa, että tehtävän voi ratkaista myös ilman CAS-laskinta:

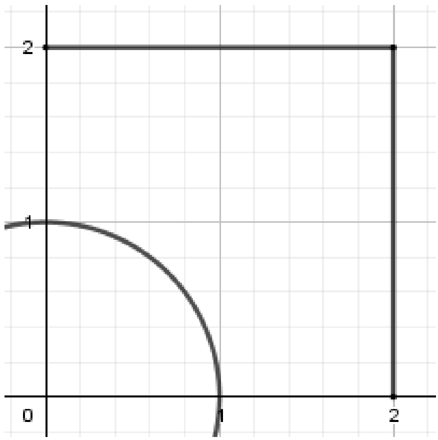
$$\begin{aligned}
P(X \leq 80) &= 1 - P(X > 80) \\
&= 1 - \big(P(X = 81) + P(X = 82)\big) \\
&= 1 - \binom{82}{81} \cdot 0{,}98^{81} \cdot 0{,}02^{1} - \binom{82}{82} \cdot 0{,}98^{82} \cdot 0{,}02^{0} \\
&= 0{,}4899... \approx 0{,}49.
\end{aligned}$$

B9

Väliltä $[0, 2]$ arvotaan kaksi reaalilukua x ja y.

Olkoon tapahtuma A: ” reaaliluvut x ja y toteuttavat ehdon $x^2 + y^2 > 1$”. Piirretään tilanne xy-koordinaatistoon.

Perusjoukko E on kuvan mukainen neliö, jonka sivun pituus on 2.



Suotuisa alue muodostuu niistä neliön E pisteistä, jotka jäävät ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ulkopuolelle.

Perusjoukon E pinta-ala on

$m(E) = 2 \cdot 2 = 4$.

Suotuisan alueen A pinta-ala saadaan vähentämällä koko alasta ympyrän neljänneksen pinta-ala.

$$m(A) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = 4 - \frac{\pi}{4}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{4 - \frac{\pi}{4}}{4} = 0,8036... \approx 0,804$$

Vastaus 0,804

B10

Laatikossa A on 3 punaista ja 2 valkoista sukkaparia.
Laatikossa B on 4 mustaa ja 5 valkoista sukkaparia.

a) Lasketaan todennäköisyys, että umpimähkään valittu sukkapari on valkoinen.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{sukkapari valkoinen})\\
&= P(\text{laatikko A ja valkoinen} \quad \text{tai} \quad \text{laatikko B ja valkoinen})\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\\
&= \frac{43}{90} = 0{,}4777... \approx 0{,}48
\end{aligned}
$$

b) Matilda havaitsee, että valittu sukkapari ei ole valkoinen.

Kyseessä on ehdollinen todennäköisyys: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \text{ ja } B)}{P(B)}$.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{sukkapari on musta} \mid \text{sukkapari ei ole valkoinen})\\
&= \frac{P(\text{sukkapari on musta})}{P(\text{sukkapari ei ole valkoinen})}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{1-\frac{43}{90}}\\
&= \frac{20}{47} = 0{,}4255... \approx 0{,}43
\end{aligned}
$$

Huomaa, että tapahtuma ”sukkapari on musta ja sukkapari ei ole valkoinen” on sama tapahtuma kuin ”sukkapari on musta”.

Vastaus a) $\frac{43}{90} \approx 0{,}48$ b) $\frac{20}{47} \approx 0{,}43$