M niinkuin matematiikka

Simo K. Kivelä

Lukiotason matematiikan tietosanakirja

Versio 1.12 / 10.08.2000

Simo K. Kivelä
Riikka Nurmiainen

TKK 1998–2005

Lukiotason matematiikan tietosanakirja $\mathfrak{M}$ *niinkuin matematiikka* (luettakoon lyhyesti *iso-M*) on tarkoitettu lukiomatematiikan kertaamiseen ja hienoiseen laajentamiseen ottamatta kuitenkaan esille käsitteellisesti uusia asioita.

Sekä sisältö että tarvittavat tietotekniset ratkaisut ovat syntyneet Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksella vuonna 1993 alkaneessa ja edelleen jatkuvassa *MatTa*-projektissa (`http://matta.hut.fi/matta/`).

Iso-M-tietosanakirjan ensimmäinen versio ilmestyi vuonna 1997, viimeisin sisällöllisesti hieman korjattu versio 1.12 vuonna 2000. Tästä on olemassa kaksi teknisesti erilaista versiota, html-muoto ja pdf-muoto. Kummassakin tietosanakirjan 92 artikkelia ovat erillisinä, mutta toisiinsa linkitettyinä tiedostoina. Kumpaakin voidaan käyttää joko verkon kautta *MatTa*-projektin palvelimelta tai omaan koneeseen asennettuna. Yksityishenkilöt ja kotimaiset julkisin varoin ylläpidetyt oppilaitokset voivat käyttää materiaaleja vapaasti opetuksessa ja opiskelussa. Kaupallinen käyttö ilman eri sopimusta on kielletty.

Iso-M-tietosanakirjan on MFKA-Kustannus Oy julkaissut myös kirjana. Kyseessä on muutoin sama materiaali, mutta hypertekstilinkit on korvattu sivunumeroviitteillä.

Esillä oleva versio on kolmas teknisesti erilainen versio. Sisältö on version 1.12 mukainen, mutta koko tietosanakirja on yhtenä pdf-tiedostona, jolloin voidaan hyödyntää pdf-muodon sallimaa sisällysluettelorakennetta hypertekstilinkkien lisäksi. Haittana on tällöin tiedoston suurehko koko (n. 4,3 MB), jolloin lataus hitaan yhteyden kautta kestää. Toisaalta laajakaistayhteyksien nopeudet ovat kasvaneet.

Kokemuksia ja näkemyksiä tämäntyyppisen materiaalin tuottamisesta on projektissa vuosien kuluessa kertynyt runsaasti. Käyttäjien kokemukset ovat kuitenkin aina arvokkaita. Näitä toivotaan raportoitavan sähköpostiosoitteeseen `Simo.Kivela@hut.fi`.

Tietotekniikan nopea kehitys merkitsee, että digitaalisen materiaalin tuottaminen on koskaan loppumaton iäisyysprojekti: aina voi tehdä lisää, aina löytyy uusia mahdollisuuksia, aina on tarve päivityksiin. Toiveena on, että tietosanakirjaan voitaisiin lähitulevaisuudessa liittää animaatioita (mikä on ollut toiveena alusta lähtien ...).

Tietosanakirjan tekstin on kirjoittanut Simo Kivelä ja kuvat ovat Riikka Nurmiaisen käsialaa.

31.3.2005
SKK

Esitiedot:

Katso myös: murtoluvut, lukujärjestelmät, kompleksiluvut

Reaalilukujoukko

Reaalilukujoukkoa voidaan luonnollisimmin ajatella *lukusuorana*, molemmissa suunnissa äärettömyyteen ulottuvana suorana, jonka pisteet ja reaaliluvut vastaavat toisiaan: jokainen piste esittää reaalilukua ja toisaalta jokaisella reaaliluvulla on vastinpisteensä. Monissa tapauksissa tämä on riittävä mielikuva reaaliluvuista, mutta varsinaiseksi määritelmäksi se ei kelpaa.

Reaalilukujen huolellinen logiikkaan pohjautuva määrittely on pitkähkö prosessi. Se voidaan tehdä useilla vaihtoehtoisilla tavoilla. Yksi mahdollisuus on lukujoukon vaiheittainen laajentaminen: luonnolliset luvut → kokonaisluvut → rationaaliluvut → reaaliluvut. Tämä vastaa ihmisen intuitiivista ajattelua, mutta formaalina loogisena prosessina on raskas. logiikka

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: murtoluvut, lukujärjestelmät, kompleksiluvut

Luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut

Lukukäsitteen määrittelyn lähtökohtana on lukumäärän ilmaisemiseen tarvittava *luonnollisten lukujen* joukko: joukko

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ .$$

Toisinaan myös 0 (nolla) liitetään tähän joukkoon, ts. sitäkin pidetään luonnollisena lukuna. Kyse on sopimuksesta: joissakin yhteyksissä on käytännöllistä ottaa nolla mukaan, toisissa ei. Periaatteessa molemmat ovat yhtä hyviä ratkaisuja. Luonnollisten lukujen joukolle käytetään symbolia $\mathbb{N}$.

Kokonaisuuksien osien tarkastelu johtaa murtolukuihin: puolet matkasta; kaksi kolmasosaa palkasta. Toisaalta monien suureiden tarkastelu johtaa myös negatiivisiin lukuihin: pakkasta on viisi astetta, ts. lämpötila on $-5°$; hidastuvuus on negatiivista kiihtyvyyttä. murtoluku

Liittämällä luonnollisiin lukuihin vastaavat negatiiviset luvut (ja nolla), saadaan *kokonaisluvut*: $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Kokonaislukujoukon symboli on $\mathbb{Z}$.

Rationaaliluvut saadaan liittämällä mukaan positiiviset ja negatiiviset murtoluvut, so. muotoa p/q olevat luvut, missä p on (positiivinen tai negatiivinen) kokonaisluku ja q luonnollinen luku ($\neq 0$). Tällöin kahta rationaalilukua pidetään samoina, jos toinen saadaan toisesta laventamalla tai supistamalla: laventaminen

$$\frac{p}{q} = \frac{np}{nq},$$

missä n on kokonaisluku, $n \neq 0$. Rationaalilukujoukon symboli on $\mathbb{Q}$.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: murtoluvut, lukujärjestelmät, kompleksiluvut

Irrationaaliluvut

Periaatteessa rationaaliluvut riittävät kaikissa käytännöllisissä tehtävissä. Esimerkiksi minkä tahansa suureen miten tarkka likiarvo tahansa on lausuttavissa rationaalilukujen avulla: $7.3478 = 7 + \frac{3478}{10000}$.

Teoreettisissa tarkasteluissa rationaaliluvut osoittautuvat riittämättömiksi. Klassisia ongelmia ovat neliön sivun pituuden lausuminen murto-osana lävistäjän pituudesta ja ympyrän kehän pituuden lausuminen halkaisijan avulla. Näistä voidaan todistaa, että verrannollisuuskertoimet eivät ole rationaalilukuja:

Pythagoraan lauseen mukaan neliön sivun pituudelle a ja lävistäjän pituudelle c pätee $c^2 = 2a^2$; alkeellisesti voidaan osoittaa, että rationaalilukua, jonka neliö olisi 2, ei voi olla olemassa. Ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhteen — luvun π — osalta todistus on vaikeampi; sen on ensimmäisenä esittänyt Johann Heinrich Lambert vuonna 1761.

Pythagoraan lause

pii

pii (sarja)

Lambert (pii)

Mainituissa tapauksissakin voitaisiin tietysti tyytyä likiarvoihin, mutta on miellyttävää ajatella, että on olemassa täsmällinen suhdeluku. Tämä merkitsee uusien lukujen, *irrationaalilukujen* liittämistä rationaalilukujen joukkoon. Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut yhdessä muodostavat *reaalilukujen* joukon, symbolina $\mathbb{R}$.

joukko

Irrationaalilukua voitaisiin luonnehtia olioksi, jolle on ainakin periaatteessa mahdollista laskea mielivaltaisen tarkkoja rationaalisia approksimaatioita. Itse asiassa täsmällinen määritelmä voidaan perustaa juuri tähän ajatukseen.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: murtoluvut, lukujärjestelmät, kompleksiluvut

Desimaaliesitys

Desimaaliesityksen perusteella rationaaliluvut ja irrationaaliluvut voidaan karakterisoida seuraavasti: Jos desimaaliesitys on päättyvä tai jaksollinen, kyseessä on rationaaliluku; esimerkiksi

$$0.3478 = \frac{3478}{10000}, \quad 0.333\ldots = \frac{1}{3}, \quad 0.313131\ldots = \frac{31}{99}.$$

(Näistä viimeksi mainittu voidaan laskea geometrisen sarjan avulla.) Jos desimaaliesitys on päättymätön ja jaksoton, kyseessä on irrationaaliluku; esimerkiksi

geometrinen sarja

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511\ldots\ .$$

Reaaliluvun desimaaliesitys ei kaikissa tapauksissa ole yksikäsitteinen: $1 = 1.000\ldots$ ja $0.999\ldots$ ovat sama reaaliluku, kuten geometrisen sarjan avulla voidaan todeta.

Rationaali- ja irrationaalilukujen tiheys

Jokaiselle irrationaaliluvulle voidaan löytää miten tarkka rationaalinen approksimaatio tahansa: Jos approksimaatiovirhe ei saa olla suurempi kuin 10^{-n}, otetaan irrationaaliluvun approksimaatioksi päättyvä desimaaliluku, jossa on irrationaaliluvun desimaaliesityksen n ensimmäistä desimaalia.

Rationaali- ja irrationaaliluvuilla on seuraava *tiheysominaisuus*: Miten lyhyellä lukusuoran välillä tahansa on aina sekä rationaali- että irrationaalilukuja. Nämä ovat jopa helposti konstruoitavissa:

Olkoon tarkasteltavana reaaliakselin väli $[a, b]$, missä yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan $0 < a < b$. Tällöin on olemassa luonnollinen luku n siten, että $1/n < b - a$. Koska $1/n \neq 0$, saadaan miten suuria rationaalilukuja tahansa kertomalla $1/n$ sopivalla luonnollisella luvulla. Olkoon erityisesti p pienin luonnollinen luku, jolla $p/n > a$. Tällöin p/n on välillä $[a, b]$ ja väliltä on siis löytynyt rationaaliluku. väli (reaaliakselin)

Väliltä $[a, b]$ löydetään myös irrationaaliluku muodostamalla ensin eo. konstruktiolla rationaaliluvut r ja s siten, että $a < r < s < b$. Luku $r + (s - r)/\sqrt{2}$ on tällöin etsitty irrationaaliluku: se sijaitsee välillä $[r, s]$ ja on irrationaalinen, koska $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

Algebralliset luvut ja transkendenttiluvut

Reaaliluvut voidaan jaotella myös seuraavasti: Jos luku on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön juuri, sitä sanotaan *algebralliseksi luvuksi*. Jos näin ei ole, kyseessä on *transkendenttiluku*.

yhtälö (polynomi-)
juuri (polynomin)

Esimerkiksi π on transkendenttiluku. Algebrallisia lukuja ovat mm. kaikki rationaaliluvut ja neliöjuuret, kuutiojuuret, jne. Vaikkapa $\sqrt[5]{2}$ on algebrallinen luku, koska se toteuttaa yhtälön $x^5 - 2 = 0$. Ensimmäisen asteen yhtälön $197x = 31$ juuri on $\frac{31}{197}$, joten sekin on algebrallinen luku. Algebrallisia lukuja on kuitenkin muitakin, koska läheskään kaikkien polynomiyhtälöiden juuria ei voida lausua juurilausekkeina.

pii
pii (sarja)

Ks. korkeamman asteen yhtälöt.

yhtälö (korkeamman asteen)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: murtoluvut, lukujärjestelmät, kompleksiluvut

Reaaliluvun itseisarvo

Reaaliluvun x *itseisarvo* $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases}$$

Positiivisen luvun itseisarvo on siis luku itse, negatiivisen luvun itseisarvo on vastaava positiivinen luku, ts. luvun vastaluku.

Vrt. kompleksiluvun itseisarvo. itseisarvo (kompleksiluvun)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: reaaliluvut

Luvun π määritelmä

Luku π on minkä tahansa ympyrän kehän ja halkaisijan suhde. Kyseessä on irrationaaliluku, jonka 50 ensimmäistä desimaalia ilmenevät seuraavasta: irrationaaliluku

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511\ldots\ .$$

π on transkendenttiluku, ts. se ei voi olla kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön juuri. transkendenttiluku

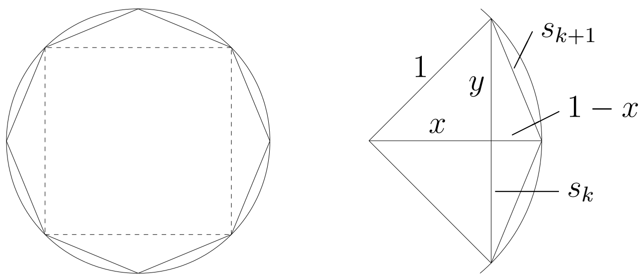
yhtälö (polynomi-)

Luvun π laskeminen alkeellisesti

Alkeelliset menetelmät π:n arvon laskemiseen perustuvat ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen monikulmioiden piirien laskemiseen. Jos ympyrän säde on $= 1$ ja ympyrän sisään piirretyn 2^k-kulmion sivun pituus s_k, saadaan 2^{k+1}-kulmion sivun pituudelle s_{k+1} palautuskaava monikulmio

$$s_{k+1}^2 = \frac{s_k^2}{2 + \sqrt{4 - s_k^2}}$$

Pythagoraan lausetta ja yksinkertaista algebraa käyttäen. Pythagoraan lause



Kun lisäksi otetaan huomioon, että $s_2 = \sqrt{2}$, lukuja $s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots$ voidaan laskea miten pitkälle tahansa. Koska s_k on 2^k-kulmion sivu ja 2^k-kulmion piiri ilmeisestikin lähestyy ympyrän kehän pituutta k:n kasvaessa, on raja-arvo (lukujonon)

$$\lim_{k\to\infty} 2^{k-1} s_k = \pi.$$

Alalikiarvoja π:lle saadaan siis luvuista $2^{k-1}s_k$.

Vastaavasti saadaan ylälikiarvoja ympyrän ympäri piirretyistä 2^k-kulmioista.

Sarjakehitelmiä luvulle π

Myös sarjakehitelmistä voidaan laskea π:n likiarvoja. Ilman tarkempaa johtamista esitettäköön seuraavat: sarja

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\ , \\
\frac{\pi}{2\sqrt{3}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \dots\ , \\
\frac{\pi^2}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\ , \\
\frac{\pi^4}{96} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = 1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \frac{1}{2401} + \dots\ .
\end{aligned}$$

Näistä ensimmäinen on erittäin tehoton laskentamenettely: Sarjasta on otettava 40 miljardia termiä, jotta π saataisiin 10 desimaalin tarkkuudella. Toisesta sarjasta riittää samaan tarkkuuteen 20 termiä. Sarjojen suppenemisnopeuksissa voi siis olla merkittäviä eroja. Mikään eo. sarjoista ei anna kovin hyvää menetelmää π:n laskemiseen.

termi

suppeneminen (sarjan)

Luvun π historiaa

Ympyrän kehän ja halkaisijan suhteelle käytettiin erilaisia arvoja jo vanhan ajan Egyptissä ja Babyloniassa. Kuitenkin vasta kreikkalaiset tutkivat geometriaa perusteellisemmin ja päättelivät ympyrän koosta riippumattoman suhteen olemassaolon. Eukleideen (n. vuonna 300 eKr.) *Stoikheia* (lat. *Elementa*) -teoksen XII kirja alkaakin todistuksella, että ympyröiden alat suhtautuvat toisiinsa kuten halkaisijoiden neliöt.

geometria
geometria
Eukleides

Arkhimedes (200-luvulla eKr.) käytti likiarvoja $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ($3.1408 < \pi < 3.1429$). Arabimatemaatikko al-Kaši laski π:lle likiarvon 16 desimaalin tarkkuudella 1400-luvulla, hollantilainen Ludolph van Ceulen 35 desimaalilla 1500- ja 1600-lukujen vaihteessa. Tietokoneaikakausi on ratkaisevasti lisännyt mahdollisuuksia: π laskettiin syyskuussa 1999 Japanissa 206 miljardin (tarkemmin sanottuna 206 158 430 000) desimaalin tarkkuudella.

Arkhimedes
al-Kaši

Luvun π irrationaalisuuden todisti sveitsiläis-saksalainen matemaatikko Johann Heinrich Lambert vuonna 1761, transkendenttisuuden saksalainen Ferdinand von Lindemann 1882.

Lambert (hyperbelifunktiot)

Kreikkalaisen kirjaimen π (pikku pii) käyttö ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen symbolina on peräisin suhteellisen myöhäiseltä ajalta. Sen käyttö vakiintui vasta 1700-luvulla Leonhard Eulerin kirjoituksissa.

kreikkalaiset kirjaimet
Euler

Esitiedot: lukujonon raja-arvo
Katso myös: reaaliluvut

Neperin luvun määritelmä

Neperin luku e — tavallisen eksponenttifunktion ja luonnollisen logaritmijärjestelmän kantaluku — määritellään raja-arvona

eksponenttifunktio

logaritmi (luonnollinen)

raja-arvo (lukujonon)

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Sen 50-desimaalinen lukuarvo on

$$2.71828182845904523536028747135266249775724709370000\ldots\ .$$

Syy Neperin luvun käyttöön eksponenttifunktion ja luonnollisen logaritmin kantalukuna on funktioiden derivaattojen yksinkertaisuudessa: Vain tätä kantalukua käytettäessä eksponenttifunktion derivaatta on sama kuin funktio itse ja logaritmifunktion derivaatta on $1/x$ ilman lisäkertoimia.

derivaatta

ESITIEDOT: lukujonon raja-arvo
KATSO MYÖS: reaaliluvut

Neperin luvun arvon laskeminen

Paitsi määritelmän raja-arvoa käyttäen voidaan Neperin luvulle laskea likiarvoja sarjakehitelmistä

sarja

$$
\begin{aligned}
e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots\,, \\
\frac{1}{e} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \dots\,.
\end{aligned}
$$

Sarjat suppenevat melko nopeasti. Kymmenellä termillä päästään noin seitsemän desimaalin tarkkuuteen.

suppeneminen (sarjan)

termi

ESITIEDOT: lukujonon raja-arvo
KATSO MYÖS: reaaliluvut

Neperin luvun historiaa

Neperin luku on saanut nimensä logaritmien keksijän skottilaisen John Napierin eli Neperin (1550 – 1617) mukaan.

Napier

Neperin luku on irrationaalinen ja transkendenttinen kuten myös π. Edellinen on osoitettu 1700-luvulla (Leonhard Euler 1737), jälkimmäinen 1800-luvulla (Charles Hermite 1873). Kummassakin suhteessa Neperin luku osoittautui siis hieman helpommaksi kuin π.

irrationaaliluku
transkendenttiluku
pii
pii (sarja)
Euler
Hermite

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS:

Laskulait

Summan ja tulon *vaihdannaisuudeksi* eli *kommutatiivisuudeksi* kutsutaan sääntöä, jonka mukaan tulos ei riipu termien tai tekijöiden järjestyksestä:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba.$$

Liitännäisyys eli *assosiatiivisuus* tarkoittaa mahdollisuutta asettaa sulut mihin kohtiin tahansa:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc).$$

Vaihdannaisuus ja liitännäisyys yhdessä merkitsevät, että summassa voidaan termit laskea yhteen missä järjestyksessä tahansa miten tahansa ryhmiteltyinä. Vastaava pätee tulon tekijöille.

Osittelulaeissa eli *distributiivisuudessa* on kysymys summan ja tulon suhteesta toisiinsa:

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc.$$

Kumpikin sääntö antaa itse asiassa saman laskulain, koska kertolasku on vaihdannainen. Molemmat on kuitenkin tapana esittää erikseen, koska samojen laskulakien voimassaoloa tarkastellaan matematiikassa myös tapauksissa, missä kertolasku ei ole vaihdannainen. Yksinkertainen esimerkki tällaisesta kertolaskusta on vektorialgebran ristitulo. ristitulo

Summamerkintä

Useiden jollakin tavoin samantyyppisten lausekkeiden summalle voidaan käyttää lyhyttä *summamerkintää*:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Tässä Σ on kreikkalainen kirjain iso sigma, jota käytetään *summamerkkinä*. Symboli k (jonka sijalla voisi olla mikä tahansa muuta merkitsemätön symboli) on *summeerausindeksi*. Summamerkin ala- ja yläpuolella kerrotaan, mitä kokonaislukuarvoja indeksille annetaan; tyypillisesti ilmoitetaan ala- ja yläraja. Jokainen indeksiarvo sijoitetaan vuorollaan summan lausekkeeseen a_k ja tulokset lasketaan yhteen.

kreikkalaiset kirjaimet

Summan yhteenlaskettavia a_k kutsutaan *termeiksi*.

Esimerkkejä:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{6} 2^k &= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 124, \\
\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pariton}}}^{7} k^3 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496, \\
\sum_{k=1}^{100} 2 &= 2 + 2 + \ldots + 2 = 200.
\end{aligned}$$

Viimeisessä tapauksessa termejä on indeksirajojen osoittama määrä, 100 kappaletta, kaikki suuruudeltaan $= 2$.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS:

Tulomerkintä

Samalla tavoin kuin summamerkintää käytetään myös *tulomerkintää*; tässä symbolina on kreikkalainen kirjain iso pii:

kreikkalaiset kirjaimet

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Lausekkeet a_k ovat *tulontekijöitä* tai lyhyemmin *tekijöitä*. (Summassa on siis termejä, tulossa tekijöitä.)

Esimerkiksi:

kertoma

potenssi (kokonaisluku-)

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!,$$

$$\prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{a_k} = 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot \ldots \cdot 2^{a_n} = 2^{a_1+a_2+\ldots+a_n} = 2^{\sum_{k=1}^{n} a_k} \ .$$

Esitiedot:

Katso myös:

Summamerkinnällä laskeminen

Laskulait johtavat seuraaviin sääntöihin laskettaessa summamerkintää käyttäen.

Summan kertominen luvulla (tai toisin päin ajateltaessa yhteisen tekijän ottaminen summasta) antaa

$$b\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} ba_k.$$

Usein käytetään myös kaksinkertaista (tai useampikertaista) summamerkintää, johon on itse asiassa ajateltava lisättäväksi sulut:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}\right).$$

Tällaisessa summassa voidaan *vaihtaa summeerausjärjestystä*:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}\right)\\
= \;& (a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1p}) + (a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2p}) + \ldots +\\
& \qquad (a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{np})\\
= \;& (a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1}) + (a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2}) + \ldots +\\
& \qquad (a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{np})\\
= \;& \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\right).
\end{aligned}$$

Kahden summan tulo on

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{p} b_k\right) = (a_1+a_2+\ldots+a_n)\sum_{k=1}^{p} b_k\\
= \;& a_1\sum_{k=1}^{p} b_k + a_2\sum_{k=1}^{p} b_k + \ldots + a_n\sum_{k=1}^{p} b_k\\
= \;& \sum_{k=1}^{p} a_1b_k + \sum_{k=1}^{p} a_2b_k + \ldots + \sum_{k=1}^{p} a_nb_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_jb_k.
\end{aligned}$$

ESITIEDOT: summa ja tulo, juuret
KATSO MYÖS: maksimit ja minimit

Aritmeettinen keskiarvo

Lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (*aritmeettinen*) *keskiarvo* M_a on lukujen summa jaettuna niiden lukumäärällä: summamerkintä

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Aritmeettinen keskiarvo on mahdollisimman yksinkertainen keskiarvo. Käyttötarkoituksesta riippuen on kuitenkin muitakin mahdollisuuksia.

Jos kaikki luvut x_k eivät ole yhtä merkityksellisiä, voidaan laskea *painotettu keskiarvo*, jossa kullakin luvulla on oma *painonsa*. Tämä on positiiviluku, joka valitaan sitä suuremmaksi, mitä merkittävämpi vastaava luku x_k on. Painotettu keskiarvo M_w saadaan kertomalla kukin luku x_k omalla painollaan w_k, laskemalla tulot yhteen ja jakamalla painojen summalla:

$$M_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}.$$

Jos merkitään $W_k = w_k/(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$, voidaan painotettu keskiarvo kirjoittaa

$$M_w = W_1 x_1 + W_2 x_2 + \ldots + W_n x_n = \sum_{k=1}^{n} W_k x_k,$$

missä painojen W_k summa on $= 1$.

ESITIEDOT: summa ja tulo, juuret
KATSO MYÖS: maksimit ja minimit

Geometrinen keskiarvo

Jos luvut x_k ovat ei-negatiivisia, ts. $x_k \geq 0$, voidaan niistä laskea myös *geometrinen keskiarvo* eli *keskiverto* M_g. Tämä on n:s juuri lukujen tulosta:

keskiverto (esimerkki)
juuri (murtopotenssi)
tulomerkintä

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Nimitys keskiverto johtuu siitä, että jos lukuja on kaksi, ts. $M_g = \sqrt{x_1 x_2}$, on voimassa ns. *verranto*

$$\frac{x_1}{M_g} = \frac{M_g}{x_2}.$$

Geometrinen keskiarvo on enintään yhtä suuri kuin samojen lukujen aritmeettinen keskiarvo: $M_g \leq M_a$. Yhtäsuuruus tulee kysymykseen vain, jos kaikki luvut x_k ovat keskenään yhtä suuria.

keskiarvo (aritmeettinen ja geometrinen)

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: reaaliluvut, summa ja tulo

Murtoluvuilla laskeminen

Murtoluvut ovat muotoa $\frac{p}{q}$ olevia lukuja; tässä p on kokonaisluku ja $q \neq 0$ luonnollinen luku. Murtoluvun *osoittaja* on p ja *nimittäjä* q.

kokonaisluku

luonnollinen luku

Kahta murtolukua pidetään samoina, jos toinen saadaan toisesta *laventamalla* tai *supistamalla*:

rationaaliluku

$$\frac{p}{q} = \frac{np}{nq},$$

missä n on kokonaisluku, $n \neq 0$. Murtoluku voidaan saattaa yksinkertaisimpaan muotoonsa supistamalla se osoittajan ja nimittäjän suurimmalla yhteisellä tekijällä.

suurin yhteinen tekijä

Murtoluvut *lasketaan yhteen* (tai *vähennetään toisistaan*) saattamalla ensin niiden nimittäjät samoiksi. Yhteinen nimittäjä voi olla tällöin nimittäjien tulo, jolloin luvut on lavennettava toistensa nimittäjillä:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Täten meneteltäessä nimittäjästä bd voi tulla tarpeettoman suuri ja summana saatava murtoluku onkin supistettavissa. Tarpeettoman suuret nimittäjät vältetään laventamalla luvut siten, että yhteiseksi nimittäjäksi saadaan nimittäjien pienin yhteinen jaettava.

pienin yhteinen jaettava

Kaksi murtolukua *kerrotaan* keskenään kertomalla osoittajat keskenään, samoin nimittäjät keskenään:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Murtoluku *jaetaan* murtoluvulla kertomalla se jakajan käänteisluvulla:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Esitiedot:

Katso myös: reaaliluvut, summa ja tulo

Esimerkki murtolukualgebrasta

Murtolausekkeita sievennettäessä sovelletaan murtolukujen laskusääntöjä — murtolukualgebraa — esimerkiksi seuraavaan tapaan:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\left[1+\left(\frac{b}{a+b}-1\right)\left(\frac{b}{a-b}+1\right)\right]\\
=\;&\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\left[1+\left(\frac{b}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a-b}+\frac{a-b}{a-b}\right)\right]\\
=\;&\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\left(1+\frac{-a}{a+b}\,\frac{a}{a-b}\right)\\
=\;&\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\left(1+\frac{-a^2}{a^2-b^2}\right)\\
=\;&\left(\frac{b}{b}+\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}+\frac{-a^2}{a^2-b^2}\right)\\
=\;&\left(\frac{a+b}{b}\right)^2\frac{-b^2}{a^2-b^2}\\
=\;&\frac{(a+b)^2}{b^2}\,\frac{-b^2}{a^2-b^2}\\
=\;&\frac{-(a+b)^2}{a^2-b^2}\\
=\;&\frac{-(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}\\
=\;&\frac{b+a}{b-a}\,.
\end{aligned}
$$

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS:

Alkuluvut

Alkuluvuiksi sanotaan jaottomia luonnollisia lukuja ($\neq 1$): luonnollinen luku

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 113,\ 127,\\ 131,\ 137,\ 139,\ 149,\ 151,\ 157,\ 163,\ 167,\ 173,\ 179,\ 181,\ 191,\\ 193,\ 197,\ 199,\ 211,\ 223,\ 227,\ 229,\ 233,\ 239,\ 241,\ 251,\ \ldots\ .$$

Voidaan helposti osoittaa, että näitä on äärettömän paljon, ts. suurinta alkulukua ei ole. Tästä huolimatta ei ole helppoa konstruoida uusia alkulukuja, vaan näiden etsiminen edellyttää pitkiä tietokoneajoja. Vuoden 1999 tilanteen mukaan suurin tunnettu alkuluku on $2^{6972593}-1$; tässä on 2 098 960 numeroa.

Jokainen luku voidaan yksikäsitteisellä tavalla esittää alkulukujen tulona; näitä sanotaan luvun *alkutekijöiksi*. Esimerkiksi

$$123456789 = 3^2 \cdot 3607 \cdot 3803, \qquad 90642552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13.$$

Luonnollisen luvun n jakaminen alkutekijöihin voidaan alkeellisesti tehdä kokeilemalla: Tutkitaan, onko luku jaollinen alkuluvuilla, jotka ovat $\leq \sqrt{n}$. Tällöin on apua seuraavassa esitettävistä jaollisuussäännöistä.

Jaollisuussäännöt

Tärkeimmät *jaollisuussäänöt* ovat seuraavat:

- Luku on kahdella jaollinen, jos sen viimeinen numero on 2, 4, 6, 8 tai 0.
- Luku on kolmella jaollinen, jos sen numeroiden summa on kolmella jaollinen. Esimerkiksi 573 on kolmella jaollinen, koska $5 + 7 + 3 = 15$ on kolmella jaollinen.
- Luku on neljällä jaollinen, jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on neljällä jaollinen. Esimerkiksi 123498724 on neljällä jaollinen, koska 24 on neljällä jaollinen.
- Luku on viidellä jaollinen, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- Luku on yhdeksällä jaollinen, jos sen numeroiden summa on yhdeksällä jaollinen.
- Luku on yhdellätoista jaollinen, jos sen numeroista vuorotellen yhteen- ja vähennyslaskuilla saatu luku on yhdellätoista jaollinen. Esimerkiksi 45859 on yhdellätoista jaollinen, koska $4 - 5 + 8 - 5 + 9 = 11$ on yhdellätoista jaollinen; samoin 4169, koska $4 - 1 + 6 - 9 = 0$.

Parillisia lukuja ovat kahdella jaolliset luvut, so. muotoa $2n$ olevat luvut, missä n on kokonaisluku. *Parittomat luvut* ovat vastaavasti muotoa $2n + 1$.

Suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava

Kahden luonnollisen luvun *yhteinen tekijä* on luku, jolla molemmat luvut ovat jaollisia (ts. jako menee tasan). *Suurin yhteinen tekijä* (syt) on suurin tällainen luku. luonnollinen luku

Suurin yhteinen tekijä voidaan määrittää jakamalla luvut alkutekijöihin: yhteisten alkutekijöiden tulo on suurin yhteinen tekijä. Esimerkiksi: Lukujen $156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$ ja $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ suurin yhteinen tekijä on $2 \cdot 2 \cdot 13 = 52$.

Suurin yhteinen tekijä voidaan hakea myös ns. *Eukleideen algoritmilla*, jolloin alkutekijöihin jakoa ei tarvita. Eukleides

Kahden luonnollisen luvun *yhteinen jaettava* on luku, joka on jaollinen kummallakin luvulla. *Pienin yhteinen jaettava* (pyj) on pienin tällainen luku.

Pienin yhteinen jaettava voidaan määrittää lukujen alkutekijäesityksen perusteella: Kun jokainen esiintyvä alkutekijä otetaan korotettuna korkeimpaan esiintyvään potenssiin, saadaan näiden tulona pienin yhteinen jaettava. Esimerkiksi: Lukujen $156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$ ja $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ pienin yhteinen jaettava on $2^3 \cdot 3 \cdot 13 = 312$. potenssi (kokonaisluku-)

Lukujen n ja p suurimmalle yhteiselle tekijälle ja pienimmälle yhteiselle jaettavalle pätee

$$n \cdot p = \mathrm{syt}(n, p) \cdot \mathrm{pyj}(n, p).$$

Salakirjoitus

Suurten lukujen jakaminen alkutekijöihin merkitsee yleensä suurta työtä, samoin sen selvittäminen, onko annettu luku alkuluku vai ei. Tehtävä on hankala myös käytettäessä nopeita tietokoneita, koska laskenta-aika kasvaa erittäin nopeasti luvun suurentuessa, vaikka käytössä ovat alkeellista kokeilumenetelmää paljonkin tehokkaammat algoritmit.

Alkutekijöihin jaon vaikeuteen perustuvat ns. *julkisen salakirjoituksen* järjestelmät, joissa viestien vastaanottaja voi julkisesti ilmoittaa hänelle lähetettävien viestien kirjoitusavaimen, so. menettelyn, jolla viestit on salakirjoitettava. Tämä ei merkitse, että salakirjoitetut viestit pystyttäisiin julkisesti lukemaan: lukuavaimen tietää vain viestien saaja.

Periaate on seuraava: Kirjoitusavaimena on kahden suuren alkuluvun tulo, mutta ei tekijöitä erikseen. Tämä on julkinen. Lukuavain edellyttää tekijöiden tuntemista. Sen konstruoiminen vaatii siis ison luvun tekijöihin jakoa. Valitsemalla kyllin suuret alkuluvut, päästään tilanteeseen, missä tämä parhaillakin tietokoneohjelmilla vie vuosikausia. Tehtävän vaikeutta kuvaa seuraava: Vuonna 1990 tehdyssä kokeessa onnistuttiin 155-numeroinen luku jakamaan kolmeen alkutekijäänsä viiden viikon tietokoneajolla, kun käytössä oli 1000 verkkoon kytkettyä konetta.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: potenssi

Kymmenjärjestelmä

Tavallisessa lukujärjestelmässä, jonka *kantaluku* on 10 — *kymmenjärjestelmässä* — käytetään kymmentä numeroa: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Luvut esitetään näiden avulla ns. *positiojärjestelmän* mukaisesti: Peräkkäin kirjoitetuista numeroista oikeanpuoleisin tarkoittaa luvussa olevien ykkösten lukumäärää, tämän vasemmalla puolella oleva täysien kymmenten lukumäärää, seuraava täysien satojen määrää, jne. Kyseessä ovat kantaluvun potenssien 10^0, 10^1, 10^2, jne. lukumäärät.

potenssi (kokonaisluku-)

Jos kyseessä ei ole kokonaisluku, kirjoitetaan ykkösiä esittävän luvun oikealle puolelle desimaalipiste (tai -pilkku) ja tämän perään kymmenesosien lukumäärä, sitten sadasosien lukumäärä, jne. Kyseessä ovat kantaluvun negatiivisten potenssien 10^{-1}, 10^{-2}, jne. lukumäärät.

Lukujen kymmenjärjestelmäesitykset on siis tulkittava seuraavien esimerkkien osoittamalla tavalla:

$$\begin{aligned} 1648 &= 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8, \\ 3.14 &= 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Yleisesti voidaan kirjoittaa summamerkintää käyttäen

summamerkintä

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot 10^k.$$

Tässä vasemmalla puolella olevat symbolit a_i ovat luvun numeroita peräkkäin lueteltuina eikä kerrottuina keskenään; desimaalipiste sijaitsee numeroiden a_0 ja a_{-1} välissä.

Muut lukujärjestelmät

Lukujärjestelmän kantaluku voi olla muukin luonnollinen luku (> 1) kuin 10. Jos kantaluku on b, ovat järjestelmän numerot $0,\ 1,\ \dots,\ b-1$. Esitettäessä jotakin lukua b-kantaisessa järjestelmässä, kirjoitetaan näitä numeroita peräkkäin samaan tapaan kuin kymmenjärjestelmässä kirjoitetaan numeroita $0,\ 1,\ \dots,\ 9$. Myös desimaalipistettä voidaan käyttää, vaikka nimitys 'desimaali' ei enää olekaan paikallaan.

luonnollinen luku

Yleisesti varsinkin tietotekniikassa käytettyjä lukujärjestelmiä ovat *binääri-*, *oktaali-* ja *heksadesimaalijärjestelmä*; näiden kantaluvut ovat 2, 8 ja 16. Binäärijärjestelmän numerot ovat 0 ja 1; oktaalijärjestelmän 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Heksadesimaalijärjestelmässä numeroita tarvitaan kuusitoista, jolloin avuksi otetaan aakkosten alkupään kirjaimet: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Mitä lukua tietty esitys tarkoittaa, lasketaan samalla tavoin kuin edellä kymmenjärjestelmän tapauksessa: Jos luvut a_i tarkoittavat järjestelmän numeroita, tulkitaan seuraavasti:

summamerkintä

potenssi (kokonaisluku-)

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^k .$$

Kun yhtäläisyysmerkin oikea puoli lasketaan (kymmenjärjestelmässä), saadaan luvun esitys kymmenjärjestelmässä.

On siis ajateltava, että 'luku' sinänsä on jotakin esitysjärjestelmästä riippumatonta. Se voidaan valinnan mukaan esittää eri järjestelmissä, joista kymmenjärjestelmä on ihmiselle tutuin. Tietokonetekniikalle luonnollisin on binäärijärjestelmä — tai sen johdannaisina oktaali- tai heksadesimaalijärjestelmä — koska sähköisillä ja magneettisilla ilmiöillä on kaksi tilaa vastaten binäärijärjestelmän kahta numeroa.

Esimerkkejä lukujärjestelmistä

Heksadesimaalijärjestelmän luku 2B3 voidaan muuntaa kymmenjärjestelmään seuraavasti:

$$2 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 3 = 691.$$

Tässä on numero B korvattu sen kymmenjärjestelmän mukaisella arvolla 11 ja kantaluvuksi kirjoitettu 16.

Jos kantalukuna on 3, tarkoittaa esitys 121.2 kymmenjärjestelmän lukua

$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 + 2 \cdot 3^{-1} = 16.666\ldots.$$

Kyseessä on siis päättymätön kymmenjärjestelmän desimaaliluku, vaikka vastaava esitys kolmekantaisessa järjestelmässä onkin päättyvä. desimaaliesitys

Käänteinen tehtävä, kymmenjärjestelmän luvun esittäminen jossakin toisessa järjestelmässä, voidaan ratkaista sovittamalla lukuun kantaluvun potensseja suurimmasta alkaen. Olkoon esimerkkinä oktaaliesityksen hakeminen kymmenjärjestelmän luvulle 8765: potenssi (kokonaisluku-)

Kantaluvun 8 peräkkäiset potenssit ovat 1, 8, 64, 512, 4096, 32768 jne. Näistä viimeiseksi mainittu on suurempi kuin tutkittava luku, mutta edellinen, 4096, sopii lukuun kaksi kertaa. Oktaaliesityksen ensimmäinen numero on siten 2 ja luvusta on tämän jälkeen esittämättä $8765 - 2 \cdot 4096 = 573$. Edellinen kantaluvun potenssi, 512, sopii tähän kerran. Oktaaliesityksen toinen numero on siis 1 ja esittämättä on $573 - 512 = 61$. Tähän ei edellinen kantaluvun potenssi, 64, sovi lainkaan ja oktaaliesitykseen tulee numeroksi 0. Sitä edellinen kantaluvun potenssi, 8, sopii seitsemän kertaa; siis numero 7 ja esittämättä on $61 - 7 \cdot 8 = 5$. Tähän sopii edellinen kantaluvun potenssi, 1, tasan viisi kertaa; siis numero 5. Oktaaliesitys on siten 21075.

Laskun voi myös järjestää kaavioksi:

$$\begin{aligned}
&8765 - \underline{2} \cdot 8^4 = 573 \\
&\qquad 573 - \underline{1} \cdot 8^3 = 61 \\
&\qquad\qquad 61 - \underline{0} \cdot 8^2 = 61 \\
&\qquad\qquad\qquad 61 - \underline{7} \cdot 8^1 = 5 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 5 - \underline{5} \cdot 8^0 = 0
\end{aligned}$$

ESITIEDOT: reaaliluvut

KATSO MYÖS: polynomien tekijöihin jako, vektori

Kompleksitaso

Lukukäsitteen vaiheittainen laajennus johtaa luonnollisista luvuista kokonaislukujen ja rationaalilukujen kautta reaalilukuihin. Jokaisessa vaiheessa ratkeavien yhtälöiden määrä lisääntyy: yhtälö $x + 2 = 0$ ei ratkea luonnollisten lukujen joukossa, mutta kylläkin kokonaislukujoukossa; yhtälöllä $3x = 2$ ei ole kokonaislukuratkaisua, mutta rationaalinen ratkaisu sillä on; yhtälön $x^2 - 2 = 0$ ratkeavuus edellyttää rationaalilukujoukon laajentamista reaalilukujoukoksi.

luonnollinen luku
kokonaisluku
rationaaliluku
reaaliluku
yhtälö
yhtälö (polynomi-)

Jokaisessa vaiheessa uusi lukujoukko on edellisen laajennus: edeltäjä on uuden joukon osajoukko.

osajoukko

Prosessia voidaan jatkaa. Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua reaalilukujoukossa, mutta laajentamalla reaalilukujoukko edelleen kompleksilukujen joukoksi tällekin yhtälölle (ja samalla kaikille polynomiyhtälöille) löydetään ratkaisu.

yhtälö (polynomi-)

Formaalisti laskemalla yhtälön ratkaisuksi saataisiin $x = \pm\sqrt{-1}$. Ongelmaksi tällöin jää, mitä itse asiassa tarkoittaa $\sqrt{-1}$, jolle käytetään myös merkintää i. Vaikka tarkastelua voitaisiin tältäkin pohjalta jatkaa, saattaa olla luonnollisempaa suorittaa laajennus geometrisesti:

Lukusuora $\mathbb{R}$ sijoitetaan xy-tason x-akseliksi ja koko xy-tasoa aletaan kutsua *kompleksitasoksi*. Sen pisteet (x, y) ovat *kompleksilukuja*. Näiden muodostama joukko — siis itse asiassa xy-taso — on *kompleksilukujen joukko*, symbolina $\mathbb{C}$.

lukusuora
koordinaatisto (xy-)

Reaaliluvut ovat x-akselilla olevia pisteitä, so. muotoa $(x, 0)$. Muut pisteet ovat *imaginaarilukuja*. Tilanne on siten samankaltainen kuin aikaisemmin: edeltävä lukujoukko on uuden osajoukko.

Näkemys kompleksiluvuista xy-tason pisteinä on peräisin 1700- ja 1800-lukujen vaihteen ajalta. Kompleksilukujen historian voidaan kuitenkin katsoa alkavan lähes kolme sataa vuotta aikaisemmin polynomiyhtälöiden ratkaisujen tutkimisesta.

Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku

Kompleksilukujoukko muodostuu kompleksiluvuista (x, y), ts. xy-tason pisteistä. *Reaaliakselin* — x-akselin — yksikköpiste on $(1, 0)$; tämä vastaa reaalilukua 1, ts. $1 = (1, 0)$. Vastaavalla tavalla merkitään *imaginaariakselin*, y-akselin yksikköä eli *imaginaariyksikköä* $i = (0, 1)$.

koordinaatisto (xy-)

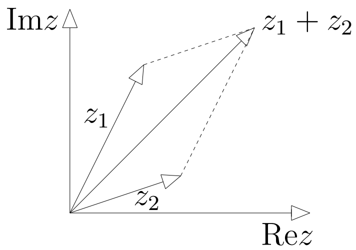
reaaliluku

Kompleksiluvuille halutaan tavanomainen algebra — laskutoimitukset — jolloin on määriteltävä, miten niitä lasketaan yhteen, vähennetään, kerrotaan ja jaetaan keskenään. Tavoitteena on lisäksi, että tavanomaiset laskusäännöt ovat voimassa ja että $i^2 = -1$, jolloin ainakin yhtälölle $x^2+1 = 0$ on ratkaisu olemassa.

Yhteenlasku on luonnollista määritellä vektoriyhteenlaskuna:

yhteenlasku (vektorien)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).$$



Vähennyslaskun määrittely tehdään samaan tapaan:

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2).$$

Yhteenlaskun määrittelyn jälkeen on luonnollista kirjoittaa vektorialgebran tapaan $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi$, jolloin on saatu kompleksiluvulle uusi esitysmuoto $x + yi$.

ESITIEDOT: reaaliluvut

KATSO MYÖS: polynomien tekijöihin jako, vektori

Kompleksilukujen kertolasku

Jotta laskusäännöt olisivat voimassa ja lisäksi olisi $i^2 = -1$, on *kertolaskun* ilmeisestikin tapahduttava seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

Tämä antaa perusteen asettaa kertolaskun määritelmäksi

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Tällöin on todellakin $i^2 = -1$:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kaikki tavanomaiset algebran laskusäännöt (yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuus ja liitännäisyys, osittelulait) ovat voimassa, kuten määritelmiin perustuvilla mekaanisilla — tosin paikoin pitkillä — laskuilla voidaan todeta.

laskulaki (summa ja tulo)
vaihdannaisuus
liitännäisyys
osittelulaki

Myös *jakolasku* tulee mahdolliseksi, jos jakaja poikkeaa nollasta, ts. ei ole kompleksiluku $(0, 0)$. Murtoluvuksi kirjoitettu osamäärä on yksinkertaisesti lavennettava nimittäjän liittoluvulla. Esimerkki edempänä.

laventaminen
nimittäjä

Kompleksilukuja ei määrittelyn jälkeen ole tapana merkitä lukupareina (x, y), vaan käytetään esitysmuotoa $x + yi$. Yhteen-, vähennys- ja kertolaskut kompleksilukualgebrassa suoritetaan tällöin tavanomaisilla algebran laskusäännöillä. Tarvittaessa käytetään sieventämiseen yhtälöä $i^2 = -1$.

Kaikilta osin ei kompleksiluvuilla laskeminen kuitenkaan suju samoin kuin reaalialueella. Esimerkiksi juurenotossa on oltava varovainen. Mm. neliöjuuren positiivista haaraa ei voida määritellä. Yritys kirjoittaa $i = +\sqrt{-1}$ johtaa ristiriitaan:

juuri (murtopotenssi)
juurifunktio
neliöjuuri

$$-1 = i^2 = (+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = +\sqrt{(-1)(-1)} = +\sqrt{1} = +1.$$

Liittoluku; kompleksilukujen jakolasku

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* on x ja *imaginaariosa* y. Luvun *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on $\bar{z} = x - yi$. Kompleksiluvun z *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kompleksilukujen *jakolasku* perustuu jakajan liittoluvulla laventamiseen. Esimerkiksi: laventaminen

$$\frac{2+3i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{18+i}{25} = \tfrac{18}{25} + \tfrac{1}{25}i.$$

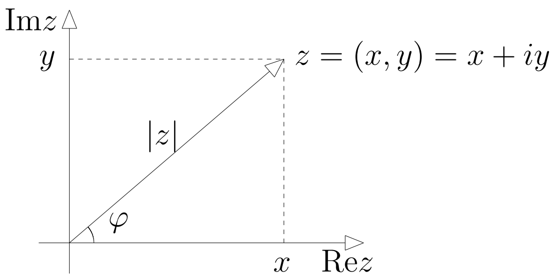
Jakolasku onnistuu aina, kun jakaja poikkeaa nollasta. Jos nimittäin jakajana on $a+bi$, tulee nimittäjästä liittoluvulla laventamisen jälkeen $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$, mikä on $= 0$ vain, jos $a = b = 0$.

Kompleksiluvun napakulma

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *napakulma* eli *argumentti* φ on pisteen (x, y) suuntakulma positiiviseen x-akseliin nähden; tämä valitaan yleensä väliltä $]-\pi, \pi]$.

suuntakulma (suoran)

väli (reaaliakselin)



Koska napakoordinaateille pätee trigonometristen funktioiden määritelmien mukaan $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, missä $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, saadaan kompleksiluvulle *napakoordinaattiesitys*

napakoordinaatit (tason)

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

$$z = x + yi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tämän avulla voidaan myös kompleksilukujen kertolasku luonnehtia geometrisesti:

Olkoon kerrottavana kompleksiluvut

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Näiden tulo on

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= |z_1||z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

missä on käytetty sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja. Tulos on muodoltaan napakoordinaattiesitys, jolloin voidaan päätellä, että lukujen tulo on kompleksiluku, jonka itseisarvo saadaan tekijöiden itseisarvojen tulona ja napakulma tekijöiden napakulmien summana.

trigonometria (peruskaavat)

Kiertotekijä; Eulerin kaava

Kiertotekijäksi kutsutaan kompleksilukua u, jonka itseisarvo on $|u| = 1$. Tämän napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa muotoon $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Kiertotekijän ja kompleksiluvun $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tulo on

sini
kosini

$$uz = |z|\,[\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)].$$

Tämän itseisarvo on sama kuin luvun z, mutta napakulma on kasvanut kulmalla α. Kiertotekijällä kertominen kiertää siis lukua z kulman α verran origon ympäri positiiviseen suuntaan.

Kiertotekijää merkitään myös $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tämä tunnetaan *Eulerin kaavana* syntyään sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin mukaan. Asettamalla $\alpha = \pi$ saadaan kaavasta tulos $e^{i\pi} + 1 = 0$, joka kytkee toisiinsa Neperin luvun e, ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen luvun π, imaginaariyksikön i, reaaliakselin yksikön 1 ja nollan.

Euler
Neperin luku
pii

Oleellinen kysymys on luonnollisesti, miten eksponenttifunktio ja siis $e^{i\alpha}$ itse asiassa määritellään kompleksialueella. Kyseessä on *kompleksianalyysiksi* tai *funktioteoriaksi* kutsuttu sangen laaja matematiikan osa-alue, jonka kehitys alkoi 1700-luvulla lähinnä Leonhard Eulerin (1707 – 1783) töistä. Alan kehitykseen vaikuttaneita merkittäviä matemaatikkoja ovat ranskalainen Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), saksalainen Bernhard Riemann (1826 – 1866) ja ranskalainen Henri Poincaré (1854 – 1912). Ala on ollut Suomessa hyvin edustettuna 1900-luvulla: Rolf Nevanlinna (1895 – 1980), suuren osan työstään Yhdysvalloissa tehnyt Lars Ahlfors (1907 – 1996) ja Helsingin yliopiston professori Olli Lehto (1925 –).

eksponenttifunktio
Cauchy
Riemann
Poincaré
Nevanlinna

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: juuret, reaalifunktiot, kompleksiluvut

Kokonaislukupotenssit

Olkoon tavoitteena määritellä *potenssi* x^α, missä *kantaluku* x ja *eksponentti* α ovat mitä tahansa reaalilukuja. reaaliluku

Määrittely tapahtuu useassa vaiheessa eikä tavoitteeseen täydelleen päästä: kantalukua x joudutaan jossakin määrin rajoittamaan.

1) Olkoon aluksi eksponentti luonnollinen luku n, ts. n on kokonaisluku ja ≥ 1. Tällöin asetetaan luonnollinen luku kokonaisluku

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ kpl}}.$$

Kantaluku x voi olla mikä tahansa reaaliluku. Selvästikin on voimassa kertolaskusääntö $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ja potenssiinkorotussääntö $(x^n)^m = x^{nm}$.

2) Jos eksponentti on negatiivinen, määritellään

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Tällöin tulee luonnollisesti olla $x \neq 0$.

Motiivina määrittelyssä on halu säilyttää em. potenssien kertolaskusääntö voimassa: Onhan nimittäin elementaarien supistussääntöjen mukaisesti esimerkiksi $x^5/x^3 = x^2$, $x^3/x^5 = 1/x^2$ ja nämä voidaan eo. määrittelyn turvin kirjoittaa $x^5 \cdot x^{-3} = x^2$, $x^3 \cdot x^{-5} = x^{-2}$, jolloin laskusääntö säilyy voimassa. supistaminen

3) Jos on $n = 0$, määritellään

$$x^0 = 1.$$

Motiivina on triviaali yhtälö $x^n/x^n = 1$, jonka vasen puoli kohdan 2 mukaan laskien saa muodon $x^{n-n} = x^0$. Jotta murtolauseke x^n/x^n ei saisi epämääräistä muotoa $0/0$, on oletettava $x \neq 0$.

Potenssi on siis saatu määritellyksi kaikille kokonaislukueksponenteille.

Murtopotenssit

4) Murtopotenssin $x^{1/n}$ (missä n on luonnollinen luku) tulisi toteuttaa ehto $(x^{1/n})^n = x$, mikäli halutaan, että potenssin potenssiinkorottamista koskeva laskulaki on kaikissa tapauksissa voimassa. $x^{1/n}$ on siis luku, joka korotettuna potenssiin n antaa kantaluvun x; tätä kutsutaan n:nneksi juureksi luvusta x. Luvun n:s juuri ei kuitenkaan ole aina (reaalisena) olemassa eikä yksikäsitteinen, jos se on olemassa. Potenssi $x^{1/n}$ määritellään juurifunktion päähaaran mukaisesti: luonnollinen luku juurifunktio

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

Tämä edellyttää, että $x \geq 0$. Potenssin arvo on myös ≥ 0.

Jos n on pariton, voitaisiin sallia, että x voi olla negatiivinen. Näin ei kuitenkaan yleensä tehdä; ks. juurifunktion käsittelyä.

5) Jotta potenssin potenssiinkorottamista koskeva sääntö säilyisi voimassa, on ilmeisestikin asetettava

$$x^{p/n} = (x^p)^{1/n} = \sqrt[n]{x^p},$$

kun eksponentti on positiivinen rationaaliluku p/n. rationaaliluku

Tällöin on edellytettävä, että $x \geq 0$. Jos nimittäin $x < 0$, voidaan ajautua ristiriitoihin: $-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$.

6) Jos eksponentti on negatiivinen rationaaliluku, menetellään samaan tapaan kuin edellä kohdassa 2:

$$x^{-p/n} = \frac{1}{x^{p/n}}.$$

Rajoituksena on $x > 0$.

Potenssi on täten saatu määritellyksi kaikille rationaalisille eksponenteille.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: juuret, reaalifunktiot, kompleksiluvut

Irrationaalinen potenssi

7) Jos eksponentti α on irrationaaliluku, sitä voidaan approksimoida miten tarkasti tahansa rationaaliluvuilla: On olemassa rationaaliluvut r_n siten, että $|r_n - \alpha| < 10^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

irrationaaliluku
rationaaliluku
tiheys (rationaalilukujen)

Jos $x > 0$, voidaan näitä vastaavat potenssit x^{r_n} edellä esitetyn määrittelyn mukaan muodostaa ja asettaa yleiseksi potenssin määritelmäksi

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{r_n},$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

raja-arvo (lukujonon)

Voidaan osoittaa, että raja-arvo todellakin on aina olemassa, mutta tällöin ollaan tekemisissä reaalilukujen määrittelyn peruskysymysten kanssa eikä todistus siten ole aivan helppo.

reaaliluku

Lopputuloksena on, että potenssi x^α on saatu määritellyksi kaikille reaaliluvuille α ainakin, jos $x > 0$.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: juuret, reaalifunktiot, kompleksiluvut

Negatiivisten ja kompleksilukujen potenssit

Potenssin määritelmä voidaan yleistää myös negatiivisille luvuille ja kompleksiluvuille. Monet matemaattiset tietokoneohjelmat esimerkiksi antavat seuraavanlaisia tuloksia: kompleksiluku

$$\begin{aligned}
&(-1)^{1/3} \approx 0.5000 + 0.8660i,\\
&(-1)^{\pi} \approx -0.9027 - 0.4303i,\\
&i^i \approx 0.2079,
\end{aligned}$$

missä i tarkoittaa imaginaariyksikköä. imaginaariyksikkö

Näiden tarkat arvot ovat

$$\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), \quad \cos(\pi^2)+i\sin(\pi^2), \quad e^{-\pi/2}.$$

Määrittelyn perustana on Eulerin kaava ja potenssiinkorotussäännön säilyminen: Eulerin kaava

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\alpha} = (e^{i\varphi})^{\alpha} = e^{i\alpha\varphi} = \cos(\alpha\varphi) + i\sin(\alpha\varphi).$$

Tällöin on esimerkiksi

$$(-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Huomattakoon, että arvo $(-1)^{1/3} = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ on itse asiassa ristiriidassa reaalialueelle luonnollisemman määrittelyn kanssa: $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Kompleksilukujen murto- ja irrationaalipotenssit eivät ole aivan ongelmattomia; varomaton laskeminen voi johtaa ristiriitoihin. Potenssiinkorotussääntökään ei ole rajoituksitta voimassa. Esimerkiksi laskussa sini kosini

$$i^i = (\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2})^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

voitaisiin myös kirjoittaa $i = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}$, mikä johtaisi eri tulokseen!

Juuret

Luvun a *neliöjuureksi* kutsutaan lukua, joka toiseen potenssiin korotettuna antaa luvun a. Kyseessä on siten yhtälön $x^2 = a$ ratkaisu.

potenssi (kokonaisluku-)
yhtälö

Vastaavalla tavalla määritellään *korkeammat juuret*. Jos n on luonnollinen luku, niin n:s juuri luvusta a on luku, joka korotettuna potenssiin n antaa luvun a, ts. kyseessä on yhtälön $x^n = a$ ratkaisu.

yhtälö (polynomi-)
luonnollinen luku

Tapauksessa $n = 3$ käytetään nimitystä *kuutiojuuri*.

Edellä olevat määrittelyt merkitsevät, että juuren arvo ei (yleensä) ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi luvun 4 neliöjuuria ovat $+2$ ja -2. Arvojen lukumäärä riippuu siitä, mistä joukosta niitä etsitään. Jos haetaan reaalisia arvoja, luvulla -4 ei ole neliöjuuria lainkaan; kompleksilukujoukosta haettaessa arvoja on kaksi: $2i$ ja $-2i$.

reaaliluku
kompleksiluku

Kysymys arvojen lukumäärästä ratkeaa polynomiyhtälöiden ominaisuuksien avulla: Koska n:s juuri luvusta a on yhtälön $x^n = a$ ratkaisu, arvoja on kompleksitasossa täsmälleen n kappaletta. Poikkeuksena on tapaus $a = 0$, jolloin ainoa juuri on 0. Jotkut juurista voivat olla reaalisia, mutta ainoastaan neliöjuuren tapauksessa voivat kaikki — molemmat — olla reaalisia.

yhtälö (polynomi-)
kompleksitaso

Esimerkiksi kuutiojuuri luvusta -8 saa reaalisen arvon -2, mutta sillä on myös kompleksiset arvot $1 \pm i\sqrt{3}$. Kuudennella juurella luvusta 729 on kuusi arvoa: ± 3, $\frac{3}{2}(\pm 1 \pm i\sqrt{3})$, missä jälkimmäisen lausekkeen $\pm$-merkit valitaan toisistaan riippumattomasti ja saadaan siis neljä eri kombinaatiota.

Lukija piirtäköön eo. juurten sijainnin kompleksitasoon. Syntyvä kuvio on yleistettävissä: Luvun a n:nnen juuren kaikki arvot sijaitsevat tasavälisesti kompleksitason origokeskisellä ympyrällä.

Juurifunktiot

Luvun x n:nnelle juurelle käytetään merkintää $\sqrt[n]{x}$. Luku x on *juurrettava*, luku n on juuren *indeksi*.

Koska juurella kuitenkin on yleensä useita arvoja, kiinnitetään merkintä tarkoittamaan yhtä niistä. Tällöin puhutaan *juurifunktiosta* tai juuren *päähaarasta*. funktio

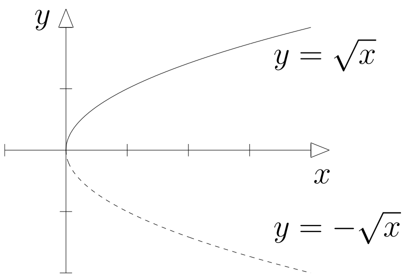
Jos juurrettava x on positiivinen, on kaikilla juurilla ainakin reaalinen ja positiivinen arvo. Merkintä $\sqrt[n]{x}$ tarkoittaa tätä. Sama asia voidaan ilmaista myös potenssifunktion avulla: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. potenssi (murto-)

Aina on myös $\sqrt[n]{0} = 0$. potenssifunktio

Esimerkiksi (reaalinen) *neliöjuurifunktio* $\sqrt{x}$ — lyhyemmin yleensä neliöjuuri — määritellään vain, kun x on reaalinen ja ≥ 0. Kahdesta mahdollisesta neliöjuuren arvosta valitaan positiivinen, jolloin esimerkiksi $\sqrt{16} = +4$. Seurauksena on kaikille reaaliluvuille a laskusääntö $\sqrt{a^2} = |a|$, koska a^2 on aina ≥ 0 ja juuri siis voidaan muodostaa, mutta a itse voi olla negatiivinenkin. reaaliluku

Neliöjuurella on myös *negatiivinen haara*, funktion ns. sivuhaara, jolloin funktion arvoksi valitaan negatiivinen vaihtoehto. Sivuhaaran mukaan laskien on reaaliluvun $x \geq 0$ neliöjuuri $-\sqrt{x}$.

Laskimien ja tietokoneohjelmien neliöjuurifunktiot toimivat ainakin numeerisia arvoja laskettaessa poikkeuksetta positiivisen haaran (päähaaran) mukaisesti. Lausekkeita käsiteltäessä asia ei kaikissa tietokoneohjelmissa ole yhtä selvä, vaan saattaa jäädä käyttäjän vastuulle.



Yleisesti: Jos x on reaalinen ja ≥ 0, tarkoittaa $\sqrt[n]{x}$ sitä n:ttä juurta, joka on reaalinen ja ≥ 0.

Jos n on pariton, tämä on juurifunktion ainoa (reaalinen) haara. Jos n on parillinen, juurifunktiolla on myös negatiivinen haara $-\sqrt[n]{x}$.

Esitiedot: potenssi
Katso myös: reaalifunktiot, kompleksiluvut

Juurifunktion määritelmän laajennus

Juurifunktion määritelmä voidaan pyrkiä jatkamaan myös tapaukseen, missä juurrettava on negatiivinen reaaliluku tai kompleksiluku. Jos juuren indeksi on pariton ja juurrettava negatiivinen, on juuren kaikkien arvojen joukossa negatiivinen reaaliluku. Tuntuisi luonnolliselta määritellä tämä juurifunktion arvoksi; siis esimerkiksi $\sqrt[3]{-8} = -2$.

reaaliluku
kompleksiluku
potenssi (kompleksinen)

Aina ei näin kuitenkaan tehdä, koska määrittely olisi epäjohdonmukainen laajennettaessa juurifunktiota kompleksisiin argumentteihin. Tällöin asetetaankin juuren päähaaran arvoksi se vaihtoehto, jonka napakulma on samanmerkkinen kuin juurrettavan napakulma ja mahdollisimman lähellä nollaa.

napakulma (kompleksiluvun)

Esimerkiksi luvun -8 kuutiojuurella on kolme arvoa: -2, $1+i\sqrt{3}$ ja $1-i\sqrt{3}$. Koska luvun -8 napakulma on π ja juurten napakulmat ovat π, $\pi/3$ ja $-\pi/3$, on näistä valittava keskimmäinen: $\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}$.

Samaan tapaan myös $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}(1 - i)$.

Esitiedot: summa ja tulo

Katso myös: potenssi, polynomien tekijöihin jako, polynomiyhtälöt, binomi- ja multinomikertoimet, reaalifunktiot

---

Polynomi

Yhden muuttujan — tässä x — *polynomiksi* kutsutaan lauseketta

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Muuttujasta x esiintyy siis vain ei-negatiivisia kokonaislukupotensseja. Luvut a_k ovat polynomin *kertoimet*. Jos ne ovat kaikki reaalisia, puhutaan *reaalikertoimisesta polynomista*; jos joukossa on myös imaginaarilukuja, polynomi on *kompleksikertoiminen*. (Reaalikertoiminen polynomi on siis kompleksikertoimisen erikoistapaus, ts. vaikka kaikki kertoimet olisivatkin reaalisia, voidaan polynomia ajatella kompleksikertoimisena.)

potenssi (kokonaisluku-)
reaaliluku
kompleksiluku

Muuttujan korkein esiintyvä potenssi on polynomin *asteluku*. Eo. polynomin asteluku on siis n, jos $a_n \neq 0$.

Yksinkertaisia esimerkkejä muuttujan x polynomeista ovat x^2+x+1, x^n-a^n, 3. Näiden asteluvut ovat 2, n ja 0.

Puhutaan myös *usean muuttujan polynomeista*. Tällaisia ovat esimerkiksi

$$x^n - y^n, \quad xy^4 + x^3y^2 + 2x^2 + 3x + y + 5 \quad \text{ja} \quad x^2y^3z^4 + y^5z^6 + z^7,$$

joissa muuttujia ovat x, y ja z.

Yhtä ainoata luonnollista tapaa järjestää usean muuttujan polynomin termit ei ole. Esimerkeistä keskimmäinen voidaan esittää mm. muodoissa

termi

$$xy^4 + x^3y^2 + y + (2x^2 + 3x + 5) \quad \text{ja} \quad y^2x^3 + 2x^2 + (y^4 + 3)x + (y + 5)$$

riippuen siitä kumman muuttujan mukaan potenssit ensisijaisesti järjestetään. Ensimmäinen esimerkki voidaan katsoa myös yhden muuttujan x polynomiksi, jos symbolin y katsotaan olevan vakio.

Polynomi, jossa on vain yksi termi, on *monomi*, esimerkiksi xyz. Kahden termin polynomi on *binomi*, kolmen termin *trinomi*; esimerkkejä ovat $2x + 19y^7$ ja $x^2 + x + 1$. Jos termejä on useampia, puhutaan *multinomeista*.

ESITIEDOT: summa ja tulo

KATSO MYÖS: potenssi, polynomien tekijöihin jako, polynomiyhtälöt, binomi- ja multinomikertoimet, reaalifunktiot

---

Binomikaava

Binomikaava antaa binomin $x+y$ potenssin kehitettynä:

potenssi (kokonaisluku-)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Lausekkeen kertoimia

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kutsutaan *binomikertoimiksi*; tässä $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ on n-kertoma. Binomikertoimet saadaan myös Pascalin kolmiosta.

binomikerroin

kertoma

Pascalin kolmio

Binomikaava antaa esimerkiksi

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\
(x-y)^6 &= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.
\end{aligned}$$

Viimeisessä tapauksessa lauseke on ensin ajateltava muotoon $(x+(-y))^6$.

Binomikaavan yleistyksenä on *multinomikaava*

multinomikaava

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=m} \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m},$$

joka antaa vastaavalla tavalla multinomin $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ potenssit kehitettyinä.

ESITIEDOT: summa ja tulo

KATSO MYÖS: potenssi, polynomien tekijöihin jako, polynomiyhtälöt, binomi- ja multinomikertoimet, reaalifunktiot

---

Polynomien jakolasku

Polynomien jakolasku voidaan tehdä jakokulmassa. Yleensä ei ole mielekästä jakaa alempiasteista polynomia korkeampiasteisella. Lähtökohtana on siis seuraava: Olkoon annettuna yhden muuttujan polynomit $p(x)$ ja $q(x)$, missä $p(x)$ on vähintään samaa astetta kuin $q(x)$. On etsittävä osamääräpolynomi $u(x)$ ja jakojäännöspolynomi $v(x)$ siten, että

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)},$$

ts. 'jakolaskun tulos on osamäärä plus jakojäännös jaettuna jakajalla'. Sama voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$p(x) = q(x)u(x) + v(x),$$

ts. 'jaettava on jakaja kertaa osamäärä plus jakojäännös'.

Jakolaskua yleensä jatketaan niin pitkälle, että jakojäännös on alhaisempaa astetta kuin jakaja.

Olkoon esimerkiksi $p(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 1$ ja $q(x) = x^2 + 1$. Jakolasku näyttää tällöin seuraavalta:

$$\begin{array}{r|l}
 & \phantom{x^4 - 3x^3 - {}} x^2 - 3x - 2 \\ \hline
x^2+1 & x^4 - 3x^3 - x^2 \phantom{{}-3x} - 1 \\
 & \underline{x^4 \phantom{{}-3x^3} + x^2} \\
 & -3x^3 - 2x^2 \phantom{{}-3x} - 1 \\
 & \underline{-3x^3 \phantom{{}-2x^2} - 3x} \\
 & -2x^2 + 3x - 1 \\
 & \underline{-2x^2 \phantom{{}+3x} - 2} \\
 & 3x + 1
\end{array}$$

Osamäärä on siis $u(x) = x^2 - 3x - 2$ ja jakojäännös $v(x) = 3x + 1$.

ESITIEDOT: summa ja tulo

KATSO MYÖS: potenssi, polynomien tekijöihin jako, polynomiyhtälöt, binomi- ja multinomikertoimet, reaalifunktiot

---

Polynomifunktio

Reaalialueen polynomifunktion

funktio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kuvaajalla on eräitä sille luonteenomaisia piirteitä.

Jos polynomi on ensimmäistä astetta, sen kuvaaja on suora. Toisen asteen polynomin kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, jos toisen asteen termin kerroin on positiivinen, ja alaspäin, jos se on negatiivinen. Kolmannen asteen polynomin kuvaajaa kutsutaan usein *kuutioparaabeliksi.*

suora
suora (yhtälö)
paraabeli (kartioleikkauksena)
paraabeli (xy-koordinaateissa)

Yleisesti polynomifunktion kuvaajalla on seuraavat ominaisuudet:

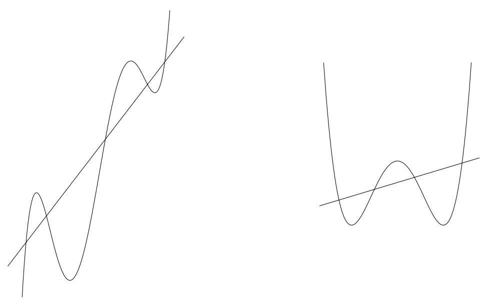
Jos polynomi on parillista astetta ja korkeimman asteen termin kerroin a_n on positiivinen, käyrä katoaa äärettömyyteen positiivisen y-akselin suunnassa, kun argumentti x etääntyy origosta riittävän pitkälle; raja-arvojen avulla ilmaistuna: $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$. Jos a_n on negatiivinen, on vastaavasti $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = -\infty$.

raja-arvo (funktion)

Jos polynomi on paritonta astetta ja $a_n > 0$, argumentin x kasvaessa kuvaaja tulee negatiivisen y-akselin suunnasta ja jollakin tavoin heilahdeltuaan katoaa positiivisen y-akselin suuntaan: $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Jos $a_n < 0$, raja-arvot kääntyvät toisinpäin. Kummassakin tapauksessa funktio saa kaikki reaaliarvot.

Funktion kuvaaja mutkittelee äärettömyyteen menojen välissä — jonkinlaisella keskialueella — siten, että suora voi leikata sitä enintään asteluvun osoittamassa määrässä pisteitä.

Viidennen ja neljännen asteen polynomien kuvaajat:



ESITIEDOT: polynomit, reaaliluvut, kompleksiluvut
KATSO MYÖS: polynomiyhtälöt

Polynomien alkeellinen tekijöihin jako

Polynomien tekijöihin jako on usein tarvittava apukeino. Tärkeitä peruskaavoja ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y), \\ x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned}$$

sekä parittomilla arvoilla n

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Lisäksi polynomien tekijöihin jaossa voidaan käyttää binomikaavaa (Pascalin kolmiota) tai multinomikaavaa käänteiseen suuntaan.

binomikaava
binomikaava
Pascalin kolmio
multinomikaava
multinomikaava

Polynomin tekijöihin jakoa tarvitaan usein lausekkeiden sieventämisessä. Tällöin eo. kaavoja joudutaan käyttämään molempiin suuntiin. Sieventämisen tavoite ei yleensä ole itsestään selvä, vaan se riippuu yhteydestä: mitä lausekkeelle on seuraavaksi tarkoitus tehdä. Esimerkiksi ei ole selvää, kumpaa seuraavista muodoista on pidettävä sievempänä:

$$\frac{1+x^{11}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10}.$$

Esitiedot: polynomit, reaaliluvut, kompleksiluvut
Katso myös: polynomiyhtälöt

Reaali- ja kompleksikertoiminen tekijöihin jako

Kysymys polynomien tekijöihin jaosta ei ole aivan yksinkertainen. Tulos nimittäin riippuu siitä, millaiset luvut sallitaan tekijöiden kertoimiksi.

Jos annettuna on kokonaislukukertoiminen polynomi, on yleensä luonnollista (tarvittaessa) pyrkiä jakamaan se kokonaislukukertoimisiin tekijöihin. Aina tämä ei tietenkään ole mahdollista; esimerkkinä on vaikkapa toisen asteen polynomi $x^2 - 2x - 1$. Jos kuitenkin sallitaan, että kertoimet saavat olla mitä tahansa reaalilukuja, tekijöihin jako onnistuu: reaaliluku

$$x^2 - 2x - 1 = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})].$$

Reaalilukujen salliminenkaan ei aina riitä. Polynomia $x^2 + 1$ ei voida reaalialueella jakaa tekijöihin, mutta kompleksialueella kyllä: kompleksiluku

$$(x + i)(x - i).$$

Reaalistenkaan tekijöiden löytäminen ei välttämättä ole yksinkertaista. Esimerkiksi:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Ensimmäistä astetta oleviin reaalisiin tekijöihin ei tässä päästä; kompleksiset kyllä ovat olemassa.

ESITIEDOT: polynomit, reaaliluvut, kompleksiluvut

KATSO MYÖS: polynomiyhtälöt

Tekijöihin jako polynomin nollakohtien avulla

Kysymys yhden muuttujan polynomin tekijöihin jaosta voidaan ratkaista polynomiyhtälöiden teorian avulla. Jos nimittäin

yhtälö (polynomi-)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

on astetta n oleva polynomi, jonka nollakohdat, so. polynomiyhtälön $p(x) = 0$ ratkaisut ovat $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, voidaan kirjoittaa

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

jolloin polynomi on tullut jaetuksi ensimmäistä astetta oleviin tekijöihin. Menettely perustuu ns. algebran peruslauseeseen.

algebran peruslause

Jos kaikki nollakohdat ovat reaalisia, tekijöihin jako onnistuu reaalialueella; jos joukossa on kompleksilukuja, jako on mahdollinen vain kompleksialueella.

reaaliluku
kompleksiluku

Esimerkiksi: Toisen asteen yhtälön $x^2 - 2x - 1 = 0$ juuret ovat $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ ja $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Nämä ovat siis polynomin $x^2 - 2x - 1$ nollakohdat ja tekijöihin jaoksi saadaan

yhtälö (toisen asteen)

$$x^2 - 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})].$$

Kuudennen asteen polynomin $x^6 + 1$ kaikki nollakohdat ovat

$$\begin{array}{lll} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, & x_2 = i, & x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, & x_5 = -i, & x_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \end{array}$$

Tekijöihin jako kompleksialueella on tällöin

$$x^6 + 1 = (x - i)(x + i)(x + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2})(x + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2})(x - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2})(x - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}),$$

mistä päästään reaalialueen tekijöihin kertomalla aina kaksi perättäistä tekijää keskenään:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Menettely pätee kaikille reaalikertoimisille polynomeille, koska näiden kompleksiset nollakohdat muodostavat aina liittolukupareja.

liittoluku

Polynomin nollakohdat ja kertoimet

Suorittamalla kertolaskut polynomin tekijäesityksessä päädytään toisen ja kolmannen asteen polynomien tapauksessa seuraavaan, kun oletetaan, että korkeimman potenssin kerroin on $= 1$:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2; \\ p_3(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Vastaava lasku voidaan suorittaa korkeammankin asteen polynomeille.

Tällöin päädytään seuraaviin tuloksiin (missä edellytyksenä siis on, että korkeimman potenssin kerroin on $= 1$):

- Polynomin toiseksi korkeinta astetta olevan potenssin kerroin on nollakohtien summan vastaluku.
- Polynomin vakiotermi on nollakohtien tulo sellaisenaan, jos polynomi on parillista astetta, ja tulon vastaluku, jos polynomi on paritonta astetta.

Muillekin kertoimille saadaan vastaavantyyppiset lausekkeet, mutta nämä eivät ole aivan yhtä yksinkertaisia. Kaikilla lausekkeilla on symmetriaominaisuus: Jos mitkä tahansa juuret vaihdetaan keskenään, lauseke ei muutu.

Esitiedot:

Katso myös: polynomiyhtälöt, juuriyhtälöt, itseisarvoyhtälöt, transkendenttiyhtälöt, trigonometrian kaavat, logaritmifunktio, Newtonin iteraatio, yhtälöryhmät

---

Yhtälö

Yhtälöksi kutsutaan kahden lausekkeen merkittyä yhtäsuuruutta, joka sisältää vähintään yhden symbolin (tuntemattoman). Tämän arvo pyritään määräämään siten, että yhtälö toteutuu, so. lausekkeet ovat yhtä suuret. Yhtälöllä voi olla yksi tai useampia *ratkaisuja* — *juuria* — tai mahdollisesti ei lainkaan. Ratkaisujen lukumäärään vaikuttaa myös se, mistä lukujoukosta niitä etsitään. Tavallisinta on etsiä reaalisia ratkaisuja, mutta niitä voidaan etsiä myös kompleksilukujoukosta, luonnollisten lukujen joukosta tai jostakin näiden osajoukosta.

Esimerkkejä yhtälöistä ovat seuraavat:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7x^2 + 8 = 0, & \text{b) } \sin x = e^{-x}, \\ \text{c) } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0, & \text{d) } x^2 + y^2 = z^2. \end{array}$$

Kohtien a ja b yhtälöillä on yksi tuntematon, x. Edellisellä yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, kompleksisia on kaksi; jälkimmäisellä on äärettömän monta reaalista ratkaisua.

Kohdan c yhtälöllä on reaalialueella täsmälleen yksi ratkaisu kahdesta tuntemattomasta x, y huolimatta: $x = -1$, $y = 2$. Yhtälö voidaan nimittäin saattaa muotoon $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$. Kompleksialueella ratkaisuja on äärettömän paljon: toinen tuntematon voidaan valita vapaasti ja sen jälkeen ratkaista toinen.

Kohdan d yhtälössä on kolme tuntematonta: x, y, z. Kompleksisia ratkaisuja on ilmeisestikin äärettömän paljon; itse asiassa mitkä tahansa kaksi tuntematonta voidaan valita vapaasti ja tämän jälkeen ratkaista kolmas. Reaalisia ratkaisuja on myös äärettömän paljon, mutta tällöin ei mitä tahansa kahta tuntematonta välttämättä voida valita aivan vapaasti. Mielenkiintoinen on tilanne, missä haetaan vain kokonaislukuratkaisuja; näitäkin on äärettömän paljon, ns. Pythagoraan luvut.

Pythagoras

Pythagoraan lause

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: polynomiyhtälöt, juuriyhtälöt, itseisarvoyhtälöt, transkendenttiyhtälöt, trigonometrian kaavat, logaritmifunktio, Newtonin iteraatio, yhtälöryhmät

---

Yhtälöiden sieventäminen

Yhtälöiden sieventäminen tapahtuu siirtämällä termejä puolelta toiselle (jolloin termin merkki muuttuu) ja kertomalla tai jakamalla yhtälön molemmat puolet samalla luvulla tai lausekkeella. Jos lauseke on $= 0$ joillakin tuntemattoman arvoilla, näiden merkitys yhtälön ratkaisun kannalta on tutkittava erikseen.

Yhtälön molempiin puoliin voidaan kohdistaa myös sama funktio ja saadaan uusi yhtälö, jolla on ratkaisuina ainakin samat tuntemattoman arvot kuin alkuperäisellä yhtälöllä. Jos siis x_0 toteuttaa yhtälön $f(x) = g(x)$, se toteuttaa myös yhtälön $h(f(x)) = h(g(x))$. Juuria voi kuitenkin tulla lisää. Esimerkiksi yhtälön $\sqrt{x} = x-2$ ainoa juuri on $x = 4$, mutta jos yhtälön kumpikin puoli korotetaan neliöön (so. niihin kohdistetaan funktio $h(u) = u^2$), saadaan $x = x^2 - 4x + 4$, jolla on kaksijuurta, $x = 4$ ja $x = 1$. Samoin: Yhtälön $x = -x$ ainoa ratkaisu on $x = 0$, mutta yhtälön $\cos x = \cos(-x)$ ratkaisuksi kelpaa mikä luku tahansa! kosini

Jos funktio h on aidosti kasvava (tai aidosti vähenevä), ovat yhtälöt $f(x) = g(x)$ ja $h(f(x)) = h(g(x))$ yhtäpitäviä, ts. niillä on samat juuret. Tämä seuraa siitä, että tällöin on myös olemassa käänteisfunktio h^{-1} ja toiseen suuntaan siirtyminen on itse asiassa tämän kohdistamista jälkimmäisen yhtälön kumpaankin puoleen. Siten esimerkiksi yhtälöillä $\ln(x^2+1) = \ln(x^2+2x+2)$ ja $x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$ on samat juuret.

kasvava (funktio)
kasvava (funktio)
vähenevä (funktio)
vähenevä (funktio)
käänteisfunktio
käänteisfunktio
logaritmifunktio

Esitiedot:

Katso myös: polynomiyhtälöt, juuriyhtälöt, itseisarvoyhtälöt, transkendenttiyhtälöt, trigonometrian kaavat, logaritmifunktio, Newtonin iteraatio, yhtälöryhmät

---

Eri tyyppisiä yhtälöitä

Jos yhtälö voidaan saattaa muotoon $p(x) = 0$, missä $p(x)$ on polynomi, puhutaan *polynomiyhtälöstä*.

Jos yhtälössä lisäksi esiintyy juurilausekkeita, kyseessä on *juuriyhtälö*.

Jos yhtälössä esiintyy muitakin funktioita, esimerkiksi trigonometrisia funktioita, eksponentti- tai logaritmifunktioita, kyseessä on *transkendenttiyhtälö*.

Itseisarvoyhtälöistä puhutaan, jos yhtälössä esiintyy itseisarvoja.

Yleispätevää menettelyä minkä tahansa yhtälön ratkaisemiseen ei ole. Muotoon $f(x) = 0$ kirjoitettua reaalista yhtälöä voidaan aina tutkia tarkastelemalla funktion $f(x)$ käyttäytymistä: piirtämällä sen kuvaaja, tutkimalla funktion merkin muuttumista, jne. Tarkkoja ratkaisuja ei tällä tavoin yleensä saada, mutta usein on mahdollista saada käsitys esimerkiksi niiden lukumäärästä.

Edellytyksenä graafisille tarkasteluille yleensä on, että funktio f on reaaliarvoinen ja etsitään reaalista juurta x. Kompleksisten juurten havainnollistaminen edellyttäisi useimmiten useampiulotteista kuvittelukykyä, samoin graafisten esitysten tekeminen usean tuntemattoman yhtälöistä. Kolmiulotteinen havainnollistaminen on vielä helppoa, mutta ulotteisuuden kasvaessa joudutaan vaikeuksiin.

Menetelmät yhtälöiden ratkaisemiseksi voidaan jakaa *algebrallisiin*, joilla pyritään tarkkaan ratkaisuun, *numeerisiin*, joissa tavoitteena on konstruoida ratkaisua kohden suppeneva lukujono, ja *graafisiin*, joissa joudutaan tyytymään melko karkeisiin likiarvoihin.

Ajatukseltaan yksinkertaisin numeerinen menettely on Newtonin iteraatio.

polynomi
yhtälö (polynomi-)
juuri (murtopotenssi)
yhtälö (juuri-)
trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
eksponenttifunktio
logaritmifunktio
yhtälö (transkendentti-)
yhtälö (itseisarvo-)
itseisarvo (reaaliluvun)
itseisarvo (kompleksiluvun)
kuvaaja
suppeneminen (lukujonon)
lukujono
Newtonin iteraatio

ESITIEDOT: yhtälöt, polynomit, juuret

KATSO MYÖS: Newtonin iteraatio, polynomien tekijöihin jako, kompleksiluvut

---

Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt

Polynomiyhtälöt jaotellaan polynomin asteluvun mukaan. yhtälö

Ensimmäisen asteen polynomiyhtälö, lyhyemmin *ensimmäisen asteen yhtälö* on muotoa $ax + b = 0$, missä $a \neq 0$. Ratkaisuja on yksi: $x = -b/a$. polynomi asteluku

Toisen asteen yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$. Yhtälö ratkaistaan yleensä ulkoa opituilla ratkaisukaavoilla: neliöjuuri

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos yhtälö jaetaan kertoimella a, se saa periaatteessa muodon $x^2+px+q = 0$. Ratkaisukaavat esitetään usein myös tätä tapausta varten:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Vastaten ratkaisukaavojen $\pm$-merkkiä, juuria on yleensä kaksi. Näiden luonteen ratkaisee *diskriminantti*, so. neliöjuurimerkin alla oleva lauseke $D = b^2 - 4ac$.

Jos yhtälö on reaalikertoiminen, saadaan seuraavat tapaukset: Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalista juurta. Jos $D = 0$, sanotaan juurien yhtyvän, ts. on vain yksi reaalijuuri $x = -b/(2a)$. Jos $D < 0$, juurina on kompleksinen liittolukupari. kompleksiluku liittoluku

Toisen asteen yhtälö voi olla myös kompleksikertoiminen, so. kertoimet a, b ja c tai jotkut niistä voivat olla kompleksilukuja. Samat ratkaisukaavat ovat tällöinkin käytettävissä, mutta neliöjuurimerkin alle saadaan yleensä kompleksiluku ja juuren laskeminen edellyttää laajempaa perehtyneisyyttä kompleksilukuihin.

ESITIEDOT: yhtälöt, polynomit, juuret
KATSO MYÖS: Newtonin iteraatio, polynomien tekijöihin jako, kompleksiluvut

---

Korkeampien asteiden yhtälöt

Toista astetta korkeampien asteiden yhtälöiden ratkaiseminen on oleellisesti vaikeampaa. *Kolmannen ja neljännen asteen yhtälölle* on olemassa ratkaisukaavat ns. *Cardanon kaavat* (italialaisen Geronimo Cardanon julkaisemat vuonna 1545, mutta eivät hänen itsensä keksimät; kolmannen asteen kaavan on jo aiemmin tuntenut ainakin Niccolo Tartaglia, neljännen asteen on löytänyt Ludovico Ferrari). Nämä ovat kuitenkin siinä määrin mutkikkaat, että niitä harvoin todella käytetään. asteluku Cardano Tartaglia

Viidennen ja sitä korkeampien asteiden yhtälöille ei yleisiä ratkaisukaavoja juurilausekkeiden avulla esitettyinä ole. Tuloksen ovat toisistaan riippumatta todistaneet norjalainen matemaatikko Niels Henrik Abel (1824) ja italialainen fyysikko Paolo Ruffini (1813). Abel

Korkea-asteiset polynomiyhtälöt ratkaistaankin useimmiten numeerisesti *Newtonin iteraatiolla* tai jollakin sen muunnelmalla, jolloin täytyy tuntea approksimaatio juurelle ja laskennan tuloksena saadaan vain tämä juuri. Muunkintyyppisiä numeerisia menetelmiä on olemassa. Newtonin iteraatio saattaa jo kolmannen asteen tapauksessa olla Cardanon kaavoja tehokkaampi. Newtonin iteraatio

ESITIEDOT: yhtälöt, polynomit, juuret

KATSO MYÖS: Newtonin iteraatio, polynomien tekijöihin jako, kompleksiluvut

Algebran peruslause

Algebran peruslauseen mukaan jokaisella reaali- tai kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä (jonka asteluku on ≥ 1) on ainakin yksi (reaalinen tai kompleksinen) juuri. Tuloksen todisti matemaatikkojen kuninkaaksi kutsuttu saksalainen Carl Friedrich Gauss väitöskirjassaan 1799. asteluku Gauss

Lauseen seurauksena saadaan suhteellisen helposti astetta n olevalle polynomille $p(x)$ esitys polynomi

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

missä a_n on polynomin korkeimman asteen termin kerroin. Reaali- tai kompleksiluvut x_1, x_2, ..., x_n ovat ilmeisestikin polynomin nollakohdat, ts. polynomiyhtälön $p(x) = 0$ juuret. Näiden ei kuitenkaan tarvitse olla eri suuria. Eo. tekijöihinjaon mielessä astetta n olevalla polynomilla on siis aina n juurta, mutta jotkut näistä voivat olla yhtä suuria. kompleksiluku

Jos polynomi on reaalikertoiminen ja paritonta astetta, ainakin yksi juurista on reaalinen. Reaalikertoimisella polynomilla kompleksijuuria on parillinen määrä; nämä muodostavat kompleksiset liittolukuparit. Vrt. polynomin tekijöihin jakoon. liittoluku tekijöihin jako (luvun)

Polynomin tekijäesitys antaa mahdollisuuden polynomiyhtälön redusointiin alhaisempaan astelukuun, jos yksi juuri pystytään jotenkin löytämään: tekijöihin jako (polynomin)

Jos x_1 on astetta n olevan polynomiyhtälön $p(x) = 0$ juuri, voidaan suorittaa jakolasku $p(x)/(x - x_1)$, joka menee tasan. Osamäärä on polynomi, jonka asteluku on $n-1$ ja jolla on samat nollakohdat kuin alkuperäisellä polynomilla $p(x)$ lukuunottamatta jo löydettyä nollakohtaa x_1. Yhden juuren löytäminen yksinkertaistaa siis muiden etsimistä. tekijöihin jako (polynomin) tekijöihin jako (polynomin) jakolasku (polynomien)

Esimerkiksi polynomiyhtälöstä $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ nähdään melko helposti, että yhtenä juurena on $x_1 = 1$. Jaettaessa polynomi tekijällä $x - 1$ menee jako tasan, jolloin voidaan kirjoittaa

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) = 0.$$

Polynomiyhtälön muiden juurten etsimistä voidaan siis jatkaa tarkastelemalla yhtälöä $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Menettely edellyttää yhden juuren arvaamista. Tällöin on usein apua tiedosta, että jos polynomin korkeimman asteen termin kerroin on $= 1$, niin vakiotermi on juurten tulo tai sen vastaluku. polynomi (nollakohdat ja kertoimet)

Esitiedot: yhtälöt, juuret
Katso myös: polynomiyhtälöt

Juuriyhtälön ratkaiseminen

Juuriyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka sisältää juurilausekkeita, useimmiten neliöjuuria. Luonnollista on rajoittaa tarkastelu reaalialueelle, ts. yhtälöiden kertoimet ovat reaalisia ja etsitään vain reaalisia ratkaisuja.

yhtälö
neliöjuuri

Juuriyhtälön ratkaisemisessa pyrkimyksenä on yleensä korottaa yhtälön molemmat puolet potenssiin siten, että juuret katoavat. Välttämättä tämä ei onnistu yhdessä vaiheessa, vaan ensimmäisen korotuksen ja tuloksen sieventämisen jälkeen voidaan tarvita uusia.

potenssi (kokonaisluku-)
sieventäminen (yhtälön)

Yhtälön puolittainen potenssiin korottaminen johtaa usein uuteen yhtälöön, jolla on muitakin juuria kuin alkuperäisellä. Tämän johdosta on välttämätöntä lopuksi tarkistaa, toteuttavatko saadut tuntemattoman arvot todella myös alkuperäisen yhtälön.

Esimerkki juuriyhtälön ratkaisusta

Esimerkkinä olkoon yhtälön

$$\sqrt{x} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$

reaalisten juurten ratkaiseminen. Puolittainen neliöön korotus antaa

$$x = x + 1 + x + 2 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)}.$$

Sieventämällä siten, että jäljellä oleva neliöjuuri jää yksinään toiselle puolelle, saadaan

sieventäminen (yhtälön)

neliöjuuri

$$-x - 3 = 2\sqrt{(x+1)(x+2)}.$$

Uuden neliöön korotuksen jälkeen ei juurta enää esiinny:

$$x^2 + 9 + 6x = 4(x+1)(x+2)$$

ja on päädytty toisen asteen yhtälöön

yhtälö (toisen asteen)

$$3x^2 + 6x - 1 = 0,$$

jonka juuret ovat $x = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Likiarvot ovat $x_1 \approx 0.15470$ ja $x_2 \approx -2.15470$.

Näistä jälkimmäinen ei kelpaa, koska ratkaisun tulee olla ≥ 0; alkuperäisen yhtälön vasen puoli ei ole muuten reaalinen. Edellinen antaa yhtälön termeille likiarvot

$$\sqrt{x} \approx 0.39332, \quad \sqrt{x+1} \approx 1.07457, \quad \sqrt{x+2} \approx 1.46789,$$

joten on ilmeistä, että myöskään x_1 ei ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Yhtälöllä ei ole siten ratkaisuja lainkaan, mikä olisi ollut melko helposti nähtävissä jo alkuperäisestä yhtälöstäkin: Koska $x < x + 1$, on myös $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ ja sitäkin suuremmalla syyllä $\sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$. Sama tulos olisi ollut helposti nähtävissä piirtämällä yhtälön kummankin puolen kuvaajat.

kuvaaja

Saaduille likiarvoille pätee $0.39332 = -1.07457 + 1.46789$, jolloin x_1 on yhtälön $\sqrt{x} = -\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ ratkaisu. Tämä on luonnollistakin, koska tästä yhtälöstä päädytään neliöön korotusten jälkeen juuri samaan toisen asteen yhtälöön kuin edellä.

Esitiedot: yhtälöt
Katso myös: polynomiyhtälöt

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen

Itseisarvoyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka sisältää reaalilukujen itseisarvolausekkeita. Tarkastelu rajoittuu siis reaalisiin yhtälöihin ja näiden reaalisten ratkaisujen etsimiseen. yhtälö itseisarvo (reaaliluvun)

Lähestymistapoja on periaatteessa kaksi:

1) Reaalilukujoukko, josta ratkaisuja etsitään, jaetaan osiin sen mukaisesti, että jokaisesta itseisarvolausekkeesta kussakin osa-alueessa tiedetään merkki. Tällöin saadaan itseisarvomerkit poistetuiksi ja joudutaan ratkaisemaan tavallinen yhtälö erikseen jokaisessa osa-alueessa. Esimerkiksi jos yhtälössä esiintyy lauseke $|x+3|$, tarvitaan kaksi osa-aluetta, joissa itseisarvot poistuvat seuraavasti:

$$\begin{aligned} x \geq -3 &: \quad |x+3| = x+3, \\ x \leq -3 &: \quad |x+3| = -(x+3). \end{aligned}$$

2) Korotetaan yhtälö sopivasti toiseen potenssiin tavoitteena saada itseisarvolausekkeet poistetuiksi: onhan esimerkiksi $|x+3|^2 = (x+3)^2$. Uudella yhtälöllä on ainakin samat juuret kuin vanhalla, mutta sillä saattaa olla muitakin. Ks. yhtälöiden sieventäminen. potenssi (kokonaisluku-) sieventäminen (yhtälön)

Kummallakin menettelyllä on haittansa. Edellisessä joudutaan ratkaisemaan useita yhtälöitä, yksi jokaista osa-aluetta kohden. Lisäksi osa-alueiden määrittäminen johtaa ainakin periaatteessa epäyhtälöiden ratkaisemiseen (esimerkissä $x+3>0$). Jälkimmäisessä neliöön korottaminen johtaa alkuperäistä korkeampiasteiseen yhtälöön, jonka ratkaiseminen saattaa olla hankalaa. Lisäksi on tutkittava, ovatko saadut juuret todella myös alkuperäisen yhtälön juuria. epäyhtälö

Esitiedot: yhtälöt

Katso myös: polynomiyhtälöt

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen: tapa 1

Esimerkkinä ratkaistakoon yhtälö $|x+3| = |x^2-1| + 2x + 2$.

Tarkasteltavien osa-alueiden rajoiksi saadaan kohdat, missä lausekkeet $x+3$ ja x^2-1 vaihtavat merkkiään. Nämä ovat $x=-3$, $x=-1$ ja $x=1$. Osa-alueet, yhtälön muoto kussakin alueessa ja ratkaisut ko. alueessa ovat seuraavat:

$$
\begin{array}{lll}
x \leq -3 \ : & -x-3 = x^2-1+2x+2, & \text{ei ratkaisuja,} \\
-3 \leq x \leq -1 \ : & x+3 = x^2-1+2x+2, & x=-2, \\
-1 \leq x \leq 1 \ : & x+3 = -x^2+1+2x+2, & x=0,\ x=1, \\
x \geq 1 \ : & x+3 = x^2-1+2x+2, & x=1.
\end{array}
$$

Ratkaisuja löytyy siis kolme: $x=-2$, $x=0$ ja $x=1$.

ESITIEDOT: yhtälöt
KATSO MYÖS: polynomiyhtälöt

Itseisarvoyhtälön ratkaiseminen: tapa 2

Saman yhtälön $|x+3| = |x^2-1|+2x+2$ ratkaiseminen voidaan tehdä myös seuraavasti:

Korottamalla yhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$x^2 + 6x + 9 = (x^2-1)^2 + (2x+2)^2 + 2(2x+2)|x^2-1|,$$

mikä voidaan sieventää muotoon

sieventäminen (yhtälön)

$$-x^4 - x^2 - 2x + 4 = 2(2x+2)|x^2-1|.$$

Jotta itseisarvomerkit saataisiin poistetuiksi, on korotettava uudelleen neliöön, jolloin sievennysten jälkeen saadaan kahdeksannen asteen yhtälö

$$x^8 - 14x^6 - 28x^5 + 9x^4 + 68x^3 + 12x^2 - 48x = 0.$$

Tällä on juuret (ks. polynomiyhtälöt)

yhtälö (polynomi-)

$$x_1 = -2,\; x_2 = 0,\; x_{34} = 1,\; x_{56} = \tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33}),\; x_{78} = \tfrac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{7}).$$

Kaksi viimeistä, x_7, x_8, eivät kompleksisina tule kysymykseen ja juuret x_5, x_6 eivät toteuta alkuperäistä yhtälöä, kuten sijoittamalla voidaan todeta. Ratkaisut ovat siis samat kuin tavan 1 antamat: $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$.

ESITIEDOT: yhtälöt
KATSO MYÖS: polynomiyhtälöt

Graafinen esitys itseisarvoyhtälön ratkaisemisessa

Esimerkkiyhtälön ratkaisua helpottaa oleellisesti kuvaajan piirtäminen ennen laskuja esimerkiksi graafista laskinta tai jotakin ohjelmistoa käyttäen. Kun kaikki termit siirretään yhtäläisyysmerkin vasemmalle puolelle on tarkasteltavana funktio funktio

$$f(x) = |x+3| - |x^2-1| - 2x - 2.$$

Lukija piirtäköön tämän ja neliöön korotuksilla saadun kahdeksannen asteen polynomin

$$p(x) = x^8 - 14x^6 - 28x^5 + 9x^4 + 68x^3 + 12x^2 - 48x$$

kuvaajat! kuvaaja

Esitiedot: yhtälöt, trigonometriset funktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio

Katso myös: arcus-funktiot, Newtonin iteraatio

Transkendenttiyhtälöt

Transkendenttiyhtälöt ovat yhtälöitä, jotka sisältävät muitakin funktioita kuin potensseja (polynomeja, juuria) ja itseisarvoja. Tyypillisesti transkendenttiyhtälöissä esiintyy trigonometrisia funktioita, näiden käänteisfunktioita (arcus-funktioita), eksponentti- ja logaritmifunktioita.

Yleistä menettelyä transkendenttiyhtälöiden ratkaisemiseen ei ole. Trigonometrisia kaavoja käyttäen voidaan usein ratkaista trigonometrisia yhtälöitä. Vastaavasti logaritmifunktiota ja eksponenttifunktiota koskevista kaavoista saattaa olla hyötyä, jos yhtälö sisältää näitä funktioita.

Erilaisia menettelyjä voidaan käyttää yhtälöiden sieventämiseen. Usein tällaiset keinot eivät kuitenkaan auta, vaan ainoaksi mahdollisuudeksi jää numeeristen menetelmien, esim. *Newtonin iteraation* käyttäminen. Esimerkiksi yhtälö $\sin x = e^{-x}$ on tällainen.

Graafisen esityksen, esimerkiksi muotoon $f(x) = 0$ kirjoitetussa yhtälössä kuvaajan $y = f(x)$ piirtäminen usein helpottaa tilanteen hahmottamista.

yhtälö
trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
käänteisfunktio
käänteisfunktio
arcus-funktio
eksponenttifunktio
logaritmifunktio
yhtälö (trigonometrinen)
yhtälö (eksponentti-)
yhtälö (logaritmi-)
sieventäminen (yhtälön)
Newtonin iteraatio
kuvaaja

ESITIEDOT: yhtälöt
KATSO MYÖS:

Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmässä on useita yhtälöitä ja yleensä myös useita tuntemattomia. Tavoitteena on löytää tuntemattomille sellaiset arvot, että kaikki yhtälöt toteutuvat samanaikaisesti. Useimmiten tuntemattomia on yhtä paljon kuin yhtälöitä. Välttämätöntä tämä ei kuitenkaan ole. yhtälö

Ryhmälle voidaan etsiä ratkaisuja erilaisista lukujoukoista: reaalisia ratkaisuja, kaikkia kompleksisia ratkaisuja tai ratkaisuja jostakin rajoitetummasta lukujoukosta. Vrt. yhtälöön.

Esimerkkejä yhtälöryhmistä ovat seuraavat, missä tuntemattomia on merkitty x, y, z:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x+3y=17 \\ 5x+2y=37 \end{cases} ; \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x+y+2z=-1 \\ -x+y=1 \\ 3x-y+2z=-3 \end{cases} ;$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ e^x+\sin y=1 \end{cases} ; \qquad \text{d)}\ \begin{cases} x^2+y^2-2z=0 \\ x+y-z=1 \end{cases} .$$

Kohdan a yhtälöryhmällä on yksi ainoa ratkaisu, $x=7$, $y=1$.

Kohdassa b ratkaisuja on äärettömän monta, mutta mikä tahansa lukukolmikko ei kuitenkaan ole ratkaisu; kysymykseen tulevat muotoa $x=-1-t$, $y=-t$, $z=t$ olevat luvut, missä t voidaan valita vapaasti. Jos etsitään reaalisia ratkaisuja, on luonnollisesti t valittava reaaliseksi; kompleksisten ratkaisujen tapauksessa t voi olla mikä tahansa kompleksiluku. kompleksiluku

Kohdassa c reaalisia ratkaisuja on kaksi; näiden likiarvot ovat $x=-0.808901$, $y=0.587945$ ja $x=0.553738$, $y=-0.832691$.

Kohdassa d on vain yksi reaalinen ratkaisu huolimatta siitä, että yhtälöitä (ehtoja) on vähemmän kuin tuntemattomia: $x=y=z=1$.

Kaksi ensimmäistä esimerkkiä ovat *lineaarisia yhtälöryhmiä*. Tämä ilmenee siten, että yhtälöt ovat ensimmäisen asteen tuntemattomien suhteen, ts. tuntemattomat esiintyvät vain ensimmäisessä potenssissa eivätkä kerrottuina keskenään. Kolmas ja neljäs esimerkki ovat *epälineaarisia yhtälöryhmiä.* asteluku polynomi potenssi (kokonaisluku-)

ESITIEDOT: yhtälöt
KATSO MYÖS:

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yksinkertaisin tapa yrittää ratkaista yhtälöryhmä on ratkaista ensin jokin yhtälöistä yhden tuntemattoman suhteen, jolloin tämä tulee lausutuksi muiden tuntemattomien avulla, ja sijoittaa tulos muihin yhtälöihin. Tällöin yksi tuntemattomista tulee eliminoiduksi ja samalla yhtälöiden määrä vähenee yhdellä. Tämän jälkeen eliminoidaan samalla tavoin toinen tuntematon. Menettelyä jatketaan, kunnes jäljellä on vain yksi yhtälö.

Jos viimeisessä yhtälössä on jäljellä vain yksi tuntematon, on päädytty yhden yhtälön tapaukseen; ks. yhtälöt. Jos jäljellä on useampia tuntemattomia, on yhtälöä tutkittava lähemmin jollakin sopivalla tavalla; usein — mutta ei aina — ratkaisuja on tällöin äärettömän paljon.

yhtälö

Edempänä olevat esimerkit havainnollistavat menettelyä.

Esitetty menettely ei toimi, jos jossakin vaiheessa ei jäljellä olevassa ryhmässä ole ainoatakaan sellaista yhtälöä, että jokin tuntematon saataisiin ratkaistuksi muiden avulla. Näin voi aivan hyvin käydä esimerkiksi riittävän korkea-asteisten polynomiyhtälöiden tai transkendenttiyhtälöiden tapauksessa. Mitään yleispätevää menettelyä yhtälöryhmän ratkaisemiseen ei olekaan olemassa.

yhtälö (polynomi-)

yhtälö (transkendentti-)

Toisaalta edellä kuvattu eliminointimenettely voidaan usein järjestää laskennan kannalta tehokkaampaankin muotoon. Tällainen järjestely on esimerkiksi lineaarisiin yhtälöryhmiin soveltuva *Gaussin algoritmi*, jota ei tässä lähemmin käsitellä.

Gauss

Vaikka tuntemattomien eliminointi ei onnistuisikaan, voidaan yhtälöryhmä silti pyrkiä ratkaisemaan numeerisesti, jolloin täytyy tuntea lähtöapproksimaatio kaikille tutntemattomille ja kerralla saadaan vain yksi ratkaisu (so. yhdet arvot tuntemattomille) samaan tapaan kuin yhden yhtälön Newtonin iteraatiossa. Menettelyä kutsutaan tällöinkin Newtonin iteraatioksi.

Newtonin iteraatio

Esimerkki 1 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 5x + 2y = 37 \end{cases}$$

on lineaarinen. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = \frac{1}{2}(17 - 3y)$ ja kun tämä sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön, se saa muodon

$$\tfrac{5}{2}(17 - 3y) + 2y = 37 \quad \text{eli} \quad 85 - 15y + 4y = 74.$$

Tästä seuraa $y = 1$, jolloin $x = \frac{1}{2}(17 - 3 \cdot 1) = 7$.

Yhtälö voidaan myös ratkaista kertomalla kumpikin yhtälö sopivalla vakiolla ja laskemalla sen jälkeen puolittain yhteen tavoitteena toisen tuntemattoman eliminoiminen. Jos halutaan eliminoida x, valitaan kertoimiksi 5 ja -2, jolloin ryhmä saa muodon

$$\begin{cases} 10x + 15y = 85 \\ -10x - 4y = -74. \end{cases}$$

Puolittainen yhteenlasku antaa $11y = 11$, mistä päädytään samaan ratkaisuun kuin edellä. Itse asiassa eliminointi tapahtuu täsmälleen samoin kuin edellä; laskut on vain järjestetty hieman eri tavoin.

Esimerkki 2 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -x + y = 1 \\ 3x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

eliminoimalla ensin x. Jos ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan x, saadaan $x = -y - 2z - 1$, ja tämän sijoittaminen kahteen muuhun yhtälöön antaa

$$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases},$$

ts. on saatu kahteen kertaan sama yhtälö: $y + z = 0$. Tämä onkin ainoa tuntemattomille y ja z saatava ehto. On siis oltava $y = -z$, mutta z:n arvo voidaan valita vapaasti. Merkitään tätä t:llä, jolloin siis $z = t$, $y = -t$ ja $x = -y - 2z - 1 = -t - 1$. Yhtälöryhmällä on siis äärettömän monia ratkaisuja.

ESITIEDOT: yhtälöt

KATSO MYÖS:

Esimerkki 3 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ e^x + \sin y = 1 \end{cases}$$

voidaan jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaista $x = \ln(1 - \sin y)$ ja sijoittaa tämä edelliseen, jolloin saadaan yhtälö

$$[\ln(1 - \sin y)]^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Yhtälö on tämän jälkeen ratkaistavissa Newtonin iteraatiolla. Alkuarvot saadaan helpoimmin graafisesti. Newtonin iteraatio

Mikäli aluksi ratkaistaan y jälkimmäisestä yhtälöstä tai kumpi tahansa tuntematon edellisestä, joudutaan funktioihin, joilla on useita haaroja: $y = \arcsin(1 - e^x)$, $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ tai $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. (Ks. juuri, arcus-funktiot.) Sijoitettaessa jäljellä olevaan yhtälöön on jokainen haara otettava erikseen huomioon, jolloin tehtävä jakautuu osiin. Aluksi esitetty tapa lienee siten yksinkertaisin.

funktio
juuri (murtopotenssi)
juurifunktio
arcus-funktio

Yhtälöryhmä voidaan myös ratkaista kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla, jota ei kuitenkaan lähemmin käsitellä.

Esimerkki 4 yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

ratkeaa helpoimmin sijoittamalla jälkimmäisestä yhtälöstä $z = x + y - 1$ edelliseen:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \text{eli} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0,$$

minkä ainoa reaalinen ratkaisu on $x = y = 1$, jolloin myös $z = 1$. Kompleksisia ratkaisuja etsittäessä voidaan esimerkiksi y valita vapaasti, minkä jälkeen x voi saada kaksi eri arvoa, vastaavasti z.

Esitiedot: yhtälöt
Katso myös:

Epäyhtälö

Epäyhtälöllä tarkoitetaan ehtoa, missä kahdesta lausekkeesta toinen on suurempi tai mahdollisesti yhtä suuri kuin toinen: $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$. Merkit voidaan luonnollisesti kirjoittaa myös toisinpäin: $g(x) > f(x)$, $g(x) \geq f(x)$. Tuntemattomia on vähintään yksi (kuten edellä), mutta voi olla useampiakin. Nämä on luonnollisimmin ajateltava reaalisiksi, koska kompleksilukuja ei voida järjestää suuruusjärjestykseen. kompleksiluku

Esimerkkejä:

$$2x - 3 > 0; \qquad x^3 - 2x^2 \leq x - 2; \qquad x^2 + y^2 \geq 2.$$

ESITIEDOT: yhtälöt
KATSO MYÖS:

Epäyhtälöiden ratkaiseminen

Epäyhtälöiden ratkaisumenettelyt ovat kahta tyyppiä:

1) Epäyhtälöä käsitellään kuten vastaavaa yhtälöä: Siirretään termejä puolelta toiselle, kerrotaan tai jaetaan puolittain vakiolla tai lausekkeella. Erona yhtälöön nähden on tällöin, että kertominen tai jakaminen negatiivisella luvulla tai lausekkeella kääntää erisuuruusmerkin suunnan. Esimerkiksi

yhtälö
sieventäminen (yhtälön)

$$-2x < 10 \implies x > -5.$$

Erityisesti tämä on huomattava lausekkeella kerrottaessa: Jos lausekkeen merkkiä ei tunneta — esimerkiksi se sisältää tuntemattoman — sillä ei yleensä kannata kertoa. Jos tämä kuitenkin tuntuu tarpeelliselta, joudutaan lasku jakamaan kahtia: positiiviseen ja negatiiviseen tapaukseen. Esimerkkejä edempänä.

2) Toisena menettelynä on saattaa epäyhtälö ensin muotoon $f(x) \geq 0$ ja tutkia sitten funktion $f(x)$ käyttäytymistä, erityisesti merkinvaihtoja. Tällöin joudutaan aluksi etsimään funktion nollakohdat, ts. ratkaisemaan vastaava yhtälö $f(x) = 0$. Lisäksi merkinvaihto on mahdollinen funktion f epäjatkuvuuskohdissa.

funktio
jatkuvuus

Merkinvaihtoja tutkittaessa on funktion f lauseke pyrittävä sopivasti paloittelemaan. Jos esimerkiksi funktio on muotoa

$$f(x) = \frac{g_1(x)g_2(x)}{h(x)},$$

on yleensä helpointa tutkia erikseen funktioiden g_1, g_2 ja h merkkejä eikä niinkään koko funktiota f. Graafisten esitysten piirtäminen auttaa hahmottamaan tilannetta.

kuvaaja

Esimerkki 1 epäyhtälöistä

Olkoon ratkaistavana epäyhtälö

$$\frac{x^2+3x-7}{x^2+2} > 1.$$

Koska nimittäjä x^2+2 on kaikilla arvoilla x positiivinen, epäyhtälö voidaan kertoa sillä puolittain, jolloin saadaan $x^2+3x-7 > x^2+2$ eli $3x > 9$. Jakamalla positiiviluvulla 3 saadaan $x > 3$.

Samaan tulokseen päästään siirtämällä kaikki termit ensin yhtäläisyysmerkin vasemmalle puolelle ja sieventämällä, jolloin epäyhtälö saa muodon

$$\frac{3x-9}{x^2+2} > 0.$$

Koska nimittäjä on aina positiivinen, riippuu lausekkeen merkki vain osoittajasta. Tämä on positiivinen, jos $x > 3$.

Esimerkki 2 epäyhtälöistä

Epäyhtälö

$$x^3 - 2x^2 \leq x - 2$$

voidaan kirjoittaa $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$, jolloin joudutaan tutkimaan polynomifunktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ käyttäytymistä. Tämän nollakohdat ovat $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = 2$. Koska polynomifunktio on kaikkialla jatkuva, ei muita merkinvaihtokohtia voi olla.

polynomifunktio
jatkuvuus

Piirtämällä kuvaaja, sijoittamalla funktioon nollakohtien välissä olevia arvoja tai polynomifunktioiden yleisten ominaisuuksien perusteella voidaan päätellä, että funktio saa negatiivisia arvoja, kun $x < -1$ ja $1 < x < 2$. Epäyhtälön ratkaisu on siten $x \leq -1$ tai $1 \leq x \leq 2$.

kuvaaja

Toisena ratkaisuvaihtoehtona on jakaa alkuperäinen epäyhtälö aluksi tekijällä $x - 2$. Jos jakaja on positiivinen, ts. $x > 2$, päädytään epäyhtälöön $x^2 \leq 1$; jos $x < 2$, epäyhtälö on $x^2 \geq 1$.

Edellisessä tapauksessa olisi $-1 \leq x \leq 1$, mutta tämä ei täytä ehtoa $x > 2$, eikä ratkaisuja siis ole.

Jälkimmäisessä tapauksessa tulee olla $x \leq -1$ tai $x \geq 1$. Kun tämä yhdistetään rajoitukseen $x < 2$, saadaan $x \leq -1$ tai $1 \leq x < 2$. Lisäksi epäyhtälö toteutuu yhtälönä, jos $x = 2$.

Esitiedot: yhtälöt

Katso myös:

Esimerkki 3 epäyhtälöistä

Murtoepäyhtälö

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{9 - x^2} \geq 0$$

voidaan ratkaista tutkimalla erikseen osoittajan ja nimittäjän merkkejä.

Osoittajan nollakohdat ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 5$. Kyseessä on toisen asteen polynomi, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Nollakohtien välissä arvot ovat siis negatiivisia, ulkopuolella positiivisia.

polynomifunktio

kuvaaja

Nimittäjän nollakohdat ovat vastaavasti $x_3 = -3$ ja $x_4 = 3$. Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolloin arvot nollakohtien välissä ovat positiivisia, ulkopuolella negatiivisia.

paraabeli (kartioleikkauksena)

paraabeli (xy-koordinaateissa)

Osoittajan ja nimittäjän merkeistä saadaan seuraava kuvio:

osoittaja	+	+	+	+	+	+	−	−	−	+
nimittäjä	−	+	+	+	+	+	+	−	−	−
murtolauseke	−	+	+	+	+	+	−	+	+	−
	-3					2	3		5	

Epäyhtälön ratkaisu on tällöin $-3 < x \leq 2$ tai $3 < x \leq 5$. Yhtäsuuruus ei luonnollisestikaan saa olla mukana niissä pisteissä, jotka ovat nimittäjän nollakohtia.

Esimerkin epäyhtälö voidaan myös ratkaista kertomalla se puolittain nimittäjällä. Tällöin on otettava huomioon nimittäjän merkki. Koska nimittäjä on positiivinen alueessa $-3 < x < 3$, saadaan kertomisen jälkeen epäyhtälö $x^2 - 7x + 10 \geq 0$. Sen ratkaisuna on $-3 < x \leq 2$, kun otetaan huomioon rajoitus $-3 < x < 3$.

Alueessa $x < -3$ tai $x > 3$ kääntää nimittäjällä kertominen epäyhtälön erisuuruusmerkin ja saadaan $x^2 - 7x + 10 \leq 0$. Tämän ratkaisuna tarkasteltavana olevassa alueessa on $3 < x \leq 5$.

Kaikkiaan päädytään siis samaan tulokseen kuin edellä.

Esimerkki 4 epäyhtälöistä

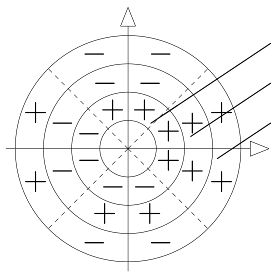
Trigonometrinen epäyhtälö

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq 0$$

voidaan ratkaista kahdellakin tavalla.

Vasen puoli voidaan hajottaa kahden tekijän tuloksi, jolloin saadaan $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. Tekijöiden merkkien tutkimiseksi on ensin ratkaistava trigonometriset yhtälöt $\cos x + \sin x = 0$ ja $\cos x - \sin x = 0$. Trigonometrian kaavojen perusteella nämä saadaan muotoon $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ja $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, joista seuraa nollakohdiksi $x = \pm\pi/4 + n\pi$, missä n on kokonaisluku. Tutkimalla kummankin tekijän merkit alueella $[-\pi, \pi]$, saadaan seuraava kuvio:

tekijöihin jako (polynomin)
tekijöihin jako (polynomin)
tekijöihin jako (polynomin)
yhtälö (trigonometrinen)
trigonometria (peruskaavat)
väli (reaaliakselin)



Ottamalla lisäksi huomioon sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuus (jaksona 2π) saadaan epäyhtälön ratkaisuksi $-\pi/4 + n\pi \leq x \leq \pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

sini
kosini
jaksollinen (funktio)

Toisena vaihtoehtona on kirjoittaa epäyhtälön vasen puoli kaksinkertaisen kulman kosinin kaavan avulla uuteen muotoon: $\cos 2x \geq 0$. Tällöin tulee olla $-\pi/2 + 2n\pi \leq 2x \leq \pi/2 + 2n\pi$, mistä kakkosella jakamalla päästään samaan ratkaisuun kuin edellä.

Kumpaa tahansa tapaa käytettäessä on funktioiden kuvaajien piirtämisestä suurta apua.

kuvaaja

Esimerkki 5 epäyhtälöistä

Epäyhtälöä $x^2 + y^2 \geq 2$ eli $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \geq 0$ vastaava yhtälö on $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Tämä esittää origokeskistä ympyrää, jonka säde on $\sqrt{2}$. Jatkuva kahden muuttujan $f(x, y)$ vaihtaa merkkinsä tätä ympyräviivaa ylitettäessä. On ilmeistä, että ympyrän sisäpuolella funktio saa negatiivisia arvoja, ulkopuolella positiivisia. Epäyhtälön ratkaisun muodostavat siis ne pisteet (x, y), jotka sijaitsevat ympyräviivalla tai sen ulkopuolella.

ympyrä (esimerkki)
ympyrä
ympyrä (ala)
jatkuvuus
funktio (kahden muuttujan)

Funktiokäsite **1/6**

Esitiedot:

Katso myös: reaalifunktiot, joukko-oppi

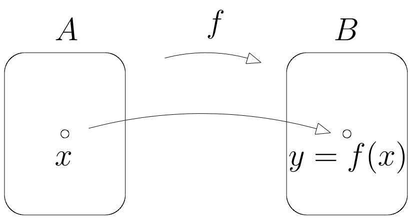
Funktiokäsitteen määrittely

Funktio f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka jokaiseen joukon A alkioon liittää jonkin alkion joukosta B. Yleensä merkitään $f : A \to B$. joukko alkio

Jos x on joukon A alkio (merkitään $x \in A$) ja y tähän liittyvä joukon B alkio ($y \in B$), merkitään $y = f(x)$ ja sanotaan, että funktio f *kuvaa* alkion x alkiolle y tai että y on alkion x *kuva* funktiossa f.

Joukko A on funktion f *lähtöjoukko* eli *määrittelyjoukko* ja B sen *maalijoukko*.

Joskus käytetään sanaa *kuvaus* synonyymina funktiolle. (Toisinaan sillä voi kyllä olla myös hieman funktion käsitteestä poikkeava merkitys.)



Funktion lähtö- tai maalijoukon ei tarvitse olla lukujoukko. Varsin luonnollinen joukkotyyppi on vaikkapa vektorijoukko. Varsinkin lukujoukkojen tapauksessa funktio annetaan usein ilmoittamalla sen lauseke, mutta muitakin mahdollisuuksia on. vektori

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: reaalifunktiot, joukko-oppi

Esimerkkejä funktioista

1) Olkoon A kaikkien Suomen kansalaisten joukko ja B sellaisten 11 merkin jonojen joukko, jotka ovat muodollisesti oikeita henkilötunnuksia. Sääntö, joka jokaiseen Suomen kansalaiseen liittää hänen henkilötunnuksensa, on funktio. joukko

2) Olkoon $A = B = \mathbb{R}$ (reaalilukujoukko). Funktio $f : A \to B$ voidaan määritellä asettamalla $f(x) = x^2$, jolloin jokaiseen reaalilukuun x liitetään sen neliö. reaaliluku

3) Olkoon A reaalilukujoukko kuten edellä, mutta B ei-negatiivisten reaalilukujen joukko (merkitään usein $B = \mathbb{R}_+$). Funktio $f : A \to B$ määritellään samoin kuin edellä: $f(x) = x^2$. Vaikka sääntö onkin sama, pidetään tätä eri funktiona kuin edellisessä kohdassa, koska maalijoukko on valittu eri tavoin.

4) Olkoon $A = B = \mathbb{N}$ (luonnollisten lukujen joukko). Funktio $f : A \to B$ voidaan määritellä myös seuraavasti: luonnollinen luku

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1,\\
&f(2) = 1,\\
&f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad \text{kun } n \geq 3.
\end{aligned}
$$

Määrittelyä kutsutaan rekursiiviseksi, koska esimerkiksi $f(5)$ on määritelty arvojen $f(4)$ ja $f(3)$ avulla ja nämä on edelleen palautettava arvoihin $f(2)$ ja $f(1)$. (Funktion f arvoja kutsutaan *Fibonacci'n luvuiksi.*) rekursiivisesti määritelty lukujono

5) Olkoon lähtöjoukkona xy-taso, ts. reaalilukuparien joukko. Tällöin merkitään $A = \mathbb{R}^2$. Maalijoukko olkoon $B = \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : A \to B$, joka jokaiseen xy-tason pisteeseen liittää erään lukuarvon: $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tämä on esimerkki *kahden muuttujan funktiosta.* koordinaatisto (xy-)

6) Vastaavaan tapaan voidaan määritellä *usean muuttujan funktio* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asettamalla vaikkapa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Tässä on $n > 1$.

7) Olkoon $A = \mathbb{R}$ ja olkoon B kolmiulotteisten vektoreiden joukko. Yhtälö vektori

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

määrittelee tällöin *vektoriarvoisen funktion* $\mathbf{r} : A \to B$. Funktion voidaan katsoa esittävän ruuviviivaksi kutsuttua avaruuskäyrää. ruuviviiva käyrä (avaruus-)

Surjektio, injektio, bijektio

Funktion $f : A \to B$ maalijoukon B jokaisen alkion ei tarvitse olla lähtöjoukon jonkin alkion kuva. Ne maalijoukon alkiot, jotka todella ovat kuvia, muodostavat *kuvajoukon*; tätä merkitään $f(A)$. Samalle kuvajoukon alkiolle voi kuvautua useampiakin lähtöjoukon alkioita. joukko alkio

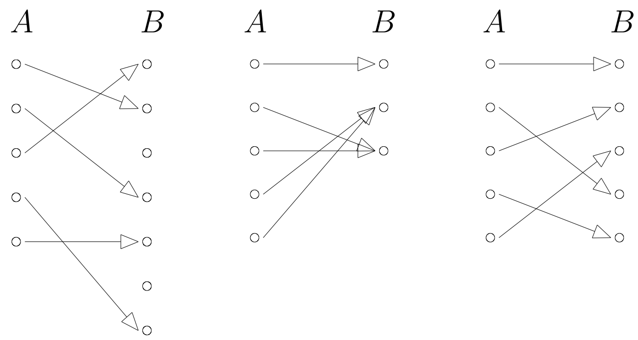
Jos kuvajoukko on sama kuin maalijoukko, ts. jokainen maalijoukon alkio on ainakin yhden alkion kuva, sanotaan, että funktio on *surjektio*.

Jos jokainen maalijoukon alkio on enintään yhden alkion kuva, funktiota sanotaan *injektioksi*.

Jos jokainen maalijoukon alkio on täsmälleen yhden alkion kuva, ts. funktio on sekä surjektio että injektio, sanotaan, että se on *bijektio*. Bijektiossa siis jokaista lähtöjoukon alkiota vastaa yksi maalijoukon alkio ja kääntäen.

Esimerkiksi: Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujoukko ja $\mathbb{R}_+$ ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Jos $f(x) = x^2$, niin

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole surjektio eikä injektio,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on surjektio, mutta ei injektio,
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ei ole surjektio, mutta on injektio,
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on sekä surjektio että injektio, ts. bijektio.



injektio, ei surjektio — surjektio, ei injektio — bijektio

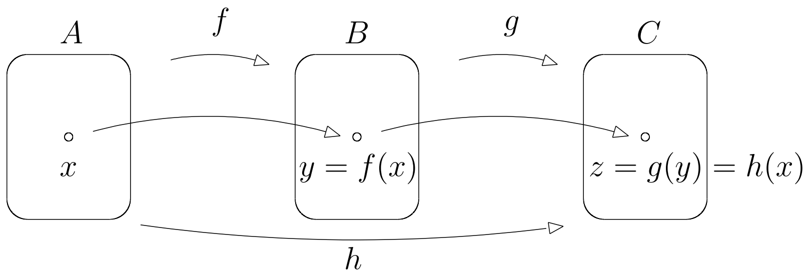
Yhdistetty funktio

Olkoon funktion f maalijoukko sama kuin funktion g lähtöjoukko: $f : A \to B$, $g : B \to C$. Tällöin voidaan muodostaa näistä *yhdistetty funktio* $h : A \to C$ asettamalla $h(x) = g(f(x))$ kaikilla $x \in A$. Alkio $x \in A$ siis kuvataan ensin funktiolla f joukkoon B alkiolle $f(x)$ ja tämä edelleen joukkoon C funktiolla g.

joukko

alkio

Yhdistettyä funktiota merkitään $h = g \circ f$.



Olkoon esimerkiksi yhdistettävänä funktiot f ja g, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$; kummankin lähtö- ja maalijoukko olkoon $\mathbb{R}$. Nämä voidaan yhdistää kahdella tavalla: $h = g \circ f$, $k = f \circ g$. Tällöin on

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^3 \quad \text{ja} \\ k(x) &= f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 + 1. \end{aligned}$$

Tulokset eivät siis ole samat.

Käänteisfunktio

Jos funktio $f : A \to B$ on bijektio, kuvautuu jokaiselle joukon B alkiolle täsmälleen yksi joukon A alkio. Tällöin voidaan määritellä funktio $g : B \to A$ asettamalla alkion $y \in B$ kuvaksi tälle kuvautuva joukon A alkio. joukko alkio

Funktiota g kutsutaan funktion f *käänteisfunktioksi*. Merkitään $g = f^{-1}$, jolloin myös $g^{-1} = f$. Jos siis f ja g muodostavat funktio–käänteisfunktio -parin, on $y = f(x)$, jos ja vain jos $x = g(y)$.

Joukon A *identtiseksi funktioksi* kutsutaan funktiota $i : A \to A$, joka kuvaa jokaisen alkion itselleen: $i(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Jos i_A on joukon A identtinen funktio ja i_B vastaavasti joukon B, pätee em. funktio-käänteisfunktio -parista yhdistetyille funktioille $g(f(x)) = x$ eli $g \circ f = i_A$ ja $f(g(y)) = y$ eli $f \circ g = i_B$.

Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ käänteisfunktio on $g(x) = \sqrt{x}$, jolloin sekä lähtö- että maalijoukkona on ei-negatiiviset reaaliluvut $\mathbb{R}_+$.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: reaalifunktiot, joukko-oppi

Funktion kuvaaja

Olkoot A ja B reaalilukujoukon osajoukkoja.

Funktion $f : A \to B$ *kuvaaja* muodostuu niistä xy-tason pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön $y = f(x)$, $x \in A$.

Koska jokaista $x \in A$ vastaa yksi funktion arvo, sijaitsee jokaisella y-akselin suuntaisella suoralla (joukon A kohdalla) täsmälleen yksi kuvaajan piste. Jos funktio f on jatkuva, muodostuu kuvaajasta yhtenäinen käyrä.

Samalla tavoin voidaan muodostaa kahden reaalimuuttujan funktion kuvaaja: ne xyz-avaruuden pisteet, jotka toteuttavat yhtälön $z = f(x, y)$. Jos funktio on jatkuva, kyseessä on kolmiulotteisen avaruuden pinta.

joukko
reaaliluku
osajoukko
koordinaatisto (xy-)
koordinaatti
jatkuvuus
käyrä (taso-)
koordinaatisto (xyz-)
pinta
pinta (toisen asteen)

Esitiedot: funktiokäsite

Katso myös: potenssi, juuret, polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot

---

Reaalifunktion käsite; alkeisfunktiot

Reaalifunktioilla tarkoitetaan funktioita, joiden lähtöjoukkona on reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ tai jokin sen osaväli ja jotka ovat reaaliarvoisia, ts. myös maalijoukko on $\mathbb{R}$.

funktio
lähtöjoukko
väli (reaaliakselin)
maalijoukko

Alkeisfunktioiksi kutsutaan tavallisia koulukurssissa ja yliopistollisissa peruskursseissa käsiteltyjä reaalifunktioita. Ei ole täysin yksiselitteistä, mitä niihin eri yhteyksissä luetaan. Varsin luonnollisena voidaan pitää seuraavaa listaa:

itseisarvofunktio,
potenssifunktiot,
polynomit,
rationaalifunktiot,
eksponenttifunktiot,
logaritmifunktiot,
trigonometriset funktiot,
näiden käänteisfunktiot (arcus-funktiot),
hyperbelifunktiot,
näiden käänteisfunktiot (area-funktiot),
edellisistä yhdistettyinä funktioina saatavat funktiot.

itseisarvo (reaaliluvun)
potenssifunktio
polynomifunktio
rationaalifunktio
eksponenttifunktio
logaritmifunktio
trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
arcus-funktio
hyperbelifunktio
area-funktio
yhdistetty funktio

Funktioita, joita yleensä ei pidetä alkeisfunktioina, ovat esimerkiksi funktiot, jotka määritellään jonkin *differentiaaliyhtälön* ratkaisuna tai *sarjakehitelmän* summana. Monia muitakin, jollakin tavoin epäsuoria tapoja voidaan käyttää funktioiden määrittelemiseen.

differentiaaliyhtälö
sarja

ESITIEDOT: funktiokäsite

KATSO MYÖS: potenssi, juuret, polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot

---

Funktion kasvavuus ja vähenevyys

Reaalimuuttujan reaaliarvoista funktiota kutsutaan *kasvavaksi*, jos kaikilla tarkastelujoukkoon kuuluvilla arvoilla x_1, x_2 pätee funktio kasvava (funktio)

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2).$$

Jos funktionarvojen välillä ei sallita yhtäsuuruutta, funktio on *aidosti kasvava*:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

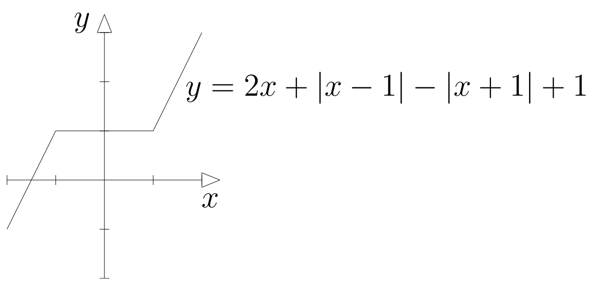
Ehdot

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies f(x_1) \ge f(x_2) \quad \text{ja} \\ x_1 < x_2 &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

merkitsevät vastaavasti, että funktio on *vähenevä* ja *aidosti vähenevä*. vähenevä (funktio)

Terminologia ei ole aivan vakiintunutta. Eri yhteyksissä saatetaan (aidolle) kasvavuudelle ja (aidolle) vähenevyydelle antaa hieman edellisestä poikkeaviakin määrittelyjä. Voidaan myös käyttää toisenlaisia nimityksiä, esimerkiksi ei-kasvava, ei-vähenevä. Syy on edellä olevien määritelmien hieman erikoisessa piirteessä: Jos funktion arvo on vakio, kyseessä on sekä kasvava että vähenevä funktio!

Esimerkkejä: Funktio $f(x) = x^3$ on aidosti kasvava kaikkialla. Funktio $f(x) = 2x + |x-1| - |x+1| + 1$ on kaikkialla kasvava, mutta ei aidosti kasvava, koska se saa välillä $[-1, 1]$ vakioarvon 1.



ESITIEDOT: funktiokäsite

KATSO MYÖS: potenssi, juuret, polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot

---

Funktion jaksollisuus; parillisuus ja parittomuus

Reaalifunktio f on *jaksollinen*, *jaksona* $L \neq 0$, jos kaikilla x on voimassa $f(x+L) = f(x)$.

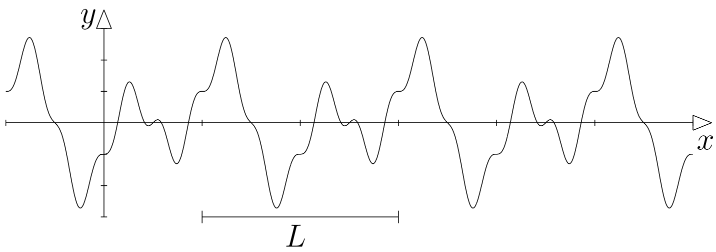
Tunnettuja esimerkkejä jaksollisista funktioista ovat trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$, joiden jakso on 2π, sekä esimerkiksi $\tan x$, jonka jakso on π.

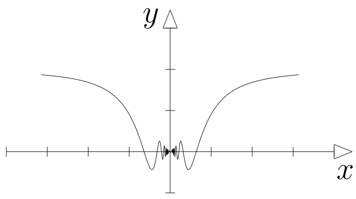
funktio
trigonometrinen funktio
(symmetria)
pii

Jos funktion jakso on L, sillä on jaksona myös jokainen nL, missä n on kokonaisluku.

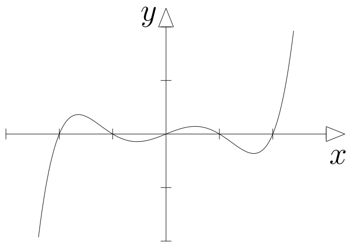
Reaalifunktio f *parillinen*, jos kaikilla x pätee $f(-x) = f(x)$, ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$.

Parillisia funktioita ovat esimerkiksi $\cos x$ ja $|x|$, parittomia $\sin x$ ja x^3.





parillinen funktio



pariton funktio

Esitiedot: funktiokäsite

Katso myös: potenssi, juuret, polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot

---

Reaalifunktion käänteisfunktio

Tunnetun funktion f käänteisfunktio g voidaan usein löytää ratkaisemalla yhtälö $y = f(x)$ muuttujan x suhteen. Jos ratkaisu on yksikäsitteinen tietyillä arvoilla y, saadaan tästä käänteisfunktion lauseke muodossa $x = g(y)$.

funktio
käänteisfunktio
yhtälö

Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

on määritelty, kun $x \neq 3$. Käänteisfunktio saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä $y = f(x)$:

$$y = \frac{x-2}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{3y-2}{y-1}.$$

Ratkaisu on mahdollinen ja tulos yksikäsitteinen, jos $y \neq 1$. Käänteisfunktio on siis määritelty, kun sen argumentti on $\neq 1$. Kun tavanomaiseen tapaan merkitään funktion argumenttia x, on käänteisfunktion lauseke

$$g(x) = \frac{3x-2}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

Vaikka käänteisfunktio olisi olemassa, ei sille välttämättä saada lauseketta edellä esitetyllä menettelyllä. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^2}$$

tapauksessa jouduttaisiin ratkaisemaan viidennen asteen polynomiyhtälö $x^5 - yx^2 - y = 0$, mikä ei ole juurilausekkeiden avulla mahdollista. Tästä huolimatta käänteisfunktio on olemassa, mikä voidaan päätellä osoittamalla funktio f derivaatan avulla aidosti kasvavaksi. Tällöin f on bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja käänteisfunktio siis olemassa. Alkeisfunktioiden avulla muodostettua lauseketta sille ei kuitenkaan saada.

yhtälö (polynomi-)
juuri (murtopotenssi)
derivaatta
kasvava (funktio)
bijektio

ESITIEDOT: funktiokäsite
KATSO MYÖS: potenssi, juuret, polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot

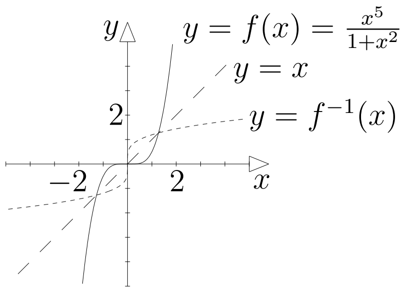
---

Käänteisfunktion kuvaaja

Funktion f kuvaaja muodostuu niistä xy-tason pisteistä (x, y), jotka toteuttavat yhtälön $y = f(x)$. Jos g on funktion f käänteisfunktio, ovat yhtälöt $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ yhtäpitäviä, jolloin samat pisteet (x, y) toteuttavat ne.

kuvaaja
koordinaatisto (xy-)
käänteisfunktio

Käänteisfunktion kuvaajaa piirrettäessä merkitään kuitenkin argumentiksi x ja funktion arvoksi y, jolloin piirrettävänä ovat ne pisteet, jotka toteuttavat yhtälön $y = g(x)$. Tämä poikkeaa edellisestä siten, että x ja y ovat vaihtaneet rooleja, jolloin käänteisfunktion g kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suorassa $y = x$.



ESITIEDOT: reaalifunktiot, polynomit

KATSO MYÖS:

Rationaalifunktion lauseke

Rationaalifunktiot ovat muotoa

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä $p(x)$ ja $q(x)$ ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei välttämättä ole määritelty kaikilla arvoilla x; pois on jätettävä nimittäjän mahdolliset nollakohdat.

Jos sekä osoittajalla että nimittäjällä on sama nollakohta $x = a$, voidaan lauseke supistaa tekijällä $x - a$ (tai mahdollisesti tämän korkeammalla potenssilla); ks. polynomin tekijöihin jako. Jos $x = a$ ei tämän jälkeen enää ole nimittäjän nollakohta, saadaan määrittelyalue laajennetuksi myös pisteeseen $x = a$. (Jos a supistamisen jälkeen on nimittäjän, mutta ei osoittajan nollakohta, ei laajennusta saada aikaan. Tällöin sekä osoittajalla että nimittäjällä oli tekijänä lausekkeen $x - a$ potenssi, mutta tämä oli korkeampaa astetta nimittäjässä.)

Jos rationaalifunktion osoittaja on samaa tai korkeampaa astetta kuin nimittäjä, voidaan suorittaa polynomien jakolasku. Tällöin rationaalifunktio saadaan muotoon

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)},$$

missä $u(x)$ ja $v(x)$ ovat polynomeja ja $v(x)$ on alempaa astetta kuin jakaja $q(x)$.

Jos alkuperäisen rationaalifunktion osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä, on rationaalifunktio jo valmiiksi tällaisessa muodossa; tällöin siis $u(x) = 0$ kaikilla x.

funktio

polynomi

osoittaja
nimittäjä
supistaminen
potenssi (kokonaisluku-)
tekijöihin jako (polynomin)
tekijöihin jako (polynomin)
tekijöihin jako (polynomin)
asteluku
jakolasku (polynomien)

ESITIEDOT: reaalifunktiot, polynomit
KATSO MYÖS:

Asymptootit

Rationaalifunktion $r(x) = p(x)/q(x)$ (missä $p(x)$ ja $q(x)$ polynomeja) *asymptootti* on suora tai käyrä, jota kuvaaja $y = r(x)$ rajatta lähestyy, kun xy-tasossa jollakin tavoin siirrytään äärettömyyteen.

Nimittäjän $q(x)$ nollakohdat a_k antavat kuvaajan *pystysuorat asymptootit* $x = a_k$. Näissä kohdissa funktion $r(x)$ raja-arvo on $+\infty$ tai $-\infty$; mahdollisesti eri puolilta lähestyttäessä erilainen.

Jos rationaalifunktio $r(x)$ kirjoitetaan muotoon $r(x) = u(x) + v(x)/q(x)$, missä polynomi $v(x)$ on alempaa astetta kuin polynomi $q(x)$, on

$$\lim_{x\to\pm\infty}[r(x) - u(x)] = \lim_{x\to\pm\infty} v(x)/q(x) = 0.$$

Tällöin rationaalifunktion kuvaaja $y = r(x)$ lähestyy käyrää $y = u(x)$, kun $x \to \pm\infty$.

Jos polynomi $u(x)$ on astetta 0, ts. $u(x) = c_0 =$ vakio, on rationaalifunktion kuvaajalla *vaakasuora asymptootti* $y = c_0$.

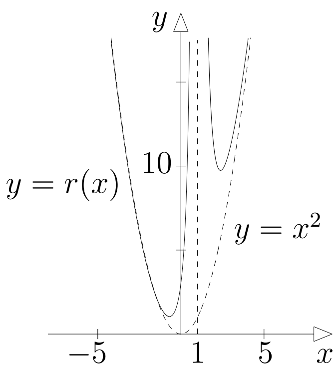
Jos asteluku on 1, on $u(x) = c_1x + c_0$ ja rationaalifunktiolla on *vino asymptootti* $y = c_1x + c_0$.

Jos $u(x)$ on korkeampaa astetta, sanotaan, että rationaalifunktiolla on *käyräviivainen asymptootti* $y = u(x)$.

Esimerkki: Rationaalifunktiolla

$$r(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = x^2 + \frac{2x + 3}{(x - 1)^2}$$

on pystysuora asymptootti $x = 1$ ja käyräviivainen asymptootti $y = x^2$. Kuvaaja:



funktio
polynomi
käyrä (taso-)
kuvaaja
nimittäjä
raja-arvo (funktion)
asteluku

ESITIEDOT: reaalifunktiot, potenssi
KATSO MYÖS: logaritmifunktio

Eksponenttifunktion määrittely ja perusominaisuudet

Yleinen eksponenttifunktio $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla

$$\exp_a(x) = a^x.$$

Luku a on eksponenttifunktion *kantaluku*, jonka tulee olla > 0, koska potenssi ei muutoin ole — ongelmitta — määritelty kaikilla reaalisilla eksponenteilla x. Tapaus $a = 1$ antaa vakiofunktion ($= 1$) eikä ole mielenkiintoinen.

Usein eksponenttifunktiolla tarkoitetaan tapausta, jossa kantalukuna on Neperin luku $e \approx 2.71828$. Tällöin merkitään $e^x = \exp(x)$.

Eksponenttifunktion tärkeimmät ominaisuudet ovat seuraavat:

1. Funktio on määritelty kaikilla reaalisilla arvoilla x ja se saa arvokseen kaikki positiiviset reaaliluvut.
2. Funktio on aidosti kasvava, jos $a > 1$ ja aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$.
3. Potenssin laskusääntöjen perusteella on

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \quad \text{eli} \quad \exp_a(x_1)\exp_a(x_2) = \exp_a(x_1 + x_2),$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{eli} \quad (\exp_a(x))^y = \exp_a(xy).$$

funktio

potenssi (kokonaisluku-)

potenssi (murto-)

potenssi (irrationaali-)

potenssi (kompleksinen)

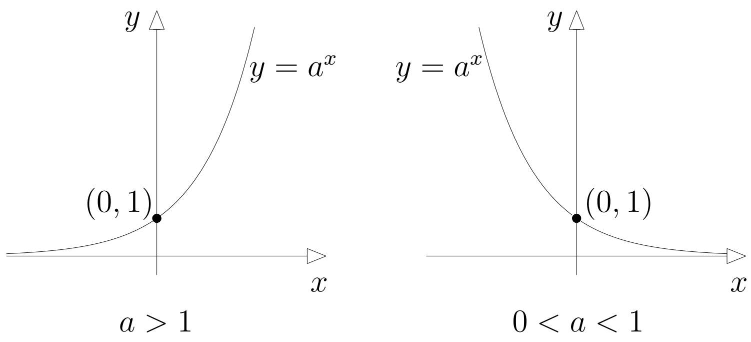
Neperin luku

kasvava (funktio)

kasvava (funktio)

vähenevä (funktio)

vähenevä (funktio)



ESITIEDOT: reaalifunktiot, potenssi

KATSO MYÖS: logaritmifunktio

Yleisen eksponenttifunktion lausuminen Neperin luvun avulla

Yleisen a-kantaisen eksponenttifunktion käsittely voidaan helposti palauttaa e-kantaiseen funktioon logaritmifunktion avulla. Koska e-kantainen eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi ovat käänteisfunktioita, on $a = e^{\ln a}$. Tällöin on

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Neperin luku
logaritmifunktio
käänteisfunktio
käänteisfunktio

Tämän avulla voidaan helposti laskea esimerkiksi funktion a^x derivaatta, kun tiedetään, että e-kantaisen eksponenttifunktion derivaatta on se itse: Yhdistetyn funktion derivoimissääntö antaa

$$\mathrm{D}\, a^x = \mathrm{D}\, e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

derivaatta
yhdistetty funktio
derivaatta (yhdistetyn funktion)

Samaa ideaa käyttäen voidaan tutkia myös funktiota $x^x = e^{x \ln x}$.

derivointi (alkeisfunktioiden)

Eksponenttifunktio sovelluksissa

Eksponenttifunktion $y = e^{kx}$ merkitys sovelluksissa perustuu paljolti siihen, että se toteuttaa differentiaaliyhtälön

differentiaaliyhtälö

$$y' = ky.$$

Monia ilmiöitä voidaan nimittäin kuvata tämäntyyppisellä differentiaaliyhtälöllä. Differentiaaliyhtälöä sanotaan ilmiön *matemaattiseksi malliksi*.

Olkoon esimerkiksi $p(t)$ funktio, joka esittää väestön suuruutta ajanhetkellä t. Voidaan ajatella, että väestön lisäys Δp lyhyellä aikavälillä Δt on suoraan verrannollinen olemassaolevan väestön määrään ja aikavälin pituuteen: $\Delta p = kp\Delta t$, missä k on positiivinen verrannollisuuskerroin. Jakamalla aikavälin pituudella Δt saadaan

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = kp.$$

Koska $\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t)$, on vasen puoli väestön suuruutta ajanhetkellä t kuvaavan funktion $p(t)$ erotusosamäärä, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö

erotusosamäärä

$$p'(t) = kp(t) \quad \text{eli} \quad p' = kp,$$

kun $\Delta t \to 0$. Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuna on eksponenttifunktio $p(t) = Ce^{kt}$; tässä C on mikä tahansa vakio.

derivaatta

Eo. differentiaaliyhtälöä kutsutaan väestönkasvun eksponentiaaliseksi malliksi. Sellaisena se on luonnollisesti äärimmäisen yksinkertainen, koska esimerkiksi kuolleisuuteen ei ole kiinnitetty mitään huomiota, ei myöskään populaation kasvaessa yhä rajallisemmiksi muuttuviin ympäristöresursseihin kuten saatavilla olevaan ravintoon yms.

Samantyyppiseen malliin päästään tarkasteltaessa aineen radioaktiivista hajoamista. Hajoavien atomien määrä Δm on suoraan verrannollinen aineen määrään kyseisellä hetkellä $m(t)$ ja tarkasteltavan aikavälin pituuteen Δt. Siis: $\Delta m = -km\Delta t$. Miinusmerkki aiheutuu siitä, että Δm merkitsee aineen vähenemistä ja on siis negatiivinen; kerroin k oletetaan positiiviseksi.

Samaan tapaan kuin edellä tästä päädytään differentiaaliyhtälöön $m' = -km$, jonka ratkaisu on $m = Ce^{-kt}$. Tässä C on vakio, joka riippuu ainemäärästä tarkastelun alkuhetkellä. Verrannollisuuskerroin k on aineelle ominainen vakio (vastaten puoliintumisaikaa).

Logaritmifunktio 1/4

Esitiedot: reaalifunktiot, eksponenttifunktio
Katso myös:

Logaritmifunktion määrittely

Eksponenttifunktio $\exp_a(x) = a^x$, missä $a > 1$, on määritelty kaikilla reaaliarvoilla x, on aidosti kasvava ja saa arvoikseen kaikki positiiviset reaaliarvot. Tällöin kyseessä on bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ja sillä on käänteisfunktio $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}_+ =$ positiiviset reaaliluvut.)

funktio
eksponenttifunktio
kasvava (funktio)
kasvava (funktio)
bijektio
käänteisfunktio
käänteisfunktio
Neperin luku

Käänteisfunktiota kutsutaan a-kantaiseksi *logaritmiksi* ja merkitään $\log_a$. Siis

$$y = \exp_a(x) = a^x \iff x = \log_a y.$$

Jos erityisesti kantalukuna on Neperin luku e, puhutaan *luonnollisesta logaritmista*, jota merkitään ln. Jos kantalukuna on 10, kyseessä on *Briggsin logaritmi* merkintänä yleensä lg.

Vastaava päättely kuin edellä voidaan tehdä myös tapauksessa $0 < a < 1$. Ainoana erona on, että eksponenttifunktio $\exp_a$ ei tällöin ole aidosti kasvava vaan vähenevä. Tällaisia logaritmifunktioita ei kuitenkaan yleensä käytetä.

vähenevä (funktio)

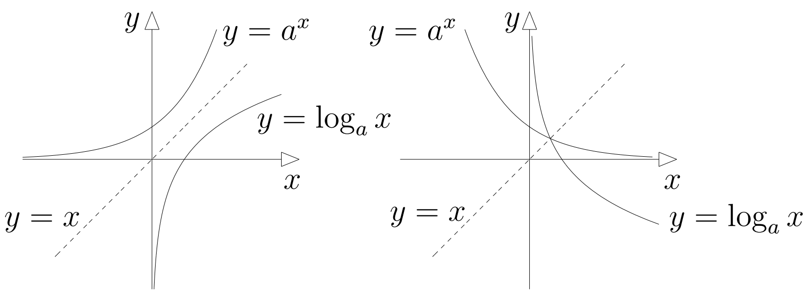
Jos $a > 1$, on logaritmifunktio aidosti kasvava; jos $0 < a < 1$, niin aidosti vähenevä.

vähenevä (funktio)

Koska $a^0 = 1$ ja $a^1 = a$, on kantaluvusta a riippumatta

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1,$$

ts. 'ykkösen logaritmi on nolla' ja 'kantaluvun logaritmi on yksi'.



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Logaritmin laskusäännöt

Olkoon $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$ ja $y = a^x$. Tällöin on $x_1 = \log_a y_1$, $x_2 = \log_a y_2$ ja $x = \log_a y$. Eksponenttifunktion laskusäännöt

laskusääntö (eksponenttifunktion)

$$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \quad \text{ja} \quad (a^x)^b = a^{bx}$$

saavat tällöin muodon $y_1 y_2 = a^{\log_a y_1 + \log_a y_2}$ ja $y^b = a^{b \log_a y}$. Muodostamalla kummastakin puolesta a-kantainen logaritmi saadaan *logaritmin laskusäännöt*:

$$\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2 \quad \text{ja} \quad \log_a(y^b) = b \log_a y.$$

Yhdistämällä säännöt saadaan osamäärän logaritmille

$$\log_a(y_1/y_2) = \log_a(y_1 y_2^{-1}) = \log_a y_1 - \log_a y_2.$$

Mikä tahansa logaritmi on helposti palautettavissa luonnolliseen logaritmiin. Koska eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat käänteisfunktioita, on $a^{\log_a x} = x$, mistä saadaan ottamalla luonnollinen logaritmi kummastakin puolesta

käänteisfunktio
käänteisfunktio

$(\log_a x)(\ln a) = \ln x$. Siis

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Eksponentti- ja logaritmiyhtälöt

Eksponentti- ja logaritmiyhtälöitä saattaa olla mahdollista ratkaista laskusääntöjä käyttäen. Yleensä ne kuitenkin ovat sellaisia transkendenttiyhtälöitä, joissa ainoa mahdollisuus on numeerinen ratkaiseminen esimerkiksi Newtonin iteraatiota käyttäen.

eksponenttifunktio

yhtälö (transkendentti-)

Newtonin iteraatio

1) Yhtälö

$$4^x + 4^{-x} = 5/2$$

voidaan ratkaista kertomalla se ensin tekijällä 4^x, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö tuntemattomana 4^x:

yhtälö (toisen asteen)

$$(4^x)^2 - \tfrac{5}{2}4^x + 1 = 0.$$

Tällä on juuret $4^x = 2$ ja $4^x = \frac{1}{2}$. Ottamalla kummastakin puolesta 2-kantainen logaritmi saadaan $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -\frac{1}{2}$.

2) Yhtälö

$$\log_x 2 + 2 = \log_x(1 - x)$$

voidaan logaritmin laskusääntöjen avulla sieventää muotoon

$$\log_x \frac{1 - x}{2} = 2.$$

Jotta esiintyvä x-kantainen logaritmifunktio olisi määritelty, on ilmeisestikin oltava $x > 0$, $x \neq 1$ ja $1 - x > 0$.

Ottamalla kummastakin puolesta x-kantainen eksponenttifunktio saadaan toisen asteen yhtälö $\frac{1}{2}(1 - x) = x^2$. Tämän juuret ovat $x = -1$ ja $x = \frac{1}{2}$, joista vain jälkimmäinen täyttää määrittelyehdot. Ainoa ratkaisu on siis $x = 1/2$.

Logaritmifunktion historiaa

Logaritmit keksi skotlantilainen kartanonherra John Napier (Neper) 1500-luvun lopussa. Tulokset hän julkaisi vuonna 1614. Ideoita kehitti edelleen englantilainen Henry Briggs, jonka kirja logaritmitauluineen ilmestyi 1624. Samoihin ideoihin johtui myös heidän aikalaisensa alunperin sveitsiläinen kelloseppä Jobst Bürgi.

Napier

Briggs

Tavoitteena oli helpottaa mm. tähtitieteen numerolaskuja, erityisesti kerto- ja jakolaskuja sekä potenssiinkorotuksia.

Idea perustuu kertolaskun muuntamiseen yhteenlaskuksi, jakolaskun vähennyslaskuksi ja potenssiinkorotuksen kertolaskuksi edellä esitettyjen kaavojen avulla:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log(x/y) = \log x - \log y \quad \text{ja} \quad \log(x^b) = b \log x.$$

Tätä varten tarvittiin logaritmitaulut, joista voitiin löytää annetun luvun logaritmi ja kääntäen annetun logaritmin perusteella vastaava luku.

Logaritmitauluja käytettiin numeeristen laskujen suorittamiseen 1970-luvun alkuun saakka, jolloin elektroniset laskimet syrjäyttivät ne. Vielä 60-luvulla jokainen lukiolainen perehtyi logaritmitaulujen käyttöön.

Mikäli laskujen tarkkuusvaatimus ei ollut kovin suuri — noin kolme merkitsevää numeroa riitti — käytettiin logaritmitaulujen sijasta laskuviivainta. Tämäkin perustuu logaritmien käyttöön, mutta luvun ja sen logaritmin välinen muunnos on korvattu valmiilla asteikolla ja logaritmien yhteen- tai vähennyslaskua vastaa laskuviivaimen kielen siirto. Taskulaskimien tulo siirsi laskuviivaimetkin historiaan.

Ennen logaritmien keksimistä oli numeerisissa laskuissa käytössä toinen samantyyppinen idea. Trigonometrian kaava

trigonometria (johdannaiskaavat)

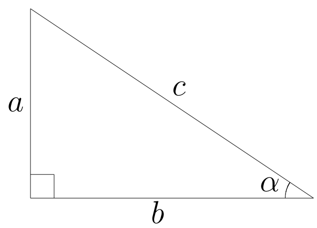
$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

nimittäin muuntaa myös kertolaskun yhteenlaskuiksi. Tulontekijät on ensin kosinitaulukon avulla tulkittava kulmien α ja β kosineiksi, minkä jälkeen saadaan taulukosta kulmien $\alpha+\beta$ ja $\alpha-\beta$ kosinit. Tulo on puolet näiden summasta. Tulontekijät on aluksi skaalattava sopivasti. Menettelyä käytettiin 1500-luvulla tähtitieteessä. Käyttäjistä merkittävimpiä oli tanskalainen Tycho Brahe, jonka laskumenettelyihin tutustuminen osaltaan johdatti John Napierin kehittämään logaritmit.

kosini

Esitiedot: reaalifunktiot
Katso myös: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonometriset funktiot suorakulmaisessa kolmiossa



Olkoon α suorakulmaisen kolmion terävä kulma, a tämän vastainen kateetti, b viereinen kateetti ja c kolmion hypotenuusa. Kulman α *trigonometriset funktiot* määritellään seuraavina sivujen suhteina:

kolmio
kulma (terävä)
kateetti
hypotenuusa
funktio

sini:	vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan eli $\sin\alpha = a/c$;
kosini:	viereisen kateetin suhde hypotenuusaan eli $\cos\alpha = b/c$;
tangentti:	vastaisen kateetin suhde viereiseen eli $\tan\alpha = a/b$;
kotangentti:	viereisen kateetin suhde vastaiseen eli $\cot\alpha = b/a$.

Trigonometrisia funktioita on kaksi muutakin, mutta suorakulmaisen kolmion käsittelyyn riittävät edellä olevat.

Koska suorakulmaisen kolmion terävä kulma α on välillä $0° < \alpha < 90°$, antaa edellä oleva funktioiden määrittelyn vain tällä välillä.

Pythagoraan lauseen mukaan on $a^2 + b^2 = c^2$, jolloin

Pythagoraan lause

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \text{eli} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

(Yleisesti on tapana kirjoittaa $\sin^2\alpha$ merkityksessä $(\sin\alpha)^2$. Jälkimmäinen tapa saattaisi kyllä olla johdonmukaisempi.)

Jos suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on α, niin toinen on $90°-\alpha$. Edellä käytetyin merkinnöin on tällöin

$$\sin(90° - \alpha) = b/c = \cos\alpha \quad \text{ja} \quad \tan(90° - \alpha) = b/a = \cot\alpha$$

ts. kulman α kosini on sama kuin komplementtikulman $90° - \alpha$ sini, samoin kotangentti on komplementtikulman tangentti.

kulma (komplementti-)

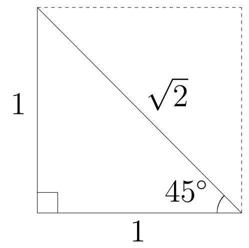
Trigonometristen funktioiden tärkeät arvot

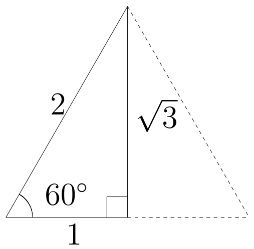
Antamalla kolmion muuntua siten, että $\alpha \to 0°$ tai $\alpha \to 90°$, saadaan trigonometrisille funktioille arvot

$$\begin{array}{lclcl} \sin 0° & = & \cos 90° & = & 0, \\ \sin 90° & = & \cos 0° & = & 1, \\ \tan 0° & = & \cot 90° & = & 0. \end{array}$$

Kulmien 30°, 45° ja 60° trigonometristen funktioiden arvot voidaan helposti laskea neliön ja tasasivuisen kolmion avulla. Pythagoraan lauseen perusteella neliön lävistäjän pituus on $\sqrt{2}$, jos sivun pituus on 1. Samoin on tasasivuisen kolmion korkeusjana $\sqrt{3}$, jos sivun pituus on 2 ja sivun puolikas siis 1.

neliö
tasasivuinen
muistikolmio
Pythagoraan lause





ESITIEDOT: reaalifunktiot

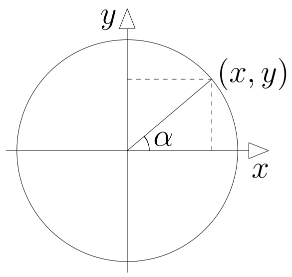
KATSO MYÖS: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonometristen funktioiden yleinen määrittely

Mielivaltaisen kulman α trigonometriset funktiot määritellään yksikköympyrän avulla. kulma (taso-)

Yksikköympyrä on origokeskinen ympyrä, jonka säde on $= 1$. Kulma α sijaitsee siten, että sen kärki on origossa ja oikea kylki (alkukylki) positiivisella x-akselilla. Jos vasen kylki (loppukylki) yhtyy oikeaan kylkeen, kulman suuruus on $= 0$. Kulma kasvaa, kun loppukylki kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan, so. vastapäivään. Kylki voi kiertyä useita kierroksia, jolloin saadaan miten suuria kulmia tahansa. Vastaavasti negatiiviseen suuntaan (myötäpäivään) kiertyminen merkitsee kulman pienenemistä ja negatiivisia kulmia. ympyrä origo origo kiertosuunta (positiivinen) kiertosuunta (positiivinen)

Kulman α suuruus mitataan yleensä radiaaneissa puhuttaessa yleisistä trigonometrisista funktioista. radiaani



Kulman α kiertyvä loppukylki kohdatkoon yksikköympyrän pisteessä (x, y). Kuuden trigonometrisen funktion määritelmät ovat tällöin seuraavat:

sini:	$\sin\alpha = y;$	kosini:	$\cos\alpha = x;$
tangentti:	$\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$	kotangentti:	$\cot\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$
sekantti:	$\sec\alpha = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\alpha};$	kosekantti:	$\csc\alpha = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sin\alpha}.$

Jos α on ensimmäisen neljänneksen kulma, so. $x > 0$, $y > 0$, yhtyvät sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määritelmät suorakulmaisen kolmion avulla annettuihin. Yleiset määritelmät ovat siten aiempien yleistyksiä.

Funktiot sini, kosini ja tangentti ovat yleisesti käytettyjä. Kotangentti, sekantti ja kosekantti ovat harvinaisempia, mutta varsinkin kahta viimeistä näkee melko paljon amerikkalaisissa oppikirjoissa. Myös monet matemaattiset tietokoneohjelmistot käyttävät niitä.

Esitiedot: reaalifunktiot

Katso myös: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonomteristen funktioiden perusominaisuudet

Koska yksikköympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 1$, on ilmeisestikin kaikilla kulmilla α voimassa

yhtälö

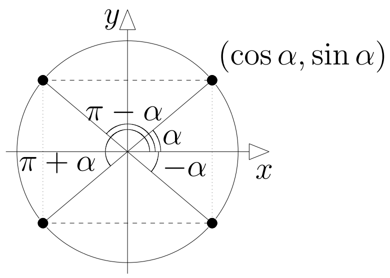
kulma (taso-)

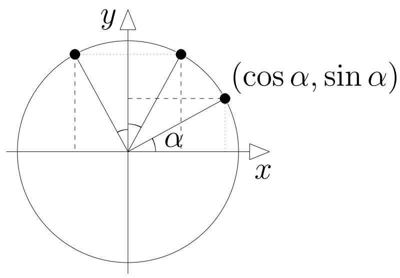
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

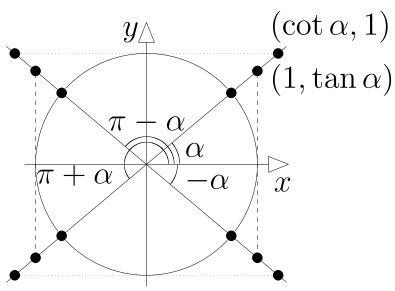
Määritelmien perusteella on ilmeistä, että trigonometristen funktioiden arvojen välillä vallitsee yksinkertaisia yhteyksiä; tärkeimmät ovat seuraavat:

$$\begin{array}{ll}
\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; & \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \\
\cos(-\alpha) = \cos\alpha; & \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha; \\
\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha; & \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha; \\
\tan(-\alpha) = -\tan\alpha; & \\
\cot(-\alpha) = -\cot\alpha; & \\
\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha; & \cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha.
\end{array}$$

Näiden hahmottaminen on yksinkertaisinta ajattelemalla tilannetta yksikköympyrässä. Ulkoa opiskeluun tuskin on aihetta.







Sini, tangentti, kotangentti ja kosekantti ovat parittomia funktioita, kosini ja sekantti parillisia. Kaikki trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, jaksona 2π. Tangentilla ja kotangentilla on lyhyempikin jakso, nimittäin π.

pariton (funktio)

parillinen (funktio)

jaksollinen (funktio)

pii

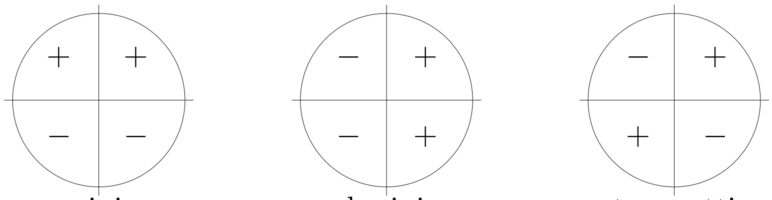
Trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: reaalifunktiot

KATSO MYÖS: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonometristen funktioiden merkkikaaviot

Trigonometriset funktiot saavat seuraavat merkit yksikköympyrän eri neljänneksissä:



sini
kosekantti

kosini
sekantti

tangentti
kotangentti

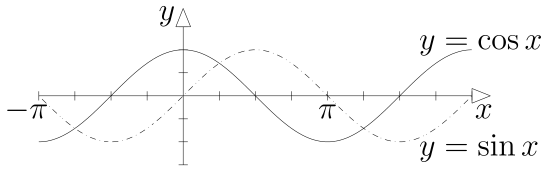
Trigonometriset funktiot **6/7**

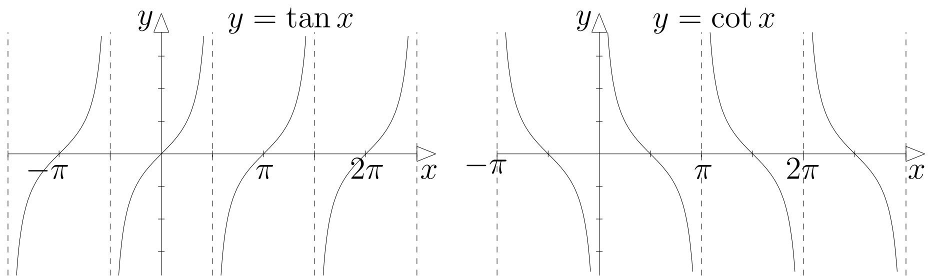
Esitiedot: reaalifunktiot

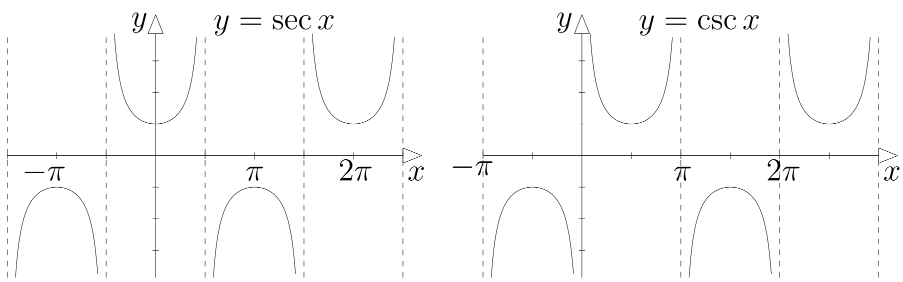
Katso myös: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonometristen funktioiden kuvaajat

Trigonometristen funktioiden kuvaajat näyttävät seuraavilta: kuvaaja







Sini ja kosini ovat määriteltyjä kaikilla argumentin x reaaliarvoilla. Muut funktiot ovat määriteltyjä muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa. Funktioiden lähtöjoukot ovat siten seuraavat: lähtöjoukko

$$\begin{array}{llll}
\sin x, & x \in \mathbb{R}; & \cos x, & x \in \mathbb{R}; \\
\tan x, & x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; & \cot x, & x \neq n\pi; \\
\sec x, & x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; & \csc x, & x \neq n\pi.
\end{array}$$

Funktioiden sini ja kosini arvot ovat välillä $[-1, 1]$, tangentti ja kotangentti saavat kaikki reaaliarvot, sekantin ja kosekantin arvot ovat itseisarvoltaan ≥ 1.

väli (reaaliakselin)

itseisarvo (reaaliluvun)

Esitiedot: reaalifunktiot

Katso myös: trigonometrian kaavat, kolmio, kulma

Trigonometristen funktioiden historiaa

Trigonometrian ja trigonometristen kaavojen — funktioita sitovina algebrallisina yhtälöinä — merkittävä kehitys ajoittuu 1500-luvulle. Huomattavana nimenä kannattaa mainita ranskalainen lakimies François Viète, latinalaisittain Franciscus Vieta, jonka harrastuksena oli matematiikka ja joka saavutti moniakin merkittäviä tuloksia.

trigonometria
algebra
Viète

Trigonometrian historia sinänsä ulottuu paljon kauemmas. Nimitys tarkoittaa kolmioiden kulmien mittaamista, jolla on ollut käyttönsä maanmittauksessa ja tähtitieteessä vanhalta ajalta lähtien. Trigonometrisina pidettäviä tarkasteluja, joskin ulkonäöltään meidän trigonometriastamme täysin poikkeavia, on jo Ptolemaioksen kirjoituksissa 100-luvulla jKr. Länsimaisen trigonometrian ensimmäinen merkittävä nimi on Königsbergissä (nykyään Kaliningrad) syntynyt ja Keski-Euroopassa vaikuttanut Johannes Regiomontanus 1400-luvulla.

Ptolemaios
Regiomontanus

Trigonometristen funktioiden teoria kompleksialueelle ulotettuna (mitä tässä ei käsitellä) on peräisin 1700-luvulta. Kehittäjiä ovat ranskalainen Abraham de Moivre ja ennen muuta sveitsiläissyntyinen monissa Euroopan maissa työskennellyt Leonhard Euler.

Euler

Esitiedot: trigonometriset funktiot

Katso myös:

Ulkoa muistettavat peruskaavat

Trigonometrisia funktioita koskevia kaavoja on paljon. Seuraavassa esitetään tärkeimmät ja lyhyet ohjeet niiden muistamiseen. Varsinaisesti ulkoa opeteltavia kaavoja lienee vain kolme: sinin ja kosinin neliösumma on $= 1$, sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
sini
kosini

On huomattava, että kaavoja usein tarvitaan myös oikealta vasemmalle luettuina. Jonkin lausekkeen sieventäminen nimittäin saattaa edellyttää sen tunnistamista jonkin kaavan vasemman tai oikean puolen tyyppiä olevaksi.

Sinin ja kosinin määrittely yksikköympyrän avulla antaa kaikilla kulmilla x voimassa olevan *sinin ja kosinin peruskaavan*

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Vektorialgebraa, lähinnä skalaari- ja vektorituloa käyttäen saadaan *sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat*:

skalaaritulo
vektoritulo

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Vastaavat vähennyslaskukaavat $\sin(x-y) = \ldots$ ja $\cos(x-y) = \ldots$ saadaan edellä olevista kirjoittamalla y:n paikalle $-y$ ja käyttämällä kaavan oikealla puolella hyväksi sinifunktion parittomuutta ja kosinifunktion parillisuutta.

pariton (funktio)
parillinen (funktio)

Jakamalla nämä kaavat puolittain ja supistamalla oikea puoli lausekkeella $\cos x \cos y$ saadaan *yhteenlaskukaava tangentille*

trigonometrinen funktio (symmetria)
supistaminen

$$\boxed{\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}$$

(Tämän kaavan ulkoa opetteluun tuskin on tarvetta. Kaavan johto, so. sinin ja kosinin kaavojen puolittainen jakaminen ja senjälkeinen supistaminen on tehtävissä varsin nopeasti.)

ESITIEDOT: trigonometriset funktiot

KATSO MYÖS:

Helposti johdettavat kaavat

Kaksinkertaisen argumentin kaavat saadaan asettamalla sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoihin $y = x$ ja käyttämällä kosinin tapauksessa hyväksi peruskaavaa muodossa $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ja $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

sini
kosini

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}}$$

Harvemmin tarvittavia ovat seuraavat kaavat:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}}$$

Nämä saadaan johdetuiksi sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen avulla seuraavaan tapaan: Laskemalla yhteen kaavat

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

saadaan

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Sijoittamalla tähän $x = \alpha + \beta$ ja $y = \alpha - \beta$, jolloin $\alpha = \frac{1}{2}(x+y)$ ja $\beta = \frac{1}{2}(x-y)$, päädytään ryhmän ensimmäiseen kaavaan. Muut saadaan vastaavasti.

Kaksinkertaisen kulman kosinin kaavoista $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ja $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ saadaan sinin ja kosinin neliöt ratkaisemalla

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{aligned}}$$

ESITIEDOT: trigonometriset funktiot

KATSO MYÖS:

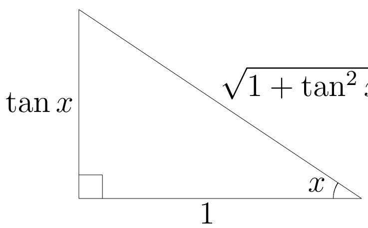
Trigonometristen funktioiden lausuminen toistensa avulla

Mikä tahansa trigonometrinen funktio voidaan lausua minkä tahansa muun trigonometrisen funktion avulla. Nämä kaavat voidaan johtaa käyttämällä edellä johdettuja kaavoja hyväksi, mutta helpoimmin ne voidaan löytää tarkastelemalla sopivaa suorakulmaista kolmiota.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

kolmio

Olkoon esimerkkinä muiden funktioiden lausuminen tangentin avulla.



Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka toinen terävä kulma on x ja tämän viereisen kateetin pituus 1. Vastainen kateetti on tällöin $\tan x$ tangentin määritelmän mukaan ja hypotenuusa $\sqrt{1+\tan^2 x}$ Pythagoraan lauseen mukaan. Kolmiosta voidaan lukea suoraan muut trigonometriset funktiot:

kulma (terävä)
kateetti
hypotenuusa
Pythagoraan lause

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

Päättelyssä on luonnollisestikin $0 < x < \pi/2$. Tulos on kuitenkin pätevä muillekin kulmille x, kun neliöjuurten eteen lisätään $\pm$-merkit. Siis

neliöjuuri

$$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

Kumpi merkki on oikea, riippuu siitä yksikköympyrän neljänneksestä, missä kulma x on. Se on siis pääteltävä erikseen jokaisessa yksityistapauksessa esimerkiksi trigonometristen funktioiden merkkikaavioiden avulla.

trigonometrinen funktio (merkkikaavio)

Samantyyppisellä menettelyllä voidaan trigonometriset funktiot lausua muunkin funktion kuin tangentin avulla. Tällöin on vain valittava sopivasti sivu, jonka pituudeksi otetaan 1.

Esitiedot: trigonometriset funktiot
Katso myös:

Trigonometriset yhtälöt

Trigonometristen yhtälöiden ratkaisemisessa pyritään yhtälöä sieventämään trigonometrian kaavojen avulla. Tavoitteena on esimerkiksi saattaa yhtälö muotoon $\sin f(x) = \sin g(x)$ tai vastaavaan jonkin muun trigonometrisen funktion sisältävään muotoon.

yhtälö (transkendentti-)

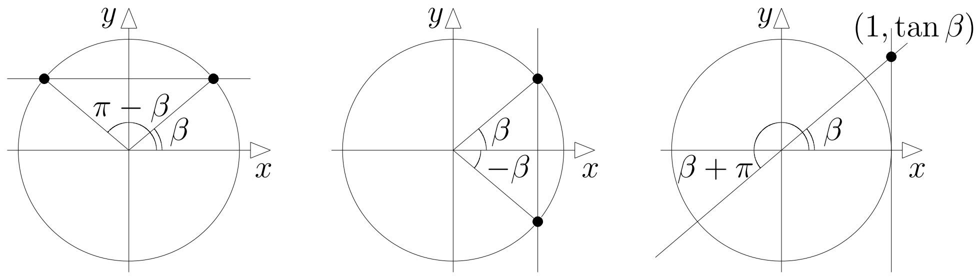
trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

Näistä yhtälöistä voidaan pudottaa trigonometrinen funktio pois ottamalla huomioon funktion symmetriaominaisuudet ja jaksollisuus. Eri funktioiden tapauksissa tämä merkitsee seuraavaa:

jaksollinen (funktio)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha = \sin\beta \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\\
\cos\alpha = \cos\beta \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi,\\
\tan\alpha = \tan\beta \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi.
\end{aligned}$$

Symboli k tarkoittaa kaikkialla mitä tahansa kokonaislukua.



ESITIEDOT: trigonometriset funktiot

KATSO MYÖS:

Esimerkki 1 trigonometrisesta yhtälöstä

Yhtälö $\sin 2x = \cos x$ voidaan ratkaista kahdellakin tavalla.

1) Sinin kaksinkertaisen kulman kaavan avulla yhtälö saadaan muotoon $2 \sin x \cos x = \cos x$, mikä ilmeisesti toteutuu, jos $\cos x = 0$ tai $\sin x = \frac{1}{2}$.

sini

kosini

Koska $\cos(\pi/2) = 0$, vastaa edellinen tapaus yhtälöä $\cos x = \cos(\pi/2)$, mistä seuraa $x = \pm\pi/2 + 2k\pi$. Tämä voidaan myös kirjoittaa muotoon

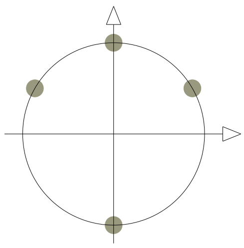
$$x = \pi/2 + n\pi.$$

Luvut k ja n ovat kokonaislukuja.

Koska $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, saadaan jälkimmäisestä vaihtoehdosta $\sin x = \sin(\pi/6)$, jolloin

$$x = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \pi/6 + 2k\pi = 5\pi/6 + 2k\pi.$$

Yhden kierroksen alueella on siis seuraavan kuvion mukaiset juuret:



2) Yhtälö voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa muotoon $\sin 2x = \sin(\pi/2 - x)$, jolloin saadaan

$$2x = \pi/2 - x + 2k\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - (\pi/2 - x) + 2k\pi.$$

Näistä voidaan ratkaista x:

$$x = \pi/6 + 2k\pi/3 \quad \text{tai} \quad x = \pi/2 + 2k\pi.$$

Tulos on sama kuin edellä, vaikka juuret onkin ryhmitelty hieman eri tavoin.

Esimerkki 2 trigonometrisesta yhtälöstä

Yhtälö $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ voidaan ratkaista sijoittamalla

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

jolloin saadaan juuriyhtälö tuntemattomana $\sin x$. Tämän ratkaisu tapahtuu siirtämällä termejä yhtälössä sopivasti ja korottamalla saatu yhtälö puolittain neliöön. Seurauksena voi olla (ja onkin) että saadaan ylimääräisiä juuria, jotka eivät toteutakaan alkuperäistä yhtälöä. yhtälö (juuri-)

Neliöön korotus voidaan kuitenkin tehdä yksinkertaisemminkin. Korottamalla alkuperäinen yhtälö suoraan neliöön saadaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 2, \quad \text{mistä seuraa} \quad \sin 2x = 1.$$

Tällöin $2x = \pi/2 + 2k\pi$ eli $x = \pi/4 + k\pi$. Neliöön korotus on tällöinkin tuonut mukanaan ylimääräisiä juuria. Tarkistus osoittaa, että kelvollisia ovat ainoastaan arvot

$$x = \pi/4 + 2k\pi.$$

Ratkaisu voidaan myös perustaa toisenlaiseen ideaan:

Jakamalla alkuperäinen yhtälö luvulla $\sqrt{2}$ saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \quad \text{eli}$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1,$$

mistä sinin yhteenlaskukaavan avulla seuraa $\sin(x + \pi/4) = 1$. Tällöin $x + \pi/4 = \pi/2 + 2k\pi$, mikä antaa saman ratkaisun kuin edellä.

Arcus-funktiot **1/3**

ESITIEDOT: reaalifunktiot, trigonometriset funktiot

KATSO MYÖS: trigonometrian kaavat

Arcus-funktioiden määritelmät

Trigonometriset funktiot eivät sellaisinaan ole bijektioita eikä niillä siis ole käänteisfunktioita. Jos funktioiden määrittelyjoukkoja kuitenkin sopivasti rajoitetaan, saadaan bijektiot. Neljän tärkeimmän funktion osalta on rajoitus tehtävä seuraavasti:

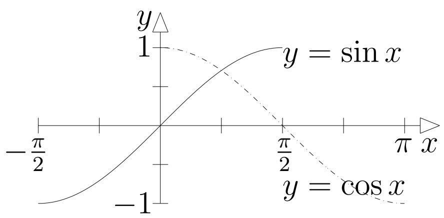
bijektio
käänteisfunktio
käänteisfunktio
määrittelyjoukko

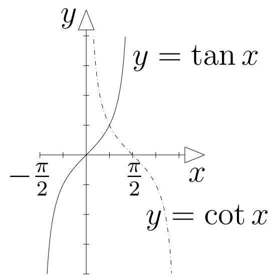
$$\begin{aligned} \sin: &\quad [-\pi/2,\ \pi/2] \ \to\ [-1,\ 1]\ ; \\ \cos: &\quad [0,\ \pi] \ \to\ [-1,\ 1]\ ; \\ \tan: &\quad]-\pi/2,\ \pi/2[\to\ \mathbb{R}\ ; \\ \cot: &\quad]0,\ \pi[\to\ \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

väli
(reaaliakselin)

Täten rajoitettuina funktiot ovat surjektioita, ts. jokainen maalijoukon piste on myös jonkin määrittelyjoukon pisteen kuva. Funktioista sin ja tan ovat aidosti kasvavia, cos ja cot aidosti väheneviä; jokaiselle maalijoukon pisteelle kuvautuu siis täsmälleen yksi lähtöjoukon piste, jolloin funktiot ovat todellakin bijektioita.

surjektio
maalijoukko
kasvava (funktio)
kasvava (funktio)
vähenevä (funktio)
vähenevä (funktio)
lähtöjoukko





Tällöin funktioilla on käänteisfunktiot. Näitä kutsutaan *arcus-funktioiksi* eli *syklometrisiksi funktioiksi* ja merkitään

$$\begin{aligned} \arcsin: &\quad [-1,\ 1] \ \to\ [-\pi/2,\ \pi/2]\ ; \\ \arccos: &\quad [-1,\ 1] \ \to\ [0,\ \pi]\ ; \\ \arctan: &\quad \mathbb{R} \ \to\ ]-\pi/2,\ \pi/2[\ ; \\ \operatorname{arccot}: &\quad \mathbb{R} \ \to\ ]0,\ \pi[\ . \end{aligned}$$

Funktioiden nimet luetaan *arkussini*, *arkuskosini*, jne.

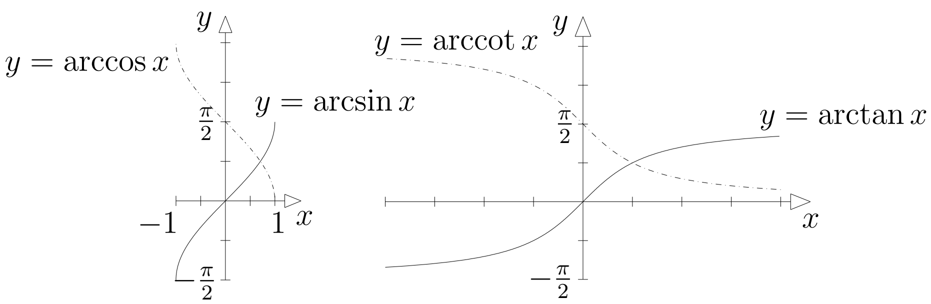
Sana *arcus* tarkoittaa kaarta. Radiaaneja käytettäessä kaaren pituus on sama kuin vastaava yksikköympyrän keskuskulma. Merkintä $\alpha = \arcsin y$ on siis ymmärrettävä siten, että kyseessä on sinin arvoa y vastaava kaari eli kulma α. Muut arcus-funktioiden nimet vastaavaan tapaan.

radiaani
keskuskulma

ESITIEDOT: reaalifunktiot, trigonometriset funktiot
KATSO MYÖS: trigonometrian kaavat

Arcus-funktioiden kuvaajat; päähaarat ja sivuhaarat

Arcus-funktioiden kuvaajat ovat seuraavat: kuvaaja



Sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määrittelyjoukkoja voitaisiin tietenkin rajoittaa monella muullakin tavalla, jotta funktioista tulisi bijektioita; esimerkiksi sinin tapauksessa $[\pi/2,\ 3\pi/2] \rightarrow [-1,\ 1]$. Tällöin saatavia käänteisfunktioita kutsutaan arcus-funktioiden *sivuhaaroiksi*. Näiden vastakohtana 'varsinaiset arcus-funktiot' ovat *päähaaroja*.

määrittelyjoukko
bijektio
käänteisfunktio
käänteisfunktio

Laskimet ja numeeriset tietokoneohjelmat sekä nykyään yleensä myös symboliset (lausekkeita käsittelevät) tietokoneohjelmat tarkoittavat arcus-funktioilla päähaaraa. Joissakin symbolisissa ohjelmissa arcus-funktio saattaa tarkoittaa 'sopivaa' haaraa; vastuu laskuista jää tällöin käyttäjälle. Vanhemmassa kirjallisuudessa funktionnimi (arcsin, jne.) tarkoittaa, että huomioon otetaan kaikki haarat. Jos tarkoitetaan päähaaraa, pannaan viiva nimen päälle: $\overline{\text{arc}}\text{sin}$ tai $\overline{\text{arcsin}}$.

Varsinkin amerikkalainen kirjallisuus merkitsee käänteisfunktion merkintätavan mukaan $\arcsin x = \sin^{-1} x$ jne. Tässä on siis oltava varovainen: Vaikka $\sin^2 x = (\sin x)^2$, niin $\sin^{-1} x = \arcsin x$ eikä suinkaan $1/\sin x$.

ESITIEDOT: reaalifunktiot, trigonometriset funktiot
KATSO MYÖS: trigonometrian kaavat

Arcus-funktioita koskevia kaavoja

Seuraavassa käsitellään vain arcus-funktioiden päähaaroja.

Käänteisfunktion yleisten ominaisuuksien mukaan on

käänteisfunktio
käänteisfunktio

$$\begin{aligned} &\sin(\arcsin y) = y, && \arcsin(\sin x) = x;\\ &\cos(\arccos y) = y, && \arccos(\cos x) = x;\\ &\tan(\arctan y) = y, && \arctan(\tan x) = x;\\ &\cot(\operatorname{arccot} y) = y, && \operatorname{arccot}(\cot x) = x. \end{aligned}$$

Tämä edellyttää, että muuttuja x tai y on ao. funktion määrittelyjoukossa siten kuin edellä on esitetty.

määrittelyjoukko

Vasemmanpuoliset kaavat ovat sikäli ongelmattomampia, että jos muuttuja y yleensä sijaitsee siten, että arcus-funktio on määritelty, niin kaava on oikea. Oikeanpuolisissa kaavoissa muuttujan x on oltava *rajoitetussa* määrittelyjoukossa eli päähaara-alueella — siis esimerkiksi sinin tapauksessa välillä $[-\pi/2,\ \pi/2]$ — jotta kaava olisi voimassa.

Esimerkiksi $\arcsin(\sin(\pi/6)) = \pi/6$, mutta jos $x = 5\pi/6$, onkin laskettava seuraavasti:

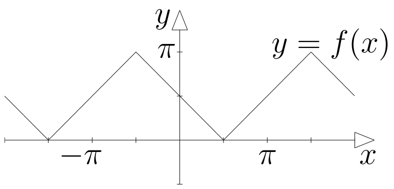
$$\arcsin(\sin(5\pi/6)) = \arcsin(\sin(\pi - 5\pi/6)) = \arcsin(\sin(\pi/6)) = \pi/6.$$

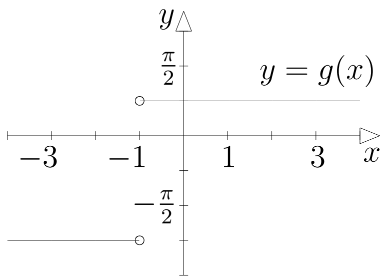
Tässä on käytetty hyväksi sinin symmetriaa: $\sin x = \sin(\pi - x)$.

trigonometrinen funktio (symmetria)

Yhdistämällä arcus-funktioita sopivasti saadaan funktioita, joiden kuvaajat saattavat näyttää hieman yllättäviltäkin. Esimerkiksi:

$$f(x) = \arccos(\sin x), \qquad g(x) = \arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x}.$$





Esitiedot: reaalifunktiot, eksponenttifunktio
Katso myös: trigonometriset funktiot, trigonometrian kaavat

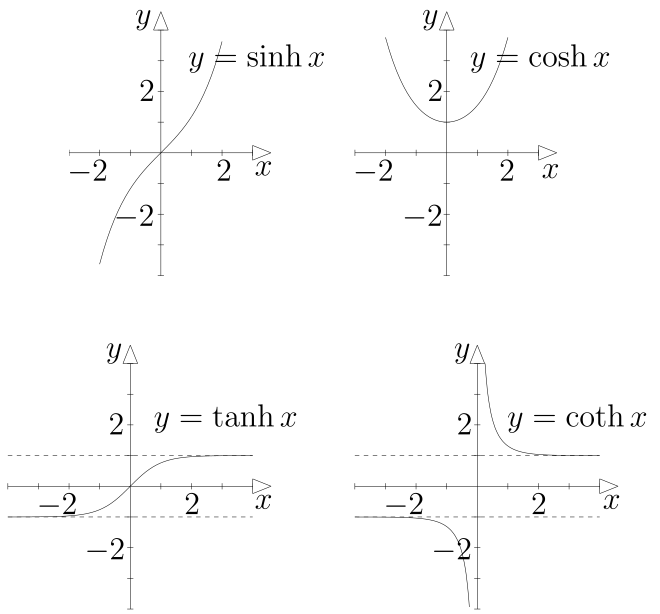
Hyperbelifunktioiden määrittely

Hyperbelifunktiot eli *hyperboliset funktiot* määritellään yksinkertaisilla lausekkeilla: funktio

$$
\begin{aligned}
&\text{hyperbelisini:} && \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});\\
&\text{hyperbelikosini:} && \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x});\\
&\text{hyperbelitangentti:} && \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1};\\
&\text{hyperbelikotangentti:} && \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.
\end{aligned}
$$

Funktiot ovat kaikilla reaaliarvoilla määriteltyjä hyperbelikotangenttia lukuunottamatta; tämän kohdalla on oletettava $x \neq 0$.

Kuvaajat:



Hyperbelifunktioita tutki ensimmäisenä sveitsiläis-saksalainen Johann Heinrich Lambert 1700-luvulla. Lambert (pii)

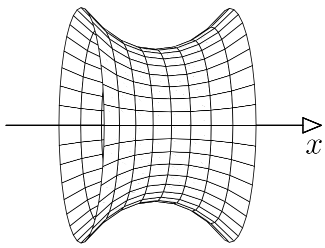
Ketjukäyrä ja katenoidi

Päistään kiinnitetty vapaasti riippuva ketju ottaa muodon

$$y = C \cosh(x/C),$$

missä C on vakio. Tämän johdosta hyperbelikosinin kuvaajaa usein kutsutaankin *ketjukäyräksi*. käyrä (taso-)

Ketjukäyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy pinta, jota kutsutaan *katenoidiksi*. Tämä on ns. minimipinta, jonka muodon ottaa esimerkiksi sopivasti tuettu saippuakalvo. pinta



ESITIEDOT: reaalifunktiot, eksponenttifunktio

KATSO MYÖS: trigonometriset funktiot, trigonometrian kaavat

Hyperbelifunktiot ja trigonometriset funktiot

Hyperbelifunktioiden ja trigonometristen funktioiden välillä vallitsee tietynlainen samankaltaisuus. Tämä näkyy mm. funktioita koskevista kaavoista. Sama koskee funktioiden derivaattoja. Erojakin kuitenkin on. Hyperbelifunktiot esimerkiksi eivät ole jaksollisia.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

derivaatta

jaksollinen (funktio)

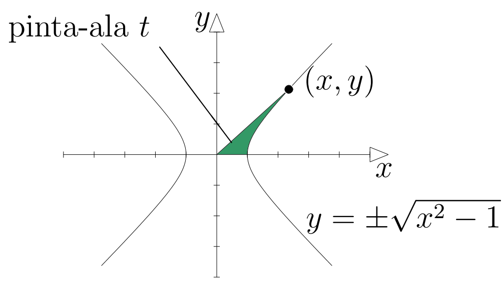
Hyperbelifunktioiden ja trigonometristen funktioiden sukulaisuus tulee täysin ilmeiseksi vasta laajennettaessa funktioiden määrittely kompleksitasoon. Tällöin hyperbelifunktioistakin tulee jaksollisia. Lähemmin ei asiaa tässä käsitellä.

kompleksitaso

Hieman epämääräisesti voidaan sanoa, että hyperbelifunktiot suhtautuvat tasasivuiseen hyperbeliin $x^2 - y^2 = 1$ samaan tapaan, kuin trigonometriset funktiot suhtautuvat yksikköympyrään $x^2 + y^2 = 1$.

hyperbeli (kartioleikkauksena)

hyperbeli (xy-koordinaateissa)



Jos origo yhdistetään hyperbelin pisteeseen (x, y) ja yhdysjanan, hyperbelinkaaren ja x-akselin rajaamaa pinta-alaa merkitään t, niin $x = \cosh(2t)$, $y = \sinh(2t)$. Tämä on osoitettavissa integraalilaskennan avulla.

määrätty integraali

Vastaava tulos on voimassa myös trigonometrisella puolella: Koska yksikköympyrän keskuskulmaa α vastaavan sektorin ala on $t = \frac{1}{2}\alpha$, on $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$.

keskuskulma

sektori

sektori (ala)

ESITIEDOT: reaalifunktiot, eksponenttifunktio
KATSO MYÖS: trigonometriset funktiot, trigonometrian kaavat

Hyperboliset kaavat

Monilla trigonometrian kaavoilla on hyperboliset vastineensa. Nämä ovat samanmuotoisia kuin trigonometriassa, mutta eräitä merkkieroja esiintyy, kuten seuraava osoittaa.

trigonometria (peruskaavat)

trigonometria (johdannaiskaavat)

Kirjoittamalla funktiot eksponenttifunktion avulla voidaan mekaanisilla laskuilla todeta oikeaksi kaava

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Yhteenlaskukaavat saadaan samoin mekaanisilla laskuilla:

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,\\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

Näistä voidaan jatkaa eteenpäin samoin kuin trigonometrian kaavoja johdettaessa.

Hyperbelifunktioiden käyttökelpoisuus perustuu em. samankaltaisuuteen trigonometristen funktioiden kanssa. Kummatkin muodostavat käyttökelpoisen työkalun mm. integrointitehtävissä.

Hyperbolisten ja trigonometristen kaavojen samankaltaisuuden tarkempi analysointi edellyttää funktioiden tarkastelua kompleksialueella; tähän ei kuitenkaan paneuduta.

kompleksitaso

Esitiedot: reaalifunktiot, hyperbelifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio
Katso myös: arcus-funktiot

Area-funktioiden määritelmät

Hyperbelisini on aidosti kasvava funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sillä on tällöin käänteisfunktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tätä merkitään arsinh; luetaan yleensä latinan tapaan *area sinus hyperbolicus*. Siis:

kasvava (funktio)
kasvava (funktio)
käänteisfunktio
käänteisfunktio

$$y = \operatorname{arsinh} x \quad \iff \quad x = \sinh y.$$

Hyperbelikosini on aidosti kasvava bijektio vain, jos sen määrittelyaluetta sopivasti rajoitetaan: $[0, \infty[\to [1, \infty[$. Tällöin sillä on käänteisfunktio *area cosinus hyperbolicus* $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$,

bijektio

$$y = \operatorname{arcosh} x \quad \iff \quad x = \cosh y.$$

Määrittelyalue voitaisiin yhtä hyvin rajoittaa funktion aidosti vähenevään osaan: $]-\infty, 0] \to [1, \infty[$. Tätä vastaten saadaan myös käänteisfunktio, jota kutsutaan funktion *sivuhaaraksi*. Sen arvot ovat päähaara-arvojen vastalukuja: $-\operatorname{arcosh} x$.

vähenevä (funktio)
vähenevä (funktio)

Hyperbelitangentti on aidosti kasvava bijektio $\mathbb{R} \to]-1, 1[$, jolloin sillä on käänteisfunktio $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$y = \operatorname{artanh} x \quad \iff \quad x = \tanh y.$$

Vastaavaan tapaan voidaan menetellä myös hyperbelikotangentin suhteen.

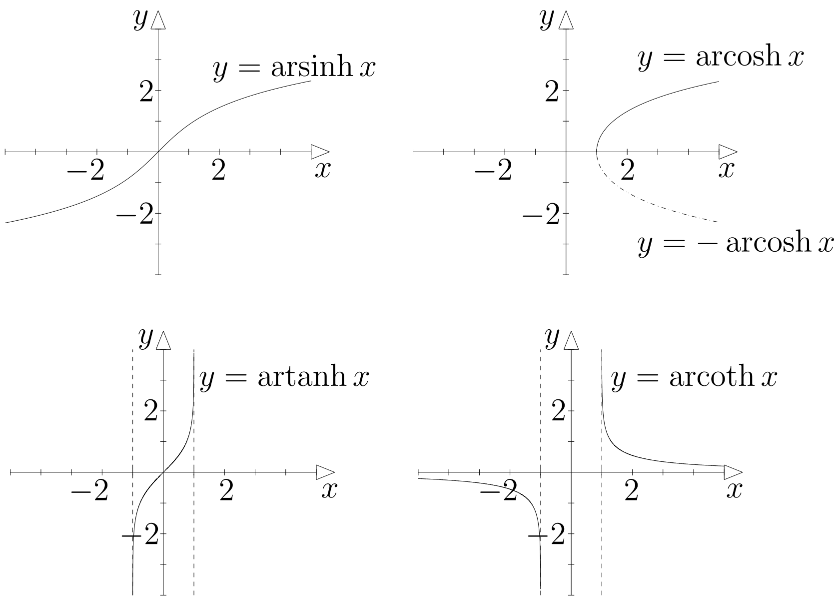
Nimitys *area* tarkoittaa erästä pinta-alaa; vrt. hyperbolisten ja trigonometristen funktioiden vertailuun. Tämän johdosta funktionnimien alkuosan tuleekin olla ar eikä arc, vaikka jälkimmäistäkin toisinaan näkee. Minkään kaaren (arcus) pituuteen ei funktioiden arvoja nimittäin voida luonnollisella tavalla liittää.

hyperbeli- ja trigonometriset funktiot

ESITIEDOT: reaalifunktiot, hyperbelifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio
KATSO MYÖS: arcus-funktiot

Area-funktioiden kuvaajat

Area-funktioiden kuvaajat ovat seuraavan näköiset:



Esitiedot: reaalifunktiot, hyperbelifunktiot, eksponenttifunktio, logaritmifunktio
Katso myös: arcus-funktiot

Area-funktioiden lausuminen logaritmin avulla

Koska hyperbelifunktiot ovat aina lausuttavissa eksponenttifunktion avulla, voidaan area-funktiot esittää logaritmin avulla.

eksponenttifunktio

logaritmifunktio

Ratkaisemalla y yhtälöstä $x = \sinh y$ saadaan $y = \operatorname{arsinh} x$. Toisaalta voidaan eksponenttifunktion avulla kirjoittaa

$$x = \tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \quad \text{eli} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0,$$

mikä on toisen asteen yhtälö tuntemattomana e^y. Tämän ratkaisu on $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Miinusmerkki ei kelpaa, koska tällöin saataisiin negatiivinen arvo eksponenttifunktiolle. Siis $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

yhtälö (toisen asteen)

On siis saatu esitys

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1,$$

ja

$$\operatorname{artanh} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

ESITIEDOT: funktiokäsite

KATSO MYÖS: summa ja tulo, lukujonon raja-arvo, sarjat

Lukujonon käsite

Reaalisella *lukujonolla* tarkoitetaan peräkkäin lueteltuja reaalilukuja: reaaliluku

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots\ .$$

Vastaavasti puhutaan kompleksisesta lukujonosta, jos luvut a_k ovat kompleksilukuja. Yleensä ajatellaan, että lukuja on jonossa äärettömän paljon. Lukuja kutsutaan myös jonon *termeiksi*. kompleksiluku

Esimerkiksi

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \dots \qquad \text{ja} \qquad 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i,\ \dots$$

ovat lukujonoja. Edellinen on reaalinen jono, joka muodostuu luvun 2 potensseista, jälkimmäinen imaginaariyksikön i potensseista muodostuva kompleksinen jono. potenssi (kokonaisluku-) imaginaariyksikkö

Itse asiassa lukujono on funktio luonnollisten lukujen joukosta reaali- tai kompleksilukujen joukkoon, $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tai $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Funktion arvoja on vain tapana merkitä siten, että argumentti esitetäänkin alaindeksinä: $F(1) = a_1$, $F(2) = a_2$, yleisesti $F(k) = a_k$. Kakkosen potenssit käsittävässä lukujonossa on siis kyse funktiosta $F(k) = 2^{k-1}$. funktio luonnollinen luku

Indeksoinnin ei välttämättä tarvitse alkaa luvusta 1, vaan yleensä jostakin lausekkeen kannalta luonnollisesta aloitusarvosta. Funktion F lähtöjoukko voi siis olla luonnollisten lukujen joukko täydennettynä tai supistettuna joillakin arvoilla. Esimerkiksi kakkosen potenssien muodostama jono voidaan aivan hyvin esittää myös muodossa $F(k) = a_k = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Toisena esimerkkinä olkoon $a_k = 1/\ln k$, $k = 2, 3, 4, 5, \dots$.

ESITIEDOT: funktiokäsite
KATSO MYÖS: summa ja tulo, lukujonon raja-arvo, sarjat

Eksplisiittisesti ja rekursiivisesti määritellyt lukujonot

Jos lukujono määritellään antamalla jonon luvulle lauseke indeksin funktiona, esimerkiksi

$$a_k = 2^k \quad \text{tai} \quad a_k = (1 + \tfrac{1}{k})^k,$$

sanotaan, että jono on määritelty *eksplisiittisesti*.

Toisena vaihtoehtona on määritellä jono *rekursiivisesti*, jolloin ilmoitetaan sopiva määrä jonon alkupään lukuja ja yhtälö, joka kertoo, miten seuraava luku lasketaan edellisten avulla. Esimerkiksi määrittely

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k,\ k = 1, 2, 3, \dots\ ,$$

antaa ns. *Fibonacci'n luvut* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Määrittelyn perusteella on selvää, että nämä ovat kaikki kokonaislukuja.

Tämäkin lukujono on mahdollista määritellä myös eksplisiittisesti, vaikka lausekkeen löytäminen ei aivan yksinkertaista olekaan:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Lasketaanpa lauseke millä tahansa indeksin k arvolla, tuloksena on neliöjuurista huolimatta aina Fibonacci'n luku.

Aritmeettinen ja geometrinen jono

Lukujonoa sanotaan *aritmeettiseksi*, jos jonon kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio:

$$a_1 \text{ annettu}, \quad a_{k+1} = a_k + d, \; k = 1, 2, 3, \ldots \; .$$

Eksplisiittisessä muodossa tämä on $a_k = a_1 + (k-1)d$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Jono on *geometrinen*, jos kahden peräkkäisen luvun suhde on vakio:

$$b_1 \text{ annettu}, \quad b_{k+1} = qb_k, \; k = 1, 2, 3, \ldots \; ,$$

tai eksplisiittisesti $b_k = q^{k-1}b_1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Sekä aritmeettisen että geometrisen jonon tapauksessa voidaan johtaa lauseke jonon n ensimmäisen luvun summalle.

summa
summamerkintä

Aritmeettinen summa, so. aritmeettisen jonon n ensimmäisen termin summa, on ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo kerrottuna termien lukumäärällä:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Geometrinen summa eli geometrisen jonon n ensimmäisen termin summa on hieman vaikeammin miellettävissä:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1\frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Osoittajassa esiintyy siis suhdeluku q korotettuna termien lukumäärän mukaiseen potenssiin. Poikkeuksena on tapaus $q = 1$, jolloin geometrisen jonon termit ovat kaikki yhtä suuria ja siis $t_n = nb_1$.

Aritmeettinen ja geometrinen summa antavat itse asiassa uudet lukujonot: $s_1, \; s_2, \; s_3, \; \ldots$ ja $t_1, \; t_2, \; t_3, \; \ldots$. Myös s_1 ja t_1 ovat määriteltyjä edellä olevien lausekkeiden avulla: Tällöin on ajateltava, että merkintä $s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k$ tarkoittaa summaa, joka ei oikeastaan summa olekaan, koska siinä on vain yksi termi, a_1; vastaavasti $t_1 = \sum_{k=1}^{1} b_k$.

ESITIEDOT: lukujonot

KATSO MYÖS: funktion raja-arvo, Neperin luku e

Esimerkki lukujonon raja-arvosta

Lukujonossa a_1, a_2, a_3, ... (jossa on äärettömän monta termiä) voivat luvut lähestyä jotakin arvoa, kun jonossa edetään yhä pidemmälle. Tätä arvoa kutsutaan lukujonon *raja-arvoksi* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

rekursiivisesti määritelty lukujono

Esimerkkinä olkoon rekursiivisesti määritelty jono

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{2} + a_n - \tfrac{1}{4}a_n^2, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

jonka termeillä on seuraavia arvoja:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1.0,\\
a_1 &= 1.25,\\
a_2 &= 1.359375,\\
a_3 &= 1.39739990234375,\\
a_4 &= 1.409218280576169,\\
a_5 &= 1.412744239998656,\\
a_6 &= 1.413782668086311,\\
a_7 &= 1.414087309940999,\\
a_8 &= 1.414176579906956,\\
a_9 &= 1.414202730117622,\\
a_{10} &= 1.414210389649588,\\
a_{11} &= 1.414212633101378,\\
a_{12} &= 1.414213290195495,\\
a_{13} &= 1.414213482654103,\\
a_{14} &= 1.414213539023941,\\
a_{15} &= 1.414213555534286,\\
a_{16} &= 1.414213560370054,\\
a_{17} &= 1.414213561786418,\\
a_{18} &= 1.414213562201261,\\
a_{19} &= 1.414213562322766,\\
a_{20} &= 1.414213562358354
\end{aligned}$$

Nämä näyttäisivät lähestyvän lukua $\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$. Itse asiassa näin onkin.

Esitiedot: lukujonot

Katso myös: funktion raja-arvo, Neperin luku e

Lukujonon raja-arvon määritelmä

Raja-arvon täsmällinen määrittely merkitsee edellä mainitun lähestymisen käsitteen täsmentämistä ja tekemistä riippumattomaksi siitä, miten nopeasti luvut raja-arvoa lähestyvät.

Vaatimuksena on, että asetetaanpa miten pieni etäisyyskynnys tahansa, luvut a_n tulevat tätä etäisyyttä lähemmäksi raja-arvoa a, kunhan vain jonossa edetään kyllin pitkälle.

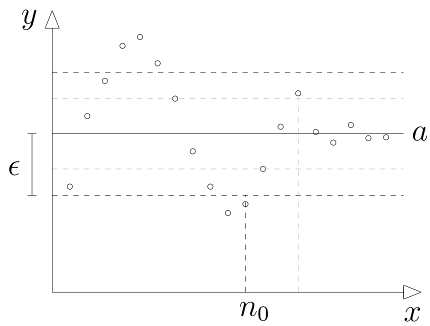
Mitä pienempi etäisyyskynnys asetetaan, sitä pidemmälle jonossa yleensä on edettävä, mutta jokaista etäisyyskynnystä kohden löydetään jonosta kohta, josta eteenpäin luvut ovat kynnysarvoa lähempänä raja-arvoa.

Toisin sanoen: Jokaista etäisyyskynnystä ϵ (> 0) vastaa indeksiraja n_0 siten, että $|a_n - a| < \epsilon$, kun $n > n_0$.

Itseisarvolauseke $|a_n - a|$ on tässä syytä mieltää lukujen a_n ja a väliseksi etäisyydeksi lukusuoralla.

itseisarvo (reaaliluvun)

lukusuora



Määritelmä on pätevä myös kompleksilukujen tapauksessa. Erotuksen itseisarvo voidaan nimittäin mieltää pisteiden a_n ja a väliseksi etäisyydeksi kompleksitasossa.

kompleksiluku

itseisarvo (kompleksiluvun)

Lukujonon suppeneminen ja hajaantuminen; raja-arvo ∞

Jos lukujonolla on eo. määritelmän mukainen raja-arvo, sen sanotaan *suppenevan* eli *konvergoivan*. Vastakohtana on jonon *hajaantuminen* eli *divergoiminen*. Tällöin jonolla ei ole määritelmän mukaista äärellistä raja-arvoa. Hajaantuvia jonoja ovat esimerkiksi $a_n = 2^n$ ja $a_n = (-1)^n$.

Jos lukujono karkaa äärettömyyteen, ts. jonon luvut tulevat miten suuriksi tahansa jonossa edettäessä (esimerkiksi $a_n = 2^n$), merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

ja sanotaan jonon raja-arvon olevan 'ääretön'. Jonoa sanotaan tällöin siis hajaantuvaksi eikä sillä merkinnästä huolimatta ole raja-arvoa eo. määritelmän mielessä.

Vastaavasti määritellään merkintä $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esitiedot: lukujonot

Katso myös: funktion raja-arvo, Neperin luku e

Lukujonon raja-arvon laskeminen

Raja-arvojen laskeminen pohjautuu määritelmän perusteella 'itsestään selviin' tuloksiin sekä summan, erotuksen, tulon ja osamäärän raja-arvoa koskeviin lauseisiin. Lisäksi on syytä tuntea eräitä 'standardiraja-arvoja' (käsittely edempänä), jotka voidaan perustella suoraan määritelmän avulla, vaikkakaan ei aivan yksinkertaisesti.

Itsestään selviä, oikeastaan suoraan määritelmiin palautuvia tuloksia ovat ennen muuta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Tietty varovaisuus 'itsestään selvyydessä' on kuitenkin paikallaan. Erityisesti on huomattava, että jos lauseke näyttäisi rajaprosessissa saavan muodon $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ tai 1^∞, sen raja-arvosta *ei tämän perusteella voida päätellä mitään*. Varsinkin viimeiseksi mainittu on syytä huomata: Esimerkiksi Neperin luku $e = 2.718\ldots$ saadaan raja-arvona $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$, mikä muodollisesti laskien antaa 1^∞ ja siis johtaa kiusaukseen päätellä raja-arvoksi 1. Neperin luku

Raja-arvon laskemisen suhtautuminen laskutoimituksiin ilmenee seuraavista kaavoista, joissa oletetaan, että raja-arvot $\lim_{n\to\infty} a_n$ ja $\lim_{n\to\infty} b_n$ ovat olemassa:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;\\
&\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n \quad (c \text{ vakio});\\
&\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.
\end{aligned}$$

Osamäärää koskevassa kaavassa tulee luonnollisesti nimittäjien olla $\neq 0$.

Esitiedot: lukujonot

Katso myös: funktion raja-arvo, Neperin luku e

Esimerkkejä lukujonojen raja-arvoista

1) Tyypillinen esimerkki eo. kaavojen käytöstä on seuraava lasku, missä on itse asiassa käytetty jokaista kaavaa ja palautettu näiden avulla raja-arvon laskeminen yksittäisten termien raja-arvoihin ja lopulta 'itsestään selvyyteen' $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$:

$$\frac{2n^2+1}{3n^2+4n+7} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}.$$

2) Toisinaan on lauseke kirjoitettava sopivaan uuteen muotoon raja-arvon määrittämiseksi. Koska lauseke $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ saa muodon $\infty-\infty$, kun $n\to\infty$, ei raja-arvosta voida suoraan päätellä mitään. Laventaminen lausekkeella $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$ johtaa kuitenkin tulokseen: laventaminen

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} = \frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Oikeastaan tässä on myös käytetty neliöjuurifunktion jatkuvuutta. (Missä kohdassa?) neliöjuurifunktio jatkuvuus

Raja-arvoja voi luonnollisesti tutkia myös laskemalla numeerisesti jonon lukuja. Tällä tavoin voi usein selvittää ainakin sen, mikä luku raja-arvo *ei* ainakaan ole. Tiettyä varovaisuutta on kuitenkin noudatettava, koska numeerisessa laskennassa aina tapahtuvat pyöristysvirheet voivat aiheuttaa katastrofaalisesti vääriä tuloksia. Ks. esimerkkiä Neperin luvusta edempänä.

ESITIEDOT: lukujonot

KATSO MYÖS: funktion raja-arvo, Neperin luku e

Lukujonojen standardiraja-arvoja

Seuraavat raja-arvot voidaan todistaa määritelmään perustuen. Todistukset eivät kuitenkaan ole aivan lyhyitä. Vrt. vastaaviin funktioiden standardiraja-arvoihin. raja-arvo (standardi-, funktion)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{jos } 0 \le a < 1; \\ 1, & \text{jos } a = 1; \\ \infty, & \text{jos } a > 1; \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \text{missä } a > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Esimerkkinä pyöristysvirheiden numeerisessa laskennassa aiheuttamista ongelmista ovat seuraavat edellä esitetystä jonosta lasketut Neperin luvun likiarvot: Neperin luku

$$\begin{aligned} n &= 10, & a_n &= 2.59374246; \\ n &= 10^4, & a_n &= 2.71814592; \\ n &= 10^7, & a_n &= 2.71828169; \\ n &= 10^{10}, & a_n &= 2.71828205; \\ n &= 10^{13}, & a_n &= 2.71611003; \\ n &= 10^{16}, & a_n &= 1.00000000. \end{aligned}$$

Oikea arvo on $e = 2.71828183\ldots$, joten edellä olevassa listassa likiarvot ensin paranevat ja sitten huononevat, kunnes lopulta päädytään täysin vääriin arvoihin. Selitys on käytetyssä laskentatarkkuudessa, joka on noin $2 \cdot 10^{-16}$. Kun $n \ge 10^{16}$, pyöristyy luku $1 + 1/n$ luvuksi 1, jonka mikä tahansa potenssi on $= 1$. Kuudentoista numeron laskentatarkkuuskaan ei siis riitä kovin hyvien likiarvojen laskemiseen Neperin luvulle.

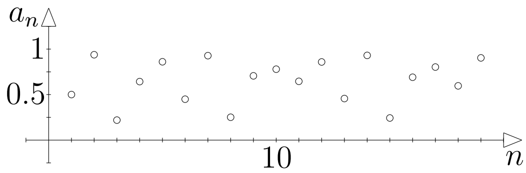
Alaraja-arvo ja yläraja-arvo

rekursiivisesti määritelty lukujono

Rekursiivisesti määritelty lukujono

$$a_1 = 0.5, \quad a_{n+1} = ra_n(1 - a_n), \ n = 1, 2, 3, \dots ,$$

missä $r = 3.75$, on esitetty oheisessa kuvassa. Vaaka-akselilla on indeksiarvot, pystyakselilla jonon lukujen arvot.



Ilmeisestikään jono ei suppene, mutta pysyy rajoitettuna välille $[0, 1]$. Yksittäiset luvut riippuvat voimakkaasti ensimmäisen luvun valinnasta eikä jonossa ole havaittavissa jaksollisuutta. Tämän johdosta sen sanotaan käyttäytyvän *kaoottisesti*.

Koska jono kuitenkin pysyy rajoitettuna, voidaan kysyä, millä välillä sen luvut raja-arvomielessä ovat. Tällöin johdutaan alaraja-arvon ja yläraja-arvon käsitteisiin. Olkoon m_p suurin mahdollinen alaraja niille luvuille, joiden indeksi on $\geq p$, ja M_p pienin mahdollinen yläraja samoille luvuille. Näitä merkitään

$$m_p = \inf_{n \geq p} a_n, \qquad M_p = \sup_{n \geq p} a_n.$$

Symbolit inf ja sup ovat lyhenteitä sanoista *infimum* ja *supremum*.

Voidaan todistaa, että lukujonoilla $m_1, \ m_2, \ m_3, \ \dots$ ja $M_1, \ M_2, \ M_3, \ \dots$ on aina (jonon $a_1, \ a_2, \ a_3, \ \dots$ ollessa rajoitettu) olemassa raja-arvot. Näitä kutsutaan *alaraja-arvoksi* ja *yläraja-arvoksi* (*limes inferior* ja *limes superior*); merkinnät

$$\lim_{p \to \infty} m_p = \liminf_{n \to \infty} a_n, \quad \lim_{p \to \infty} M_p = \limsup_{n \to \infty} a_n.$$

Havainnollisesti sanoen jonon luvut kasautuvat ala- ja yläraja-arvon väliselle alueelle. Jos jono suppenee, ala- ja yläraja-arvo yhtyvät jonon raja-arvoksi.

ESITIEDOT: summa ja tulo, lukujonot, lukujonon raja-arvo
KATSO MYÖS: Neperin luku e, luku π

Sarjan käsite ja suppeneminen

Olkoon annettuna äärettömän monen termin lukujono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$. Kun jonon kaikki termit lasketaan yhteen, saadaan *sarja* lukujono

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Termien indeksoinnin alkukohta voi olla muukin kuin 1.

Äärettömän monen termin yhteenlaskeminen on kuitenkin ongelmallista. Jotta operaatio saadaan täsmällisesti määritellyksi, on meneteltävä seuraavasti.

Muodostetaan sarjan *osasummat*, so. äärellisen monen termin summat, joihin otetaan termejä alusta lähtien jokin äärellinen määrä: summa summamerkintä

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

jne. Yleisesti on n:s osasumma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Osasummat $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$ muodostavat lukujonon. Jos tämä suppenee ja sen raja-arvo on $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee* ja sen *summa* on s. raja-arvo (lukujonon)

Jos sarja ei suppene, sen sanotaan *hajaantuvan*. Hajaantuvalla sarjalla siis jonon $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$ luvut joko heilahtelevat mitään arvoa lähestymättä tai karkaavat äärettömyyteen.

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, ts. suppenevalla sarjalla termit lähestyvät nollaa indeksin kasvaessa. Tämä nähdään helposti: Koska

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1},$$

on $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Voisi luulla, että myös käänteinen olisi voimassa. Näin ei kuitenkaan ole. Vaikka olisikin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, sarja voi silti hajaantua. Esimerkki (harmoninen sarja) edempänä.

Esimerkki 1 sarjoista

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

alkupään osasummat ovat

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}, \\
s_2 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{2}{5}, \\
s_3 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{3}{7}, \\
s_4 &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Näiden perusteella on arvattavissa osasumman yleinen lauseke

$$s_n = \frac{n}{2n+1};$$

tämä voidaan myös todistaa oikeaksi matemaattisella induktiolla.

Koska $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$, niin sarja suppenee ja sen summa on $\frac{1}{2}$.

Ks. myös lukujen e ja π sarjakehitelmiä.

induktio (matemaattinen)
raja-arvo (lukujonon)
Neperin luku (sarja)
pii (sarja)

Esimerkki 2 sarjoista

Sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kutsutaan *harmoniseksi sarjaksi.* Sen osasummalle s_n ei voida esittää lauseketta, mutta sarja voidaan päätellä hajaantuvaksi seuraavalla tavalla.

Koska kaikki harmonisen sarjan termit ovat positiivisia, on osasummien jono kasvava: $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots$. Osasummalle, jonka indeksi on $n = 2^p$, pätee seuraava:

$$\begin{aligned} s_{2^p} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^p} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \\ &\qquad + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \ldots \,. \end{aligned}$$

Pienennetään tässä esityksessä jokaisen termiryhmän termejä siten, että ne korvataan ryhmän viimeisellä termillä. Koska ryhmissä on termejä jonkin kakkosen potenssin osoittama määrä, päädytään seuraavaan:

$$s_{2^p} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \ldots + 2^{p-1} \cdot \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{p}{2}.$$

Antamalla $p \to \infty$ saadaan

raja-arvo (lukujonon)

$$\lim_{p\to\infty} s_{2^p} > \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{p}{2}\right) = \infty.$$

Sarja siis ilmeisestikin hajaantuu.

Huomattakoon, että harmonisen sarjan termit lähestyvät nollaa, ts.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

mutta siitä huolimatta sarja hajaantuu.

Esimerkki osoittaa, että sarjojen suppenemisen tutkiminen ja niiden summien määrittäminen ei ole aivan yksinkertaista.

Geometrinen sarja

Lähes ainoa sarjatyyppi, jonka suppeneminen ja summa voidaan alkeellisin keinoin selvittää on *geometrinen sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Tämän osasumma on geometrinen summa

geometrinen summa

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{jos } q \neq 1.$$

Jos $q = 1$, on $s_n = n + 1$.

Jos $|q| < 1$, on osasummalla s_n raja-arvo

raja-arvo (lukujonon)

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

Jos $q \geq 1$, karkaavat osasummat äärettömyyteen. Jos $q \leq -1$, heilahtelevat osasummat mitään raja-arvoa lähestymättä.

Geometrinen sarja siis suppenee, jos ja vain jos $|q| < 1$. Tällöin sen summa on

$$s = \frac{1}{1-q}.$$

Esitiedot: reaalifunktiot

Katso myös: lukujonon raja-arvo, funktion jatkuvuus

Esimerkki funktion raja-arvosta

Lauseke

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

määrittelee reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion f, jonka lähtöjoukko muodostuu nollasta eroavista reaaliluvuista. Periaatteessa $f(0)$ voidaan määritellä miten tahansa. Luontevaa kuitenkin on ensin tutkia, miten funktio f käyttäytyy, kun x on lähellä origoa.

funktio

funktio (reaali-)

lähtöjoukko

Jos funktion arvot lähestyvät jotakin kiinteää arvoa, kun x lähestyy origoa, kyseistä arvoa sanotaan *funktion raja-arvoksi* origossa. Tällöin on myös luontevaa määritellä $f(0)$ juuri täksi arvoksi (jolloin funktiosta f tulee jatkuva funktio).

jatkuvuus

Numeeriset kokeilut antavat seuraavat tulokset:

$$\begin{aligned}
x &= \pm 0.5, & f(x) &= 0.489669752;\\
x &= \pm 0.05, & f(x) &= 0.499895842;\\
x &= \pm 0.005, & f(x) &= 0.499998958;\\
x &= \pm 0.0005, & f(x) &= 0.499999989.
\end{aligned}$$

Näyttäisi siis, että funktion raja-arvo origossa on $= \frac{1}{2}$. (Numeerisissa kokeiluissa on tosin oltava varovainen, koska pyöristysvirheet voivat yllättäen aiheuttaa jopa täysin virheellisiä tuloksia.)

pyöristysvirhe

Esimerkin tapauksessa raja-arvo todellakin on $= \frac{1}{2}$ ja merkitään

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Esitiedot: reaalifunktiot

Katso myös: lukujonon raja-arvo, funktion jatkuvuus

Funktion raja-arvon määritelmä

Yleisesti reaalifunktion raja-arvon käsite määritellään seuraavalla tavalla: funktio (reaali-)

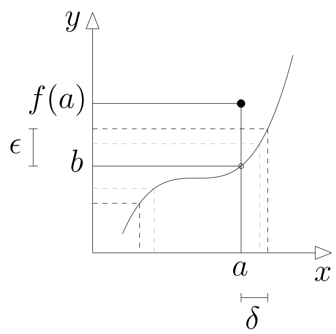
Jotta funktion f raja-arvo pisteessä a olisi b (merkitään $\lim_{x \to a} f(x) = b$), on tilanteen oltava sellainen, että asetetaanpa miten tiukka etäisyysvaatimus tahansa, funktion arvot ovat tätä etäisyyttä lähempänä arvoa b, kun muuttuja x rajoitetaan riittävän lähelle tarkastelukohtaa a.

Mitä tiukempi etäisyysvaatimus on, sitä pienempään pisteen a ympäristöön muuttuja x on yleensä rajoitettava. Jokaista positiivista etäisyyskynnystä vastaa kuitenkin aina jokin, ehkä hyvinkin pieni alue pisteen a ympärillä, jossa vaatimus toteutuu. Funktion arvosta pisteessä a ei tällöin vaadita mitään; funktion ei tarvitse edes olla tässä pisteessä määritelty.

Täsmällisemmin lausuttuna edellä oleva voidaan ilmaista seuraavasti:

Funktion f raja-arvo pisteessä a on b, jos jokaista etäisyyskynnystä ϵ (> 0) kohden on olemassa pisteen a ympäristöä rajaava luku δ (myös > 0) siten, että $|f(x) - b| < \epsilon$, kun $|x - a| < \delta$ ja $x \neq a$. itseisarvo (reaaliluvun)

Itseisarvolausekkeet $|x - a|$ ja $|f(x) - b|$ on syytä mieltää lukujen x ja a, vastaavasti $f(x)$ ja b välisiksi etäisyyksiksi.



Toispuoliset raja-arvot; raja-arvo ∞ ja raja-arvo äärettömyydessä

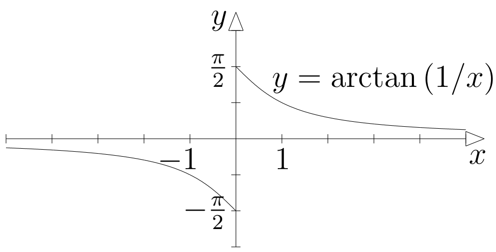
Funktio saattaa käyttäytyä myös siten, että muuttujan x lähestyessä kohtaa a sen arvot lähestyvät eri arvoja riippuen siitä kummalta puolen x lähestyy arvoa a. Tällaisessa tilanteessa puhutaan funktion *oikeanpuolisesta* ja *vasemmanpuolisesta raja-arvosta*. Näitä merkitään

$$\lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a-} f(x),$$

jolloin luvun a perässä oleva plusmerkki tarkoittaa oikeanpuolista, miinusmerkki vasemmanpuolista lähestymistä.

Esimerkki tällaisesta funktiosta on $\arctan(1/x)$ origossa, jolle arcus-funktio

$$\lim_{x \to 0+} \arctan(1/x) = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 0-} \arctan(1/x) = -\tfrac{\pi}{2}.$$



Funktion raja-arvoa voidaan tarkastella myös, kun muuttuja x lähestyy ääretöntä positiivisessa tai negatiivisessa suunnassa. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{tai} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Missä tahansa rajaprosessissa funktion arvot voivat myös lähestyä positiivista tai negatiivista ääretöntä (jolloin raja-arvon ei sanota olevan olemassa, koska se ei ole (äärellinen) reaaliluku). Merkinnät ovat ilmeiset:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \text{jne.}$$

Funktioiden raja-arvon laskeminen

Funktioiden raja-arvojen ja lukujonojen raja-arvojen laskeminen on usein hyvin samantyyppistä. Pohjana ovat 'itsestään selvien' (ts. määritelmän perusteella selvien) tulosten ohella summan, erotuksen, tulon ja osamäärän raja-arvoa koskevat lauseet ja tunnetut funktioiden ominaisuudet. Viimeksi mainittuja ovat mm. tiedot alkeisfunktioiden jatkuvuudesta ja edempänä mainitut standardiraja-arvot (jotka todistetaan suoraan määritelmään vedoten).

raja-arvo (lukujonon)

alkeisfunktio jatkuvuus

Samat varovaisuusvaatimukset 'itsestään selvyyksien' osalta kuin lukujonojen raja-arvoja laskettaessa on tietenkin otettava huomioon.

Raja-arvon laskemisessa tarvitaan usein seuraavia kaavoja, joissa oletetaan, että funktioiden f ja g raja-arvot $\lim_{x\to a} f(x)$ ja $\lim_{x\to a} g(x)$ ovat olemassa:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x);\\
&\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) \quad (c \text{ vakio});\\
&\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x);\\
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.
\end{aligned}$$

Osamäärää koskevassa kaavassa tulee luonnollisesti nimittäjien olla $\neq 0$.

ESITIEDOT: reaalifunktiot

KATSO MYÖS: lukujonon raja-arvo, funktion jatkuvuus

Esimerkkejä funktioiden raja-arvoista

Samantyyppinen tekniikka kuin lukujonojen raja-arvojen laskemisessa soveltuu usein myös funktioiden raja-arvoille. Raja-arvoista voi myös saada tietoa piirtämällä esimerkiksi laskimella tai tietokoneella funktioiden kuvaajia — pyöristysvirheiden aiheuttamia häiriöitä varoen.

raja-arvo (lukujonon)

kuvaaja

pyöristysvirhe

1) Olkoon $a > 0$. Kun $x \to a$, saa seuraava lauseke muodon $0/0$, jolloin sen raja-arvoa ei voida suoraan päätellä. Laventaminen sopivasti johtaa kuitenkin tulokseen:

laventaminen

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Laskun viimeisessä vaiheessa on käytetty tietoa neliöjuurifunktion jatkuvuudesta.

neliöjuurifunktio

jatkuvuus

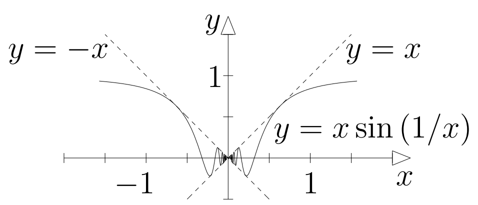
2) Funktio $f(x) = x\sin(1/x)$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Koska sinifunktion arvot ovat argumentista riippumatta itseisarvoltaan ≤ 1, on ilmeisestikin

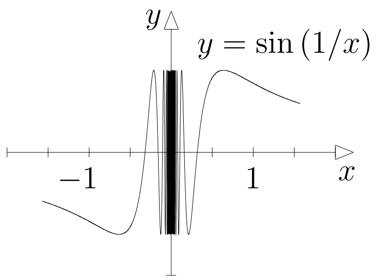
sini

$$0 \leq |x\sin(1/x)| = |x||\sin(1/x)| \leq |x|.$$

Jos nyt $x \to 0$, puristuu funktion arvo nollan ja nollaa lähestyvän lausekkeen $|x|$ väliin, jolloin tulee olla $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. (Kuva alempana.)

3) Funktiolla $f(x) = \sin(1/x)$ ei ole raja-arvoa origossa eikä edes eri suuria oikean- ja vasemmanpuolisia raja-arvoja. Kuten oheinen kuva näyttää, funktio heilahtelee sitä tiheämmin arvojen -1 ja 1 välillä, mitä lähempänä origoa ollaan.





Esitiedot: reaalifunktiot

Katso myös: lukujonon raja-arvo, funktion jatkuvuus

Funktioiden standardiraja-arvoja

raja-arvo (standardi-, lukujonon)

derivointi (alkeisfunktioiden)

eksponenttifunktio

logaritmifunktio

potenssifunktio

Seuraavista raja-arvoista kolme ensimmäistä muodostavat pohjan kyseessä olevien alkeisfunktioiden derivaattojen johtamiselle. Neljäs osoittaa, että eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin mikä tahansa muuttujan potenssi.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^p}=\infty,\quad p \text{ luonnollinen luku.}$$

sini

radiaani

aste

Kolmannessa, siniä koskevassa kaavassa on argumentin oltava radiaaneissa. Raja-arvo voidaan tietenkin laskea myös siten, että x lausutaan asteissa; tällöin se ei kuitenkaan ole 1.

Neperin luku

Ensimmäinen kaava johtaa siihen, että eksponenttifunktion derivaatta on se itse (ks. alkeisfunktioiden derivointia). Kaava puolestaan on seuraus Neperin luvun määritelmästä, kuten seuraava osoittaa.

Merkitsemällä $t = 1/x$ saadaan

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

Jos $x \to 0$, niin $t \to \pm\infty$. Neperin luvun määritelmästä seuraa, että $\lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t = e$; pieni lisäpäättely osoittaa, että näin on myös, jos $t \to -\infty$. Eo. lausekkeen raja-arvo on siis $\ln e = 1$, kun $x \to 0$, ja toinen kaava on todistettu.

Ensimmäinen kaava voidaan palauttaa tähän merkitsemällä $y = e^x - 1$ eli $x = \ln(1 + y)$, jolloin $x \to 0$, jos ja vain jos $y \to 0$. Tällöin

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\longrightarrow 1.$$

jatkuvuus

Huomattakoon, että eo. päättelyissä nojaudutaan tietoon eksponentti- ja logaritmifunktioiden jatkuvuudesta: Esimerkiksi tiedosta $(1 + 1/t)^t \to e$ seuraa $\ln[(1 + 1/t)^t] \to \ln e$ vain, jos logaritmifunktio tiedetään jatkuvaksi pisteessä e.

Kolmannen ja neljännen kaavan johtoa ei tässä lähemmin käsitellä.

ESITIEDOT: reaalifunktiot, funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: derivaatta

Jatkuvuuden määritelmä

Reaalifunktio f on *jatkuva* pisteessä a, jos funktion raja-arvo tässä pisteessä on olemassa ja se on yhtä suuri kuin funktion arvo:

funktio (reaali-)

raja-arvo (funktion)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funktion epäjatkuvuus voi ilmetä kahdella tavalla: Joko raja-arvoa ei ole olemassa tai se kyllä on olemassa, mutta ei ole sama kuin funktion arvo.

Funktio on *jatkuva jollakin reaaliakselin välillä*, jos se on jatkuva tämän välin jokaisessa pisteessä. Havainnollisesti tämän voidaan sanoa tarkoittavan, että funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä tällä välillä. On kuitenkin tapauksia, joissa puhe yhtenäisestä käyrästä antaa liian yksinkertaisen mielikuvan.

väli (reaaliakselin)

kuvaaja

käyrä (taso-)

Alkeisfunktiot ovat yleensä jatkuvia määrittelyalueensa jokaisessa pisteessä. Usein sanotaan, että funktio $f(x) = 1/x$ on epäjatkuva origossa. Tarkkaan ottaen kuitenkin funktio ei ole määritelty origossa ja kaikkialla muualla se on sekä määritelty että jatkuva. Sanonta kuitenkin puolustaa paikkaansa siinä mielessä, että jos funktion määrittelyalue laajennetaan antamalla sille origossa jokin arvo, siitä tulee väistämättä origossa epäjatkuva.

alkeisfunktio

määrittelyjoukko

Esimerkkejä funktioiden epäjatkuvuuksista: hyppyepäjatkuvuus

1) Funktiolla on *hyppyepäjatkuvuus* pisteessä a, jos sekä oikeanpuolinen että vasemmanpuolinen raja-arvo tässä pisteessä on olemassa, mutta ne ovat eri suuret. (Tällöin siis varsinaista raja-arvoa ei ole.) Epäjatkuvuuden kannalta on epäolennaista, mikä funktion arvo $f(a)$ on; se voi yhtyä jompaankumpaan toispuolisista raja-arvoista tai olla jotakin muuta.

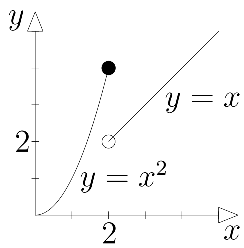
raja-arvo (funktion)

raja-arvo (toispuolinen)

Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \leq 2, \\ x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

on hyppyepäjatkuvuus pisteessä $x = 2$.

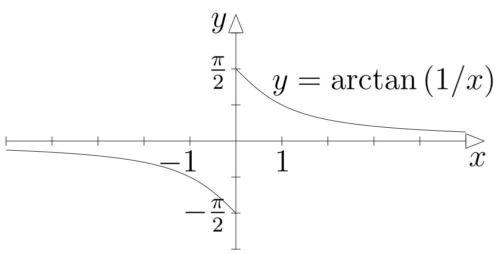


2) Määrittelemällä

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 2, \\ 2x, & \text{kun } x > 2, \\ 0, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$$

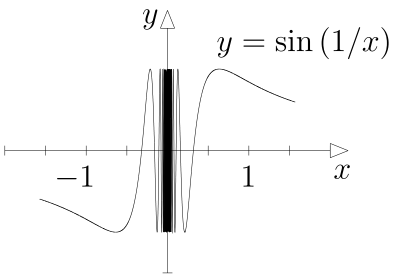
saadaan funktio, jolla on raja-arvo 4 pisteessä $x = 2$, mutta tämä poikkeaa funktion arvosta $f(2) = 0$. Funktio on siis tässä pisteessä epäjatkuva.

3) Esimerkki yhdellä lausekkeella määritellystä funktiosta, jolla on hyppyepäjatkuvuus, on $f(x) = \arctan(1/x)$. Tarkkaan ottaen tämä ei ole määritelty origossa, mutta on luontevaa määritellä sen arvoksi jompikumpi toispuolisista raja-arvoista $-\pi/2$ tai $\pi/2$, jolloin origoon syntyy hyppyepäjatkuvuus.



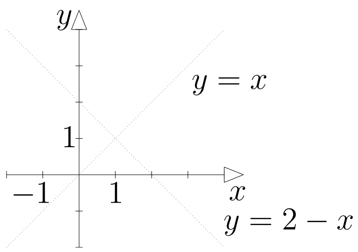
Lisäesimerkkejä funktioiden epäjatkuvuuksista

4) Funktio $f(x) = \sin(1/x)$, kun $x \neq 0$, $f(0) = 0$, on jatkuva muualla paitsi origossa. Origo on epäjatkuvuuspiste, koska edes toispuolisia raja-arvoja ei origossa ole olemassa, vaan funktio heilahtelee sitä rajummin arvojen -1 ja 1 välillä, mitä lähempänä origoa ollaan.



5) Esimerkkinä funktiosta, joka on jatkuva vain yhdessä pisteessä ($x = 1$) ja kaikkialla muualla epäjatkuva, olkoon seuraava:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ on rationaalinen,} \\ 2 - x, & \text{kun } x \text{ on irrationaalinen.} \end{cases}$$



ESITIEDOT: reaalifunktiot, funktion raja-arvo
KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Derivaatan määritelmä

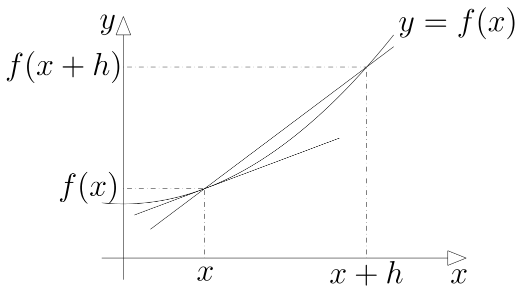
Olkoon x kiinteä tarkastelupiste. Reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion f *derivaatta* tässä pisteessä — merkitään $f'(x)$ — voidaan luonnehtia kahdella tavalla: 1) geometrisesti, jolloin kyseessä on käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $(x,\ f(x))$ asetetun tangentin kulmakerroin, tai 2) analyyttisesti *erotusosamäärän* raja-arvona:

funktio (reaali-)
käyrä (taso-)
tangentti (suora)
kulmakerroin
raja-arvo (funktion)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Erotusosamäärässä $[f(x+h) - f(x)]/h$ on nimittäjässä argumenttiarvojen $x + h$ ja x erotus; osoittajassa on vastaavien funktionarvojen erotus. Geometrisesti tulkittuna erotusosamäärä tarkoittaa pisteiden $(x,\ f(x))$ ja $(x+h,\ f(x+h))$ kautta asetetun suoran — käyrän $y = f(x)$ sekantin — kulmakerrointa. Rajaprosessissa $h \to 0$ pisteet lähestyvät toisiaan ja sekantti muuttuu tangentiksi.

sekantti (suora)



Derivaatalle käytetään seuraavia merkintöjä:

$$f'(x) = \mathrm{D}\, f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

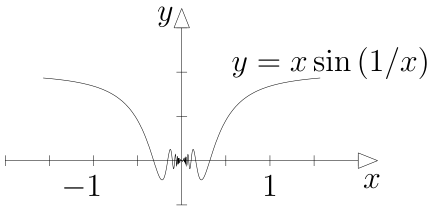
ESITIEDOT: reaalifunktiot, funktion raja-arvo

KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Derivoituvuus

Derivaatta, so. erotusosamäärän raja-arvo ei välttämättä ole olemassa. Jos se on, funktiota sanotaan *derivoituvaksi* kyseisessä pisteessä x. raja-arvo (funktion)

Esimerkkejä funktioista, jotka jossakin pisteessä eivät ole derivoituvia, ovat a) $f(x) = |x|$ origossa ja b) $f(x) = x \sin(1/x)$ samoin origossa (missä määritellään $f(0) = 0$). Edellisen kuvaajalla on origossa kärki, jälkimmäisen käyttäytyminen on paljon monimutkaisempaa: kuvaaja



Funktion määritelmä on siinä määrin yleinen, että on helppoa muodostaa myös funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia tai ovat derivoituvia vain muutamissa pisteissä. Esimerkiksi määrittelemällä $f(x) = x^2$, jos x on rationaalinen, ja $f(x) = -x^2$, jos x on irrationaalinen, saadaan funktio, joka on derivoituva vain origossa. rationaaliluku irrationaaliluku

ESITIEDOT: reaalifunktiot, funktion raja-arvo
KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Differentiaali

Määritellään kahden muuttujan funktio $\epsilon(x, h)$ asettamalla

funktio (kahden muuttujan)

$$\epsilon(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Koska derivoituvalla funktiolla erotusosamäärän raja-arvo on derivaatta, on

raja-arvo (funktion)

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(x, h) = 0.$$

Kertomalla eo. yhtälö symbolilla h ja siirtämällä termejä yhtäläisyysmerkin puolelta toiselle, saadaan

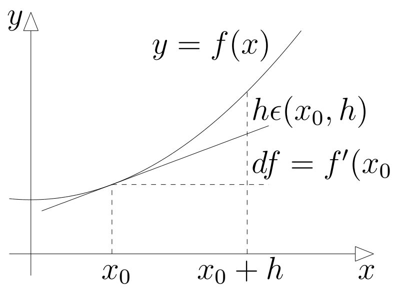
$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\epsilon(x, h),$$

missä funktion lisäys $f(x+h) - f(x)$ välillä $[x,\ x+h]$ on hajotettu kahdeksi termiksi: Edellinen termi

väli (reaaliakselin)

$$df = f'(x)h$$

on funktion *differentiaali*, jälkimmäistä $h\epsilon(x, h)$ (missä $\lim_{h\to 0} \epsilon(x, h) = 0$) kutsutaan yleensä *korjaustermiksi*. Differentiaalin sanotaan edustavan funktion f lisäyksen lineaarista (suoraviivaista) osaa. Funktion lisäyksen hajottamista tällä tavoin kutsutaan funktion *differentiaalikehitelmäksi*.



Tekemällä differentiaalikehitelmässä korvaukset $x \to x_0$, $x + h \to x$, $h \to x - x_0$ se voidaan kirjoittaa muotoon

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0).$$

Korjaustermin pois jättäminen voidaan tämän perusteella luonnehtia siten, että käyrä $y = f(x)$ tulee korvatuksi tangentilla $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

käyrä (taso-)

Differentiaalikehitelmästä nähdään myös, että derivoituva funktio on aina myös jatkuva:

tangentti (suora)

jatkuvuus

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0)] = f(x_0).$$

Korkeammat derivaatat

Jos funktio f on jollakin tarkasteluvälillä derivoituva välin jokaisessa pisteessä, tulee tällä välillä määritellyksi *derivaattafunktio* $f'(x)$. Jos tämä on derivoituva välin pisteessä x, saadaan alkuperäisen funktion *toinen derivaatta* eli *toisen kertaluvun derivatta*: funktio

$$\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x) = D^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

missä kolme viimeksi mainittua ovat tavallisimmat tavat toisen derivaatan merkitsemiseen.

Jos funktio $f''(x)$ saadaan määritellyksi jollakin välillä, voidaan jatkaa samaan tapaan ja saadaan *korkeampien kertalukujen* derivaatat $f'''(x)$, $f''''(x)$, jne.

Jos derivaatan kertaluku on kovin suuri, sitä ei enää ole mukavaa merkitä yläpilkuilla. Vaihtoehtoinen merkintätapa on käyttää sulkuihin pantua yläindeksiä, esimerkiksi $f''''(x) = f^{(4)}(x)$.

Esimerkkejä derivaatan laskemisesta erotusosamäärän raja-arvona

Funktion $f(x) = x^5$ derivaatta pisteessä x saadaan kehittämällä erotusosamäärä binomikaavan avulla:

binomikaava
binomikaava

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^5 - x^5}{h} &= \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\ &= 5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4.\end{aligned}$$

Kun $h \to 0$, lähestyvät kaikki muut termit nollaa paitsi ensimmäinen ja derivaataksi saadaan siis $5x^4$.

raja-arvo (funktion)

Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta pisteessä $x > 0$ saadaan vastaavalla tavalla muokkaamalla erotusosamäärää siten, että sen raja-arvo voidaan laskea:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{h})(\sqrt{x+h} + \sqrt{h})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Esitiedot: reaalifunktiot, funktion raja-arvo
Katso myös: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Derivaatan historiaa

Differentiaalilaskennan samoinkuin integraalilaskennan — lyhyemmin matemaattisen analyysin — keksijöinä pidetään englantilaista Isaac Newtonia (1642 – 1727) ja saksalaista Gottfried Wilhelm Leibnizia (1646 – 1716). Samantyyppisiä ideoita oli kyllä esiintynyt jo varhemminkin. Mm. ranskalainen lakimies ja matemaatikko Pierre de Fermat käytti oleellisesti derivointia polynomien maksimien ja minimien etsimiseen 1600-luvun alussa. Integraalilaskennan historia ulottuu vielä paljonkin varhaisempiin aikoihin; ensimmäiset ideat voidaan hieman näkökulmasta riippuen löytää jo vanhalta ajalta.

analyysi
Newton
Leibniz
Fermat
polynomi
maksimi ja minimi
maksimi ja minimi

Newtonin pääteos *Philosophiae naturalis principia mathematica* käsittelee fysiikkaa ja taivaanmekaniikkaa, joihin hän soveltaa jo aiemmin kehittämiään (mutta julkaisemattomia) differentiaali- ja integraalilaskennan menetelmiä sekä päättymättömiä sarjoja. Esitystapa ja merkinnät poikkeavat nykyään käytetystä; derivaatan käsitettä vastaa Newtonin 'fluxio'.

sarja

Leibniz oli yleisnero, joka tutki matematiikan ohella lakia, filosofiaa, teologiaa ym. ja toimi pitkään diplomaattina. Differentiaali- ja integraalilaskennan hän kehitti ilmeisestikin Newtonista riippumatta. Seurauksena kuitenkin oli riita prioriteetista.

Newtonin ja Leibnizin jälkeen analyysia kehittivät monet: sveitsiläinen Bernoulli'n suku, jossa oli useita matemaatikkoja 1600-luvun lopulta 1800-luvun puoliväliin, niinikään sveitsiläissyntyinen Leonhard Euler (1707 – 1783), joka oli professorina Pietarissa ja Berliinissä, Ranskan suuren vallankumouksen ja Napoleonin aikalaiset Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace, Jean-Babtiste-Joseph Fourier, ym., saksalainen Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), ranskalainen Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).

Bernoulli
Bernoulli
Euler
Lagrange
Laplace
Fourier
Gauss
Cauchy

Monet näistä matemaatikoista olivat myös huomattavia matemaattisia fyysikoita, jotka kehittivät taivaanmekaniikkaa, optiikkaa, virtausmekaniikkaa, jne.

Analyysin kehitys on jatkunut viime ja tällä vuosisadalla yhä abstraktimpaan suuntaan.

ESITIEDOT: derivaatta

KATSO MYÖS: alkeisfunktioiden derivaatat

Summan, vakiokerrannaisen, tulon ja osamäärän derivaatta

Summan derivaatta lasketaan termeittäin:

$$\mathrm{D}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

Vakiokerrannaisen derivaatta: Jos c on vakio, se voidaan siirtää derivointioperaattorin D eteen:

$$\mathrm{D}[cf(x)] = cf'(x).$$

Tulon derivaatta: 'Edellisen tekijän derivaatta kertaa jälkimmäinen plus edellinen kertaa jälkimmäisen derivaatta':

$$\mathrm{D}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Useamman tekijän tuloihin tämä yleistyy seuraavaan tapaan:

$$\mathrm{D}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Osamäärän derivaatta: 'Osoittajan derivaatta kertaa nimittäjä miinus osoittaja kertaa nimittäjän derivaatta per nimittäjä toiseen':

$$\mathrm{D}[f(x)/g(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kaikki säännöt voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmän pohjalta erotusosamäärän raja-arvona.

derivaatta
erotusosamäärä
raja-arvo (funktion)

Esitiedot: derivaatta

Katso myös: alkeisfunktioiden derivaatat

Yhdistetyn funktion derivaatta

Yhdistetyn funktion derivoimissääntö tunnetaan myös *ketjusäännön* nimellä: 'Ulkofunktion derivaatta kertaa sisäfunktion derivaatta': yhdistetty funktio

$$\mathrm{D}[f(g(x))] = f'(g(x))\,g'(x).$$

Yleistys useampiin sisäkkäisiin funktioihin:

$$\mathrm{D}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x).$$

Esimerkiksi lausekkeen $\sin((x^2+1)^7)$ voidaan katsoa muodostuvan kolmesta sisäkkäisestä funktiosta: uloin on sinifunktio, tämän sisällä on seitsemänteen potenssiin korottaminen ja sisimpänä funktio x^2+1; siis $f(z) = \sin z$, $g(y) = y^7$, $h(x) = x^2 + 1$. Derivaatta on tällöin

$$\begin{aligned}\cos(g(h(x)) \cdot 7h(x)^6 \cdot 2x &= \cos((x^2+1)^7)\,7(x^2+1)^6\,2x \\ &= 14x(x^2+1)^6\cos((x^2+1)^7).\end{aligned}$$

Myös ketjusääntö voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmän pohjalta erotusosamäärän raja-arvona.

derivaatta
erotusosamäärä
raja-arvo (funktion)

Esitiedot: derivaatta

Katso myös: alkeisfunktioiden derivaatat

Käänteisfunktion derivointi

Jos funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita, on $g(f(x)) = x$. Mikäli kumpikin funktio on derivoituva, voidaan yhtälö derivoida puolittain yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen, jolloin saadaan $g'(f(x))f'(x) = 1$ eli

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Funktion f derivaatta on siis saatu lausutuksi käänteisfunktion g derivaatan avulla. Kaava kirjoitetaan usein muotoon $f'(x) = 1/g'(y)$, jolloin on merkitty $y = f(x)$.

Tulos on käyttökelpoinen monien alkeisfunktioiden derivaattojen johtamisessa sekä lisäksi tapauksissa, missä käänteisfunktion lauseketta ei voida lausua alkeisfunktioiden avulla.

Esimerkiksi funktiolla

$$g(x) = \frac{x^5}{1+x^2}$$

on käänteisfunktio f, mutta tätä ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla. Koska $g(2) = \frac{32}{5}$, on $f(\frac{32}{5}) = 2$. Käänteisfunktion derivoimiskaavan mukaisesti on tällöin

$$f'(\tfrac{32}{5}) = \frac{1}{g'(2)} = \tfrac{25}{272}.$$

käänteisfunktio
käänteisfunktio
derivoituvuus
derivointi (alkeisfunktioiden)
alkeisfunktio

Implisiittinen derivointi

Implisiittinen derivointi on yhdistetyn funktion derivoimissäännön sovellus tapaukseen, missä funktiota ei ole annettu suoraan, vaan se tunnetaan yhtälönä, jonka argumentin arvot x ja funktion arvot y toteuttavat, esimerkiksi $x^4+y^4 = 2xy^5$. Jos löytyy pisteitä (x, y), jotka toteuttavat yhtälön, voidaan periaatteessa ratkaista y muuttujan x funktiona: $y = y(x)$. Käytännössä ei välttämättä ole helppoa tai edes mahdollista löytää tälle funktiolle yksinkertaista lauseketta. yhdistetty funktio yhtälö

Jos funktio $y(x)$ on olemassa, se toteuttaa siis yhtälön

$$x^4 + y(x)^4 = 2xy(x)^5.$$

Jos voidaan olettaa, että funktio y on derivoituva, derivoidaan em. yhtälön molemmat puolet muuttujan x suhteen mm. yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen: derivoituvuus

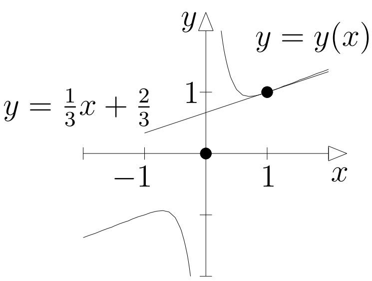
$$4x^3 + 4y(x)^3y'(x) = 2y(x)^5 + 10xy(x)^4y'(x).$$

Tästä voidaan ratkaista $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{4x^3 - 2y(x)^5}{10xy(x)^4 - 4y(x)^3} = \frac{4x^3 - 2y^5}{10xy^4 - 4y^3}.$$

Tulos sisältää kuitenkin edelleen tuntemattoman lausekkeen $y(x)$. Jos kuitenkin tiedetään arvopari (x, y), joka toteuttaa alkuperäisen yhtälön, saadaan funktion derivaatta tässä pisteessä. Esimerkkitapauksessa piste $(1, 1)$ on käyrällä, jolloin siis $y(1) = 1$. Vastaava derivaatta on käyrä (taso-)

$$y'(1) = \frac{4-2}{10-4} = \tfrac{1}{3}.$$



Funktion y derivoituvuus ei aina ole itsestään selvää. Esimerkiksi eo. yhtälö toteutuu myös origossa, jolloin siis on $y(0) = 0$. Tämä on kuitenkin funktion epäjatkuvuuspiste eikä derivaattakaan voi tällöin olla olemassa.

ESITIEDOT: derivaatta, derivointisäännöt

KATSO MYÖS: potenssi, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot, integraalifunktio

---

Luettelo derivaatoista

Seuraava luettelo on siinä määrin keskeinen, että sen hyvä hallinta kuuluu matematiikan opintojen kulmakiviin. Samat kaavat tulevat käyttöön myös integroimiskaavoina, jolloin ne on luettava oikealta vasemmalle. alkeisfunktio

$$\mathrm{D}\,x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{D}\,e^x = e^x, \qquad \mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x},$$

$$\mathrm{D}\sin x = \cos x, \qquad \mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x, \qquad \mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \qquad \mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\mathrm{D}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\mathrm{D}\sinh x = \cosh x, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{arsinh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\mathrm{D}\cosh x = \sinh x, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{arcosh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\mathrm{D}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{artanh}\, x = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\mathrm{D}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{arcoth}\, x = \frac{1}{1-x^2}.$$

ESITIEDOT: derivaatta, derivointisäännöt

KATSO MYÖS: potenssi, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot, integraalifunktio

---

Derivaattojen johtamisesta: standardiraja-arvojen käyttö

Edellä olevien derivaattojen johtaminen perustuu derivaatan määritelmään erotusosamäärän raja-arvona, funktioiden standardiraja-arvoihin, osamäärän derivointisääntöön sekä käänteisfunktion derivoimissääntöön.

derivaatta
erotusosamäärä
raja-arvo (funktion)
raja-arvo (standardi-, funktion)
derivaatta (osamäärän)
derivaatta (käänteisfunktion)

Suoraan erotusosamäärän raja-arvona ja eräiden standardiraja-arvojen avulla saadaan eksponenttifunktion ja sinifunktion derivaatat:

eksponenttifunktio

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\,\frac{e^h-1}{h}=e^x;$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\,\frac{\sin(h/2)}{h/2}=\cos x.$$

Jälkimmäisessä on käytetty myös sopivaa trigonometrian kaavaa.

sini
trigonometria (johdannaiskaavat)

Potenssin derivoimiskaava yleisessä tapauksessa, so. eksponentin α ollessa mikä tahansa reaaliluku, saadaan helpoimmin eksponenttifunktion avulla:

potenssifunktio

$$\frac{d}{dx}x^\alpha=\frac{d}{dx}e^{\alpha\ln x}=e^{\alpha\ln x}\,\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Jos α on kokonaisluku tai rationaaliluku, on muitakin tapoja kaavan johtamiseen.

Kosinifunktion derivaatta saadaan palautetuksi edellä johdettuun sinifunktion derivaattaan kirjoittamalla $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$.

kosini
trigonometrinen funktio (symmetria)

Hyperbelisinin ja hyperbelikosinin derivaatat voidaan laskea lausumalla funktiot eksponenttifunktion avulla.

hyperbelifunktio

Tangentin ja kotangentin sekä vastaavien hypebolisten funktioiden derivaatat lasketaan lausumalla funktiot sinin ja kosinin, vastaavasti hyperbelisinin ja hyperbelikosinin avulla ja käyttämällä osamäärän derivoimiskaavaa. Vaihtoehtoisten muotojen johtamisessa tarvitaan trigonometrian kaavaa $1=\cos^2 x+\sin^2 x$ ja tämän hyperbolista vastinetta $1=\cosh^2 x-\sinh^2 x$.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)
trigonometria (peruskaavat)
hyperbolinen kaava

Esitiedot: derivaatta, derivointisäännöt

Katso myös: potenssi, eksponenttifunktio, logaritmifunktio, trigonometriset funktiot, arcus-funktiot, hyperbelifunktiot, area-funktiot, integraalifunktio

---

Derivaattojen johtamisesta: käänteisfunktiot

Logaritmifunktion derivaatta saadaan käänteisfunktion derivoimissäännöllä: Jos $y = f(x) = \ln x$ ja tämän käänteisfunktio on $x = g(y) = e^y$, on

logaritmifunktio

derivaatta (käänteisfunktion)

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Arcus- ja area-funktioiden derivoimiskaavat saadaan samaan tapaan. Esimerkkinä olkoon arcsin:

arcus-funktio

area-funktio

Olkoon $y = f(x) = \arcsin x$ ja $x = g(y) = \sin y$, missä $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin on

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ESITIEDOT: reaalifunktiot, derivaatta
KATSO MYÖS: funktion jatkuvuus, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Funktion kasvavuus ja vähenevyys; paikalliset ääriarvot

Jos derivoituvan reaalifunktion f derivaatta tietyssä pisteessä on positiivinen, $f'(x_0) > 0$, niin funktion tangentti tässä pisteessä on nouseva ja funktio siis on aidosti kasvava pisteen kohdalla: jos riittävän pienessä pisteen x_0 ympäristössä on $x_1 < x_0 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. (Varovaisuus on tarpeen: Tämä ei ole sama kuin funktion kasvavuus kyseisessä ympäristössä. Hyvä — mutta hieman vaikea — esimerkki on kaikkialla derivoituva funktio $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ pisteessä $x_0 = 0$.)

derivoituvuus
funktio (reaali-)
derivaatta
tangentti (suora)
kasvava (funktio)

Vastaavasti jos derivaatta on negatiivinen, $f'(x_0) < 0$, niin funktio on kohdassa x_0 aidosti vähenevä.

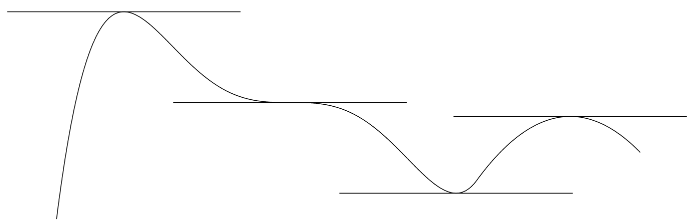
vähenevä (funktio)

Funktiolla f sanotaan olevan *paikallinen maksimi* pisteessä x_0, jos funktion arvo $f(x_0)$ on suurempi kuin sen arvot pisteen x_0 välittömässä ympäristössä. Vastaavasti määritellään *paikallinen minimi*.

Paikallista maksimia ja minimiä kutsutaan funktion *paikallisiksi ääriarvoiksi*; vastaava muuttujan arvo x_0 on *ääriarvokohta*.

Jos funktio f on ääriarvokohdassa x_0 derivoituva (mitä sen ei tarvitse olla, esim. $f(x) = |x|$ origossa), on sen derivaatta välttämättä $= 0$. Jos derivaatta nimittäin olisi > 0 tai < 0, olisi funktio edellä sanotun mukaan aidosti kasvava tai vähenevä pisteen ympäristössä eikä kyseessä olisikaan ääriarvo.

Ääriarvokohdassa derivoituvan funktion kuvaajalla on siis vaakasuora tangentti. Tangentti voi olla vaakasuora muuallakin kuin ääriarvokohdassa, kuten alla oleva kuva osoittaa. Yhtälö $f'(x) = 0$ antaa siis derivoituvalle funktiolle *mahdolliset* ääriarvokohdat, mutta yhtälön ratkaisujen joukossa voi olla arvoja, jotka eivät ole ääriarvokohtia.



ESITIEDOT: reaalifunktiot, derivaatta

KATSO MYÖS: funktion jatkuvuus, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

---

Ääriarvon laadun tutkiminen

Oletetaan seuraavassa, että funktio f on derivoituva ja että $f'(x_0) = 0$. Oletetaan lisäksi, että x_0 on derivaatan erillinen nollakohta, ts. pisteellä x_0 on ympäristö, jossa $f'(x) \neq 0$ (paitsi tietenkin keskipisteessä x_0).

derivaatta
derivoituvuus

Kohtaa x_0 ohitettaessa derivaatan merkki voi 1) muuttua positiivisesta negatiiviseksi, 2) negatiivisesta positiiviseksi, 3) jäädä muuttumatta.

Ensimmäisessä tapauksessa funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi, jolloin kyseessä on maksimikohta; toisessa tapauksessa kyseessä on vastaavasti minimikohta. Jos merkki jää muuttumatta, on derivaatta samanmerkkinen pisteen x_0 kummallakin puolella. Jos se on positiivinen, on funktio kasvava pisteen kummallakin puolella; jos negatiivinen, niin funktio on vähenevä. Kummassakaan tapauksessa ei kyseessä voi olla ääriarvokohta.

kasvava (funktio)
vähenevä (funktio)

Ääriarvon laatu voidaan tutkia myös toista derivaattaa käyttäen. Olkoon $f'(x_0) = 0$. Jos $f''(x_0) < 0$, niin ensimmäinen derivaatta on kohdassa x_0 vähenevä ja sen merkki siis muuttuu positiivisesta negatiiviseksi. Kyseessä on edellä olevan mukaan maksimi. Vastaavasti $f''(x_0) > 0$ merkitsee, että kyseessä on minimi.

derivaatta (toinen)

Jos $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, ei ääriarvon laatua tai sen olemassaoloa voida ilman lisätietoja päätellä. Kaikki on mahdollista. Esimerkiksi funktioilla x^4, $-x^4$ ja x^3 on sekä ensimmäinen että toinen derivaatta origossa $= 0$. Ensimmäisellä on origossa minimi, toisella maksimi, kolmannella origo ei ole ääriarvokohta.

ESITIEDOT: reaalifunktiot, derivaatta
KATSO MYÖS: funktion jatkuvuus, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

---

Absoluuttinen maksimi ja minimi

Funktion *suurin* ja *pienin arvo* eli *absoluuttinen maksimi* ja *absoluuttinen minimi* argumentin ollessa reaaliakselin suljetulla välillä löydetään etsimällä paikalliset ääriarvot ja tarkastelemalla funktion käyttäytymistä välin päätepisteissä. Edellytyksenä on, että funktio on välillä derivoituva (jolloin se on myös jatkuva).

suljettu väli
derivoituvuus
jatkuvuus

Menettely on seuraava:

1. Etsitään funktion derivaatan nollakohdat tarkasteluvälillä ja lasketaan vastaavat funktion arvot. Kaikki nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvokohtia, mutta tällä ei menettelyssä ole merkitystä. Myöskään ääriarvojen laatua (maksimi, minimi) ei tarvitse tutkia.

2. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

3. Suurin saaduista arvoista on funktion maksimiarvo, pienin minimiarvo.

Jos tarkasteluväli on avoin, on lisäksi raja-arvotarkasteluilla tutkittava funktion käyttäytymistä lähestyttäessä välin päätepisteitä (tai äärettömyyttä, jos väli on rajoittamaton). Jos funktio ei joissakin pisteissä ole derivoituva tai edes jatkuva, on tutkittava raja-arvot myös näitä pisteitä lähestyttäessä.

avoin väli
raja-arvo (funktion)

Tällöin on mahdollista, että funktiolla ei ole maksimia tai minimiä, so. suurinta tai pienintä arvoa, jonka funktio saisi jossakin pisteessä. Sen sijaan voidaan ehkä löytää funktion arvoille *pienin yläraja* tai *suurin alaraja*, so. mahdollisimman ahtaat rajat, joiden välissä funktion arvot ovat. Toisena mahdollisuutena on, että funktio on rajoittamaton ylhäältä tai alhaalta, so. saa miten suuria tai miten pieniä arvoja tahansa. (Tällöin sanotaan, että funktion pienin yläraja on ∞ ja suurin alaraja $-\infty$.)

On syytä huomata, että edellä olevaa menettelyä ei luonnollisestikaan tarvitse orjallisesti noudattaa, jos asia on pääteltävissä yksinkertaisemmin. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

maksimi- ja minimiarvo reaaliakselilla ovat ilmeisestikin 1 ja $1/3$, koska sinin pienin arvo on -1 (mikä vastaa funktion f suurinta arvoa) ja suurin arvo $+1$ (vastaten funktion f pienintä arvoa). Minkäänlainen derivointi ei siis tässä ole tarpeen.

sini

ESITIEDOT: reaalifunktiot, derivaatta

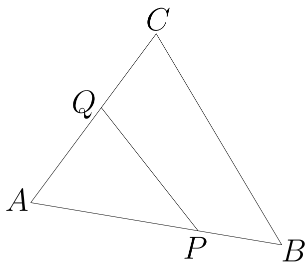
KATSO MYÖS: funktion jatkuvuus, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

---

Esimerkki 1 maksimien ja minimien laskemisesta

Kolmion ABC sivulla AB sijaitsee piste P ja sivulla AC piste Q. Jana PQ jakaa kolmion kahteen yhtä suureen osaan. On etsittävä janan PQ pituuden suurin ja pienin arvo.

kolmio
kolmio (ala)



Olkoon kärjessä A sijaitseva kolmion kulma α ja merkitään sivujen pituuksia $b = |AB|$, $c = |AC|$, $x = |AP|$, $y = |AQ|$. Koska kolmion APQ ala on puolet kolmion ABC alasta, saadaan ehto $\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, mistä seuraa $y = \frac{bc}{2x}$.

trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)

Probleemassa voidaan ottaa muuttujaksi x, jolle ehdoista $0 < x \leq b$ ja $0 < y \leq c$ saadaan rajoitukset $b/2 \leq x \leq b$.

Tutkittavaksi funktioksi on yksinkertaisinta ottaa janan PQ pituuden neliö, joka kosinilauseen mukaan on

kosinilause

$$s^2 = f(x) = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = x^2 + \frac{b^2c^2}{4x^2} - bc\cos\alpha.$$

Funktio on tarkasteluvälillä derivoituva, joten riittää tutkia derivaatan nollakohdat ja välin päätepisteet. Derivaatan $f'(x) = 2x - \frac{b^2c^2}{2x^3}$ ainoa positiivinen nollakohta on $x_0 = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

derivaatta
derivoituvuus
derivointi (alkeisfunktioiden)

Funktion arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä ovat $f(x_0) = bc - bc\cos\alpha$, $f(\frac{b}{2}) = \frac{b^2}{4} + c^2 - bc\cos\alpha$, $f(b) = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc\cos\alpha$. Näistä arvoista ensimmäinen on pienin, sillä $f(\frac{b}{2}) - f(x_0) = \left(\frac{b}{2} - c\right)^2 \geq 0$, $f(b) - f(x_0) = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 \geq 0$.

Ei ole kuitenkaan selvää, että x_0 sijaitsee tarkasteluvälillä; tämä riippuu sivujen pituuksien b ja c suhteesta. Ehdosta $b/2 \leq x_0 \leq b$ seuraa nimittäin $b/2 \leq c \leq 2b$; jos tämä ehto on täytetty, antaa x_0 minimin ja maksimi saadaan jommassakummassa päätepisteessä (riippuen sivujen pituuksien b ja c suhteesta). Jos ehto ei ole täytetty, ei derivaatalla ole lainkaan nollakohtia tarkasteluvälillä ja toinen päätepiste antaa maksimin, toinen minimin.

Esimerkki 2 maksimien ja minimien laskemisesta

Olkoot $x_1, \ldots, x_p$ positiivilukuja. Näiden *aritmeettinen keskiarvo* ja *geometrinen keskiarvo* ovat

keskiarvo (aritmeettinen)

keskiarvo (geometrinen)

$$M_a = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p},$$

$$M_g = \sqrt[p]{\prod_{k=1}^{p} x_k} = \sqrt[p]{x_1 x_2 \ldots x_p}.$$

On osoitettava, että $M_a \geq M_g$ ja että yhtäsuuruus esiintyy vain, kun kaikki luvut ovat yhtä suuria.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x - \ln x - 1$, missä $x > 0$. Tämän derivaatta $f'(x) = 1 - 1/x$ on $= 0$ pisteessä $x = 1$.

logaritmifunktio

derivointi (alkeisfunktioiden)

raja-arvo (standardi-, funktion)

Koska $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ ja standardiraja-arvona $\lim_{x \to \infty} x - \ln x = \lim_{x \to \infty} \ln(e^x / x) = \infty$, ovat funktion raja-arvot tarkastelualueen päätepisteissä
$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Piste $x = 1$ antaa siis funktion minimiarvon $f(1) = 0$, ts. $x - \ln x - 1 \geq 0$ kaikilla x. Koska muita derivaatan nollakohtia ei ole, minimiarvo saadaan vain tässä pisteessä.

Sovelletaan saatua tulosta lukuihin x_k / M_a ja lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen:

$$\frac{x_k}{M_a} - \ln \frac{x_k}{M_a} - 1 \geq 0, \quad k = 1, \ldots, p,$$

ja siis

$$\frac{1}{M_a} \sum_{k=1}^{p} x_k - \ln \left(\frac{\prod_{k=1}^{p} x_k}{M_a^p} \right) - p \geq 0.$$

Lausumalla summa ja tulo keskiarvojen avulla sekä jakamalla luvulla p saadaan

$$-\ln \frac{M_g}{M_a} \geq 0,$$

mistä seuraa $M_a \geq M_g$. Päättelyssä vallitsee yhtäsuuruus, jos alussa sovelletussa epäyhtälössä on $x = 1$ eli $x_k = M_a$ kaikilla indekseillä k; tämä merkitsee lukujen x_k yhtäsuuruutta.

Esitiedot: reaalifunktiot, derivaatta

Katso myös: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat, maksimit ja minimit

---

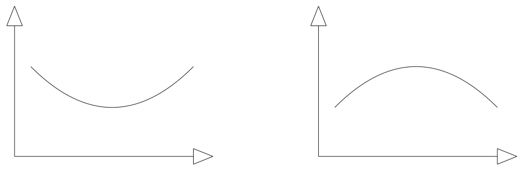
Käyrän kuperuus

Samaan tapaan kuin ensimmäinen derivaatta kuvaa reaalifunktion kuvaajan nousemista tai laskemista, kuvaa toinen derivaatta kuvaajan kaartumisen suuntaa eli *kuperuutta*.

Jos funktion f toinen derivaatta on pisteessä x_0 positiivinen, $f''(x_0) > 0$, niin ensimmäinen derivaatta f' on kasvava funktio tämän pisteen ympäristössä, ts. käyrän tangentin kulmakerroin kasvaa. Tämä merkitsee, että kuljettaessa kuvaajaa pitkin kasvavan argumentin suuntaan kuvaaja kaartuu vasemmalle. Käyrän sanotaan tällöin olevan *kupera alaspäin*.

Vastaavasti jos $f''(x_0) < 0$, niin käyrä kaartuu oikealle eli on *kupera ylöspäin*.

derivaatta
funktio (reaali-)
kuvaaja
derivaatta (toinen)
kasvava (funktio)
kasvava (funktio)
käyrä (taso-)
tangentti (suora)
kulmakerroin



alaspäin kupera ylöspäin kupera

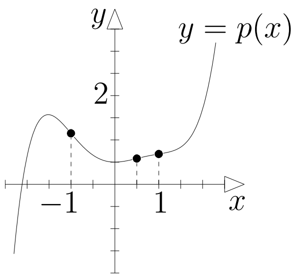
ESITIEDOT: reaalifunktiot, derivaatta

KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat, maksimit ja minimit

Käännepiste

Piste, jossa käyrän kuperuussuunta vaihtuu, on *käännepiste*. käyrä (taso-)

Oheinen kuvio esittää polynomin $p(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ käännepisteet. polynomi



Koska käyrä ei käännepisteessä ole kupera ylöspäin eikä myöskään alaspäin, on käännepiste välttämättä toisen derivaatan nollakohta. Toisella derivaatalla voi kuitenkin olla muitakin nollakohtia. Käännepisteiden x-koordinaatit ovat siten yhtälön $f''(x) = 0$ ratkaisujen joukossa, mutta kaikki ratkaisut eivät välttämättä liity käännepisteisiin. derivaatta (toinen)

Tilanne on vastaavanlainen kuin ensimmäisen derivaatan tapauksessa: Yhtälö $f'(x) = 0$ antaa *mahdolliset* ääriarvokohdat, yhtälö $f''(x) = 0$ *mahdolliset* käännepisteet. ääriarvokohta

Jotta piste olisi käännepiste, täytyy toisen derivaatan merkin muuttua kohtaa ohitettaessa.

Esimerkki: Funktioilla x^3 ja x^4 on origossa toisen derivaatan nollakohta. Edellisellä origo on käännepiste, jälkimmäisellä ei.

Hetkellinen nopeus ja kiihtyvyys

Keskinopeus v on kuljettu matka Δs jaettuna vastaavalla ajalla Δt:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Lähtöhetken jälkeen kuljettu matka on ajan funktio: $s = s(t)$. Kulkunopeuden ei tarvitse olla vakio. Aikaväliä $[t, t + \Delta t]$ vastaava matka on tällöin $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ja keskinopeus siis

erotusosamäärä

$$v = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Jos tarkastellaan yhä lyhyempää aikaväliä, ts. $\Delta t \to 0$, saadaan *hetkellinen nopeus* hetkellä t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Hetkellinen nopeus on siis kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen.

derivaatta

Kyseessä voi olla muukin kuin kulkunopeus. Esimerkiksi vesisäiliötä täytettäessä vesimäärän tilavuus muuttuu ajan mukana: $V = V(t)$. Keskimääräinen täyttymisnopeus aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on tilavuuden muutos jaettuna vastaavalla ajalla:

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t};$$

esimerkiksi tietty määrä kuutiometrejä sekunnissa. Jos $\Delta t \to 0$, tästä saadaan hetkellinen täyttymisnopeus

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t).$$

Yleisesti: Ajan mukana muuttuvan suureen muuttumisnopeus on sen derivaatta ajan suhteen.

Kiihtyvyys tarkoittaa nopeuden v muuttumisnopeutta. Keskikiihtyvyys aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on siten

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

ja *hetkellinen kiihtyvyys* $a(t) = v'(t)$. Jos kyseessä on liikkuva kappale, jonka kulkema matka on $s(t)$, on siis $a(t) = s''(t)$.

derivaatta (toinen)

Esimerkki nopeuden laskemisesta

Pallonmuotoista ilmapalloa täytetään kokoonpuristumattomalla kaasulla, joka virtaa vakionopeudella 0.5 dm^3/s. Millä nopeudella pallon säde kasvaa sillä hetkellä, kun säteen suuruus on 20 cm?

pallo
pallo (tilavuus)
pallo (ala)

Sekä pallon säde että tilavuus ovat ajan t funktioita:

$$V(t) = \tfrac{4}{3}\pi r(t)^3.$$

derivaatta (yhdistetyn funktion)
derivointi (alkeisfunktioiden)

Derivoimalla ajan suhteen yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen saadaan

$$V'(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t).$$

Tässä $V'(t)$ on tilavuuden kasvunopeus ja $r'(t)$ säteen kasvunopeus. Esimerkkitapauksessa tunnetaan kaasun virtausnopeus, ts. pallon tilavuuden kasvunopeus ja saadaan siis

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r(t)^2} = \frac{500\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}{4\pi\ 20^2\ \mathrm{cm}^2} \approx 1\ \mathrm{mm/s}.$$

Esitiedot: yhtälöt, lukujonon raja-arvo, derivaatta
Katso myös: polynomiyhtälöt, transkendenttiyhtälöt

Newtonin iteraatiomenetelmän idea

Muotoon $f(x) = 0$ saatettu yhtälö voidaan usein ratkaista numeerisesti *Newtonin iteraatioksi* kutsutulla menettelyllä. Edellytyksenä on, että etsittävän juuren ympäristössä funktio on kahdesti derivoituva (ts. ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat olemassa) ja $f'(x) \neq 0$. Juurelle tulee tuntea myös riittävän tarkka approksimaatio, ns. iteraation lähtöarvo.

yhtälö
juuri (yhtälön)
derivaatta
derivaatta (toinen)

Menettelyssä muodostetaan lukujono, jonka ensimmäinen luku on lähtöarvo ja jossa seuraava luku aina lasketaan edellisen perusteella. Jono suppenee kohden juurta ja tälle voidaan laskea niin tarkka likiarvo kuin halutaan muodostamalla jonon lukuja riittävän pitkälle.

lukujono
rekursiivisesti määritelty lukujono

Newtonin iteraatiolla saadaan vain yksi juuri kerrallaan. Jos yhtälöllä on useampia juuria, on vaihdettava lähtöarvoa ja laskettava uudelleen. Syntyvä lukujono ei välttämättä suppene kohden lähintä juurta. Itse asiassa se ei välttämättä suppene lainkaan. Mikäli kuitenkin aloitetaan riittävän läheltä juurta, saadaan yleensä tätä juurta kohden suppeneva jono. 'Riittävän läheltä' riippuu siitä, millainen funktio f on.

suppeneminen (lukujonon)

Nimitys 'iteraatio' tarkoittaa toistamiseen perustuvaa menettelyä. Newtonin iteraatiossa toistetaan samaa laskenta-askelta: muodostettavan lukujonon seuraava termi lasketaan aina edellisen avulla. Menettelyn on esittänyt Isaac Newton vuoden 1670 tienoilla. Se tunnetaan myös Newtonin–Raphsonin menetelmänä.

Newton

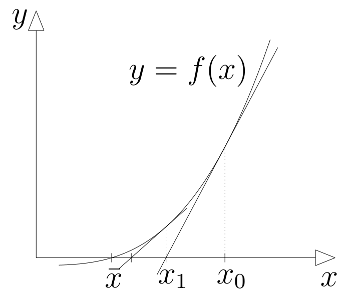
Newtonin iteraation kaavat

Newtonin menetelmä voidaan johtaa seuraavasti:

Olkoon yhtälöllä $f(x) = 0$ juurena $\bar{x}$ ja olkoon x_0 tämän approksimaatio, ts. iteraation lähtöarvo. Käyrälle $y = f(x)$ asetetaan tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Tämän yhtälö on

yhtälö
juuri (yhtälön)
käyrä (taso-)
tangentti (suora)
suora (yhtälö)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Tangentti leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$ ja siis

derivaatta
differentiaali

$$x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Tämä on kuvion mukaisesti (yleensä) tarkempi approksimaatio juurelle $\bar{x}$ kuin x_0.

Askel toistetaan pitäen saatua arvoa x_1 uutena lähtöarvona, jolloin saadaan jälleen tarkempi approksimaatio x_2. Näin jatketaan ja saadaan muodostetuksi lukujono x_0, x_1, x_2, x_3, ...

lukujono

Yleisesti laskentaprosessi voidaan esittää iteraatiokaavana:

rekursiivisesti määritelty lukujono

$$\text{annettuna } x_0;$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,.$$

Esitiedot: yhtälöt, lukujonon raja-arvo, derivaatta
Katso myös: polynomiyhtälöt, transkendenttiyhtälöt

Esimerkki Newtonin iteraatiosta

Esimerkkinä olkoon yhtälön $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ avoimella välillä $]2, 3[$ olevan juuren etsiminen. Ainakin yksi tällainen on olemassa, sillä $f(2) = -1$, $f(3) = 16$ ja funktio f on jatkuva.

yhtälö (polynomi-)
avoin väli
juuri (yhtälön)
jatkuvuus

Newtonin menetelmän iteraatiokaavaksi saadaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}.$$

Jos alkuarvoksi valitaan $x_0 = 2$, antaa iterointi seuraavaa:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 2.1 \\
x_2 &= 2.094568 \\
x_3 &= 2.09455148170 \\
x_4 &= 2.09455148154233 \\
x_5 &= 2.09455148154233 \\
x_6 &= 2.09455148154233
\end{aligned}$$

Lukujono siis näyttää suppenevan.

lukujono
suppeneminen (lukujonon)
Cardanon kaavat

Cardanon kaavojen avulla voidaan tässä tapauksessa saada juurelle myös tarkka arvo:

$$\bar{x} = \sqrt[3]{\frac{45 + \sqrt{1929}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{45 - \sqrt{1929}}{18}}.$$

Esitiedot: yhtälöt, lukujonon raja-arvo, derivaatta
Katso myös: polynomiyhtälöt, transkendenttiyhtälöt

Vaihtoehtoinen tapa johtaa iteraatiokaavat

Newtonin menetelmä voidaan johtaa myös differentiaalin käsitteen avulla. Differentiaalikehitelmä

differentiaali

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(x_0, h)$$

saa muodon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0),$$

kun merkitään $x = x_0 + h$. Mitä pienempi $h = x - x_0$ on, sitä merkityksettömämpi on korjaustermi $(x - x_0)\epsilon(x_0, x - x_0)$ ja yhtälö $f(x) = 0$ voidaan korvata approksimatiivisella yhtälöllä $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Ratkaisemalla tästä x saadaan juuri Newtonin menetelmän mukainen parannettu approksimaatio x_1.

ESITIEDOT: derivaatta

KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Differentiaaliyhtälön käsite

Differentiaaliyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, jossa tuntemattomana on funktio ja joka sisältää tuntemattoman funktion derivaattoja.

yhtälö
funktio
derivaatta

Esimerkiksi $y'' + y = 0$ on differentiaaliyhtälö. Tuntemattomana on tällöin funktio $y = y(x)$. Yhtälön ratkaisu on

derivaatta (toinen)

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Ratkaisu ei siten ole yksikäsitteinen, vaan vakioille voidaan antaa mitkä arvot tahansa. Että eo. lauseke todella on ratkaisu, nähdään derivoimalla: Koska

derivointi (alkeisfunktioiden)

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x, \quad y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x,$$

on todellakin $y'' + y = 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Toisena esimerkkinä olkoon differentiaaliyhtälö $x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0$, jonka ratkaisu on

$$y = \frac{C + 4x^3}{Cx + x^4}.$$

Tässä C on jälleen vapaasti valittava vakio.

Jotta saataisiin yksikäsitteinen ratkaisu, tarvitaan differentiaaliyhtälön ohella jokin lisäehto. Edellisen esimerkin tapauksessa tällainen olisi vaikkapa $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, jolloin ainoa mahdollinen ratkaisu on $y = \sin x$, ts. $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Jälkimmäisessä esimerkissä vakioita on vain yksi, jolloin tarvitaan vain yksi lisävaatimus. Esimerkiksi $y(1) = 2$ antaisi $C = 2$.

Lisäehtoa, jossa annetaan funktion ja sen riittävän monen derivaatan arvot tietyllä argumentin arvolla, kutsutaan nimellä *alkuehto*.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on melkoinen määrä erilaisia menettelyjä, joita ei tässä lähemmin tarkastella. Läheskään aina ei yhtälön ratkaiseminen tavallisten alkeisfunktioiden avulla ole edes mahdollista.

alkeisfunktio

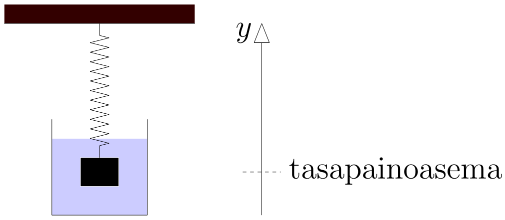
Differentiaaliyhtälöiden merkitys perustuu siihen, että niiden avulla voidaan kuvata erilaisia luonnon ja tekniikan ilmiöitä. Ratkaisemalla yhtälö saadaan tietoa ilmiön käyttäytymisestä.

Differentiaaliyhtälöt 2/3

ESITIEDOT: derivaatta
KATSO MYÖS: derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat

Esimerkki 1 differentiaaliyhtälöistä

Tarkastellaan kappaletta, joka riippuu kiinteästä tuesta kierrejousen varassa ja joka voidaan saattaa pystysuoraan liikkeeseen. Poikkeama tasapainoasemasta olkoon ajan funktio $y(t)$. Se olkoon positiivinen tasapainoaseman yläpuolella, negatiivinen alapuolella. funktio



Jos kappaletta nostetaan ylöspäin, puristuu kierrejousi kokoon ja työntää kappaletta alaspäin. Jos sitä vedetään alaspäin, venyy kierrejousi ja vetää ylöspäin. Jousen aiheuttama voima F_1 on verrannollinen poikkeamaan tasapainoasemasta: $F_1 = -ky$, missä k on positiivinen vakio. Etumerkki aiheutuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen poikkeamalle.

Oletetaan lisäksi, että kappaleen alapuolelle on sijoitettu nesteellä täytetty astia siten, että kappaleen liike tapahtuu nesteen sisällä. Tällöin neste vaimentaa kappaleen liikettä. Vaimentava voima F_2 on sitä suurempi, mitä nopeammin kappale liikkuu; voiman suunta on nopeudelle y' vastakkainen: nopeus
$F_2 = -cy'$, missä verrannollisuuskerroin c on positiivinen vakio. derivaatta

Sysättynä pystysuoraan liikkeeseen kappale alkaa heilahdella nesteen vaimentaessa heilahtelua. Poikkeama $y(t)$ voidaan laskea seuraavasti:

Newtonin lain mukaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on kappa- Newton
leen massan ja kiihtyvyyden tulo: $F = my''$. Kappaleen pystysuora heilah- kiihtyvyys
telu voidaan tällöin mallintaa differentiaaliyhtälöllä, jonka molemmat puolet derivaatta
esittävät kappaleeseen vaikuttavaa voimaa: $F = F_1 + F_2$ eli $my'' = -ky - cy'$. (toinen)

Jos kappale sysätään liikkeelle (ajanhetkellä $t = 0$) siten, että sille tasapainoasemassa annetaan alkunopeus v_0 ylöspäin, on differentiaaliyhtälö ratkaistava alkuehtona $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$. Ratkaisuna on tällöin eksponenttifunktio

$$y(t) = \frac{2mv_0}{\sqrt{4km - c^2}}\, e^{-\frac{c}{2m}\,t} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}\,t\right),$$ sini

missä on oletettu, että nesteen aiheuttama vaimennus on vähäistä: $c < \sqrt{4km}$. Ratkaisun laskemista ei tässä tarkastella.

Esimerkki 2 differentiaaliyhtälöistä

Yksinkertaisessa *populaatiomallissa* voidaan ajatella, että populaation lisäys aikavälillä Δt on suoraan verrannollinen populaation sen hetkiseen kokoon ja aikavälin pituuteen. Jos populaation koko ajanhetkellä t on $p(t)$, on siis

$$\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = kp(t)\Delta t,$$

missä verrannollisuuskerroin k on positiivinen vakio.

Tällöin on

erotusosamäärä

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = kp(t),$$

mistä rajaprosessilla $\Delta t \to 0$ päästään populaation käyttäytymistä mallintavaan differentiaaliyhtälöön

derivaatta

$$p' = kp.$$

Tämän ratkaisu on

eksponenttifunktio

$$p(t) = Ce^{kt},$$

missä C on vapaasti valittava vakio. Kyseessä on eksponentiaalisen kasvun malli. Vakio C määrätään jälleen alkuehdon perusteella: Jos populaation koko tunnetaan esimerkiksi ajanhetkellä $t = 0$, on alkuehtona $p(0) = p_0$ ja saadaan $C = p_0$.

Esimerkki osoittaa kaikkien mallien yhteisen piirteen: mallilla on rajoituksensa. Populaatiomallissa on käsitelty hyvin yksinkertaisesti populaation kasvun perusteita. Huomioon ei ole lainkaan otettu kuolleisuutta, rajattomasta kasvusta aiheutuvaa ravinnon niukkuutta, sisäisiä kitkatekijöitä (esimerkiksi keskinäistä kilpailua), ulkoisia vihollisia, jne. Mikään malli tuskin huomioikaan kaikkia vaikuttavia tekijöitä, mutta puuttuvien tekijöiden ollessa merkitykseltään mitättömiä, malli antaa hyviä tuloksia. Jokaisella mallilla on siten *pätevyysalueensa*.

ESITIEDOT: derivaatta, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat
KATSO MYÖS: määrätty integraali, integroimistekniikkaa

Integraalifunktion käsite

Reaalifunktion f *integraalifunktioksi* sanotaan jokaista funktiota, jonka derivaatta on f.

funktio (reaali-)
derivaatta

Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos $F(x)$ on funktio, jonka derivaatta on $f(x)$, myös jokaisen funktion $F(x) + C$, missä C on vakio, derivaatta on $f(x)$. Saman funktion integraalifunktiot voivat siis erota toisistaan vakiolla. Toisaalta voidaan todistaa, että muunlaisia eroja ei voi olla.

Funktion f kaikkia integraalifunktioita merkitään

$$\int f(x)\,dx.$$

Helposti derivoimalla tarkistettavia esimerkkejä ovat seuraavat:

derivointi (alkeisfunktioiden)

$$\begin{aligned}
\int x^2\,dx &= \tfrac{1}{3}x^3 + C,\\
\int |x|\,dx &= \tfrac{1}{2}x|x| + C,\\
\int (1+\tan^2 x)\,dx &= \tan x + C,\\
\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx &= \tfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\!\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tan(x/2)\right) + \ln(2+\cos x) + C.
\end{aligned}$$

Joukko integrointikaavoja saadaan suoraan alkeisfunktioiden derivointikaavoista. Hankalampia tapauksia varten tarvitaan erityisiä integrointitekniikkoja kuten sijoitusmenettelyä tai osittaisintegrointia. Kaikkia yksinkertaisiakaan funktioita ei kuitenkaan voida integroida alkeisfunktioiden avulla; esimerkkejä tällaisista ovat

integrointi (sijoitus)
integrointi (osittais-)

$$e^{x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}.$$

Summan derivoimiskaavan ja vakiokerrannaisen derivoimiskaavan perusteella saadaan

derivaatta (summan)
derivaatta (vakiokerrannaisen)

$$\begin{aligned}
&\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,\\
&\int [cf(x)]\,dx = c\int f(x)\,dx \quad (c \text{ vakio}),
\end{aligned}$$

ts. summa voidaan integroida termeittäin ja vakion saa tuoda integraalimerkin eteen.

ESITIEDOT: derivaatta, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat
KATSO MYÖS: määrätty integraali, integroimistekniikkaa

Suoria integrointikaavoja I

Alkeisfunktioiden derivointikaavoista saadaan suoraan seuraavat integrointikaavat tavallisimmille alkeisfunktioille:

derivointi (alkeisfunktioiden)
alkeisfunktio

$$
\begin{aligned}
\int x^\alpha\,dx &= \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, \quad \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1,\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|+C,\\
\int e^x\,dx &= e^x+C,\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x+C,\\
\int \cos x\,dx &= \sin x+C,\\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x+C,\\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x+C.
\end{aligned}
$$

Huomattakoon kaava $\int 1/x\,dx = \ln|x|+C$, missä logaritmin sisällä on itseisarvomerkit. Jos $x>0$, tämä seuraa logaritmin derivoimiskaavasta. Jos $x<0$, on integraalifunktio $\ln(-x)$, koska tämän derivaatta yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti on $1/x$. Itseisarvomerkit ovat usein oleelliset, koska integroitava funktio $1/x$ on määritelty myös argumentin negatiivisilla arvoilla, mutta $\ln x$ ei (reaalisena).

logaritmifunktio

derivaatta (yhdistetyn funktion)

ESITIEDOT: derivaatta, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat
KATSO MYÖS: määrätty integraali, integroimistekniikkaa

Suoria integrointikaavoja II

Seuraavat hieman monimutkaisempien funktioiden integrointikaavat ovat myös suoria seurauksia alkeisfunktioiden derivointikaavoista:

derivointi (alkeisfunktioiden)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C,\\
\int (1+\tan^2 x)\,dx &= \tan x + C,\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\cot x + C,\\
\int (1+\cot^2 x)\,dx &= -\cot x + C,\\
\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx &= \tanh x + C,\\
\int (1-\tanh^2 x)\,dx &= \tanh x + C,\\
\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx &= -\coth x + C,\\
\int (1-\coth^2 x)\,dx &= \coth x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C, \quad |x| \le 1,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -\arccos x + C, \quad |x| \le 1,\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C,\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= -\operatorname{arccot} x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \operatorname{arsinh} x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \operatorname{arcosh} x + C, \quad x \ge 1,\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \operatorname{artanh} x + C, \quad |x| < 1,\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \operatorname{arcoth} x + C, \quad |x| > 1.
\end{aligned}$$

Esitiedot: derivaatta, derivointisäännöt, alkeisfunktioiden derivaatat
Katso myös: määrätty integraali, integroimistekniikkaa

Integraalifunktion jatkuvuudesta

Koska integraalifunktio on derivoituva, se on myös jatkuva. Tähän ominaisuuteen on kiinnitettävä erityistä huomiota seuraavantyyppisissä tilanteissa.

derivoituvuus
jatkuvuus

Yhdistetyn funktion derivoimissääntöä käyttäen voidaan todeta, että funktion $\arctan(1/x)$ derivaatta on $f(x) = -1/(1+x^2)$. Funktio $\arctan(1/x)$ ei kuitenkaan kelpaa integraalifunktioksi, koska se ei ole jatkuva origossa:

derivaatta (yhdistetyn funktion)
arcus-funktio
derivaatta

$$\lim_{x\to 0+} \arctan(1/x) = \tfrac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0-} \arctan(1/x) = -\tfrac{\pi}{2}.$$

raja-arvo (toispuolinen)

Määritelläänpä arvo origossa siis miten tahansa, funktiosta ei saada jatkuvaa.

Funktio

$$F(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) + \pi, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \arctan(1/x), & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

sen sijaan on origossa jatkuva ja myös derivoituva; erotusosamäärän raja-arvoa tarkastelemalla nähdään derivaataksi $F'(0) = -1 = f(0)$. Funktion $f(x) = -1/(1+x^2)$ kaikki integraalifunktiot ovat siten esitettävissä muodossa $F(x) + C$.

erotusosamäärä
raja-arvo (funktion)

Jos toisaalta integroitavan funktion määrittelyalue jakautuu kahteen (tai useampaan) osaan esimerkiksi siten, että funktio ei jossakin pisteessä ole määritelty, voidaan integraalifunktio muodostaa kussakin osa-alueessa muista täysin riippumattomasti.

Esimerkiksi origo jakaa funktion $f(x) = 1/x$ määritelyalueen kahteen osaan. Integraalifunktioksi voidaan tällöin aivan hyvin valita

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + 2, & \text{kun } x < 0, \\ \ln|x| + 3, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

ESITIEDOT: summa ja tulo, integraalifunktio
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa

Määrätyn integraalin määrittely

Olkoon annettuna suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty reaaliarvoinen funktio f. Tämän ei tarvitse olla derivoituva eikä edes jatkuva.

suljettu väli
funktio (reaali-)
derivoituvuus
jatkuvuus

Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin jakopisteillä x_k, joille pätee

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Osavälejä on tällöin n kappaletta. Niiden pituuksia merkitään $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; osavälien ei tarvitse olla yhtä pitkiä. Olkoon v_k jokin k:nnen osavälin piste: $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

alkio

Funktion f arvoista välillä $[a, b]$ muodostettua summaa

summamerkintä

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k$$

kutsutaan *Riemannin summaksi.*

Lisätään jakopisteiden määrää välin $[a, b]$ jaossa siten, että pisteiden määrän kasvaessa pisimmänkin osavälin pituus lähestyy nollaa. (Tämä merkitsee jaon tihentämistä tietyssä mielessä tasaisesti, so. suurin piirtein samalla tavoin välin eri osissa.) Tällöin vastaavassa Riemannin summassa $n \to \infty$ ja $\Delta x_k \to 0$, ts. termien lukumäärä kasvaa, mutta samalla jokainen yksittäinen termi lähestyy nollaa. Ei ole selvää, miten Riemannin summa tällöin käyttäytyy: kumpi voittaa, äärettömyyteen vievä termien lukumäärä vai nollaan vievä yksittäisten termien suuruus.

Jos Riemannin summalla edellä kuvatussa rajaprosessissa on raja-arvo riippumatta siitä, miten pisteet v_k osaväleiltä valitaan ja miten jaon tasainen tihentäminen tapahtuu, sanotaan, että funktio f on *integroituva* välillä $[a, b]$ ja sen *määrätty integraali* on mainittu raja-arvo. Merkitään

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k.$$

Rajaprosessi on luonteeltaan erilainen kuin lukujonon tai funktion raja-arvo. Itse asiassa määrätyn integraalin täsmällinen määrittely edellyttäisi tämänkin raja-arvotyypin määrittelyä $\delta - \epsilon$ -tekniikalla.

raja-arvo (lukujonon)
raja-arvo (funktion)

Voidaan osoittaa, että jos f on jatkuva funktio, niin Riemannin summan raja-arvo on olemassa. Se on olemassa myös monille epäjatkuville funktioille, mutta ei kaikille.

Integraalien käyttö perustuu usein Riemannin summien mukaiseen ajatteluun, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

ESITIEDOT: summa ja tulo, integraalifunktio
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa

Esimerkki 1 Riemannin summasta

Ilmakehän tiheys korkeudella z on karkean mallin mukaan

eksponenttifunktio

$$\rho(z) = 1.23\ e^{-0.00012z},$$

missä korkeus annetaan metreissä ja tiheyden yksikkönä on kg/m^3. Sadan kilometrin korkeudessa on ilma jo niin ohutta, että voidaan katsoa ilmakehän kokonaisuudessaan olevan tätä alempana.

Ilmanpaine maanpinnalla aiheutuu yläpuolella olevan ilmamassan painosta. Paine voidaan siis laskea määrittämällä esimerkiksi neliömetrin suuruisen alueen yläpuolella olevan ilmapatsaan massa. Ongelmana on, että ilman tiheys ei ole vakio, vaan pienenee eo. kaavan mukaisesti.

Likimääräisesti ilmamäärä voidaan laskea jakamalla patsas esimerkiksi kilometrin korkuisiin osapatsaisiin ja käyttämällä jokaisen osan tiheydelle osapatsaan puolen välin arvoa. Tällöin saadaan summa

$$\sum_{k=1}^{100} \rho(1000k - 500)\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\ \cdot 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 1000\ \mathrm{m} = \sum_{k=1}^{100} \rho(v_k)\Delta z_k\ \mathrm{kg},$$

missä $v_k = 1000k - 500$ ja $\Delta z_k = 1000$. Laskemalla summa saadaan 10243.79 kg.

Jos patsas jaetaankin sadan metrin korkuisiin osapatsaisiin, saadaan vastaavalla tavalla

$$\sum_{k=1}^{1000} \rho(100k - 50)\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\ \cdot 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 100\ \mathrm{m} = \sum_{k=1}^{1000} \rho(v_k)\Delta z_k\ \mathrm{kg}.$$

Summan arvo on 10249.88 kg.

Kumpikin ovat edellä esitetyn tarkastelun mukaisia Riemannin summia. Jälkimmäinen on saatu edellisestä tihentämällä jakovälien pituudet kymmenesosaan. Jos jakoa edelleen tihennetään, summat lähestyvät ilmakehän paksuuden (0 – 100 000 m) yli otettua integraalia

$$\int_0^{100000} \rho(z)\, dz.$$

Tämän arvo on 10249.94 kg, kuten integroimalla voidaan todeta.

integrointi (kaavat)

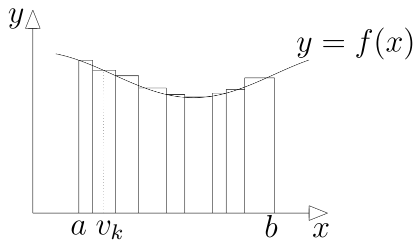
Vertailun vuoksi laskettakoon em. ilmamassan painoisen, neliömetrin alalle sopivan elohopeapatsaan korkeus. Koska elohopean tiheys on 13550 kg/m^3, saadaan patsaan korkeudeksi $10250/13550 \approx 0.756$ metriä, mikä vastaa varsin hyvin normaalia ilmanpainetta 760 mmHg.

integrointi (kaavat)

Esimerkki 2 Riemannin summasta

Olkoon funktio f jatkuva ja ≥ 0 suljetulla välillä $[a, b]$. Kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa voidaan approksimoida seuraavalla tavalla:

funktio (reaali-)
jatkuvuus
suljettu väli
kuvaaja
pinta-ala



Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin pisteissä x_k, missä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Muodostetaan suorakulmiot, joiden kantana on x-akselin osaväli $[x_{k-1}, x_k]$ (pituudeltaan Δx_k) ja korkeus määräytyy funktion osavälillä saamien arvojen mukaan: $f(v_k)$, missä $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Alaa approksimoi tällöin suorakulmioiden pinta-alojen summa

$$\sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k.$$

Tämä on muodoltaan jälleen Riemannin summa.

Mitä tiheämpi välin $[a, b]$ jako on, sitä tarkemmin suorakulmiot antavat etsityn pinta-alan ja toisaalta sitä lähempänä Riemannin summa on vastaavaa integraalia. Ala on siis sama kuin integraali

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Edellä sanottu pätee vain, mikäli $f(x) \geq 0$ tarkasteluvälillä. Jos f saa negatiivisia arvoja, tulee vastaavan alueen pinta-ala otetuksi huomioon negatiivisena Riemannin summassa ja myös integraalissa.

Esitiedot: summa ja tulo, integraalifunktio
Katso myös: integroimistekniikkaa

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Määrätty integraali voidaan laskea integraalifunktion avulla. Jos nimittäin $F(x)$ on jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio kaikilla $x \in [a, b]$, on integraalifunktio

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Tulos tunnetaan analyysin peruslauseen nimellä. Todistusta ei tässä käsitellä.

Usein käytetään merkintöjä

$$\Big/_{\!a}^{b} F(x) = F(b) - F(a) \qquad \text{ja} \qquad F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Esimerkiksi on integrointi (kaavat)

$$\int_a^b ce^{-kx}\, dx = \Big/_{\!a}^{b} -\frac{c}{k}e^{-kx} = \frac{c}{k}\left(e^{-ka} - e^{-kb}\right).$$

integrointi (kaavat)

Funktion f integraalifunktio voidaan lausua määrätyn integraalin muodossa. Koska $\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$, on derivaatta

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = F'(x) = f(x).$$

Integraalifuntio voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

Huomattakoon, että määrätyn integraalin integroimismuuttuja — edellä t — voi olla mikä tahansa. Sehän katoaa lausekkeesta rajojen sijoittamisen jälkeen.

Määrätyn integraalin laskusäännöt

Integraalien laskemista helpottavat seuraavat ominaisuudet.

Summa voidaan integroida termeittäin ja vakio voidaan siirtää integraalimerkin eteen:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b [cf(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c \text{ vakio}).$$

Näitä kutsutaan yhteisellä nimellä integraalin *lineaarisuudeksi*. integraalifunktio

Integraali on myös *additiivinen integroimisvälin suhteen*:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Tulos on ilmeinen, jos $a < b < c$, mutta se on voimassa suuruusjärjestyksestä riipumatta, kun määritellään

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \text{ jos } a < b, \quad \text{ja} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

ESITIEDOT: summa ja tulo, integraalifunktio
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa

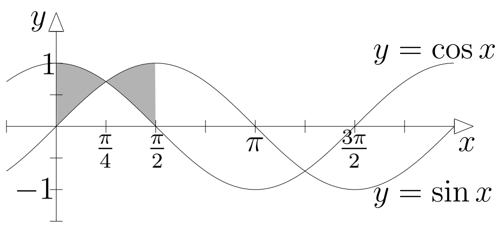
Esimerkkejä määrätyn integraalin laskemisesta

1) Funktio $\sin x$ on ei-negatiivinen välillä $[0, \pi]$. Kuvaajan $y = \sin x$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on sini pinta-ala

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \Big/_0^\pi - \cos x = -(-1) - (-1) = 2.$$

2) Käyrät $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ rajaavat välillä $[0, \pi/2]$ kaksiosaisen alueen. Koska käyrät leikkaavat toisensa, kun $x = \pi/4$, on alueen pinta-ala laskettava kahdessa osassa: käyrä (taso-)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) \, dx \\
= \; & \Big/_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) + \Big/_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos x - \sin x) \\
= \; & \tfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 + (-1) + \tfrac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

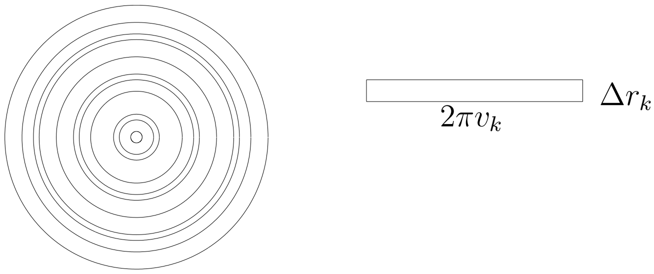


ESITIEDOT: summa ja tulo, integraalifunktio
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa

Ympyrän alan laskeminen integroimalla

ympyrä (esimerkki)
ympyrä
ympyrä (ala)

R-säteisen ympyrän voidaan katsoa muodostuvan samankeskisistä ympyrärenkaista. Jos ympyrärengas, jonka sisäsäde on r_{k-1} ja ulkosäde r_k, leikataan poikki ja taivutetaan sisäreunaa sopivasti venyttäen ja ulkoreunaa sopivasti kuroen suoraksi nauhaksi, saadaan suorakulmio, jonka pinta-ala on täsmälleen sama kuin ympyrärenkaan pinta-ala. Suorakulmion leveys on tällöin $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ ja pituus $2\pi v_k$, missä säde v_k on valittu sopivasta kohdasta: $r_{k-1} < v_k < r_k$.



Ympyrän ala on tällöin suorakulmioiden alojen summa: $\sum_{k=1}^{n} 2\pi v_k \Delta r_k$. Tämä on Riemannin summa, joka jakoa tihennettäessä, so. jaettaessa ympyrä yhä useampiin ja yhä kapeampiin ympyrärenkaisiin, lähenee integraalia

$$\int_0^R 2\pi r\,dr = \Big/_{0}^{R} \pi r^2 = \pi R^2.$$

Ei siis ole sattuma, että ympyrän pinta-alan derivaatta on sen kehän pituus!

Esitiedot: summa ja tulo, integraalifunktio
Katso myös: integroimistekniikkaa

Määrätyn integraalin historiaa

Integraalin käsitettä voidaan lähestyä kahdesta näkökulmasta: Integrointi derivoinnin käänteistoimituksena ja integraali tietynlaisena summan raja-arvona. Analyysin peruslause kytkee nämä yhteen.

Historiallisesti jälkimmäinen, integraali summan raja-arvona, on vanhempi. Ensimmäiset merkit tähän suuntaan vievästä ajattelusta on löydettävissä jo vanhalta ajalta Eukleideen *Stoikheia*-teoksesta ja Arkhimedeen tarkasteluista eräiden pinta-alojen määrittämiseksi. Tällöin puhutaan ekshaustiomenetelmästä; määritettävä pinta-ala ikäänkuin tyhjennetään poistamalla siitä yhä pienempiä suorakulmioita tai muutoin pinta-alaltaan tunnettuja osia.

Eukleides
Arkhimedes
pinta-ala

Pohjois-Italiassa 1600-luvun alkupuolella tarkastelivat Galileo Galilei ja hänen oppilaansa Bonaventura Cavalieri kuvioiden muodostumista jakamattomista osista ('indivisiibeleistä'). Esimerkiksi kolmion voidaan katsoa muodostuvan sen yhden sivun suuntaisista janoista, jotka lyhenevät siirryttäessä kohden vastakkaista kärkeä. Tältä pohjalta määritettiin kuvioiden pinta-aloja. Arabimatemaatikoiden kehittämä algebra oli jo tällöin levinnyt Eurooppaan ja geometristen probleemojen käsittelyssä saatettiin käyttää myös algebrallisia menetelmiä.

Galilei
Cavalieri
algebra
geometria
geometria

1600-luvun loppupuolella aika oli kypsä meidän tuntemamme integraalilaskun syntymiseen. Englantilainen Isaac Newton loi derivoinnin ja sen käänteisoperaationa integroinnin. Samaan aikaan saksalaisen Gottfried Wilhelm Leibniz otti käyttöön määrätyn integraalin käsitteen summan raja-arvona. Molemmat tunsivat integraalilaskun kahden näkökulman välisen yhteyden. Integraalimerkintä $\int f(x)\,dx$ on peräisin Leibnizilta. Integraalimerkki on venytetty S, sanan summa alkukirjain.

Newton
Leibniz

Määrätyn integraalin täsmällinen määrittely sellaisena kuin se nykyään esitetään on kuitenkin peräisin vasta viime vuosisadalta ranskalaisen Augustin Louis Cauchyn ja saksalaisen Bernhard Riemannin töistä.

Cauchy
Riemann

Tämän jälkeenkin integraalikäsitettä on yleistetty. Yliopistollisissa peruskursseissa käsitellään yleensä Riemannin integraalia, jolla kuitenkin on rajoituksensa. Pidemmälle menevät matematiikan kurssit edellyttävät ranskalaisen Henri Lebesguen (1875 – 1941) mukaan nimettyä, hieman abstraktimpaa integraalikäsitettä.

Lebesgue

ESITIEDOT: integraalifunktio, määrätty integraali, derivointisäännöt
KATSO MYÖS:

Sijoitusmenettely

Annetun funktion integraalifunktiota laskettaessa funktiota pyritään muuntamaan siten, että tulos voidaan tunnistaa jonkin alkeisfunktion derivaataksi. Usein muuntaminen joudutaan tekemään useassa vaiheessa.

integraalifunktio

derivointi (alkeisfunktioiden)

Tärkein menettely on sopivan *sijoituksen* tekeminen integraaliin. Kyseessä voi olla integraalifunktion etsiminen, jolloin integroimismuuttuja vaihdetaan toiseksi, tai määrätyn integraalin laskeminen, jolloin lisäksi muunnetaan rajat. Menettely pohjautuu yhdistetyn funktion derivoimissääntöön.

määrätty integraali

derivaatta (yhdistetyn funktion)

Sijoitusmenettely on seuraava:

Olkoon laskettavana integraali $\int f(x)\,dx$ tai $\int_a^b f(x)\,dx$.

Valitaan uusi muuttuja t, jota sitoo vanhaan muuttujaan x yhtälö $x = g(t)$. Tässä funktio g valitaan päämääränä saada integraali yksinkertaistumaan. Derivoimalla saadaan

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{eli} \quad dx = g'(t)\,dt,$$

missä derivaattasymbolia $\dfrac{dx}{dt}$ on käsitelty ikäänkuin se olisi osamäärä. Jos kyseessä on määrätty integraali, ratkaistaan lisäksi muuttujalle t rajat α ja β yhtälöistä $a = g(\alpha)$ ja $b = g(\beta)$.

yhtälö

Sijoitetaan tulokset integraaliin:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \quad \text{tai} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Sijoitus voidaan aivan yhtä hyvin tehdä uuden muuttujan t suhteen ratkaistuista muodoista, mikäli tämä on helpompaa: $t = h(x)$, $dt = h'(x)\,dx$, $\alpha = h(a)$, $\beta = h(b)$.

Esimerkkejä sijoitusmenettelystä I

1) Integraali

$$\int \frac{dx}{2x^2+1}$$

voidaan palauttaa arctan-funktion derivaatan integroimiseen sijoittamalla $t = \sqrt{2}\,x$, jolloin $dt = \sqrt{2}\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2+1} = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\,x) + C.\end{aligned}$$

Lopuksi on siis palattu takaisin alkuperäiseen muuttujaan x.

2) R-säteisen puoliympyrän ala voidaan laskea integraalista

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Tämä saadaan lasketuksi sijoittamalla $x = R\sin t$, jolloin $dx = R\cos t\,dt$. Yläraja muunnetaan ratkaisemalla yhtälö $R = R\sin t$; tällä on useita ratkaisuja, mutta luontevinta on valita arcsin-funktion päähaaran mukainen arvo $t = \pi/2$. Alarajan muuntaminen antaa vastaavasti $t = -\pi/2$. Tulosta voidaan sieventää trigonometrian kaavoilla:

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2 t\,dt = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt \\ &= R^2 \Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t) = \tfrac{1}{2}\pi R^2.\end{aligned}$$

integraalifunktio
arcus-funktio
integrointi (kaavat)
integrointi (kaavat)
ympyrä (esimerkki)
ympyrä
ympyrä (ala)
määrätty integraali
pinta-ala (integroimalla)
trigonometria (johdannaiskaavat)

Esimerkkejä sijoitusmenettelystä II

3) Hieman hankalampana esimerkkinä olkoon seuraava, missä integraali aluksi jaetaan kahteen osaan: integraalifunktio

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{2}{2+\cos x}\,dx + \int \frac{-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Tässä jälkimmäiseen sijoitetaan $t = 2+\cos x$, jolloin $dt = -\sin x\,dx$. Syynä on se, että osoittaja on sama kuin nimittäjän derivaatta ja osoittajassa on siis suoraan dt. Edelliseen integraaliin sijoitetaan hieman erikoisempaa: $u = \tan(x/2)$ eli $x = 2\arctan u$, jolloin

$$dx = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Trigonometrian kaavojen avulla voidaan osoittaa, että trigonometria (johdannaiskaavat)

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Integraali muuntuu siis muotoon

$$\int \frac{2}{2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2\,du}{1+u^2} + \int \frac{dt}{t} = \int \frac{4}{u^2+3}\,du + \int \frac{dt}{t}.$$

Jälkimmäinen integroituu suoraan logaritmiksi. Edellinen voidaan sijoituksella $u = \sqrt{3}\,v$, $du = \sqrt{3}\,dv$ palauttaa arctan-funktioon: arcus-funktio integrointi (kaavat) integrointi (kaavat)

$$\int \frac{4\sqrt{3}}{3(v^2+1)}\,dv + \int \frac{dt}{t} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan v + \ln t + C.$$

Palaamalla alkuperäiseen muuttujaan x saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(u/\sqrt{3}) + \ln t + C\\ &\qquad = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(x/2)\Big) + \ln(2+\cos x) + C.\end{aligned}$$

Esitiedot: integraalifunktio, määrätty integraali, derivointisäännöt
Katso myös:

Osittaisintegrointi

Toinen tärkeä menettely integraalien laskemisessa on *osittaisintegrointi*. Tätäkin voidaan käyttää sekä integraalifunktion etsimiseen että määrättyjen integraalien laskemiseen. Perustana on tulon derivoimiskaava kirjoitettuna muotoon $u'v = \frac{d}{dx}(uv) - uv'$. Integroimalla tämä saadaan osittaisintegroinnin kaavat

integraalifunktio
määrätty integraali
derivaatta (tulon)

$$\begin{aligned} \int u'(x)v(x)\,dx &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx, \\ \int_a^b u'(x)v(x)\,dx &= \Big/_a^b u(x)v(x) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Osittaisintegroinnissa muunnetaan siis integraali $\int u'v$ integraaliksi $\int uv'$ sekä integraalia sisältämättömäksi lisätermiksi. Kaavoja sovellettaessa on alkuperäinen integroitava funktio tulkittava funktioiden u' ja v tuloksi siten, että muunnettu integraali on muodostettavissa, ts. funktio u (jonka derivaatta u' tunnetaan) voidaan helposti laskea. Lisäksi tavoitteena tietenkin on, että muunnettu integraali olisi yksinkertaisempi.

ESITIEDOT: integraalifunktio, määrätty integraali, derivointisäännöt
KATSO MYÖS:

Esimerkkejä osittaisintegroinnista

1) Integraali integraalifunktio

$$\int x^2 e^x \, dx$$

voidaan laskea kahdella peräkkäisellä osittaisintegroinnilla. Ensimmäinen antaa seuraavaa:

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^x}_{u'} \, dx = \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^x}_{u} - \int \underbrace{2x}_{v'} \underbrace{e^x}_{u} \, dx.$$

Kun saatuun integraaliin sovelletaan uudelleen osittaisintegrointia saadaan kaikkiaan

$$\begin{aligned} x^2 e^x - \int \underbrace{2x}_{v} \underbrace{e^x}_{u'} \, dx &= x^2 e^x - \underbrace{2x}_{v} \underbrace{e^x}_{u} + \int \underbrace{2}_{v'} \underbrace{e^x}_{u} \, dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

2) Integroitavan funktion tulkitseminen sopivaksi tuloksi edellyttää toisinaan lausekkeen hahmottamista uudella tavalla. Logaritmifunktio voidaan integroida osittaisintegroinnin avulla seuraavasti:

määrätty integraali

logaritmifunktio

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} \, dx = \Big/_1^e \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln x}_{v} - \int_1^e \underbrace{x}_{u} \underbrace{(1/x)}_{v'} \, dx \\ &= e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

3) Lukija miettiköön, mitä vikaa on seuraavassa päättelyssä: Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \frac{1}{x} + \int x \cdot \frac{1}{x^2} = 1 + \int \frac{1}{x} \, dx.$$

Siis

$$\int \frac{1}{x} \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \, dx,$$

mistä seuraa $0 = 1$, kun integraalit supistetaan pois.

ESITIEDOT: määrätty integraali

KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, pinta-aloja ja tilavuuksia

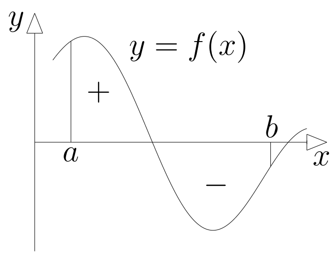
Tasoalueen pinta-ala

Jos funktio f saa välillä $[a, b]$ vain ei-negatiivisia arvoja, so. $f(x) \geq 0$, kun $x \in [a, b]$, voidaan kuvaajan $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$, $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala laskea suoraan integraalista $\int_a^b f(x)\,dx$.

funktio (reaali-)
väli (reaaliakselin)
kuvaaja
pinta-ala
määrätty integraali

Jos välillä $[a, b]$ on $f(x) \leq 0$, antaa integraali vastaavan pinta-alan negatiivisena.

Jos funktio vaihtaa merkkiään välillä $[a, b]$, ottaa integraali x-akselin ylä- ja alapuolella olevien alueiden alat huomioon positiivisina ja negatiivisina kuvan osoittamalla tavalla. Jos kaikkien osa-alueiden alat halutaan positiivisina, on väli $[a, b]$ jaettava osiin funktion f nollakohdissa, laskettava erikseen integraali jokaisen osavälin yli ja tuloksia yhteenlaskettaessa otettava osaintegraalien merkit huomioon.



Usein on yksinkertaisinta ajatella, että laskettava ala jaetaan kapeisiin pystysuoriin suorakulmioihin ja summeerataan näiden pinta-alat positiivisina. Tällöin saadaan Riemannin summa, joka jakoa tihennettäessä, so. suorakulmioita kavennettaessa johtaa määrättyyn integraaliin. Tämä ajattelu toimii myös, kun laskettavana on kahden käyrän väliin jäävä ala.

Riemannin summa
käyrä (taso-)

ESITIEDOT: määrätty integraali

KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, pinta-aloja ja tilavuuksia

---

Esimerkki pinta-alan laskemisesta

Olkoon laskettavana sen segmentin ala, joka jää paraabelin $y = ax^2$ ja suoran $y = kx + b$ väliin. Tällöin oletetaan, että vakiot a, k ja b ovat siten valitut, että suora todella on paraabelin sekantti; oletetaan lisäksi, että paraabeli aukeaa ylöspäin, ts. $a > 0$.

segmentti

paraabeli (xy-koordinaateissa)

suora (yhtälö)

sekantti (suora)

yhtälöryhmä

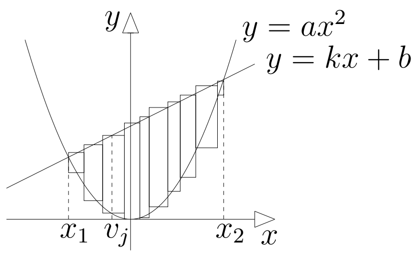
Ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = kx + b \end{cases}$$

saadaan paraabelin ja suoran leikkauspisteiden x-koordinaateiksi

$$x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4ab}}{2a}, \quad x_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4ab}}{2a}.$$

Tässä $x_1 < x_2$.



Koska segmentti sijaitsee välillä $[x_1, x_2]$ ja tällä välillä suora on paraabelia ylempänä, on kohdassa $x = v_j$ sijaitsevan suorakulmion korkeus $kv_j + b - av_j^2$ ja kanta Δx_j, mikä johtaa alaa approksimoivaan Riemannin summaan $\sum_{j=1}^{n}(kv_j + b - av_j^2)\Delta x_j$. Jakoa tihennettäessä tämä lähestyy integraalia

väli (reaaliakselin)

Riemannin summa

määrätty integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} (kx + b - ax^2)\, dx.$$

Integraalin laskeminen antaa pinta-alaksi

integrointi (kaavat)

integrointi (kaavat)

integrointi (sijoitus)

integrointi (osittais-)

$$\frac{(k^2 + 4ab)^{3/2}}{6a^2}.$$

Tulos on pätevä myös, jos $a < 0$. Riemannin summassa tosin suorakulmion korkeus $kv_j + b - av_j^2$ on tällöin negatiivinen, mutta tästä aiheutuva merkkivirhe kumoutuu siinä, että rajojen x_1 ja x_2 suuruusjärjestys muuttuu päinvastaiseksi, kun $a < 0$.

ESITIEDOT: määrätty integraali
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, pinta-aloja ja tilavuuksia

Tilavuuden laskeminen

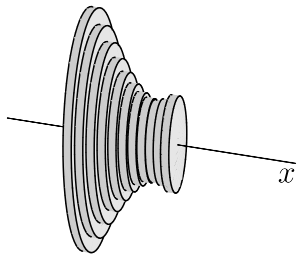
Olkoon tarkasteltavana kappale, jonka läpi x-akseli kulkee. Jaetaan tämä ohuisiin viipaleisiin x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla. Olkoon kappaleen tasoleikkauksen pinta-ala $A(v_j)$, kun leikkaava taso on kohdassa $x = v_j$. Jos tässä kohdassa olevan viipaleen paksuus on Δx_j, on viipaleen tilavuus $A(v_j)\Delta x_j$. Koko kappaleen tilavuutta approksimoi Riemannin summa $\sum_{j=1}^{n} A(v_j)\Delta x_j$, missä summeeraus ulotetaan kaikkiin viipaleisiin. Viipaleita ohennettaessa tämä johtaa kappaleen tilavuutta esittävään määrättyyn integraaliin

Riemannin summa

määrätty integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx,$$

missä x_1 ja x_2 ovat kappaleen äärimmäisten pisteiden x-koordinaatit.



Yleensä x-akseli mielletään vaakasuoraksi. Edellä olevassa tarkastelussa akselin ei välttämättä tarvitse olla vaakasuora, vaan aivan yhtä hyvin kelpaa minkä suuntainen akseli tahansa, kunhan akselia vastaan kohtisuorien tasoleikkausten pinta-ala on laskettavissa.

ESITIEDOT: määrätty integraali
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, pinta-aloja ja tilavuuksia

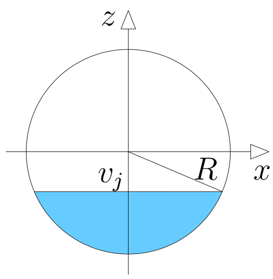
Esimerkki tilavuuden laskemisesta

Pallonmuotoisen öljysäiliön säde on R ja säiliössä on öljyä korkeuteen h saakka; $0 \leq h \leq 2R$. Mikä on öljyn tilavuus?

pallo

Sijoitetaan kolmiulotteinen xyz-koordinaatisto siten, että origo on pallonmuotoisen säiliön keskipisteessä. Symmetria-akseliksi valitaan pystysuora z-akseli.

koordinaatisto (xyz-)



Korkeudella $z = v_j$ oleva vaakasuora tasoleikkaus on tällöin ympyrä, jonka säde on Pythagoraan mukaan $\sqrt{R^2 - v_j^2}$. Tasoleikkauksen ala on siten $A(v_j) = \pi(R^2 - v_j^2)$. Vaakasuoran öljyviipaleen tilavuutta esittää tällöin lauseke $A(v_j)\Delta z_j$ ja koko öljymäärää Riemannin summa $\sum_{j=1}^{n} A(v_j)\Delta z_j$, missä summeerataan kaikki öljykerrokset huomioon ottaen.

ympyrä

Pythagoraan lause

Riemannin summa

Öljymäärä sijaitsee säiliössä alueella, missä z-koordinaatit ovat välillä $[-R, h-R]$. (Jos $h = 0$, saadaan vain säiliön alin piste $z = -R$; jos $h = 2R$, on öljyä välillä $[-R, R]$, so. koko pallossa.) Riemannin summaa vastaa tällöin integraali

väli (reaaliakselin)

määrätty integraali

$$\int_{-R}^{h-R} \pi(R^2 - z^2)\, dz,$$

mikä antaa öljytilavuudeksi

$$\frac{\pi}{3} h^2 (3R - h).$$

integrointi (kaavat)

integrointi (kaavat)

integrointi (sijoitus)

integrointi (osittais-)

Jos erityisesti $h = 2R$, saadaan pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi R^3$.

pallo (tilavuus)

Pyörähdyspinnan ala

Pyörähtäköön käyrä $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, x-akselin ympäri, jolloin syntyy *pyörähdyspinta.*

käyrä (taso-)
pinta

Tämän pinta-ala voidaan laskea jakamalla pinta ympyränmuotoisiin suikaleisiin x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla. Jokainen suikale on likimain katkaistu kartio. Tämän ala on $\pi(r_1 + r_2)s$, missä r_1 ja r_2 ovat ala- ja yläpohjan säteet sekä s sivujanan pituus.

pinta-ala
kartio (katkaistu)
pinta-ala (pintojen)

Jos leikkaustasot sijaitsevat kohdissa $x = x_j$, ovat pohjien säteet $f(x_{j-1})$ ja $f(x_j)$. Sivujanan pituus on Pythagoraan mukaan

pinta-ala (pintojen)
pohja (katkaistun kartion)
sivujana (kartion)
Pythagoraan lause
differentiaalikehitelmä

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}\\ &\qquad\approx \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + f'(x_{j-1})^2(x_j - x_{j-1})^2} = \sqrt{1 + f'(x_{j-1})^2}\Delta x_j,\end{aligned}$$

missä on käytetty differentiaalikehitelmää ja merkintää $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Summeeraamalla suikaleiden pinta-alat saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f(x_{j-1}) + f(x_j))\sqrt{1 + f'(x_{j-1})^2}\Delta x_j.$$

Tämä ei ole Riemannin summa (koska funktioiden arvoja on laskettu sekä pisteessä x_{j-1} että pisteessä x_j), mutta voidaan kuitenkin osoittaa, että jakoa tihennettäessä päädytään integraaliin

Riemannin summa
määrätty integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

joka siis esittää pyörähdyspinnan alaa.

ESITIEDOT: määrätty integraali

KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, pinta-aloja ja tilavuuksia

---

Esimerkki pyörähdyspinnan alan laskemisesta

Pallopinta syntyy ympyränkaaren $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[-R, R]$. Koska

pallo

pallo (tilavuus)

pallo (ala)

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

saadaan pyörähdyspinnan alaksi

$$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \int_{-R}^{R} 2\pi R\,dx = 4\pi R^2.$$

Myös pallon tilavuus voidaan laskea sen pinta-alan perusteella. Pallo jaetaan tällöin samankeskisiksi pallokuoriksi, joiden paksuus on Δr_j. Kuoren tilavuus on tällöin likimain $4\pi r_j^2 \Delta r_j$, jolloin pallon tilavuutta approksimoi Riemannin summa $\sum_{k=1}^{n} 4\pi r_j^2 \Delta r_j$. Pallon tilavuus saadaan siis integraalista:

tilavuus

Riemannin summa

määrätty integraali

$$\int_0^R 4\pi r^2\,dr = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Lasku on samanlainen kuin ympyrän alan laskeminen kehän pituuden perusteella. Ei siis myöskään ole sattuma, että pallon pinta-ala on tilavuuden derivaatta!

ympyrän ala (integroimalla)

ympyrän ala (integroimalla)

Massakeskipisteen määrittely

Kappaleen *massakeskipiste* eli *painopiste* kuvaa massan keskimääräistä sijaintia. Jos kappale ripustetaan massakeskipisteestä, se pysyy millään tavoin kiertymättä siinä asennossa, johon se asetetaan. Kappaleeseen vaikuttavan painovoiman momentti tämän pisteen suhteen on siis $= 0$.

Massakeskipisteen koordinaatit voidaan laskea massajakaumalla painotettuina keskiarvoina. Tämä tarkoittaa seuraavaa:

keskiarvo (painotettu)

Jaetaan kappale pieniin osiin, esimerkiksi pikku kuutioihin, joiden särmät ovat kolmiulotteisen xyz-koordinaatiston akselien suuntaiset. Merkitään k:nnessa pikku kuutiossa olevaa massaa Δm_k ja sen sijaintia, esimerkiksi keskipisteen koordinaatteja (x_k, y_k, z_k). Keskipisteiden x-koordinaattien keskiarvo massajakaumalla painotettuna on

koordinaatisto (xyz-)

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k,$$

missä $m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k$ on kappaleen kokonaismassa.

Kyseessä on eräänlainen Riemannin summa, joka pikku kuutioiden muodostamaa jakoa tihennettäessä johtaa integraaliin. Yleisessä tapauksessa kyseessä on integraali kolmiulotteisen avaruuden alueen, nimittäin kyseessä olevan kappaleen yli. Erikoistapauksissa se on kuitenkin pelkistettävissä reaaliakselin suljetun välin yli otetuksi integraaliksi, kuten myöhempänä oleva esimerkki osoittaa. Integraali antaa massakeskipisteen x-koordinaatin X_0.

Riemannin summa
määrätty integraali
suljettu väli

Vastaavalla tavalla saadaan massakeskipisteen y- ja z-koordinaatit Y_0 ja Z_0.

Jos kappaleen massatiheys on vakio ρ (yksikkönä kg/m^3), on $\Delta m_k = \rho \Delta v_k$ ja $m = \rho v$, missä Δv_k tarkoittaa pikku kuution ja v koko kappaleen tilavuutta. Em. x-koordinaatin lausekkeessa voidaan sekä osoittajassa että nimittäjässä ottaa tällöin ρ tekijäksi ja supistaa pois. Tuloksena saadaan yksinomaan kappaleen geometrisista ominaisuuksista (koko, muoto) riippuva lauseke

$$\frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta v_k,$$

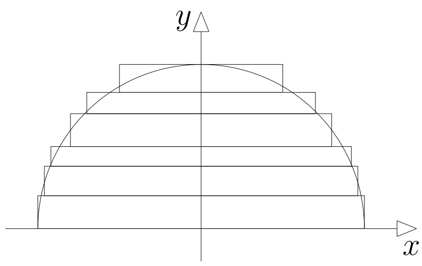
joka myös antaa määrätyn integraalin jakoa tihennettäessä. Tulosta kutsutaan kappaleen geometrisen keskipisteen eli *keskiön* x-koordinaatiksi. Se on laskettavissa mahdollisista massajakaumista riippumatta.

Esimerkki massakeskipisteen laskemisesta

Olkoon tarkasteltavana puoliympyrän muotoinen homogeeninen levy, ts. levy jonka massatiheys on vakio. Geometrinen keskiö ja massakeskipiste ovat tällöin sama asia. Lasketaan tämän koordinaatit. ympyrä

Sijoitetaan koordinaatisto siten, että origo yhtyy puoliympyrän keskipisteeseen ja levy sijaitsee x-akselin yläpuolella. Tällöin levyn reunoina ovat x-akseli ja ympyrän $x^2 + y^2 = R^2$ kaari, missä $y \geq 0$. koordinaatisto (xy-)

Symmetriasyistä keskiön x-koordinaatti on $= 0$.



Keskiön y-koordinaatin laskemiseksi levy jaetaan periaatteessa pikku neliöihin vastaten edellä käsiteltyjä pikku kuutioita, koska kyseessä on kaksiulotteinen kappale. Näistä voidaan kuitenkin yhdistää ne, joita vastaa sama y-arvo, jolloin levy tulee jaetuksi x-akselin suuntaisiin pitkiin ja kapeisiin suorakulmioihin, joiden sivut ovat Δy_k ja $2\sqrt{R^2 - y^2}$.

y-koordinaattien keskiarvoa approksimoidaan nyt painotettuna keskiarvona, jossa painoina ovat tällaisten suorakulmioiden alat: keskiarvo (painotettu)

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}\Delta y_k}{\sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{R^2 - y^2}\Delta y_k}.$$

Jaon tihentäminen, so. suorakulmioiden kaventaminen ja lukumäärän lisääminen johtaa sekä osoittajassa että nimittäjässä määrättyyn integraaliin. Nimittäjän integraali esittää puoliympyrän alaa ja on siis $= \frac{1}{2}\pi R^2$. Keskiön y-koordinaatiksi saadaan määrätty integraali

$$Y_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi R^2} \int_0^R 2y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{2}{\pi R^2} \Big/_0^R -\tfrac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$$
$$= \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R\ .$$

integrointi (kaavat)
integrointi (kaavat)
integrointi (sijoitus)
integrointi (osittais-)

ESITIEDOT: määrätty integraali
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, massakeskipiste

Hitausmomentin määrittely

Massapisteen — massana m — *fysikaalinen hitausmomentti* kiertoakselin suhteen on $J = mr^2$, missä r on kohtisuora etäisyys akselista.

Jos kyseessä on kappale, saadaan sen hitausmomentti lasketuksi käyttämällä samaa ideaa kuin massakeskipisteen laskemisessa: massakeskipiste

Kappale jaetaan pieniin osiin, esimerkiksi pikku kuutioihin koordinaattitasojen suuntaisilla tasoilla. Muunkinlaista jakoa 'pistemäisiin' osiin voidaan käyttää. Jokaista osaa kohdellaan omana massapisteenään ja lasketaan näiden hitausmomentit yhteen:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \, \Delta m_k,$$

missä Δm_k on k:nnen pikku kuution massa ja r_k sen etäisyys kiertoakselista.

Tämä on Riemannin summa, joka kuutioita pienennettäessä lähestyy määrättyä integraalia. Yleensä kyseessä on kolmiulotteisen avaruuden integraali, mutta erikoistapauksissa se on palautettavissa yhden muuttujan integraaliksi, kuten edempänä esimerkissä osoitetaan. Integraalia kutsutaan *kappaleen* (*fysikaaliseksi*) *hitausmomentiksi*. Riemannin summa määrätty integraali

Jos kappale on homogeeninen, ts. sen massatiheys ρ on vakio, on $\Delta m_k = \rho \Delta v_k$, missä Δv_k on pikku kuution tilavuus. Tällöin ρ voidaan ottaa eo. summassa tekijäksi. Jäljelle jäävä summa

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \, \Delta v_k$$

riippuu vain kappaleen geometriasta ja valitusta akselisuorasta. Vastaava integraali on *kappaleen matemaattinen hitausmomentti* eli *toinen momentti* akselisuoran suhteen. Matemaattinen hitausmomentti saadaan siis fysikaalisesta asettamalla massatiheydeksi vakio $\rho = 1$.

ESITIEDOT: määrätty integraali
KATSO MYÖS: integroimistekniikkaa, massakeskipiste

Esimerkki hitausmomentin laskemisesta

Lasketaan R-säteisen pallon hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen, kun massatiheys on vakio $\rho = 1$. pallo

Sijaitkoon kolmiulotteinen xyz-koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä. Kiertoakseli olkoon z-akseli. Pallo jaetaan edellä kuvatulla tavalla pikku osiin ja näistä kerätään yhteen ne, joilla on sama etäisyys kiertoakselista. Yhteen kuuluvat osat muodostavat lieriökuoria akselina z-akseli. Jos etäisyys akselista on r, on lieriön korkeus Pythagoraan mukaan $2\sqrt{R^2 - r^2}$ ja pohjan säde luonnollisesti r. Jos lieriökuoren paksuus on Δr, on kuoren tilavuus (eli massa, koska $\rho = 1$) likimain $2\pi r \; 2\sqrt{R^2 - r^2} \; \Delta r$. koordinaatisto (xyz-) lieriö Pythagoraan lause pohja (lieriön)

Jakamalla pallo n lieriökuoreen, muodostamalla jokaisen hitausmomentti ja laskemalla yhteen saadaan Riemannin summa, joka approksimoi pallon hitausmomenttia: Riemannin summa

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \cdot 2\pi r_k \; 2\sqrt{R^2 - r_k^2} \; \Delta r_k.$$

Jakoa tihennettäessä, so. kuoria ohennettaessa, jolloin niiden lukumäärä kasvaa, tämä lähestyy integraalia määrätty integraali

$$J = 4\pi \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr,$$

mikä siis antaa pallon hitausmomentin.

Integraali voidaan laskea tekemällä sijoitus $t = \sqrt{R^2 - r^2}$, jolloin $dt = -\dfrac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr$ ja uudet rajat ovat $t = R$, $t = 0$. Integraali saa seuraavan muodon ja voidaan laskea: integrointi (sijoitus)

$$J = 4\pi \int_R^0 -(R^2 - t^2) t^2 \, dt = -4\pi \Big/_R^0 \left(\tfrac{1}{3} R^2 t^3 - \tfrac{1}{5} t^5\right) = \tfrac{8}{15} \pi R^5.$$

Hitausmomentti lausutaan yleensä kappaleen kokonaismassan avulla. Koska massatiheys $= 1$, on kokonaismassa sama kuin tilavuus: $m = \frac{4}{3}\pi R^3$. Tällöin pallon hitausmomentti voidaan kirjoittaa pallo (tilavuus)

$$J = \tfrac{2}{5} m R^2.$$

Tämä vastaa tilannetta, jossa pallon massa on keskittynyt yhteen pisteeseen etäisyydelle $\sqrt{\frac{2}{5}}\, R$. Tätä etäisyyttä sanotaan pallon *hitaussäteeksi*.

Esitiedot:

Katso myös: geometriset probleemat, piste, suora

Geometrian synty

Geometria on matematiikan osa-alue, joka perinteisesti on tutkinut taso- tai avaruuskuvioita ja niiden suhteita: pisteitä, suoria, tasoja, ympyröitä, palloja, monitahokkaita, jne.

Geometrian historia alkaa antiikin Kreikasta. Vanhimpia nimiä ovat Thales Miletolainen ja Pythagoras Samoslainen (500-luvulla eKr.), Platon (400- ja 300-lukujen vaihteessa eKr.) ja Eukleides (300-luvulla eKr.). Aleksandrian yliopistossa vaikuttaneen Eukleideen kirjoittama oppikirja *Stoikheia* (lat. *Elementa*) on ensimmäinen kokonaisesitys geometriasta. Sen merkitys on ulottunut läpi vuosisatojen: koulujen geometrian opetus on 1900-luvulle saakka pohjautunut Eukleideen järjestelmään.

Thales
Pythagoras
Platon
Eukleides

Antiikin kreikkalaisista matemaatikoista ansaitsee tulla mainituksi lisäksi 200-luvulla eKr. Syrakusassa elänyt Arkhimedes, joka määritti pinta-aloja ja tilavuuksia menetelmillä, joita voidaan pitää integraalilaskennan varhaisideoina.

Arkhimedes

Eukleideen *Stoikheian* lähtökohtana olivat aksioomat, lausumat, jotka hyväksyttiin tosiksi ilman perusteluja. Esimerkiksi lausuma 'kahden pisteen kautta voidaan piirtää yksi suora' kuului perusaksioomiin. Aksioomien pohjalta todistettiin geometrisia teoreemoja, so. väittämiä, joita ei enää voitu pitää itsestään selvinä. Geometrisille probleemoille konstruoitiin myös ratkaisuja harppia ja viivoitinta käyttäen. *Stoikheia* loi deduktiivisen päättelyn, uusien tulosten todistamisen aiemmin tunnettujen pohjalta loogisen päättelyn avulla.

aksiooma
logiikka

Esitiedot:

Katso myös: geometriset probleemat, piste, suora

Paralleeliaksiooma; erilaisia geometrioita

Eukleideen tasogeometrian aksioomiin kuului myös *paralleeliaksiooma*: suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan aina piirtää täsmälleen yksi kyseisen suoran suuntainen suora.

Eukleides
aksiooma

Paralleeliaksiooma ei ollut yhtä luonnostaan hyväksyttävissä kuin muut alkeellisemmat aksioomat ja sitä yritettiin todistaa vuosisatojen kuluessa menestyksettä. Ongelma ratkesi vasta 1800-luvulla hieman odottamattomalla tavalla. Ratkaisun esittivät toisistaan riippumatta venäläinen Kazanin yliopiston professori Nikolai Ivanovitš Lobatševski ja unkarilainen matemaatikko Janos Bolyai 1820-luvun lopulla. Samoihin ajatuksiin olivat vuosisadan alkupuolella tulleet muutkin, mm. Carl Friedrich Gauss, mutta hän ei julkaissut ajatuksiaan.

Lobatševski
Bolyai
Gauss

Paralleeliaksioomaa ei onnistuttu todistamaan, vaan osoittautui, että vika oli suoran käsitteessä. Intuitiivinen mielikuva suorasta ei ollutkaan loogisessa mielessä riittävä. Riippuen siitä, mitä suoralla tarkoitetaan, paralleeliaksiooma joko on voimassa tai ei ole. Tämä johti *epäeuklidisten geometrioiden* syntymiseen. Jos paralleeliaksiooma on voimassa, puhutaan *euklidisesta* geometriasta; jos se ei ole, kyseessä on *epäeuklidinen* geometria.

Seurauksena oli geometrian aksioomajärjestelmien tarkempi tutkiminen, mikä mm. johti vuonna 1899 ilmestyneeseen Göttingenin yliopiston professorin David Hilbertin teokseen *Grundlagen der Geometrie*, jossa esitettiin moderni geometrian aksiomatiikka. Pohjana on tällöin kaksi joukkoa, joista toisen alkioita kutsutaan pisteiksi ja toisen suoriksi. Näillä oletetaan olevan aksioomissa luetellut ominaisuudet.

Hilbert
joukko

Geometrian tutkimisessa on käytetty hyväksi myös algebraa. Tämä yleistyi varsinkin René Descartesin töiden jälkeen 1600-luvulta lähtien.

Algebran käyttö on vapauttanut geometrikot tarkastelemasta vain kaksiulotteista taso- tai kolmiulotteista avaruusgeometriaa. Dimensio voi olla aivan hyvin suurempikin, jopa ääretön.

Geometrian aksioomajärjestelmien tutkiminen ja geometrian näkeminen pisteiden ja suorien muodostamiksi joukoiksi ja näiden välisiksi relaatioiksi on johtanut myös abstrakteihin äärellisiin geometrioihin. Näissä on sekä pisteitä että suoria vain äärellinen määrä. Sovellukset löytyvät yllättäviltäkin aloilta, mm. kombinaatioteoriasta.

geometria (synteettinen)
geometria (analyyttinen)
geometria (vektori-)
geometria (deskriptiivinen)
geometria
algebra
Descartes
dimensio
kombinaatio

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, piste, suora

Euklidinen ja epäeuklidinen geometria

Geometriaa, so. pisteiden ja suorien muodostamaa järjestelmää sanotaan *euklidiseksi geometriaksi*, jos siinä on voimassa *paralleeliaksiooma*, ts. suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi kyseisen suoran suuntainen suora. Jos näin ei ole, kyseessä on *epäeuklidinen geometria*.

Yksinkertaisin euklidisen geometrian malli, so. järjestelmä, joka toteuttaa euklidiset aksioomat, on tavallinen xy-taso. Pisteitä ovat tällöin lukuparit (x, y), so. pisteet ilmaistaan koordinaateillaan. Suorat määritellään yhtälöillä: $ax + by + c = 0$ (missä ainakin toinen luvuista a, b on $\neq 0$) on suora, jolle kuuluvat ne pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön. On yksinkertainen algebrallinen lasku osoittaa, että paralleeliaksiooma on voimassa.

koordinaatti
suora (yhtälö)

Esimerkki epäeuklidisesta geometriasta saadaan tarkastelemalla geometriaa pallon pinnalla. Tämän geometrian pisteet ovat pallon pinnan pisteitä. Suorat ovat pallon pinnalla olevia isoympyröitä, so. ympyröitä, joiden säde on sama kuin pallon säde ja jotka saadaan leikkaamalla pallopintaa pallon keskipisteen kautta kulkevalla tasolla. Kaksi tällaista ympyrää — pallonpintageometrian suoraa — leikkaa toisensa aina, jopa kahdessa vastakkaisilla puolilla palloa olevassa pisteessä. Minkään suoran minkään ulkopuolisen pisteen kautta ei siis voida asettaa suoraa, joka ei leikkaisi kyseistä suoraa! Tällaista epäeuklidista geometriaa kutsutaan elliptiseksi.

pallo
isoympyrä
geodeettinen viiva

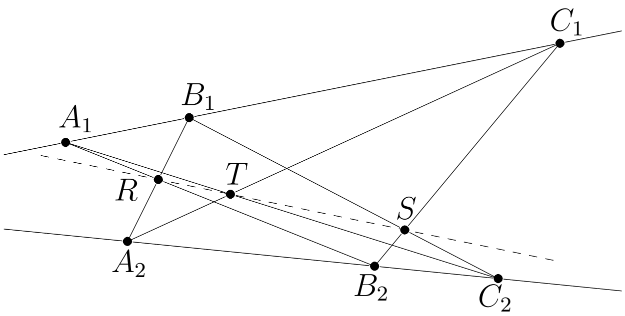
Epäeuklidinen geometria voi olla myös hyperbolinen, jolloin suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan asettaa äärettömän monta suoraa, jotka eivät kohtaa alkuperäistä suoraa missään pisteessä, ts. ovat sen suuntaisia.

Projektiivinen geometria

Projektiivisessa geometriassa tutkitaan suorien ja tasojen keskinäistä leikkaamista kiinnittämättä huomiota mitallisiin ominaisuuksiin. Tämänkin geometrian alan historia on pitkä. Merkittäviä nimiä ovat Pappos Aleksandrialainen 300-luvulta, ranskalaiset Girard Desargues ja Blaise Pascal 1600-luvulta, samoin ranskalaiset Charles-Julien Brianchon ja Jean-Victor Poncelet 1800-luvun alusta.

Pappos
Desargues
Pascal
Poncelet

Esimerkkinä projektiivisen geometrian lauseista olkoon seuraava *Pappoksen lause*: Olkoon annettuna kaksi suoraa tasossa; toiselta valitaan pisteet A_1, B_1, C_1 ja toiselta pisteet A_2, B_2, C_2. Olkoon piste R suorien A_1B_2 ja A_2B_1 leikkauspiste, piste S vastaavasti suorien B_1C_2 ja B_2C_1 leikkauspiste ja piste T suorien C_1A_2 ja C_2A_1. Tällöin pisteet R, S ja T ovat samalla suoralla.



Jotta Pappoksen lause olisi poikkeuksetta voimassa, on suorien leikkauspisteen käsitettä täydennettävä sitä tapausta varten, että suorat sattuvat olemaan yhdensuuntaisia, jolloin leikkauspistettä ei tavanomaisessa mielessä ole. Projektiivisessa geometriassa otetaan tätä varten käyttöön ns. 'äärettömän kaukaiset pisteet': kahden yhdensuuntaisen suoran sanotaan leikkaavan äärettömän kaukaisessa pisteessä, joka sijaitsee suorien suunnassa.

Projektiivista geometriaa voidaan myös käsitellä algebran keinoin (eräänlaisena analyyttisena geometriana).

geometria (analyyttinen)

Esitiedot: reaaliluvut

Katso myös: trigonometriset funktiot, kompleksiluvut

Koordinaatiston ja koordinaattien käsite

Geometrisissa tehtävissä — ja siten myös monissa käytännön ongelmissa — on usein tarpeen ilmoittaa pisteiden sijainti jonkin kiinteän vertailusysteemin suhteen. Vertailusysteemiä kutsutaan *koordinaatistoksi* ja pisteiden paikat ilmoittavia lukuja *koordinaateiksi*.

geometrinen probleema

piste

Koordinaatistoja muodostetaan sekä *kaksiulotteiseen tasoon* että *kolmiulotteiseen avaruuteen*. Pisteen paikan ilmoittavat koordinaatit voivat olla sopivasti valittuja etäisyyksiä, kulmia tai joitakin muita vastaavia suureita. Tasotapauksessa koordinaatteja tarvitaan kaksi, avaruustapauksessa kolme. Niiden lukumäärää kutsutaan *dimensioksi* eli ulotteisuudeksi; tason dimensio on siten 2, avaruuden 3.

Yleisimmin käytetty koordinaatisto on ns. suorakulmainen koordinaatisto, tasossa xy-koordinaatisto, avaruudessa xyz-koordinaatisto. Koordinaatisto voidaan kuitenkin muodostaa monella muullakin tavalla. Probleeman luonteesta, esimerkiksi tilanteen symmetrioista riippuu, millaisen koordinaatiston käyttö on yksinkertaisinta.

Tason ja avaruuden ohella koordinaatisto voidaan muodostaa myös *yksiulotteiselle suoralle*. Yksinkertaisin tapa on kiinnittää jokin suoran piste ja ilmoittaa pisteiden paikat etäisyyksinä tästä pisteestä, toiseen suuntaan positiivisina, toiseen negatiivisina. Kyseessä on itse asiassa lukusuora.

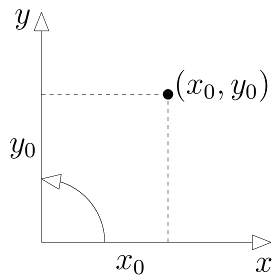
lukusuora

ESITIEDOT: reaaliluvut
KATSO MYÖS: trigonometriset funktiot, kompleksiluvut

Suorakulmainen koordinaatisto tasossa

Tason suorakulmainen koordinaatisto muodostetaan valitsemalla jokin piste *origoksi* ja asettamalla tämän kautta kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa suoraa *koordinaattiakseleiksi*. Suorille valitaan positiiviset suunnat ja niitä kutsutaan x- ja y-akseleiksi. Nimitykset valitaan yleensä siten, että kierrettäessä positiiviselta x-akselilta lähtien origon ympäri vastapäivään 90 astetta päädytään positiiviselle y-akselille. Tätä kutsutaan myös *positiiviseksi kiertosuunnaksi*. kiertosuunta (positiivinen)

Pisteen paikka ilmoitetaan kahtena koordinaattina: x-koordinaatti on kohtisuora etäisyys y-akselista ja y-koordinaatti kohtisuora etäisyys x-akselista. x-koordinaatti on positiivinen, jos piste sijaitsee positiivisen x-akselin puolella y-akselia, vastakkaisella puolella negatiivinen. Vastaava pätee y-koordinaatille.



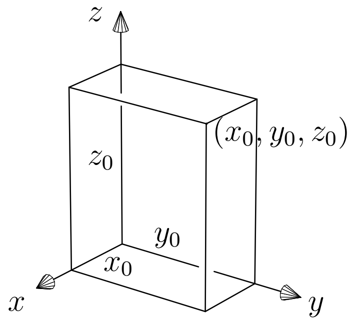
ESITIEDOT: reaaliluvut

KATSO MYÖS: trigonometriset funktiot, kompleksiluvut

Suorakulmainen koordinaatisto avaruudessa

Avaruuden suorakulmainen koordinaatisto muodostetaan samaan tapaan kuin tasokoordinaatisto. *Koordinaattiakseleita* on tällöin kolme, kaikki toisiaan vastaan kohtisuoria. Voidaan ajatella, että tason xy-koordinaatistoa täydennetään asettamalla origon kautta sekä x- että y-akselia vastaan kohtisuora z-akseli. Tämän positiivisen suunnan valitsemiseen on kaksi mahdollisuutta ja se valitaan yleensä siten, että x-akselin, y-akselin ja z-akselin (tässä järjestyksessä) positiiviset suunnat suhtautuvat siten kuin ihmisen oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi suorakulmaisiksi ojennettuina. Tällöin puhutaan *oikeakätisestä kooordinaatistosta*, mikä on tason positiivisen kiertosuunnan vastine avaruudessa.

Koordinaattiakseleiden määräämät tasot ovat *koordinaattitasoja*: xy-taso, yz-taso ja zx-taso. Pisteen paikka ilmoitetaan kolmena positiivisena tai negatiivisena koordinaattina samaan tapaan kuin tasossa: x-koordinaatti on kohtisuora etäisyys (positiivisena tai negatiivisena) yz-tasosta, y-koordinaatti zx-tasosta ja z-koordinaatti xy-tasosta.



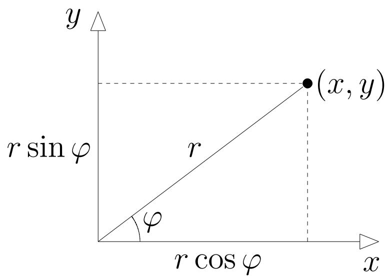
Esitiedot: reaaliluvut

Katso myös: trigonometriset funktiot, kompleksiluvut

Tason napakoordinaatisto

Tason *napakoordinaatistossa* pisteen paikka ilmoitetaan antamalla sen etäisyys r origosta ja suuntakulma eli *napakulma* φ positiiviseen x-akseliin nähden. Napakulma mitataan positiivisena positiiviseen kiertosuuntaan. Koordinaattien sallitut arvot ovat $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Kulmalle käytetään usein myös väliä $0 \leq \varphi < 2\pi$ ja sille voidaan tarpeen mukaan sallia arvoja, jotka sisältävät jakson 2π monikertoja.

kiertosuunta (positiivinen)



Napakoordinaattien ja suorakulmaisten koordinaattien välinen yhteys on

sini
kosini
arcus-funktio

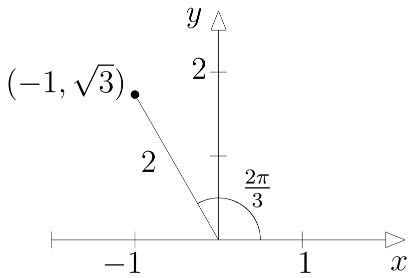
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{sekä} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases} .$$

On huomattava, että funktiosta arctan ei välttämättä käytetä päähaaraa, koska tällöin saataisiin vain välillä $[-\pi/2, \pi/2]$ olevia napakulmia. Tarvittaessa päähaarasta saatuun arvoon on lisättävä tai siitä on vähennettävä π (jolloin itse asiassa käytetään sopivaa sivuhaaraa); miten milloinkin on meneteltävä, nähdään helpoimmin päättelemällä oikea koordinaatiston neljännes koordinaattien x ja y merkeistä.

päähaara (arcus)
sivuhaara (arcus)

Esimerkiksi: Jos pisteen suorakulmaiset koordinaatit ovat $x = -1$, $y = \sqrt{3}$, ovat sen napakoordinaatit $r = 2$, $\varphi = 2\pi/3$.

muistikolmio
muistikolmio

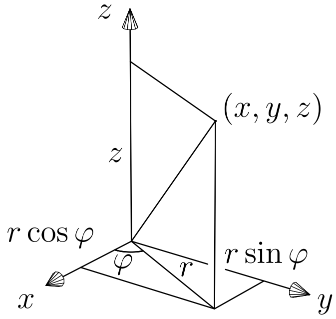


Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys perustuu edellä kuvattujen napakoordinaattien käyttöön.

napakoordinaatit (kompleksitason)

Lieriökoordinaatit

Kolmiulotteisen avaruuden *lieriökoordinaatit* eli *sylinterikoordinaatit* saadaan käyttämällä xy-tason osalta napakoordinaatteja r, φ ja ottamalla z-koordinaatti kolmanneksi koordinaatiksi. Lieriökoordinaatit saavat siten arvot $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $z \in \mathbb{R}$. lieriö



Lieriökoordinaattien ja suorakulmaisten xyz-koordinaattien väliset yhteydet ovat seuraavat:

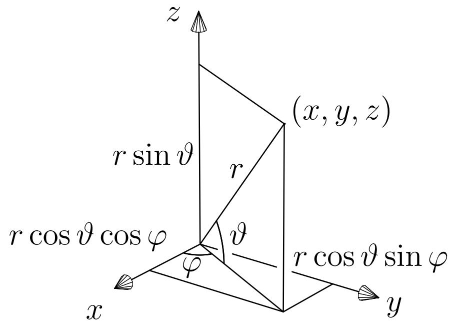
sini
kosini
arcus-funktio

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad .$$

Tässä on arctan-funktiosta käytettävä sopivaa haaraa samoin kuin napakoordinaattien tapauksessa.

Pallokoordinaatit

Kolmiulotteisen avaruuden *pallokoordinaatit* vastaavat paikan ilmoittamista pallon säteen sekä maantieteellisen pituuden ja leveyden avulla: $r \geq 0$ on pisteen etäisyys origosta, ts. sen origokeskisen pallon säde, jolla piste sijaitsee; $-\pi < \varphi \leq \pi$ pisteen pituus vastaten xy-tason napakulmaa; $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ pisteen leveys, so. origon ja pisteen yhdysjanan kaltevuuskulma xy-tasoon nähden. pallo



Pallokoordinaattien ja xyz-koordinaattien väliset yhteydet ovat seuraavat: sini kosini arcus-funktio

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta\cos\varphi \\ y = r\cos\vartheta\sin\varphi \\ z = r\sin\vartheta \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ \vartheta = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} .$$

Kulmaa φ laskettaessa on funktiosta arctan käytettävä sopivaa haaraa kuten lieriökoordinaattien ja tason napakoordinaattien tapauksessa. Funktiosta arcsin sen sijaan käytetään aina päähaaraa kulman ϑ lausekkeessa. päähaara (arcus)

Edellä määriteltyihin pallokoordinaatteihin viitataan toisinaan *maantieteellisinä* pallokoordinaatteina. Varsinkin fysiikassa käytetään myös hieman toisella tavoin määriteltyjä, ns. *fysikaalisia* pallokoordinaatteja. Tällöin kulma ϑ korvataan kulmalla, joka ilmoittaa pisteen kaarietäisyyden positiivisesta z-akselista. Jos fysikaalisten pallokoordinaattien kulmaa merkitään ϑ', on siis $\vartheta' = \pi/2 - \vartheta$ ja $0 \leq \vartheta' \leq \pi$. Edellä oleviin vastaavuuskaavoihin tulee vähäisiä muutoksia.

ESITIEDOT: koordinaatistot
KATSO MYÖS: vektorialgebra

Vektorikäsite

Jos kahta pistettä A ja B yhdistävälle janalle AB annetaan suunta, so. sovitaan, että toinen pisteistä on janan alkupiste ja toinen sen loppupiste, saadaan *suuntajana*. jana

Kaksiulotteisessa tasossa tai kolmiulotteisessa avaruudessa samanpituisten ja samansuuntaisten suuntajanojen joukkoa sanotaan *vektoriksi*. Jokainen suuntajanoista on kyseisen vektorin *edustaja*. Suuntajanan AB määräämää vektoria merkitään $\overrightarrow{AB}$.

Vektoreita merkitään myös yhdellä symbolilla joko siten, että symbolin päälle kirjoitetaan viiva tai nuoli, tai varsinkin ladotussa tekstissä lihavoituna. Esimerkiksi: $\overrightarrow{AB} = \bar{a} = \vec{a} = \mathbf{a}$. (Tässä tekstissä käytössä on lihavointi.)

Vektorin *pituutta*, so. vastaavan suuntajanan pituutta merkitään joko itseisarvomerkeillä tai jättämällä symbolista nuoli tai lihavointi pois. Vektorin $\mathbf{a}$ pituus on siten $|\mathbf{a}| = |\bar{a}| = |\vec{a}| = a$.

Suuntajanan alkupiste ja loppupiste voivat myös yhtyä. Tällöin suuntajanan sanotaan edustavan *nollavektoria*. Tämän pituus on siis $= 0$ ja suunta on määräämätön.

Yksikkövektori on vektori, jonka pituus $= 1$. Vektorin $\mathbf{a}$ suuntaista yksikkövektoria merkitään $\mathbf{a}^0$.

Geometrisissa tehtävissä vektorit piirretään yleensä nuolina, ts. piirretään vektoria edustavia suuntajanoja. Koska vektorille olennaista on vain pituus ja suunta, voidaan sijainti, esimerkiksi alkupiste valita vapaasti.

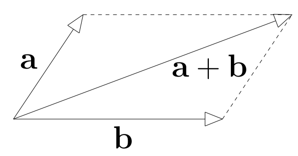
Sovelluksissa vektoreilla kuvataan suureita, joilla on paitsi suuruus myös suunta. Tällaisia ovat esimerkiksi fysiikassa nopeus, kiihtyvyys, vääntömomentti, sähkökentän voimakkuus, jne. nopeus kiihtyvyys

Edellä esitetty määrittely koskee ns. geometrisia vektoreita. Käsitettä käytetään matematiikassa kuitenkin myös paljonkin yleisemmässä merkityksessä. Hieman yksinkertaistaen voidaan sanoa, että vektori on *skalaarin* vastakohta. Skalaari taas tarkoittaa lukua; skalaarisuure on yhdellä luvulla kuvattavissa oleva suure. Vektori on siten jotakin, mitä ei voida kuvata yhdellä luvulla. Lisäksi vektoreilta edellytetään, että niillä voidaan laskea tiettyjen laskusääntöjen mukaisesti.

Vektorien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen

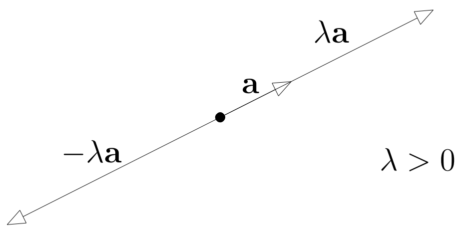
Kaksi tason tai avaruuden vektoria $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *lasketaan yhteen* siten, että niiden suuntajanat asetetaan alkamaan samasta pisteestä ja summavektorin $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ edustajana oleva suuntajana muodostetaan syntyvän suunnikkaan lävistäjänä oheisen kuvion mukaisesti:

yhteenlasku (yleensä)



Vektori $\mathbf{a}$ *kerrotaan skalaarilla* eli reaaliluvulla λ siten, että sen pituus kerrotaan itseisarvolla $|\lambda|$ ja suunta säilyy samana, jos $\lambda > 0$, tai kääntyy vastakkaiseksi, jos $\lambda < 0$. Jos $\lambda = 0$, tuloksena on nollavektori. Vektorin $\mathbf{a}$ skalaarikerrannaista merkitään $\lambda\mathbf{a}$.

kertolasku (yleensä)



Vektoreiden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen noudattavat kaikkia tavanomaisia laskusääntöjä: Yhteenlasku on vaihdannaista ja liitännäistä, ts. laskettaessa yhteen useita vektoreita ei järjestyksellä tai vektoreiden ryhmittelyllä (sulkujen käytöllä) ole merkitystä. Skalaarilla kertominen noudattaa osittelulakeja, jne.

vaihdannaisuus
liitännäisyys
osittelulaki

ESITIEDOT: koordinaatistot
KATSO MYÖS: vektorialgebra

Vektorit koordinaatistossa

Suorakulmaisen xy-koordinaatiston tai avaruudessa xyz-koordinaatiston koordinaattiakseleiden positiiviseen suuntaan osoittavia yksikkövektoreita kutsutaan *kantavektoreiksi*. Nämä ovat siis pituudeltaan $= 1$ ja toisiaan vastaan kohtisuoria. Kantavektoreiden symboleina käytetään $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja avaruudessa lisäksi $\mathbf{k}$.

koordinaatisto (xy-)
koordinaatisto (xyz-)

Yhteenlasku ja skalaarilla kertominen mahdollistavat vektorien jakamisen koordinaattiakseleiden suuntaisiin *komponentteihin*. Esimerkiksi pisteestä $P = (2, -3, 1)$ alkava ja pisteeseen $Q = (5, -5, 2)$ päättyvä suuntajana määrää vektorin, joka voidaan lausua summana kantavektoreiden suuntaisista komponenteista:

piste

$$\overrightarrow{PQ} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Komponentit voivat luonnollisesti olla muunkinlaisia kuin koordinaattiakseleiden suuntaisia. Esimerkiksi fysikaalisessa sovelluksessa, jossa tarkastellaan kaltevalla tasolla olevaa kappaletta, on voimavektorit luonnollista jakaa tason suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

Muotoa

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3$$

olevaa lauseketta kutsutaan vektoreiden $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ *lineaariyhdistelyksi*.

ESITIEDOT: vektori
KATSO MYÖS: determinantti

Skalaaritulo

Vektoreiden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen lisäksi vektoreiden välille voidaan määritellä myös kertolasku. Itse asiassa näitä on kaksi erilaista.

vektori
yhteenlasku (vektorien)

Seurauksena on, että vektoreilla voidaan laskea samaan tapaan kuin reaali- tai kompleksiluvuilla. Tällöin puhutaan *vektorialgebrasta*.

skalaarilla kertominen (vektorien)

Tason tai avaruuden kahden vektorin *skalaaritulo* eli *sisätulo* eli *pistetulo* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ määritellään asettamalla

kosini

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \vartheta,$$

missä ϑ on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma $(0 \leq \vartheta \leq \pi)$.

kulma (taso-)

Vektorin skalaaritulo itsensä kanssa on sama kuin vektorin pituuden neliö, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, koska tällöin $\vartheta = 0$ ja kosini siis on $= 1$.

pituus (vektorin)

Jos vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuoria, on niiden välisen kulman $\pi/2$ kosini $= 0$ ja siis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Skalaaritulo voi olla $= 0$ myös sen takia, että jompikumpi (tai molemmat) vektoreista on nollavektori. Tapana on sanoa, että nollavektori on kohtisuorassa mitä tahansa vektoria vastaan, jolloin voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat kohtisuorat.

nollavektori

Koska kosinin itseisarvo on ≤ 1, on $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

Määritelmän pohjalta voidaan geometrisilla konstruktioilla osoittaa, että skalaaritulo on vaihdannainen ja noudattaa osittelulakeja. Skalaariset kertoimet voidaan kerätä yhteen: $(\lambda\mathbf{a}) \cdot (\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Tulon liitännäisyydestä ei sen sijaan voida puhua: Koska tulon arvo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ on skalaari, ei sen skalaarituloa kolmannen vektorin kanssa voida muodostaa.

vaihdannaisuus
osittelulaki
liitännäisyys

Jos tason vektorit on esitetty kantavektoreiden $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ lineaariyhdistelyinä, saadaan skalaaritulolle yksinkertainen lauseke. Olkoon $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$. Näiden skalaaritulo on em. laskulakien mukaan

kantavektori
lineaariyhdistely

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= a_x b_x + a_y b_y,\end{aligned}$$

koska vektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuoria ja pituudeltaan $= 1$, ts. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$.

Vastaava tulos on voimassa avaruuden vektoreille: Jos $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, niin

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

ESITIEDOT: vektori
KATSO MYÖS: determinantti

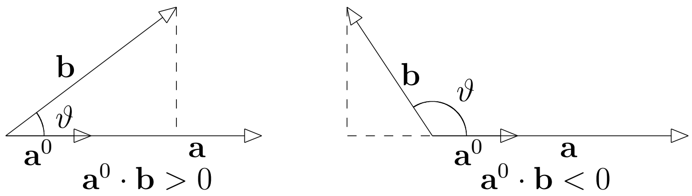
Vektorin komponentti

Vektorin $\mathbf{b}$ *skalaarikomponentti* vektorin $\mathbf{a}$ suunnalle on vektori

kosini

$$|\mathbf{b}|\cos\vartheta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}^0\cdot\mathbf{b}.$$

Tämä voi myös olla negatiivinen, jos vektoreiden välinen kulma ϑ on $> \pi/2$.



Vastaavasti saadaan vektorin $\mathbf{b}$ *vektorikomponentti* vektorin $\mathbf{a}$ suunnalle liittämällä skalaarikomponenttiin suunta: yksikkövektori

$$|\mathbf{b}|\cos\vartheta\ \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\ \mathbf{a} = (\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{b})\ \mathbf{a}^0.$$

Vektorikomponentin suunta on siis joko vektorin $\mathbf{a}$ suunta tai sille vastakkainen suunta riippuen skalaaritulon $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ merkistä, ts. siitä, onko vektori $\mathbf{b}$ pikemminkin saman- vai vastakkaissuuntainen kuin $\mathbf{a}$.

Jos vektori on esitetty lineaariyhdistelynä kantavektoreista, siis $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, on lineaariyhdistely

kantavektori

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i} = b_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + b_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = b_x.$$

Kerroin b_x on siis vektorin $\mathbf{b}$ skalaarikomponentti kantavektorin $\mathbf{i}$ suunnalle eli x-akselille; lineaariyhdistelyn termi $b_x\mathbf{i}$ on vastaavasti vektorikomponentti. Vastaava pätee luonnollisesti muillekin kantavektoreille.

ESITIEDOT: vektori
KATSO MYÖS: determinantti

Vektoritulo

Vektoritulo eli *ristitulo* voidaan määritellä vain avaruuden vektoreille. Sitä merkitään $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ja se määritellään seuraavilla ehdoilla: vektori

- Ristitulovektorin pituus on $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \vartheta$, missä ϑ on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma ($0 \leq \vartheta \leq \pi$). pituus (vektorin) kulma (taso-)
- Ristitulovektorin suunta määräytyy siten, että se on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan; kahdesta mahdollisuudesta valitaan se, joka tekee vektorikolmikosta $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oikeakätisen (so. kyseiset kolme vektoria suhtautuvat toisiinsa kuten oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi ojennettuina). koordinaatisto (oikeakätinen)
- Jos jompikumpi vektoreista $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on nollavektori, myös niiden ristitulo on nollavektori. nollavektori

Geometrisilla tarkasteluilla on mahdollista osoittaa, että ristitulo noudattaa osittelulakeja, so. osittelulaki

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Skalaariset kertoimet voidaan myös kerätä yhteen:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times (\mu \mathbf{b}) = \lambda \mu (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Vaihdannainen tai liitännäinen ei vektoritulo sen sijaan ole. Tekijöiden järjestystä vaihdettaessa muuttuu merkki: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Esimerkiksi on $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ja $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{o} = \mathbf{o}$ eikä liitännäisyys siis päde. vaihdannaisuus liitännäisyys

Vektorin vektoritulo itsensä kanssa on nollavektori: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Tällöin nimittäin vektoreiden välinen kulma on $\vartheta = 0$, jolloin tulovektorin pituus on $= 0$.

Vektoritulon laskeminen

Kantavektoreiden vektoritulot ovat

kantavektori

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{o},\\
&\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\quad\text{ja}\\
&\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Vektoreiden $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$ vektorituloksi saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \quad a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad + a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\
&\quad + a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Tämä voidaan kirjoittaa helpommin muistettavaan determinantin muotoon

determinantti

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

Kolmitulot

Kolmesta vektorista muodostettu tulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ on mielekäs vain, mikäli vektoritulo lasketaan ennen skalaarituloa: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Tuloksena on skalaari ja tuloa kutsutaankin *skalaarikolmituloksi*. Sulut on tapana jättää pois, koska lausekkeella on vain yksi mielekäs tulkinta. vektori skalaari

Skalaari- ja vektoritulon lausekkeiden perusteella voidaan mekaanisella laskulla osoittaa, että skalaarikolmitulossa voidaan pisteen ja ristin paikkaa vaihtaa ja toisaalta tekijävektoreita kierrättää ilman että tulon arvo muuttuu:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Jos tekijöistä kaksi vaihdetaan keskenään, muuttuu skalaarikolmitulon merkki: esimerkiksi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. Jos kaksi (tai kolme) tekijää on samoja, tulo on $= 0$.

Skalaarikolmitulo voidaan myös laskea determinantista: determinantti

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix},$$

missä $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$.

Kolmesta vektorista muodostettu kaksinkertainen vektoritulo on myös mielekäs: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tai $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Tämän arvo on vektori ja sitä kutsutaan *vektorikolmituloksi*.

Vektorikolmitulolle on voimassa kehityskaavat

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}.$$

Esitiedot:

Katso myös: vektorialgebra

Determinantti

Determinantin käsitteellä on sangen laaja käyttö lineaarialgebraksi ja matriisilaskennaksi kutsutuilla matematiikan osa-alueilla. Seuraavassa esitetään määrittelyt vain kaksi- ja kolmirivisille determinanteille, joita tarvitaan vektorialgebrassa.

vektoritulon laskeminen

skalaarikolmitulo

Kaksirivinen determinantti muodostuu neljästä 2×2-kaavioon järjestetystä luvusta (tai symbolista, joilla voidaan suorittaa laskutoimituksia; esimerkiksi vektoreista). Determinantti voidaan laskea, jolloin saadaan seuraava tulos:

vektori

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esimerkiksi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 5 \cdot 3 = -22.$$

Vastaavasti *kolmirivinen determinantti* on 3×3-kokoinen kaavio, joka lasketaan seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Laskenta palautuu siis kaksirivisten determinanttien laskemiseen.

Esimerkiksi:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & -9 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -7 & -9 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-21) - 1 \cdot (-46) - 2 \cdot 1 = -19.$$

ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot

KATSO MYÖS: geometria, Pythagoraan lause, vektorialgebra, geometriset probleemat

---

Pisteen identifiointi

Piste on yksinkertaisin geometrinen peruskäsite. Sitä ei varsinaisesti voida määritellä. Eukleideen *Stoikheia*-teoksessa esittämä atomistinen määritelmä — piste on se, jolla ei ole osaa — ei oikeastaan ole määritelmä. Sehän ei luonnehdi käsitettä loogisessa mielessä aiemmin määriteltyjen käsitteiden avulla. Eukleides

Käytännöllisissä tehtävissä voidaan tyytyä ajattelemaan pisteitä havainnollisen mielikuvan mukaisesti ulottuvuuksia vailla olevina kynän kärjen jälkinä.

Puhtaassa synteettisessä taso- tai avaruusgeometriassa, jossa geometrisia kuvioita tarkastellaan ilman algebrallisia apuvälineitä, pisteitä merkitään vain niiden *symboleilla*. Nämä ovat yleensä isoja latinalaisia kirjaimia: A, B, C, $\ldots$, P, Q, jne.

Mikäli jokin piste kiinnitetään origoksi O, voidaan pisteet identifioida *paikkavektoreillaan*. Paikkavektorin edustajana on suuntajana, joka alkaa origosta ja päättyy ko. pisteeseen. Piste P voidaan siten antaa ilmoittamalla sen paikkavektori $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. origo origo vektori suuntajana

Paikkavektoreiden käyttö mahdollistaa vektorialgebran käytön geometriassa. geometria (vektori-)

Jos tasoon tai avaruuteen kiinnitetään origon lisäksi koordinaattiakselit, voidaan pisteet ilmaista *koordinaattien* avulla. Yleisimmin käytetään suorakulmaisia koordinaatteja, mutta mikäli tarkasteltava tilanne on tasossa ympyräsymmetrinen, avaruudessa pallo- tai lieriösymmetrinen, on luontevaa käyttää tason napakoordinaatteja, avaruuden pallo- tai lieriökoordinaatteja. Muunkinlaiset koordinaattijärjestelmät voivat tilanteen geometrian mukaan tulla kysymykseen. koordinaatisto koordinaatisto (suorakulmainen) koordinaatisto (xy-) koordinaatisto (suorakulmainen) koordinaatisto (xyz-) koordinaatisto (oikeakätinen) koordinaatisto (napa-) koordinaatisto (lieriö-) koordinaatisto (pallo-)

Koordinaatteja käytettäessä voidaan geometriaan soveltaa ns. analyyttisen geometrian menetelmiä. Tällöin geometrisia olioita käsitellään niiden yhtälöiden avulla. geometria (analyyttinen)

ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot

KATSO MYÖS: geometria, Pythagoraan lause, vektorialgebra, geometriset probleemat

---

Pisteen paikkavektori erilaisissa koordinaatistoissa

Jos pisteen koordinaatit tunnetaan, voidaan sen paikkavektori lausua näiden avulla. Esimerkiksi jos pisteen P suorakulmaiset xyz-koordinaatit ovat (x_0, y_0, z_0), niin paikkavektori on

koordinaatisto (xyz-)

$$\mathbf{r} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}.$$

Jos piste on annettu pallokoordinaattien avulla, $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, voidaan suorakulmaiset koordinaatit lausua näiden avulla ja paikkavektoriksi saadaan

koordinaatisto (pallo-)

$$\mathbf{r} = r_0 \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0\,\mathbf{i} + r_0 \cos\vartheta_0 \sin\varphi_0\,\mathbf{j} + r_0 \sin\vartheta_0\,\mathbf{k}.$$

Koska piste voidaan identifioida usealla eri tavalla, on tarpeen jotenkin ilmaista, milloin eri esitysmuodot tarkoittavat samaa pistettä. Jos pisteen P_0 paikkavektori on $\mathbf{r}_0$, suorakulmaiset koordinaatit (x_0, y_0, z_0) ja pallokoordinaatit $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, voidaan merkitä

$$P_0 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_0 \mathrel{\widehat{=}} (x_0, y_0, z_0) \mathrel{\widehat{=}} (r_0, \vartheta_0, \varphi_0).$$

Vakiintunut ei tämä merkintätapa kuitenkaan ole.

Esitiedot: vektori, koordinaatistot

Katso myös: geometria, Pythagoraan lause, vektorialgebra, geometriset probleemat

---

Kahden pisteen etäisyys

Pisteiden $P_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_1 \mathrel{\widehat{=}} (x_1, y_1, z_1)$ ja $P_2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_2 \mathrel{\widehat{=}} (x_2, y_2, z_2)$ välinen etäisyys on niiden yhdysjanan pituus. Tämä voidaan vektorialgebrallisesti ilmaista muodossa

pituus (vektorin)

skalaaritulo

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$$

koordinaatisto (xyz-)

tai xyz-koordinaattien avulla

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Tasotapaukseen päästään asettamalla z-koordinaatit $= 0$.

Perusteena etäisyyden lausekkeille on Pythagoraan lause.

Pythagoraan lause

Esitiedot: vektori, koordinaatistot, piste
Katso myös: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat, taso

Suora geometrisena peruskäsitteenä

Pisteen ohella *suora* on geometrinen peruskäsite, jota varsinaisesti ei määritellä. piste

Alkeisgeometriassa voidaan suoraa havainnollistaa viivoittimen reunalla, taitetun paperiarkin taittosärmällä, valonsäteellä jne. Suora ulottuu kummassakin suunnassa äärettömyyteen ja on 'suora' intuitiivisen mielikuvan mukaisesti. Tällaiset mielikuvat eivät kuitenkaan kelpaa logiikkaan pohjautuviksi määritelmiksi. Geometrian historia myös osoittaa, että vasta suoran käsitteen täsmentäminen ratkaisi vuosisatojen ajan avoimina olleet ongelmat. logiikka geometria geometria

Tavanomaisessa alkeisgeometriassa — sekä taso- että avaruusgeometriassa — suoria voidaan käsitellä intuitiivisen mielikuvan pohjalta. Tavanomaiseen alkeisgeometriaan viitataan myös puhumalla *euklidisesta* geometriasta; perusjoukko, johon pisteet ja suorat sijoitetaan, on joko *euklidinen taso* tai *euklidinen avaruus*. geometria (euklidinen) geometria (euklidinen)

Suoria merkitään yleensä pienillä latinalaisilla kirjaimilla: s, t, jne.

Suorien perusominaisuuksia ovat seuraavat:

- Kahden erillisen pisteen kautta voidaan asettaa täsmälleen yksi suora.
- Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan asettaa täsmälleen yksi sen suuntainen suora. (*Paralleeliaksiooma*) paralleeliaksiooma
- Tason kaksi suoraa joko leikkaavat yhdessä pisteessä, ovat yhdensuuntaiset tai yhtyvät. paralleeliaksiooma
- Avaruuden kaksi suoraa joko leikkaavat yhdessä pisteessä, ovat yhdensuuntaiset, yhtyvät tai ovat *ristikkäiset* (esimerkiksi x-akseli ja y-akselin suuntainen suora, jonka pisteiden z-koordinaatti on $= 1$).

Jos A ja B ovat kaksi suoran s pistettä, näiden välinen suoran osa on *jana* AB. Suoralla s oleva piste P jakaa suoran kahteen osaan; kumpaakin näistä kutsutaan *puolisuoraksi* tai *säteeksi*.

ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot, piste

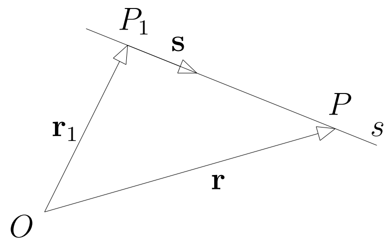
KATSO MYÖS: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat, taso

Suoran vektoriesitys

Olkoon annettuna kaksi tason tai avaruuden pistettä paikkavektoreidensa avulla: $P_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_1$, $P_2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_2$. Nämä määräävät yksikäsitteisesti suoran s. vektori paikkavektori

Vektori $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ on suoran s suuntainen; sitä kutsutaan suoran *suuntavektoriksi.*

Jos $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}$ on mikä tahansa suoran s piste, sen paikkavektori voidaan kirjoittaa muotoon $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\,\mathbf{s}$, kun skalaari a valitaan sopivasti. Toisaalta jos a on mikä tahansa reaaliluku, antaa eo. lauseke aina jonkin suoralla s olevan pisteen paikkavektorin. skalaari



Tämän johdosta sanotaankin, että

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\,\mathbf{s}, \quad a \in \mathbb{R},$$

on suoran s *vektoriesitys*. Luku a on *parametri*, jota vaihtelemalla saadaan kaikki suoran pisteet.

Suuntavektori $\mathbf{s}$ ei ole yksikäsitteinen, vaan mikä tahansa suoran suuntainen vektori kelpaa. Myöskään paikkavektori $\mathbf{r}_1$ ei ole yksikäsitteinen. Tämä merkitsee, että samalle suoralle saadaan useita erilaisia vektoriesityksiä.

Suorien vektoriesitykset mahdollistavat vektorialgebran käytön geometrian menetelmänä. geometria (vektori-)

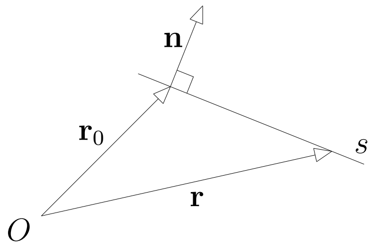
Esitiedot: vektori, koordinaatistot, piste

Katso myös: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat, taso

Suoran yhtälö

Olkoon tasossa piste $P_0 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_0$ suoran s piste ja olkoon $\mathbf{n}$ suoraa vastaan kohtisuora vektori, ns. *normaalivektori.* vektori

Jotta piste $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}$ olisi suoralla, on vektoreiden $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ilmeisestikin oltava toisiaan vastaan kohtisuorat, ts. niiden skalaaritulon $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ on oltava $= 0$. skalaaritulo



Kun merkitään $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$, saa ehto muodon

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

eli

$$ax + by + c = 0,$$

missä on merkitty $c = -ax_0 - by_0$. Tätä sanotaan *suoran yhtälöksi* xy-koordinaatistossa. Huomattakoon, että koordinaattien x ja y kertoimina ovat normaalivektorin komponentit. koordinaatisto (xy-) komponentti

Piste (x, y) on siis suoralla, jos ja vain jos ehto $ax + by + c = 0$ toteutuu.

Kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa ei vastaavalla tavalla voida muodostaa yhtälöä suoralle, vaan analoginen tarkastelu johtaa tason yhtälöön. Suoraa voidaan tällöin käsitellä kahden tason leikkauskuviona, jolloin se esitetään kahdella tason yhtälöllä. taso (yhtälö)

Yhtälöiden käyttö suorien esittämiseen johtaa ns. analyyttiseen geometriaan, jossa geometrisia ongelmia ratkaistaan algebran menetelmillä. geometria (analyyttinen)

ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot, piste

KATSO MYÖS: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat, taso

Suoran kulmakerroin

Tarkastellaan suoran yhtälöä $ax + by + c = 0$ tavallisessa xy-tasossa. Jos $b \neq 0$, tästä voidaan ratkaista y:

koordinaatisto (xy-)

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Muuttujan x kerroin $-a/b$ on suoran *kulmakerroin*, joka kuvaa sen kaltevuutta. Vakiotermi $-c/b$ osoittaa, missä pisteessä suora leikkaa y-akselin.

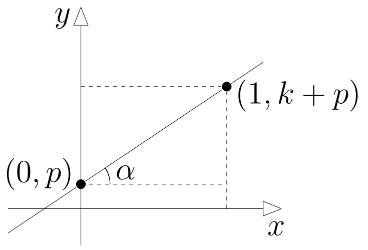
Jos $b = 0$, on suoran yhtälö $ax + c = 0$ eli $x = -c/a$. Tällöin se on y-akselin suuntainen. Tällaisen suoran yhtälöä ei voida ratkaista y:n suhteen, so. saattaa muotoon $y = kx + p$.

Suoran ja x-akselin positiivisen suunnan välistä kulmaa α kutsutaan suoran *suuntakulmaksi*. Tämä valitaan aina väliltä $]-90°, 90°]$. Arvo $90°$ vastaa y-akselin suuntaista suoraa.

väli (reaaliakselin)

Jos suoran yhtälössä $y = kx + p$ asetetaan $x = 0$, on $y = p$; vastaavasti jos $x = 1$, niin $y = k + p$. Alla olevan kuvion perusteella on tällöin $k = \tan\alpha$, ts. kulmakerroin on suuntakulman tangentti. Jos suora on nouseva, kulmakerroin on positiivinen; laskevalla suoralla se on negatiivinen.

tangentti (trigonometrinen)



ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot, piste

KATSO MYÖS: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat, taso

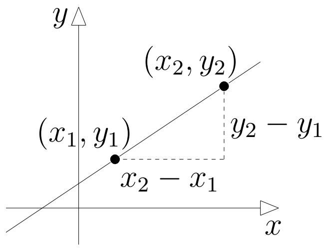
Kulmakertoimen laskeminen

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin k saadaan laskemalla suuntakulman tangentti oheisen kuvion mukaisesti:

koordinaatisto (xy-)

tangentti (trigonometrinen)

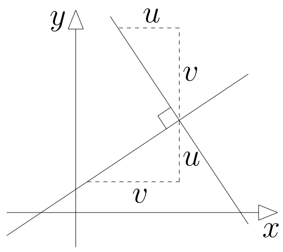
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Koska lisäksi esimerkiksi pisteen (x_1, y_1) koordinaattien tulee toteuttaa suoran yhtälö, saadaan yhtälöksi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Kahden kohtisuoran suoran kulmakertoimille pätee $k = u/v$ ja $k' = -v/u$, jolloin niiden tulo on $kk' = -1$. Tämä nähdään helpoimmin oheisen kuvion avulla.



ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot, piste, suora

KATSO MYÖS: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat

Taso geometrisena peruskäsitteenä

Kolmiulotteisen alkeisgeometrian peruskäsitteisiin kuuluu *taso* pisteen ja suoran lisäksi. Intuitiivisesti sitä voidaan ajatella joka suunnassa äärettömyyteen ulottuvana 'tasaisena' ja 'suorana' levynä. Tason voidaan katsoa myös syntyvän, kun suora liukuu pitkin kahta kiinteää yhdensuuntaista suoraa. piste suora

Tason perusominaisuudet ovat samantyyppisiä kuin suoran:

- Kolme pistettä määräävät yksikäsitteisesti tason, jos ne eivät ole samalla suoralla.
- Kaksi toisensa leikkaavaa suoraa tai kaksi yhdensuuntaista suoraa määräävät yksikäsitteisesti tason.
- Tason ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan asettaa täsmälleen yksi sen suuntainen taso.
- Kaksi tasoa joko leikkaavat toisensa pitkin suoraa, ovat yhdensuuntaiset tai yhtyvät.

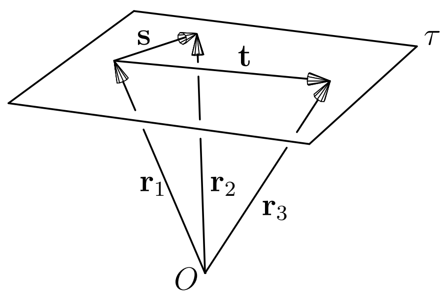
Tason vektoriesitys

Tasolle voidaan muodostaa vektoriesitys samaan tapaan kuin suoralle:

Olkoon annettuna kolme avaruuden pistettä paikkavektoreidensa avulla: $P_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_1$, $P_2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_2$, $P_3 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_3$. Oletetaan, että nämä eivät ole samalla suoralla, jolloin ne määräävät yksikäsitteisesti tason τ.

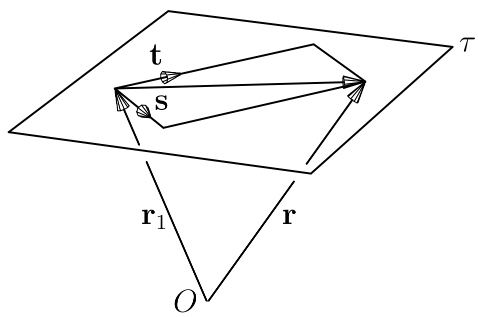
vektori
paikkavektori

Erotusvektorit $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{t} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ ovat tason τ suuntaisia. Ne ovat keskenään eri suuntaisia, koska pisteet P_1, P_2, P_3 eivät ole samalla suoralla. Jos vektorit asetetaan alkamaan pisteestä P_1, ne määräävät suorat, jotka puolestaan määräävät tason τ. Tämän johdosta vektoreita kutsutaan tason τ *virittäjävektoreiksi.*



Jos $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}$ on mikä tahansa tason τ piste, sen paikkavektori voidaan kirjoittaa muotoon $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\,\mathbf{s} + b\,\mathbf{t}$, kun skalaarit a ja b valitaan sopivasti. Toisaalta jos a ja b ovat mitä tahansa reaalilukuja, antaa eo. lauseke aina jonkin tasossa τ olevan pisteen paikkavektorin.

skalaari



Esitystä $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + a\,\mathbf{s} + b\,\mathbf{t}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, kutsutaan tason τ *vektoriesitykseksi.* Tässä on kaksi *parametria*, a ja b, joiden arvoja vaihtelemalla saadaan kaikki tason pisteet. Samoin kuin suoran tapauksessa tason vektoriesitys ei ole yksikäsitteinen. Tason vektoriesitys muodostaa vektorialgebrallisen työkalun geometristen ongelmien käsittelyyn.

geometria
(vektori-)

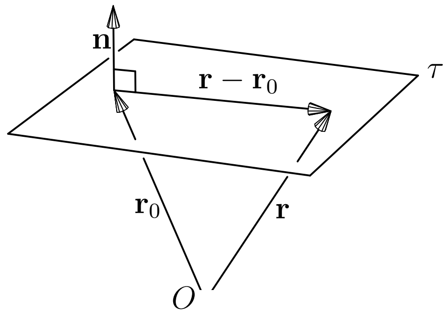
ESITIEDOT: vektori, koordinaatistot, piste, suora
KATSO MYÖS: geometria, vektorialgebra, geometriset probleemat

Tason yhtälö

xy-tasossa muotoa $ax + by + c = 0$ oleva yhtälö esittää suoraa. Tämän analogia kolmiulotteisessa xyz-avaruudessa on yhtälö $ax+by+cz+d = 0$; se esittää tasoa. Perustelut ovat hyvin samankaltaiset kuin suoran tapauksessa: koordinaatisto (xy-) koordinaatisto (xyz-)

Olkoon annettuna piste $P_0 \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}_0$, jonka kautta taso τ kulkee ja tasoa vastaan kohtisuora vektori, sen *normaalivektori* $\mathbf{n}$. Nämä määräävät tason yksikäsitteisesti. vektori

Jotta piste $P \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{r}$ olisi tasossa, on vektoreiden $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ oltava toisiaan vastaan kohtisuorat: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. skalaaritulo



Kun merkitään $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$, saa ehto muodon

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

eli

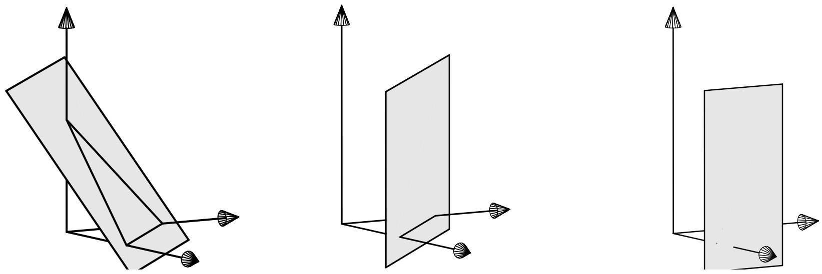
$$ax + by + cz + d = 0,$$

missä on merkitty $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Tämä on *tason yhtälö* xyz-koordinaatistossa. Koordinaattien x, y ja z kertoimina ovat normaalivektorin komponentit. komponentti

Piste (x, y, z) on siis tasossa τ, jos ja vain jos ehto $ax + by + cz + d = 0$ toteutuu.

Koordinaattiakseleiden ja -tasojen suuntaiset tasot

Tason yhtälön kertoimista a, b ja c voi myös yksi tai kaksi olla $= 0$. Kaikki sen sijaan eivät voi olla nollia, koska tällöin normaalivektori $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ olisi nollavektori eikä määräisi tason suuntaa. Täten esimerkiksi yhtälöt $x+y+z=1$, $x+y=1$ ja $x=1$ kaikki esittävät kolmiulotteisen avaruuden tasoja. nollavektori



$x+y+z=1$ $\quad$ $x+y=1$ $\quad$ $x=1$

Jos yhtälöstä puuttuu jokin koordinaatti, tason on vastaavan akselin suuntainen. Jos kaksi koordinaattia puuttuu, taso on koordinaattitason suuntainen.

Suora kolmiulotteisessa avaruudessa

Kolmiulotteisen avaruuden suoraa ei voida esittää yhdellä (skalaarisella) yhtälöllä tason esityksen tapaan. Sitä voidaan kuitenkin tarkastella kahden tason leikkaussuorana. Piste (x, y, z) on leikkaussuoralla, jos ja vain jos se toteuttaa kummankin tason yhtälön. suora

Esimerkkinä tällaisesta suoran esityksestä olkoon seuraava:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Tällainen suoran esitys ei tietenkään ole yksikäsitteinen, koska tasot, joiden leikkauksena suora saadaan, voidaan valita monella eri tavalla. Esimerkin suora voidaan esittää yhtä hyvin muodossa

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Tästä muodosta on helposti nähtävissä, että kyseessä on xy-tason ($z = 0$) suora $x + y = 1$.

Yhtälöiden käyttö sekä tasojen että suorien esittämisessä on ns. analyyttisen geometrian menetelmä. geometria (analyyttinen)

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: geometria, synteettistä geometriaa, analyyttista geometriaa, vektorigeometriaa, algebralliset menetelmät geometriassa

---

Geometristen probleemojen tyypit

Geometriset probleemat muodostuvat seuraavista päätyypeistä:

- On todistettava jotakin. Esimerkiksi on osoitettava, että minkä tahansa kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa keskijanat suhteessa $1 : 2$; tai on osoitettava, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi.
- On konstruoitava jotakin. Sallitut geometriset välineet ovat tällöin perinteisesti viivoitin ja harppi. Esimerkiksi on etsittävä ne tason pisteet, joista annettu jana näkyy annetun kulman suuruisessa kulmassa; tai on piirrettävä ympyrä, joka kulkee kolmen annetun pisteen kautta.
- On laskettava jotakin. Esimerkiksi on laskettava pallon säteen ja pallon sisään asetetun säännöllisen tetraedrin särmän pituuden suhde; tai on laskettava kolmion kulmat, kun sivujen pituudet tunnetaan.

Konstruktiotehtävissä viivoitin (jota saa käyttää vain kahden annetun pisteen kautta kulkevan suoran piirtämiseen) ja harppi ovat luonnollisia välineitä seuraavista syistä: Viivoitin tarvitaan geometrisen perusolion, suoran, piirtämiseen ja uusien pisteiden konstruoimiseen kahden suoran leikkauspisteinä. Harpin avulla voidaan piirtää yhtä pitkiä janoja. Se on pikemminkin väline pituuksien mittaamiseen kuin ympyröiden piirtämiseen.

Pelkästään harpin avulla tapahtuvaa konstruktiotehtävien ratkaisemista on myös tutkittu. Itse asiassa viivoitin onkin tarpeeton väline: Kaikki mikä voidaan konstruoida harpilla ja viivoittimella, voidaan konstruoida myös yksinomaan harpilla. Tällöin ei luonnollisestikaan voida piirtää suoria, vaan suora katsotaan tunnetuksi, kun sen kaksi pistettä tiedetään.

Mielivaltaisen kulman jakoa kolmeen yhtä suureen osaan ei voida konstruoida harpilla ja viivoittimella; asian on 1500-luvun lopulla todistanut Franciscus Vieta. Jos välineistöä sen sijaan täydennetään sopivalla käyrällä, esimerkiksi tasasivuisella hyperbelillä, jako tulee mahdolliseksi.

Vieta
hyperbeli (xy-koordinaateissa)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: geometria, synteettistä geometriaa, analyyttista geometriaa, vektorigeometriaa, algebralliset menetelmät geometriassa

---

Geometristen probleemojen ratkaisumenetelmät

Menetelmät geometristen probleemojen ratkaisemiseksi voidaan jakaa seuraaviin ryhmiin:

- Synteettisen, 'puhtaan' geometrian menetelmät, joissa ratkaisu perustuu perusobjektien — pisteiden, suorien ja tasojen — alkeisominaisuuksiin sekä viivoittimen ja harpin käyttöön. Alkeisominaisuudet luetellaan aksioomissa (jotka tässä yhteydessä voi tulkita 'itsestäänselvyyksiksi') ja näiden pohjalta edetään loogisen päättelyn tietä.
- Analyyttisen geometrian menetelmät, joissa geometrisia objekteja käsitellään niiden yhtälöiden avulla. Yhtälöiden käyttö johtaa algebrallisiin laskuihin.
- Vektorigeometrian menetelmät, joissa geometriset objektit esitetään vektoreiden avulla ja hyödynnetään vektorialgebraa.
- Suorien algebrallisten menetelmien käyttö, jolloin työkaluina ovat lähinnä Pythagoraan lause ja yhdenmuotoisten kuvioiden verrannollisuus.

piste
suora
taso
aksiooma
aksiooma
yhtälö
algebra
vektori
Pythagoraan lause
yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

Historiallisesti vanhinta on synteettinen geometria; Eukleideen teos *Stoikheia* 300-luvulta eKr. käsittelee geometriaa tällä tavoin. Algebran ja yhtälöiden käytön geometriassa voidaan katsoa alkaneen vuonna 1637 ilmestyneestä ranskalaisen filosofin ja matemaatikon René Descartesin (latinalaisittain Cartesius) teoksesta *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*, jossa oli noin 100 sivua käsittävä geometriaa koskeva liite. Vektorialgebra ja -geometria on nuorinta: ideat ovat peräisin irlantilaiselta matemaatikolta William Rowan Hamiltonilta, saksalaiselta Hermann Grassmannilta ja amerikkalaiselta Josiah Willard Gibbsiltä 1800-luvun puolesta välistä ja loppupuolelta.

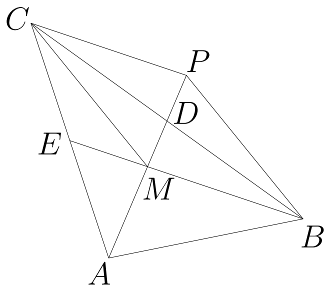
Eukleides
Descartes
Hamilton
Gibbs

Esitiedot: piste, suora, taso

Katso myös: geometriset probleemat, kolmio, kulma, ympyrä

Esimerkki 1 synteettisestä geometriasta

Olkoon tehtävänä todistaa, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa kunkin keskijanan suhteessa 2 : 1 kärjestä vastaisen sivun keskipisteeseen lukien. kolmio keskijana (esimerkki) keskijana (esimerkki) keskijana



Kolmion ABC kaksi keskijanaa olkoot AD ja BE ja näiden leikkauspiste M. Tavoitteena on osoittaa, että $|BM| : |ME| = 2 : 1$. Tätä varten tehdään seuraava apupiirros: Jatketaan keskijanaa AD osan MD pituisella janalla DP. Yhdistetään piste P pisteisiin B ja C sekä piste C pisteeseen M.

Keskijanan määritelmän mukaan ovat janat BD ja DC yhtä pitkät; apukonstruktiosta seuraa, että myös MD ja DP ovat yhtä pitkät. Kolmiot MDC ja PDB ovat tällöin yhtenevät (SKS), mistä seuraa, että janat BP ja MC ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Nelikulmio $BPCM$ on siis suunnikas. Suunnikkaan vastakkaisina sivuina ovat janat BM ja PC yhtä pitkät. yhtenevyys (kolmioiden) suunnikas

Kolmiot APC ja AME ovat yhdenmuotoiset (KK), koska suorat BM ja PC ovat suunnikkaan sivuina yhdensuuntaiset. Yhdenmuotoisuussuhde on 2, koska jana AC on kaksi kertaa janan AE pituinen. Tällöin pätee janojen pituuksille myös $|ME| = \frac{1}{2}|PC| = \frac{1}{2}|BM|$, jolloin $|BM| : |ME| = 2$. yhdenmuotoisuus (kolmioiden) yhdenmuotoisuussuhde

Vastaavasti voidaan osoittaa, että piste M jakaa janan AD suhteessa 2 : 1.

Toistamalla päättely siten, että keskijanan AD sijasta käytetään kärjestä C lähtevää keskijanaa CF, todetaan, että kaikki keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä M, joka jakaa keskijanat suhteessa 2 : 1.

Esitetty todistus lepää kolmioiden yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta koskevien tulosten varassa. Tämä on tyypillistä matemaattisille todistuksille yleensäkin: Tulosten — lauseiden tai teoreemojen — todistamisessa nojaudutaan aiemmin todistettuihin lauseisiin. Jostakin on kuitenkin lähdettävä liikkeelle. Pohjana ovat tällöin ns. aksioomat, lausumat, joita sovitaan pidettävän tosina. Elementaarigeometriassa niiden voidaan sanoa olevan tosia 'itsestäänselvyytensä' takia; yleisemmin voidaan sanoa, että ne ovat tosia, koska tarkastelun kohde tulee määritellyksi sen kautta, että esitetyt aksioomat ovat voimassa! aksiooma aksiooma

Esimerkki 2 synteettisestä geometriasta

Olkoon tehtävänä konstruoida ne tason pisteet, joista katsottaessa annettu jana näkyy annetun suuruisessa kulmassa. Välineiksi sallitaan viivoitin ja harppi klassisen geometrian tapaan. jana kulma (taso-)

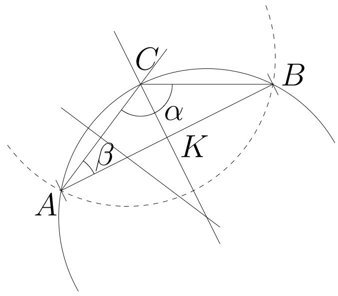
Olkoon siis annettuna jana AB ja kulma α ($< 180°$). Tehtävä voidaan ratkaista seuraavasti:

Piirretään janalle AB keskinormaali, so. suora, joka on kohtisuorassa janaa vastaan ja kulkee sen keskipisteen K kautta. Tämä voidaan tehdä harpilla ja viivoittimella. keskinormaali (janan)

Piirretään kulma, jonka kärkenä on piste A, toisena kylkenä jana AB ja jonka suuruus on $\beta = 90° - \alpha/2$; tämäkin voidaan tehdä harpilla ja viivoittimella. Kulman toisen kyljen ja keskinormaalin leikkauspiste olkoon C.

Piirretään ympyrä, joka kulkee pisteiden A, C ja B kautta. Tämä voidaan tehdä etsimällä janojen AB ja AC keskinormaalit, joiden leikkauspiste on ympyrän keskipiste. ympyrä

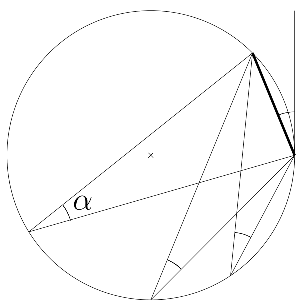
Etsityt pisteet sijaitsevat ympyränkaarella ACB tai tämän kanssa symmetrisellä janan AB toisella puolella sijaitsevalla ympyrän kaarella. kaari



Ratkaisu vaatii perustelut: Miksi on saatu juuri ne pisteet, joita etsittiin?

Kulman ACB suuruus on $2(90° - \beta) = \alpha$. Piste C on siis ainakin yksi etsityistä pisteistä. Samaa jännettä vastaavat ympyrän kehäkulmat ovat yhtä suuria (= puolet vastaisen kaaren asteluvusta); jana AB näkyy siis samansuuruisessa kulmassa jokaisesta kaaren ABC pisteestä. jänne kehäkulma (esimerkki)

Vastaava tilanne kulman α ollessa pienempi (symmetrinen ympyränkaari puuttuu): kehäkulma

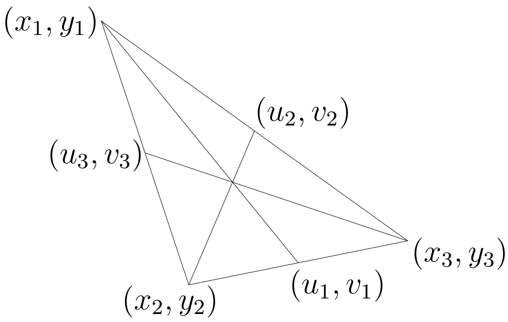


ESITIEDOT: koordinaatistot, piste, suora, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, ympyrä

Esimerkki 1 analyyttisestä geometriasta

Kolmion kärkipisteet olkoot (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3). Tavoitteena on analyyttisen geometrian keinoin osoittaa, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

kolmio
koordinaatisto (xy-)
keskijana (esimerkki)
keskijana (esimerkki)
keskijana



Kolmion sivujen keskipisteiden koordinaatit (u_1, v_1), (u_2, v_2) ja (u_3, v_3) saadaan keskiarvoina kunkin sivun päätepisteiden koordinaateista:

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3), \quad u_2 = \tfrac{1}{2}(x_3 + x_1), \quad u_3 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),$$
$$v_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \quad v_2 = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1), \quad v_3 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Keskijanasuorien yhtälöt ovat

suora (yhtälö)
kulmakerroin

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{v_1 - y_1}{u_1 - x_1}(x - x_1), \\ y - y_2 &= \frac{v_2 - y_2}{u_2 - x_2}(x - x_2), \\ y - y_3 &= \frac{v_3 - y_3}{u_3 - x_3}(x - x_3). \end{aligned}$$

Kun näihin sijoitetaan edellä esitetyt sivujen keskipisteiden koordinaatit, saadaan sieventämisen jälkeen lineaarinen yhtälöryhmä

yhtälöryhmä (lineaarinen)

$$\begin{aligned} (2x_1 - x_2 - x_3)(y - y_1) &= (2y_1 - y_2 - y_3)(x - x_1), \\ (2x_2 - x_3 - x_1)(y - y_2) &= (2y_2 - y_3 - y_1)(x - x_2), \\ (2x_3 - x_1 - x_2)(y - y_3) &= (2y_3 - y_1 - y_2)(x - x_3). \end{aligned}$$

Jos keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, tulee tämän pisteen koordinaattien toteuttaa jokaisen keskijanan yhtälö. Kyse on siis siitä, onko edellä olevalla kolmen yhtälön ryhmällä ratkaisua (x, y), joka samanaikaisesti toteuttaisi kaikki kolme yhtälöä.

Ratkaisemalla yhtälöryhmä algebrallisesti — mikä vaatii kyllä hieman työntekoa — todetaan, että sillä on yksi ratkaisu:

$$x = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Keskijanat siis leikkaavat toisensa tässä pisteessä.

Esimerkki 2 analyyttisestä geometriasta

Olkoon annettuna kaksi tason ympyrää: ympyrä

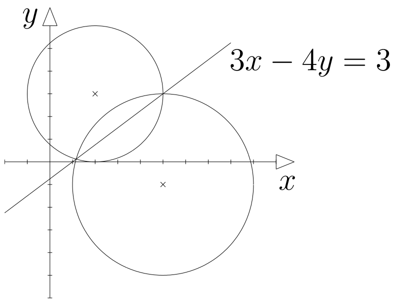
koordinaatisto (xy-)

$$(x-2)^2+(y-3)^2=9,$$
$$(x-5)^2+(y+1)^2=16$$

eli

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0,$$
$$x^2+y^2-10x+2y+10=0.$$

Tehtävänä on etsiä ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö. suora (yhtälö)



Asettamalla ympyröiden yhtälöiden vasemmat puolet yhtä suuriksi saadaan

$$x^2+y^2-4x-6y+4=x^2+y^2-10x+2y+10$$

eli

$$3x-4y=3.$$

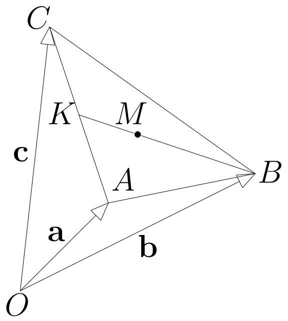
Tämä on ilmeisestikin suoran yhtälö. Jos sen sieventämättömään muotoon sijoitetaan ympyröiden leikkauspisteen koordinaatit (kumpikin piste vuorollaan), yhtälö toteutuu, koska kumpikin puoli on $=0$. Tällöin leikkauspisteiden koordinaatit toteuttavat myös sievennetyn yhtälön, ts. pisteet sijaitsevat yhtälön esittämällä suoralla.

Suora $3x-4y=3$ on siis ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämän määrittämistä varten ei leikkauspisteiden koordinaatteja tarvinnut laskea!

ESITIEDOT: vektori, vektorialgebra, koordinaatistot, piste, suora, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, kolmio, kulma, ympyrä

Esimerkki 1 vektorigeometriasta

Kolmion keskijanojen leikkaaminen samassa pisteessä voidaan helposti todistaa vektorigeometrian menetelmin. kolmio keskijana (esimerkki) keskijana (esimerkki) keskijana



Kolmion kärkipisteet olkoot A, B ja C ja olkoot kiinteästä pisteestä O näihin pisteisiin osoittavat vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ (pisteiden paikkavektorit). Olkoon K janan AC keskipiste ja valitaan piste M keskijanalta BK siten, että $|KM| : |MB| = 1 : 2$. Tällöin saadaan seuraavat vektoriesitykset: paikkavektori yhteenlasku (vektorien) skalaarilla kertominen (vektorien)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}); \\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OK} + \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}) = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OK} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\
&= \tfrac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).
\end{aligned}$$

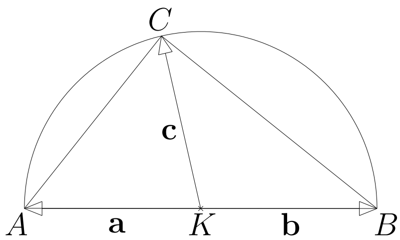
Vektorin $\overrightarrow{OM}$ esitys on siis symmetrinen vektoreiden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ suhteen, ts. samaan tulokseen tultaisiin laskemalla vektoriesitys millä tahansa keskijanalla sijaitsevalle pisteelle, joka jakaa kyseisen janan suhteessa $1 : 2$. Tästä seuraa, että näiden jakopisteiden tulee yhtyä, jolloin väite tulee todistetuksi.

Esimerkki 2 vektorigeometriasta

Olkoon todistettavana, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. ympyrä

kehäkulma (esimerkki)

kehäkulma



Puoliympyrän säde olkoon r. Keskipisteestä K halkaisijan AB päätepisteisiin osoittavat vektorit olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$; kummankin pituus on $= r$ ja $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Sijaitkoon piste C jossakin puoliympyrän kehällä. Keskipisteestä tähän osoittava vektori olkoon $\mathbf{c}$, jonka pituus myös on $= r$. vektori

Kulma ACB on tällöin puoliympyrän sisältämä kehäkulma. Sen kylkivektoreiden skalaaritulo on skalaaritulo

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (-\mathbf{a} - \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = -r^2 + r^2 = 0.$$

Koska skalaaritulo on $= 0$, on vektoreiden välinen kulma suora.

Esimerkki 3 vektorigeometriasta

Vesipisara putoaa tasolle $x+2y+3z = 4$ pisteeseen $(-3, -1, 3)$ ja alkaa valua tasoa pitkin. Missä pisteessä se kohtaa xy-tason? Oletetaan tavanomaiseen tapaan, että z-akseli on pystysuora ja osoittaa ylöspäin, jolloin painovoima vaikuttaa negatiivisen z-akselin suuntaan.

taso (yhtälö)
koordinaatisto (xyz-)

Merkitään putoamispisteen paikkavektoria $\mathbf{p} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

paikkavektori

Tason normaalivektori on $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Koska z-akselin suuntainen kantavektori $\mathbf{k}$ on pystysuora, saadaan ristitulon avulla vaakasuora tason suuntainen vektori $\mathbf{s} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

normaalivektori (tason)
kantavektori
ristitulo

Pisaran valumissuunta on kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan ja toisaalta se on mahdollisimman jyrkkä, jolloin sen tulee olla kohtisuorassa myös edellä muodostettua vektoria $\mathbf{s}$ vastaan. Valumissuunta — tai mahdollisesti vastakkainen suunta — sadaan ristitulosta

vektoritulo
vektoritulon laskeminen

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Tämä on todellakin valumissuunta, koska $\mathbf{k}$-komponentti on negatiivinen; ristitulo $\mathbf{n} \times \mathbf{s}$ olisi antanut vastakkaisen suunnan.

Paikkavektori, joka osoittaa origosta siihen pisteeseen, missä pisara kohtaa xy-tason, on siis muotoa

$$\mathbf{p} + \alpha\mathbf{v} = (-3 + 3\alpha)\mathbf{i} + (-1 + 6\alpha)\mathbf{j} + (3 - 5\alpha)\mathbf{k}.$$

Koska piste sijaitsee xy-tasossa, tulee olla $3 - 5\alpha = 0$ eli $\alpha = \frac{3}{5}$. Pisteen x- ja y-koordinaatti ovat tällöin

$$x = -3 + 3\alpha = -\tfrac{6}{5}, \quad y = -1 + 6\alpha = \tfrac{13}{5}.$$

ESITIEDOT: polynomiyhtälöt, Pythagoraan lause, piste, suora, taso

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, kolmio, ympyrä, pallo, monikulmiot, monitahokkaat

---

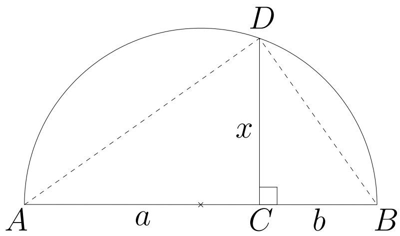
Esimerkki 1 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Olkoon annettuna janat, joiden pituudet ovat a ja b. Tehtävänä on geometrisesti konstruoida — harpilla ja viivoittimella — jana, jonka pituus on näiden keskiverto, so. $\sqrt{ab}$.

keskiverto

Asetetaan annetut janat toistensa jatkeeksi. Yhdistetty jana olkoon AB; janoja erottava piste tämän keskellä olkoon C. Piirretään puoliympyrä, jonka halkaisijana on AB, ja pisteeseen C janan AB normaali. Tämä leikatkoon puoliympyrän pisteessä D. Jnan CD pituus olkoon x.

ympyrä
normaali



Pituus x voidaan laskea seuraavalla tavalla.

Puoliympyrän sisältämänä kehäkulmana kulma ADB on suora kulma. Koska kulmien CAD ja CDB vasemmat kyljet ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, samoin oikeat, niin kulmat ovat yhtä suuret. Kolmioissa ACD ja DCB ovat lisäksi kulmat ACD ja DCB suorina kulmina yhtä suuria, ja siis kolmiot ovat yhdenmuotoiset (KK).

kehäkulma (esimerkki)
kehäkulma (esimerkki)
kehäkulma
yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

Niiden vastinsivut ovat tällöin verrannollisia, jolloin

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

mistä seuraa $x = \sqrt{ab}$. Jana CD on pituudeltaan siis annettujen janojen keskiverto.

Esitiedot: polynomiyhtälöt, Pythagoraan lause, piste, suora, taso
Katso myös: geometriset probleemat, kolmio, ympyrä, pallo, monikulmiot, monitahokkaat

---

Esimerkki 2 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Janan *kultaisella leikkauksella* tarkoitetaan sen jakamista kahteen osaan siten, että koko janan pituuden suhde isompaan osaan on sama kuin isomman osan suhde pienempään osaan. Jos janan pituus on a ja isomman osan pituus x, tulee siis olla

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Tämä johtaa toisen asteen yhtälöön $x^2 + ax - a^2 = 0$, jolla on ratkaisuna

yhtälö (toisen asteen)

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Miinusmerkki juuren edessä ei tule kysymykseen, koska jananpituuden x tulee olla positiivinen. Tulokseksi saadaan sievennysten jälkeen

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a.$$

Pituudeltaan a olevan janan kultainen leikkaus on saadun lausekkeen perusteella myös konstruoitavissa geometrisesti, so. harpilla ja viivoittimella. Tätä varten piirretään ensin suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat a ja $a/2$; hypotenuusa on tällöin Pythagoraan lauseen mukaan $\sqrt{a^2/4 + a^2}$. Kun tästä erotetaan (harpilla) pois toinen kateetti $a/2$, jää jäljelle etsitty jana x. Piirrä!

kolmio
kateetti
hypotenuusa
Pythagoraan lause

Janan kultainen leikkaus (lat. *sectio aurea*), jota usein kutsutaan myös janan jakamiseksi jatkuvaan suhteeseen, oli jo Pythagoraan aikana tunnettu. Varsinkin keskiajalla kultainen leikkaus oli suuren huomion kohteena ja sitä pidettiin taiteessa perustavan tärkeänä. Esimerkiksi rakennuksen ikkuna-aukkojen sopusuhtaisuuden on katsottu vaativan sivujen pituuksien mitoittamista kultaisen leikkauksen suhteeseen.

Pythagoras

Algebralliset menetelmät geometriassa **3/3**

Esitiedot: polynomiyhtälöt, Pythagoraan lause, piste, suora, taso

Katso myös: geometriset probleemat, kolmio, ympyrä, pallo, monikulmiot, monitahokkaat

---

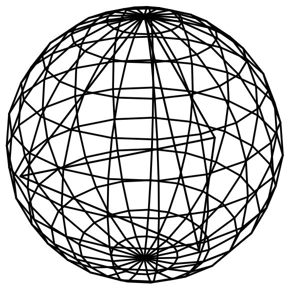
Esimerkki 3 algebrallisista menetelmistä geometriassa

Pallon sisään sijoitetaan säännöllinen tetraedri siten, että sen kärjet ovat pallon pinnalla. On määritettävä pallon säteen ja tetraedrin särmän suhde. Olkoon pallon säde r ja tetraedrin särmän pituus a.

pallo

tetraedri

särmä

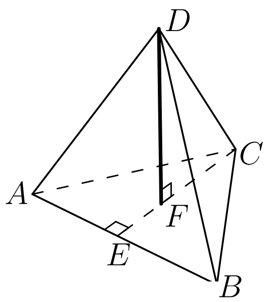


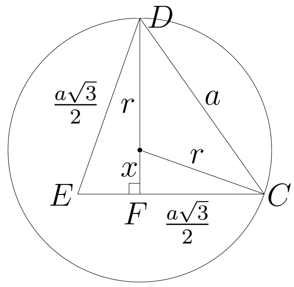
Säännöllisen tetraedrin sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita. Tetraedrin korkeusjana kohtaa vastaisen sivutahkon sen keskipisteessä, joka on myös keskijanojen leikkauspiste ja siis jakaa keskijanat suhteessa $2:1$.

tasasivuinen

keskijana

Oheiset kuviot esittävät tetraedria pohjatahkon vastaisine korkeuksineen sekä pallon ja tetraedrin leikkausta sellaisella tasolla, joka kulkee pallon keskipisteen ja tetraedrin kahden kärjen kautta.





Kuvioiden perusteella saadaan Pythagoraan lausetta käyttäen yhtälöt

Pythagoraan lause

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2, \qquad a^2 = (r+x)^2 + \left(\frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Näistä on eliminoitava x, jolloin saadaan pituuksien a ja r välinen ehto.

Helpoimmin eliminointi tapahtuu ratkaisemalla edellisestä yhtälöstä a^2 ja sijoittamalla se jälkimmäiseen. Tällöin saadaan $2(r^2 - x^2) = (r+x)^2$, mikä voidaan jakaa tekijällä $r + x$ $(\neq 0)$. Tuloksena on $x = r/3$ ja tämän perusteella $a/r = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

ESITIEDOT: piste, suora, taso, ympyrä, pallo
KATSO MYÖS: vektorialgebra

Tasokulma

Olkoon annettuna tason piste K ja kaksi tästä pisteestä alkavaa puolisuoraa. Puolisuorien väliin jäävää aluetta kutsutaan *kulmaksi*. Piste K on kulman *kärki*, puolisuorat ovat sen *kyljet*. Kylkien väliin jäävä tason osa on kulman *aukeama*.

puolisuora

Itse asiassa eo. määrittely on puutteellinen, koska ei ole selvää, kumpaa kahdesta mahdollisesta alueesta kulmaksi kutsutaan. Yleensä tarkoitetaan pienempää vaihtoehtoa, mutta oikeastaan on ajateltava, että määritellyksi tulee kaksi kulmaa.

Jos em. puolisuorat yhtyvät, saadaan määritellyksi kaksi kulmaa, joista pienempää on luonnollista kutsua *nollakulmaksi* ja suurempaa *täydeksi kulmaksi*.

Kulman suuruutta mitataan usein *asteilla*, jolloin täyden kulman suuruus on 360 astetta, merkintä $360°$. Yksi aste jaetaan 60 minuuttiin ja yksi minuutti edelleen 60 sekuntiin; merkinnät ovat seuraavat: $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Jos kulman kyljet ovat kärjestä vastakkaisille puolille suuntautuvia puolisuoria, kyseessä on *oikokulma*, jonka suuruus on $180°$. Jos kyljet ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, (pienempi) kulma on *suora kulma* suuruudeltaan $90°$.

Jos kulman suuruus on alle $90°$, sitä sanotaan *teräväksi*; välillä $90° \ldots 180°$ oleva kulma on *tylppä*. Alle $180°$ oleva kulma on *kovera*, yli $180°$ oleva kulma *kupera*.

Jos kaksi suoraa leikkaa toisensa, rinnakkain olevat kulmat, joiden summa on $180°$, ovat *vieruskulmia*. Vastakkain olevat yhtä suuret kulmat ovat *ristikulmia*.

Kaksi kulmaa, joiden summa on $90°$, ovat toistensa *komplementtikulmia*. Nimitys tulee esiin mm. trigonometristen funktioiden nimissä: kosini = komplementtikulman sini.

trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)

Jos kulmien summa on $180°$, puhutaan vastaavasti *suplementtikulmista*, ja jos summa on $360°$, *eksplementtikulmista*.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

Kulman mittaaminen

Täsmällinen kulman suuruuden määrittely edellyttää, että toinen kulman kyljistä sovitaan alkukyljeksi ja toinen loppukyljeksi. Kulman suuruus on positiivinen, jos alkukyljeltä loppukyljelle kierretään vastapäivään, ns. positiiviseen kiertosuuntaan. Myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä kulman suuruus on negatiivinen. Sallittua on myös kiertää ylimääräisiä täysiä kierroksia, jolloin kulman asteluku voi olla yli $360°$ tai alle $-360°$.

kiertosuunta (positiivinen)

Paitsi asteita kulman suuruuden mittaamiseen käytetään muitakin yksikköjä. Eräs mahdollisuus on käyttää ns. *graadeja*, jolloin täyden kulman suuruus on 400 graadia. Toinen eräissä yhteyksissä yleisesti käytetty yksikkö on *piiru*, jolloin täyden kulman suuruus on 6000 piirua.

Teoreettisissa yhteyksissä, mm. matematiikassa yleisimmin käytetty yksikkö on *radiaani*. Kulman suuruus radiaaneissa saadaan piirtämällä kulman aukeaman alueelle ympyränkaari keskipisteenä kulman kärki. Kulman suuruus radiaaneina on kulman aukeamaan jäävän ympyränkaaren pituuden ja ympyrän säteen suhde. Täyden kulman suuruus on ympyrän kehän pituus jaettuna säteellä, siis 2π.

ympyrä

Asteiden ja radiaanien välinen vastaavuus saadaan yksinkertaisesta verrannosta

verranto

$$\frac{\text{suuruus asteissa}}{360} = \frac{\text{suuruus radiaaneissa}}{2\pi}.$$

Erityisesti on $1 \text{ rad} \approx 57.296°$.

Matemaattiset tietokoneohjelmat edellyttävät yleensä, että trigonometristen funktioiden argumentit annetaan radiaaneissa. Jos halutaan käyttää asteita, on käyttäjän itsensä huolehdittava tarvittavasta muunnoksesta. Laskimissa sen sijaan on yleensä erikseen toimintamoodit radiaaneille ja asteille, mahdollisesti muillekin kulmayksiköille.

trigonometrinen funktio (yleinen määritelmä)

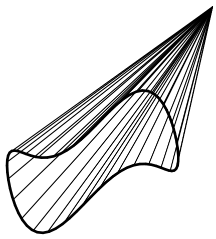
Trigonometrisille funktioille voidaan muodostaa sarjakehitelmät, joista näiden arvoja voidaan laskea. Nämä on aina tapana esittää sellaisessa muodossa, että argumentin oletetaan olevan radiaaneissa.

sarja

Avaruuskulma

Kiinnitetään jokin kolmiulotteisen avaruuden piste K kulman kärjeksi. Olkoon avaruudessa lisäksi annettuna riittävässä määrin säännöllinen sulkeutuva käyrä (esimerkiksi ympyrä), joka ei kulje pisteen K kautta. Asetetaan pisteestä K alkavat puolisuorat, jotka kulkevat käyrän jonkin pisteen kautta. Puolisuorat muodostavat pinnan, jota kutsutaan yleiseksi kartiopinnaksi. Tämä rajaa avaruuden kahteen — pienempään ja isompaan — *avaruuskulmaan* samaan tapaan kuin tasokulman kyljet rajaavat kaksi tasokulmaa.

käyrä (avaruus-)
kartiopinta
kartiopinta



Avaruuskulman suuruus määritellään asettamalla pallo siten, että sen keskipisteenä on kulman kärki. Kulman suuruus on pallon pinnasta kulman sisään (sen aukeamaan) jäävän osan pinta-alan suhde pallon säteen neliöön. Yksikköä kutsutaan nimellä *steradiaani*.

pallo

Täyden avaruuskulman suuruus on pallon pinta-ala jaettuna pallon säteen neliöllä, ts. 4π steradiaania.

pallo (ala)

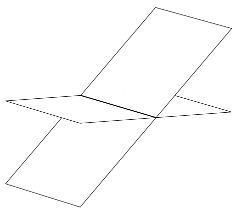
Olkoon esimerkkinä avaruuskulma, jonka kärkenä on origo ja em. sulkeutuvana käyränä pisteitä $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ yhdistävät kolmion sivut. Avaruuskulmaa rajaavat puolisuorat sijaitsevat tällöin koordinaattitasoissa. Pienempi avaruuskulma muodostuu siitä avaruuden kahdeksanneksesta, jonka pisteiden koordinaatit ovat ≥ 0. Suuruus on $\pi/2$ steradiaania.

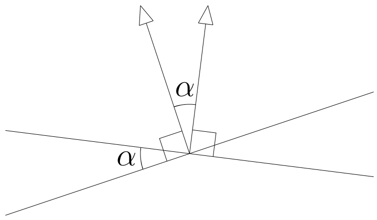
koordinaatisto (xyz-)
koordinaattitaso

Diedrikulma

Kahden toisiaan leikkaavan tason välistä kulmaa — yleensä pienempää kahdesta mahdollisesta — kutsutaan tasojen *diedrikulmaksi*. taso

Sen suuruutta mitataan asettamalla tasojen leikkaussuoraa vastaan kohtisuora taso. Alkuperäiset tasot leikkaavat tätä pitkin kahta suoraa ja näiden välisen (pienemmän) tasokulman suuruus on diedrikulman suuruus. suora





Diedrikulman suuruus voidaan helposti laskea määrittämällä ensin tasojen normaalivektorit. Näiden välinen kulma on joko pienempi tai isompi diedrikulma siitä riippuen, kummalle puolen tasoja normaalivektorit osoittavat. normaalivektori (tason)

Esimerkiksi tasojen $x + 2y + 3z = 4$ ja $4x - 3y + 2z = -1$ normaalivektorit saadaan muuttujien kertoimista: taso (yhtälö)

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Skalaaritulon avulla voidaan laskea näiden välinen kulma ϑ: skalaaritulo

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{406}}$$

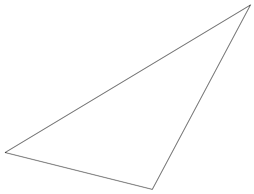
ja siis $\vartheta \approx 1.37$ rad $\approx 78.5°$.

ESITIEDOT: piste, suora, kulma
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

Kolmio: perusominaisuudet

Yksinkertaisin monikulmio on *kolmio*, joka muodostuu kolmesta pisteestä, kolmion *kärjistä*, ja näitä yhdistävistä janoista, kolmion *sivuista*. Kussakin kärjessä kohtaavien sivujen välissä on yksi kolmion *kulmista*.

monikulmio
kolmio (ala)
kulma (taso-)



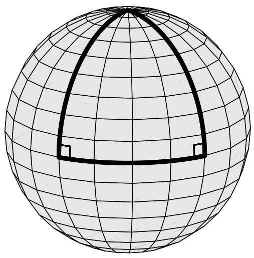
Toisin kuin muut monikulmiot kolmio on aina tasokuvio: Jos kolme pistettä eivät ole samalla suoralla, mutta sijaitsevat avaruudessa muutoin miten tahansa, ne määräävät aina tason yksikäsitteisesti. Pisteiden määräämä kolmio sijaitsee tässä tasossa.

Paralleeliaksioomasta seuraa, että minkä tahansa (euklidisen) kolmion kulmien summa on 180°.

paralleeliaksiooma
paralleeliaksiooma

Epäeuklidisessa geometriassa paralleeliaksiooma ei kuitenkaan ole voimassa eikä kolmion kulmien summa myöskään ole 180°. Esimerkkinä olkoon pallokolmio, joka muodostuu pallon päiväntasaajan kaaresta sekä kahdesta navalta päiväntasaajalle ulottuvasta meridiaanikaaresta, joiden välinen aste-ero on α. Kolmion kulmien summa on tällöin $180° + \alpha$.

paralleeliaksiooma
geometria (epäeuklidinen)
geometria (epäeuklidinen)
pallokolmio



Tavallisen (euklidisen) kolmion sivujen pituuksille pätee seuraava: Kahden sivun summa on suurempi kuin kolmas sivu. Kahden sivun erotus on pienempi kuin kolmas sivu.

Täten muodostuvia epäyhtälöitä kutsutaan *kolmioepäyhtälöiksi* ja niillä on tavattoman paljon yleistyksiä monille matematiikan aloille. Esimerkiksi reaali- tai kompleksilukujen itseisarvoja koskevissa epäyhtälöissä $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ja $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ tai vektoreiden pituuksia koskevissa epäyhtälöissä $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ja $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ on kyse samasta asiasta. Lukija piirtäköön kuvan!

epäyhtälö
itseisarvo (reaaliluvun)
itseisarvo (kompleksiluvun)
vektorin pituus

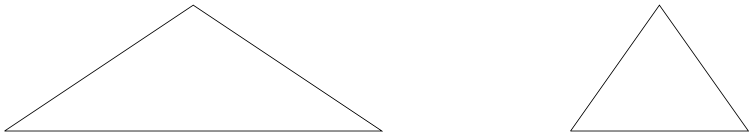
ESITIEDOT: piste, suora, kulma

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

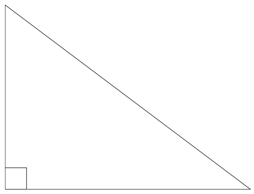
Tasakylkinen, tasasivuinen, suorakulmainen kolmio

Jos kolmion sivuista kaksi on yhtä pitkiä, sanotaan, että kolmio on *tasakylkinen*. Yhtä pitkät sivut ovat tasakylkisen kolmion *kyljet*, kolmas sivu on sen *kanta*. Yhtä pitkien kylkien vastaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Jos kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kolmio on *tasasivuinen*. Tällöin myös kaikki kulmat ovat yhtä suuria, kukin $60°$.



Jos yksi kolmion kulmista on suora, ts. $= 90°$, kolmiota sanotaan *suorakulmaiseksi*. Suoran kulman kylkinä olevat sivut ovat suorakulmaisen kolmion *kateetit*, suoran kulman vastainen sivu sen *hypotenuusa*. kulma (suora)



Ks. myös Pythagoraan lausetta ja ns. muistikolmioiden ominaisuuksia. Pythagoraan lause

muistikolmio

muistikolmio

ESITIEDOT: piste, suora, kulma

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

Kolmioiden yhtenevyys

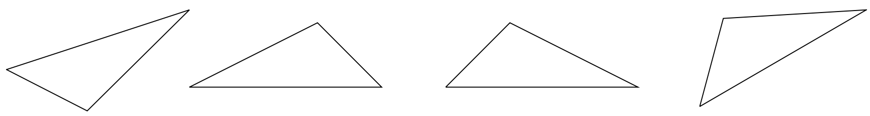
Kahta (euklidisen geometrian) kolmiota sanotaan *yhteneviksi*, jos ne voidaan siirtää toistensa päälle siten, että kärjet yhtyvät, jolloin myös sivut yhtyvät. Tällöin on sallittua myös kääntää kolmio peilikuvakseen, ts. siirtää ja kiertää sitä kolmiulotteisessa avaruudessa. Yhtyvät kärjet, kulmat ja sivut ovat kolmioiden *vastinkärkiä*, *vastinkulmia* ja *vastinsivuja*, yleisemmin *vastinosia*.

geometria (euklidinen)

geometria (euklidinen)

Yhtenevien kolmioiden vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuria, samoin vastinsivut.

Alla olevan kuvion kolmiot ovat kaikki yhteneviä:



Synteettisen geometrian päättelyt perustuvat usein kolmioiden todistamiseen yhteneviksi. Tällöin nojaudutaan yleensä johonkin seuraavassa esitettävään kolmioiden yhtenevyyttä koskevaan lauseeseen.

geometria (synteettinen)

Kolmio 4/11

Esitiedot: piste, suora, kulma
Katso myös: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

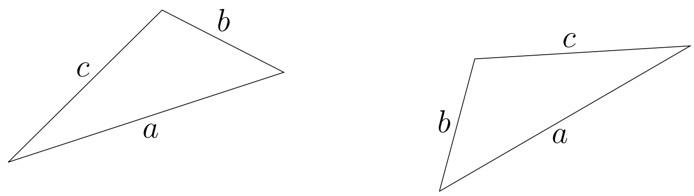
---

Yhtenevyyslauseet I

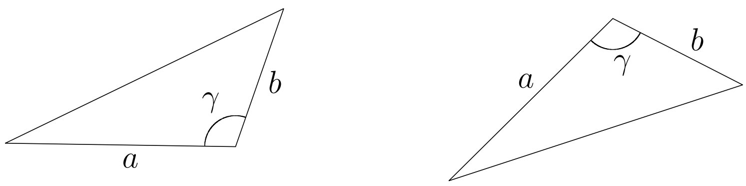
Kolmioita koskevat yhtenevyyslauseet ovat seuraavat.

Kunkin lauseen lopussa on ilmoitettu siitä usein käytettävä lyhenne, missä kirjaimet (S = sivu, K = kulma) kuvaavat yhtenevyyteen vaadittavien yhtä suurten vastinosien keskinäistä sijaintia.

- Jos kolmiossa ovat kaikki sivut yhtä suuret kuin vastinsivut toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (SSS).



- Jos kolmiossa on kaksi sivua ja niiden välinen kulma yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (SKS).



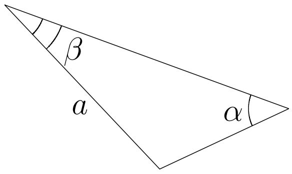
- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (KSK).

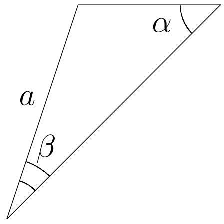
Jatkuu

ESITIEDOT: piste, suora, kulma
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

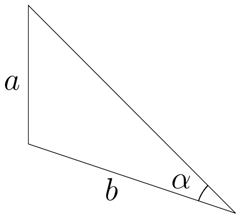
Yhtenevyyslauseet II

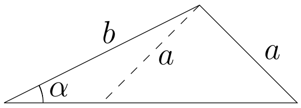
- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät (KKS).





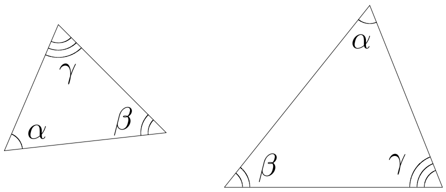
- Jos kolmiossa on kaksi sivua ja toisen vastainen kulma yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa ja jos lisäksi toisen sivuparin vastaisten kulmien summa ei ole 180°, niin kolmiot ovat yhtenevät (SSK).





Kuvion katkoviiva osoittaa tilannetta, missä lisäehto ei täyty.

Yhtenevyyslausetta KKK ei luonnollisestikaan ole: Kulmat voivat pareittain olla yhtä suuria, mutta kolmiot ovat silti mittakaavaltaan erilaisia.



Esitiedot: piste, suora, kulma

Katso myös: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

---

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Kahta kolmiota sanotaan *yhdenmuotoisiksi*, jos toinen voidaan suurentamalla tai pienentämällä (so. mittakaavaa muuttamalla, mutta millään muulla tavalla venyttämättä) saattaa yhteneväksi toisen kanssa. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosista puhutaan samaan tapaan kuin yhtenevien kolmioiden tapauksessa.

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat keskenään yhtä suuria ja vastinsivut ovat verrannollisia, ts. niiden pituuksien suhteella on sama arvo sivuparista riippumatta. Tätä suhdetta kutsutaan kolmioiden *yhdenmuotoisuussuhteeksi*. verranto

Jos kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde on k, niiden pinta-alojen suhde on k^2.

Seuraavassa esitettävät kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet ovat samantyyppiset kuin yhtenevyyslauseet. Joitakin eroja kuitenkin on.

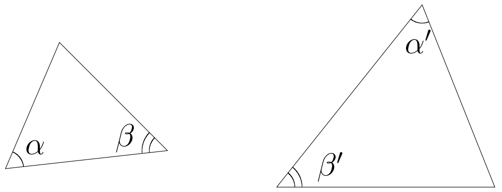
Esitiedot: piste, suora, kulma
Katso myös: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

---

Yhdenmuotoisuuslauseet

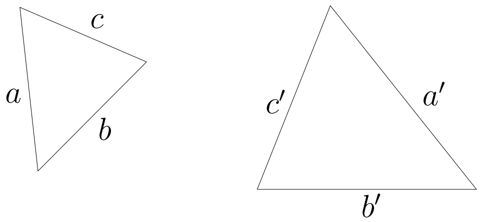
Seuraavilla perusteilla kaksi kolmiota voidaan päätellä yhdenmuotoisiksi. Lauseista käytetään samantyyppisiä lyhenteitä kuin yhtenevyyslauseista.

- Jos kolmiossa on kaksi kulmaa yhtä suurta kuin vastinkulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (KK).



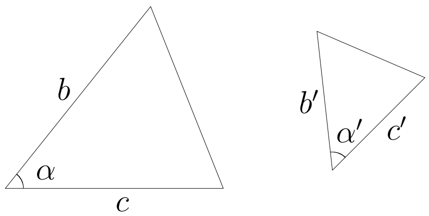
$$\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'$$

- Jos kolmiossa ovat kaikki sivut verrannolliset vastinsivuihin toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SSS).



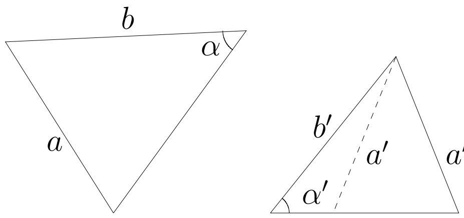
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Jos kolmiossa on kaksi sivua verrannollista vastinsivuihin toisessa kolmiossa ja niiden välinen kulma on yhtä suuri kuin vastinkulma toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SKS).



$$\alpha = \alpha' \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- Jos kolmiossa on kaksi sivua verrannollista vastinsivuihin toisessa kolmiossa ja toisia vastinsivuja vastaavat kulmat ovat yhtä suuret sekä lisäksi toisen sivuparin vastaisten kulmien summa ei ole 180°, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (SSK).



$$\alpha = \alpha' \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Kuvion katkoviiva osoittaa tilannetta, missä lisäehto ei täyty.

Esitiedot: piste, suora, kulma

Katso myös: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

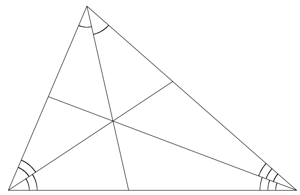
---

Kulmanpuolittajat ja keskijanat

Kolmion *kulmanpuolittaja* jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan. Kaikkien kolmen kulman puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, mikä on suhteellisen helposti todistettavissa synteettisen geometrian keinoin. Kulmanpuolittajien leikkauspiste on myös kolmion sisään piirretyn ympyrän (so. kolmion sivuja sivuavan ympyrän) keskipiste.

geometria (synteettinen)

ympyrä



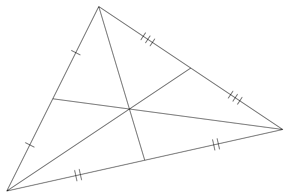
Kolmion *keskijana* on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastaisen sivun keskipisteeseen. Kaikki kolme keskijanaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan suhteessa $1 : 2$. Todistus on helpoin vektorigeometriaa käyttäen, mutta voidaan suhteellisen helposti tehdä myös synteettisellä geometrialla.

keskijana (esimerkki)

keskijana (esimerkki)

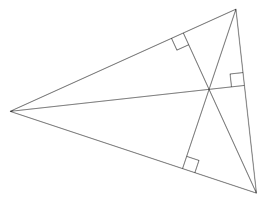
keskijana (esimerkki)

geometria (vektori-)

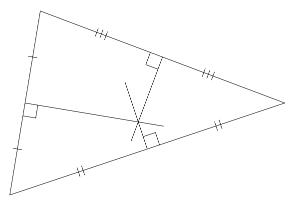


Korkeusjanat ja keskinormaalit

Kolmion *korkeusjana* on kolmion kärjestä vastaiselle sivulle piirretty normaali, so. sivua vastaan kohtisuora suora. Kaikkiaan näitä on kolme. Sekä synteettisen geometrian että vektorigeometrian keinoin voidaan melko helposti osoittaa, että korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. normaali geometria (synteettinen) geometria (vektori-)



Kolmion *keskinormaali* on kolmion sivun keskipisteen kautta asetettu sivun normaali. Näitäkin on kolme ja samoinkuin korkeusjanojen tapauksessa voidaan osoittaa, että ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on myös kolmion ympäri piirretyn ympyrän (so. kolmion kärkien kautta kulkevan ympyrän) keskipiste. ympyrä



Korkeusjanojen leikkauspiste, keskinormaalien leikkauspiste ja keskijanojen leikkauspiste sijaitsevat kolmiosta riippumatta samalla suoralla, jota kutsutaan *Eulerin suoraksi*. Kulmanpuolittajien leikkauspiste ei sen sijaan yleensä ole tällä suoralla. Euler

Kolmiosta voidaan löytää monia muitakin geometrisia yhteyksiä. Eräs tällainen on *Feuerbachin ympyrä*, joka kulkee jokaisessa kolmiossa seuraavien yhdeksän pisteen kautta: kolmion korkeusjanojen kantapisteet, so. ne pisteet, joissa korkeusjanat kohtaavat vastaisen sivun; kolmion sivujen keskipisteet; kolmion kärjet korkeusjanojen leikkauspisteeseen yhdistävien janojen keskipisteet. Feuerbachin ympyrän keskipiste puolestaan on Eulerin suoralla.

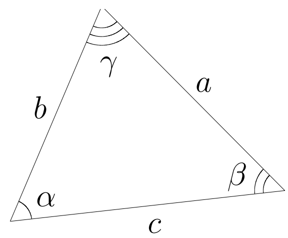
ESITIEDOT: piste, suora, kulma
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

Sinilause ja kosinilause

Monissa sovelluksissa joudutaan määrittämään kolmion sivujen pituudet ja kulmien suuruudet, kun joitakin tietoja kolmiosta on käytettävissä. Tyypillinen esimerkki on maanmittarin ongelma: On mitattu kahden pisteen välinen etäisyys ja suuntakulmat näistä pisteistä kolmanteen pisteeseen, jonka etäisyys on määritettävä. Tunnetaan siis kaksi kolmion kulmaa ja näiden välisen sivun pituus; on määritettävä kolmion muut sivut.

Tämäntyyppisten tehtävien ratkaiseminen perustuu *sinilauseeseen* ja *kosinilauseeseen*:

sini
kosini



Jos kolmion sivut ovat a, b ja c sekä näiden vastaiset kulmat samassa järjestyksessä α, β ja γ, on

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad \text{(sinilause)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{(kosinilause)}.$$

Tässä r on kolmion ympäri piirretyn ympyrän, so. kolmion kärkien kautta kulkevan ympyrän säde.

Lauseiden todistukset seuraavassa.

ESITIEDOT: piste, suora, kulma

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, Pythagoraan lause, monikulmiot

---

Sini- ja kosinilauseen todistamisesta

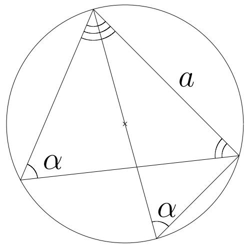
Sinilauseen ensimmäinen osa $\sin\alpha = a/(2r)$ voidaan todistaa muodostamalla kolmion ympäri piirretyn ympyrän sisään uusi kolmio, jonka yhtenä sivuna on alkuperäisen kolmion sivu a ja toisena ympyrän halkaisija. Halkaisijan vastainen kulma (ympyrän kehäkulma) on suora, kuten esimerkiksi vektorigeometrialla nähdään. Tulos seuraa tämän jälkeen sinin määritelmästä (vastainen kateetti / hypotenuusa) ja siitä, että ympyrässä kaikki samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria.

kehäkulma (esimerkki)

kehäkulma (esimerkki)

kehäkulma

trigonometrinen funktio (suorakulmaisessa kolmiossa)



Kosinilauseen todistaminen on yksinkertainen vektorigeometrian sovellus: Jos kolmion sivuvektorit ovat $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$, on kolmannen sivun vektoriesitys $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Tällöin on skalaaritulon ominaisuuksien perusteella

geometria (vektori-)

skalaaritulo

$$c^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Kosinilause on itse asiassa Pythagoraan lauseen yleistys: Jos $\gamma = 90°$, saadaan Pythagoraan lause.

Pythagoraan lause

ESITIEDOT: kolmio

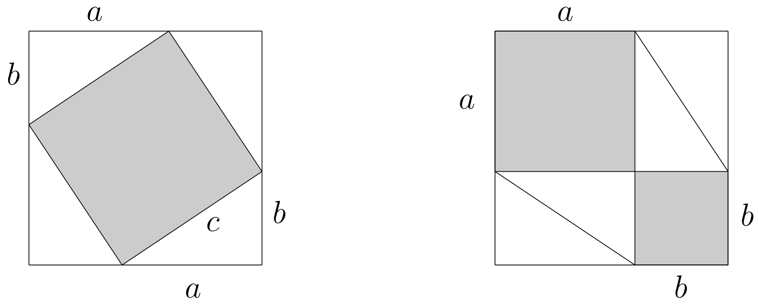
KATSO MYÖS: vektorigeometriaa

Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien a ja b neliöiden summa on hypotenuusan pituuden c neliö: kolmio kateetti hypotenuusa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Lause voidaan alkeellisesti todistaa tarkastelemalla neliötä, jonka sivun pituus on $a+b$ ja piirtämällä sen sisään neljä suorakulmaista kolmiota kahdella eri tavalla:



Varjostetut alueet ovat neliöitä, joiden alat ovat a^2, b^2 ja c^2. Näiden ulkopuolelle jäävä alue kummassakin isossa neliössä on sama, neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota, jolloin myös varjostettujen alueiden alat ovat samat: $c^2 = a^2 + b^2$.

Lause voidaan todistaa myös vektorialgebralla: Jos $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat kateettien vektoriesitykset, niin hypotenuusa on $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Hypotenuusan pituuden neliö on tällöin geometria (vektori-) skalaaritulo

$$c^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2,$$

koska $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ kolmion suorakulmaisuuden takia.

Pythagoraan lause on erikoistapaus kosinilauseesta. kosinilause

Esitiedot: kolmio
Katso myös: vektorigeometriaa

Muistikolmiot

Soveltamalla Pythagoraan lausetta tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, jossa kummankin kateetin pituus on a ja hypotenuusan pituus on x, saadaan

$$a^2 + a^2 = x^2,$$

jolloin $x = a\sqrt{2}$.

tasakylkinen
kateetti
hypotenuusa

Jos tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on $2a$, jaetaan korkeusjanalla kahtia, saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota, joissa hypotenuusan pituus on $2a$ ja lyhyempi kateetti symmetrian takia $a/2$. Jos pitempi kateetti eli kolmion korkeusjana on x, Pythagoraan lause antaa

$$a^2 + x^2 = 4a^2,$$

mistä seuraa $x = a\sqrt{3}$.

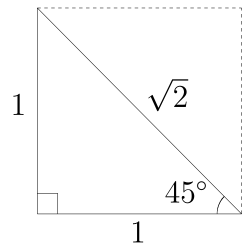
tasasivuinen
korkeusjana

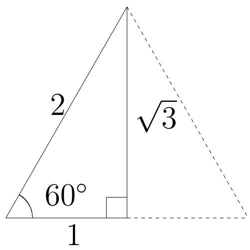
Saadaan siis seuraavat tulokset:

Jos suorakulmaisen kolmion molemmat terävät kulmat ovat 45 astetta, niin kateettien ja hypotenuusan suhde on $1 : 1 : \sqrt{2}$.

kulma (terävä)

Jos suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat 30 ja 60 astetta, niin kateettien ja hypotenuusan suhde on $1 : \sqrt{3} : 2$.





Pythagoraan lauseen historiaa

Thales Miletolainen ja Pythagoras Samoslainen ovat varhaisimmat tunnetut kreikkalaiset matemaatikot. He olivat lähtöisin Aigeian meren ääreltä ja elivät 500-luvulla ennen ajanlaskumme alkua, Thales hieman Pythagorasta aiemmin. Kumpikin ilmeisesti matkusteli Kaksoisvirranmaassa ja Egyptissä, joista Kreikkaan kulkeutui myös matematiikkaan ja laskemiseen liittyviä vaikutteita. Kummaltakaan ei ole kuitenkaan säilynyt kirjoitettuja tekstejä, vaan käsitykset heistä ovat enintäänkin toisen käden tietojen varassa.

Thales
Pythagoras

Pythagoras oli filosofi, matemaatikko ja lukumystikko, joka keräsi ympärilleen koulukunnan Krotoniin nykyiseen Kaakkois-Italiaan. Tarkkaa tietoa koulukunnan matemaattisesta merkityksestä ei ole. Pythagoraan lauseena tunnettu tulos oli laskumenettelynä tunnettu jo Kaksoisvirranmaassa. Geometristen tulosten deduktiivinen todistaminen on kreikkalaisilta peräisin, mutta pythagoralaisten osuudesta ajatuksen kehittymiseen ei ole tietoa. Mahdollisesti todistamisen idea on syntynyt vasta muutamia vuosisatoja myöhemmin.

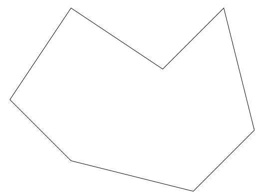
Egyptin ja Kaksoisvirranmaan matematiikka oli käytännöllisistä tehtävistä lähtevää laskemista: maanmittausta, pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämistä, perinnönjakoja, jne. Abstrakti matematiikka syntyi Kreikassa.

Esitiedot: kolmio
Katso myös: geometriset probleemat

Monikulmio

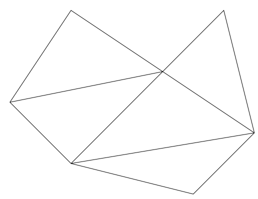
Monikulmioksi kutsutaan tasokuviota, jota rajaa perättäisten janojen muodostama monikulmion *piiri*. Janat ovat monikulmion *sivuja*, niiden päätepisteet monikulmion *kärkipisteitä*. Jos kärkipisteitä (ja siis myös sivuja) on n kappaletta, puhutaan n-kulmiosta. Perättäisten sivujen väliin jäävät monikulmion *kulmat*.

jana
kulma (taso-)



Jokainen n-kulmio voidaan kärkipisteet sopivasti yhdistämällä jakaa $n-2$ kolmioksi, mistä seuraa, että n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$.

kolmio

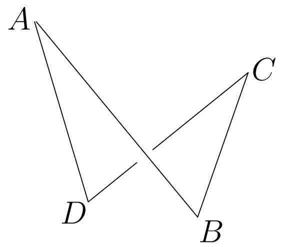


Janaa, joka yhdistää kaksi monikulmion kärkeä, mutta joka ei ole monikulmion sivu, kutsutaan sen *lävistäjäksi*. Jokaisesta n-kulmion kärjestä voidaan siten piirtää $n-3$ lävistäjää. Kertomalla tämä kärkien lukumäärällä ja jakamalla kahdella (koska jokainen lävistäjä yhdistää kaksi kärkeä), saadaan lävistäjien kokonaismäärä: $\frac{1}{2}n(n-3)$.

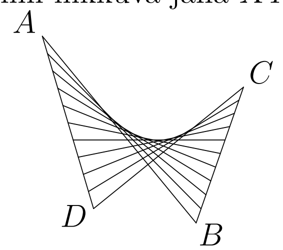
Avaruusmonikulmio

Monikulmioita voidaan muodostaa myös kolmiulotteiseen avaruuteen. Jos kärkiä on enemmän kuin kolme, nämä eivät yleensä ole tasokuvioita, koska kolmea useammat pisteet eivät lainkaan välttämättä sijaitse samassa tasossa. Avaruusmonikulmion ajatellaankin muodostuvan vain peräkkäin asetetuista (sulkeutuvista) janoista ilman, että ne rajaavat mitään aluetta.

Esimerkiksi *avaruusnelikulmio* näyttää seuraavalta:



Tällä on seuraava ominaisuus: Jos jana XY liikkuu siten, että se alkuasemassaan yhtyy janaan AB, loppuasemassaan janaan DC ja piste X kulkee janan AD tasaisella nopeudella samassa ajassa kuin piste Y kulkee janan BC tasaisella nopeudella, niin liikkuva jana XY muodostaa *satulapinnan*. satulapinta



Säännölliset monikulmiot

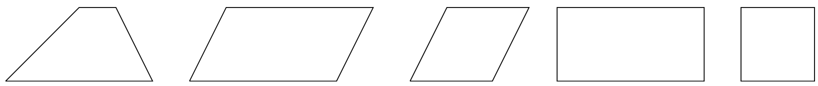
Monikulmiota sanotaan *säännölliseksi*, jos sen kaikki kulmat ovat yhtä suuria ja sivut yhtä pitkiä.

Säännöllisen kolmion eli tasasivuisen kolmion lisäksi voidaan harpilla ja viivoittimella helposti konstruoida säännölliset neli-, kuusi- ja kahdeksankulmiot, viisi- ja kymmenkulmiot ovat hieman vaikeampia. kolmio

Eräillä nelikulmioilla, jotka eivät ole säännöllisiä eo. määritelmän mukaisesti, mutta joilla kuitenkin on joitakin säännöllisyysominaisuuksia, on omat nimityksensä:

- *Puolisuunnikas* on nelikulmio, jonka kaksi vastakkaista sivua on yhdensuuntaista. (Nämä ovat puolisuunnikkaan *kannat*.) puolisuunnikas (ala)
- *Suunnikas* on nelikulmio, jonka molemmat vastakkaiset sivuparit ovat keskenään yhdensuuntaiset. suunnikas (ala)
- *Neljäkäs* eli *vinoneliö* on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Käytetään myös nimitystä *rombi*.
- *Suorakulmio* on suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuria (= 90°). suorakulmio (ala)

Sarjan viimeisenä — säännöllisyyttä lisättäessä — on säännöllinen nelikulmio eli *neliö*.



ESITIEDOT: kolmio
KATSO MYÖS: geometriset probleemat

Säännöllisten monikulmioiden laskemisesta

Säännöllisten monikulmioiden sivujen pituuksia voidaan usein laskea algebrallisen geometrian keinoin. Toisaalta myös kompleksilukuaritmetiikkaa voidaan hyödyntää.

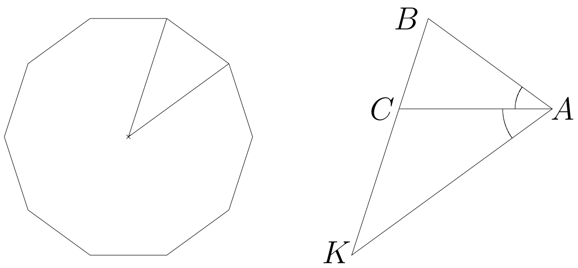
Jos säännöllinen n-kulmio sijoitetaan siten, että sen keskipiste on origossa ja kärjet R-säteisellä origokeskisellä ympyrällä, saadaan kärkien koordinaatit kompleksilukuina helposti muodossa Ru^k, missä $u = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ on kompleksinen kiertotekijä. Indeksin k eri arvot antavat eri kärjet; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Menettely on luonteeltaan numeerinen, koska sinin ja kosinin tarkkojen arvojen laskeminen ei yleensä ole helppoa.

kompleksiluku
sini
kosini
kiertotekijä

Esimerkkinä algebrallisten menetelmien käytöstä olkoon säännöllisen kymmenkulmion sivun pituuden x määrittäminen, kun kulmio on piirretty R-säteisen ympyrän sisään.

Yhdistämällä ympyrän keskipiste kahteen peräkkäiseen kymmenkulmion kärkeen saadaan tasakylkinen kolmio, jonka kulmat ovat 36°, 72° ja 72°. Puolittamalla toinen kantakulma saadaan seuraava kuvio:

tasakylkinen
kulma (taso-)



Kolmiot KAB ja ABC ovat yhdenmuotoiset, koska kummassakin on kulmat 36° ja 72°. Kolmiot ACK ja BAC ovat tasakylkisiä ja siis $|AB| = |AC| = |CK| = x$. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannollisia, jolloin

yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

$$\frac{|KA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \text{eli} \quad \frac{R}{x} = \frac{x}{R-x}.$$

Tästä seuraa

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R.$$

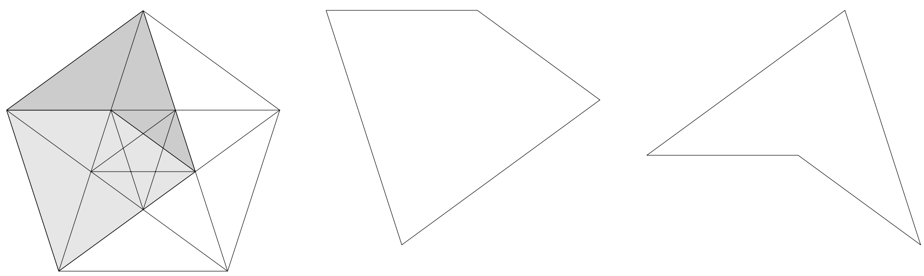
(Vrt. kultaiseen leikkaukseen.)

kultainen leikkaus

Laatoituksista

Eräillä monikulmiotyypeillä voidaan peittää taso aukkoja tai rakoja jättämättä, laatoittaa esimerkiksi kylpyhuoneen lattia. Tällaisia monikulmiotyyppejä ovat ainakin tasasivuiset kolmiot, vakiomuotoiset suorakulmiot, vakiomuotoiset suunnikkaat ja säännölliset kuusikulmiot. Kaikissa tapauksissa laatoitus on jaksollinen, ts. kuvio toistuu samanlaisena lattian joka paikassa.

Voidaan kysyä, olisiko mahdollista tehdä jollakin tavoin epäsäännöllisempi laatoitus esimerkiksi käyttämällä erilaisia laattoja, mutta kuitenkin vain muutamaa harvaa tyyppiä. Yksinkertaisin tällainen on englantilaisen fyysikon Roger Penrosen vuonna 1974 julkistama laatoitus, jossa käytetään kahta erilaista laattaa. Näiden muodot voidaan löytää säännöllisestä viisikulmiosta:



Kumpikin laatta on nelikulmio, jossa kahden sivun pituus on a ja kahden muun sivun pituus $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a$. Toisen laatan kulmat ovat 72°, 72°, 72° ja 144° (leijatyyppi), toisen laatan 72°, 36°, 216° ja 36° (nuolenkärkityyppi).

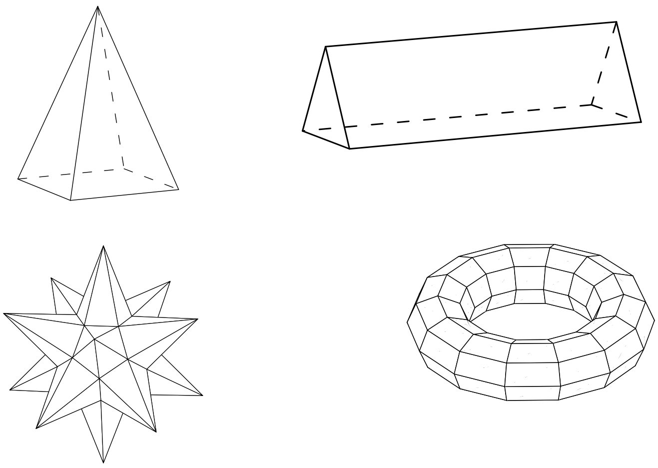
Laatat voidaan liittää toisiinsa siten, että kahden eri tyypin laatat aina muodostavat yhdessä suunnikkaan. Jos ne kuitenkin liitetään toisiinsa siten, että suunnikkaita ei synny, saadaan mielenkiintoisempi laatoitus: Sillä voidaan peittää miten suuri ala tahansa — koko taso — ja laatoitus on jaksoton, ts. ei löydy mitään sellaista laatoituksen osaa, joka säännöllisesti toistuisi samanlaisena.

Kokeile! Nuolenkärkityypin laattoja tarvitaan jonkin verran yli puolet leijatyypin laattojen määrästä. Parilla sadalla laatalla saa jo aikaan kiintoisia kuvioita.

ESITIEDOT: monikulmiot, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat

Monitahokas

Monitahokkaaksi kutsutaan kolmiulotteisen avaruuden kappaletta, jota rajaavat tasopinnat. Tasopinnat ovat monitahokkaan *tahkot*; nämä leikkaavat toisensa pitkin *särmiä*, joiden päätepisteet ovat monitahokkaan *kärkiä*.



Jos monitahokkaassa ei ole aukkoja yllä olevan viimeisen esimerkin tapaan (täsmällisemmin sanottuna jos monitahokas on yhdesti yhtenäinen), on voimassa *Eulerin yhtälö*, jonka tosin jo Descartes tunsi: Euler Descartes

$$f - e + v = 2,$$

missä f on monitahokkaan tahkojen lukumäärä, e särmien lukumäärä ja v kärkien lukumäärä. (Symbolit ovat englannista peräisin: *face*, *edge*, *vertex*.)

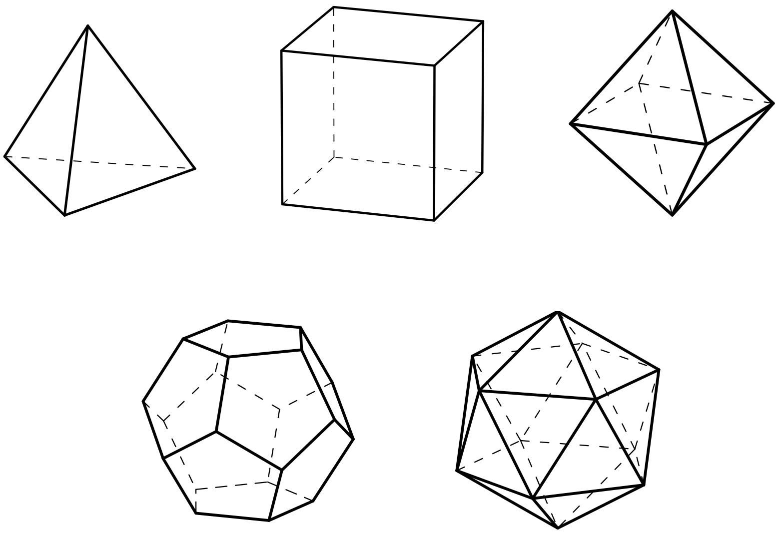
Jos monitahokkaassa on yksi tai useampia aukkoja, riippuu kaavan oikea puoli aukkojen lukumäärästä. Esimerkiksi yksiaukkoisessa tapauksessa on $f - e + v = 0$.

ESITIEDOT: monikulmiot, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat

Säännölliset monitahokkaat

Monitahokasta sanotaan säännölliseksi, jos sen kaikki tahkot ovat samanlaisia säännöllisiä monikulmioita ja kaikki kärjet samanlaisia. monikulmio

Jo antiikin kreikkalaiset tiesivät, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi: *tetraedri*, *heksaedri* eli *kuutio*, *oktaedri*, *dodekaedri* ja *ikosaedri*.



Näiden kärkien, särmien ja tahkojen määrät ovat seuraavat:

	kärjet	särmät	tahkot
tetraedri	4	6	4
heksaedri	8	12	6
oktaedri	6	12	8
dodekaedri	20	30	12
ikosaedri	12	30	20

Yhdistämällä säännöllisen monitahokkaan sivutahkojen keskipisteet saadaan tämän sisään toinen säännöllinen monitahokas: Tetraedrin tapauksessa tetraedri, kuution sisään oktaedri ja oktaedrin sisään kuutio, dodekaedrin sisään ikosaedri ja ikosaedrin dodekaedri. Tämä on pääteltävissä edellä olevan taulukon symmetrioistakin.

ESITIEDOT: monikulmiot, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat

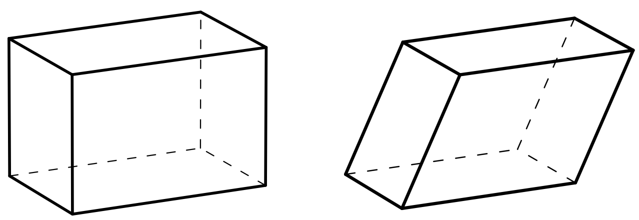
Symmetrisistä monitahokkaista

Jokaisesta säännöllisestä monitahokkaasta voidaan muodostaa uusi monitahokas seuraavalla tavalla: Jokaisen sivutahkon päälle asetetaan keskenään samanlaiset pyramidit, joiden pohjina sivutahkot ovat. Pyramidien korkeus valitaan siten, että kahden vierekkäisen pyramidin huiput ja niiden yhteisen pohjasärmän päätepisteet ovat samassa tasossa; näiden neljän pisteen määräämästä nelikulmiosta tulee uuden kappaleen sivutahko. pyramidi

Tetraedrin tapauksessa tällöin syntyy kuutio. Kuutiosta ja oktaedrista saadaan monitahokas, jota kutsutaan *rombidodekaedriksi* (rombi = neljäkäs, vinoneliö). Dodekaedrista ja ikosaedrista syntyy sama 30-tahokas. vinoneliö

Rombidodekaedri ja em. 30-tahokas eivät ole säännöllisiä monitahokkaita, vaikka niistä onkin löydettävissä monia symmetrioita.

Yksinkertaisempia symmetrisiä, mutta ei säännöllisiä monitahokkaita ovat *suorakulmainen särmiö*, jonka kaikki sivutahkot ovat suorakulmioita (yhteensä kuusi), ja *suuntaissärmiö* eli *paralleeliepipedi*, jonka sivutahkot ovat suunnikkaita. särmiö (tilavuus) suunnikas



ESITIEDOT: monikulmiot, taso
KATSO MYÖS: geometriset probleemat

Säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi

Todistus sille, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi, on yllättävänkin yksinkertainen:

Koska säännöllisen monitahokkaan sivutahkot ovat samanlaisia säännöllisiä monikulmioita — olkoot n-kulmioita — on jokaisen kulman suuruus

monikulmio
kulma (taso-)

$$(n-2) \cdot 180°/n.$$

Koska kaikki kärjet ovat samanlaisia, yhtyy jokaisessa kärjessä sama määrä p sivutahkoja. Yhdessä kärjessä kohtaavien kulmien summan tulee olla pienempi kuin täysi kulma 360°, jolloin saadaan epäyhtälö

epäyhtälö

$$p(n-2) \cdot 180°/n < 360° \quad \text{eli} \quad np < 2(n+p).$$

Toisaalta on tietenkin $n \geq 3$, $p \geq 3$.

Ne arvot n, p, jotka toteuttavat saadun epäyhtälön, on helppo luetella ja todeta, että jokaista kyseeseen tulevaa arvoparia todellakin vastaa jokin tunnettu säännöllinen monitahokas:

n	p	np	$2(n+p)$	
3	3	9	12	tetraedri
3	4	12	14	oktaedri
3	5	15	16	ikosaedri
3	6	18	18	epäyhtälö ei toteudu
4	3	12	14	kuutio
4	4	16	16	epäyhtälö ei toteudu
5	3	15	16	dodekaedri
5	4	20	18	epäyhtälö ei toteudu
6	3	18	18	epäyhtälö ei toteudu

Koska muita epäyhtälön toteuttavia arvopareja ei ole, ei ole olemassa myöskään muita säännöllisiä monitahokkaita.

ESITIEDOT: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste

KATSO MYÖS: suora, derivaatta, tangentti ja normaali, pinta

Tasokäyrä

Taso- tai avaruuskäyrän täsmällinen määrittely ei ole aivan yksinkertaista. Mikäli esiintyvät funktiot ovat riittävän säännöllisiä (esim. jatkuvia tai derivoituvia), voidaan *tasokäyriä* luonnehtia seuraavilla tavoilla:

jatkuvuus

derivoituvuus

1. Ne tason pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit x ja y toteuttavat yhtälön $y = f(x)$, muodostavat käyrän. Esimerkiksi paraabeli $y = x^2$ tai itseisarvo $y = |x|$.

   koordinaatisto (xy-)

   paraabeli (xy-koordinaateissa)

2. Ne tason pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit toteuttavat muotoa $F(x, y) = 0$ olevan yhtälön, muodostavat usein käyrän. Esimerkeiksi sopivat ympyrä $x^2 + y^2 - 1 = 0$, paraabeli $x^2 - y = 0$, suora $x + 2y - 3 = 0$ tai *Cartesiuksen lehti* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

   itseisarvo (reaaliluvun)

   ympyrä

   suora (yhtälö)

   Muoto $y = f(x)$ on erikoistapaus tästä, koska yhtälö voidaan aina saattaa muotoon $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Toisaalta yhtälö $F(x, y) = 0$ ei välttämättä esitä käyrää; esimerkiksi yhtälön $x^2 + y^2 = 0$ toteuttaa vain yksi piste, origo, ja yhtälöä $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ei toteuta mikään tason piste.

3. Tason pisteet, joiden napakoordinaatit r ja φ toteuttavat yhtälön $r = f(\varphi)$, muodostavat käyrän. *Arkhimedeen spiraali* $r = \varphi$ ja *logaritminen spiraali* $r = e^{\varphi}$ ovat esimerkkejä.

   napakoordinaatit (tason)

4. Käyrä voidaan määritellä muotoa $x = x(t)$, $y = y(t)$ olevan *parametriesityksen* avulla. Kun *parametri* t saa tietyt arvot, esimerkiksi arvot joltakin väliltä $[a, b]$, vastaa jokaista parametriarvoa käyrän piste $(x(t), y(t))$. Esimerkiksi ympyrä $x^2 + y^2 = 4$ voidaan esittää muodossa $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ \text{ missä } t \in [0, 2\pi]$.

   väli (reaaliakselin)

   sini

   kosini

   Parametriesitys voidaan kirjoittaa myös vektorimuotoon: $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, missä $\mathbf{r}(t)$ on parametriarvoa t vastaavan käyrän pisteen paikkavektori.

   paikkavektori

Esitiedot: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste
Katso myös: suora, derivaatta, tangentti ja normaali, pinta

Parametriesityksen muodostaminen

Muodossa $y = f(x)$ tai $r = f(\varphi)$ annetut käyrät voidaan parametrisoida helposti: Jos parametriksi otetaan x tai φ, esitykset ovat

koordinaatisto (xy-)
koordinaatisto (napa-)

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(\varphi) = f(\varphi)\cos\varphi\,\mathbf{i} + f(\varphi)\sin\varphi\,\mathbf{j}.$$

Jos käyrä on annettu muodossa $F(x, y) = 0$, ei parametrisointi välttämättä ole helppoa. Parametriksi on usein syytä valita muuttuja, jolla on jokin luonnollinen geometrinen merkitys.

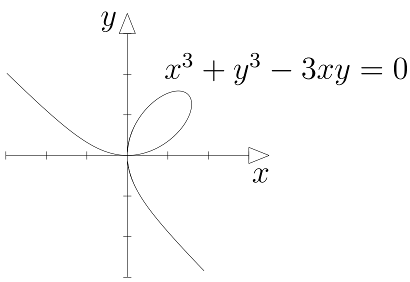
Ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ parametriesityksessä $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ parametri t on ympyrän pistettä (x, y) vastaava keskuskulma.

keskuskulma

Cartesiuksen lehti $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ voidaan parametrisoida ottamalla parametriksi origon kautta kulkevan suoran $y = tx$ kulmakerroin t, jolloin parametriesitykseksi saadaan

suora (yhtälö)
kulmakerroin

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$



ESITIEDOT: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste
KATSO MYÖS: suora, derivaatta, tangentti ja normaali, pinta

Avaruuskäyrä

Luonnollisin tapa esittää *avaruuskäyrä* on parametriesitys:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},$$

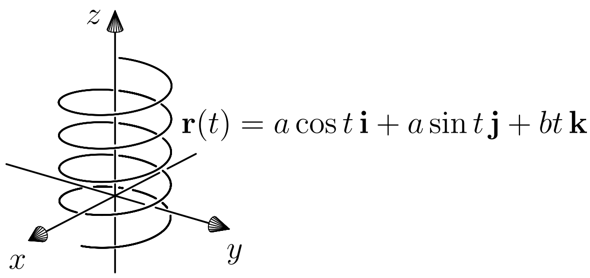
missä käyrän pisteen suorakulmaiset koordinaatit, ts. paikkavektorin komponentit on esitetty parametrin t funktioina: $(x(t), y(t), z(t))$.

koordinaatisto (xyz-)
paikkavektori

Esimerkiksi ruuvikierteen, ns. *ruuviviivan* parametriesitys on

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k},$$

missä a ja b ovat vakioita.



ESITIEDOT: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste
KATSO MYÖS: suora, derivaatta, tangentti ja normaali, pinta

Käyrän tangentti

Parametriesityksen avulla annetun taso- tai avaruuskäyrän tangentin suuntavektori, *tangenttivektori*, saadaan yksinkertaisesti derivoimalla parametriesitys:

tangentti (suora)
suuntavektori (suoran)

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} \quad \text{tai} \quad \mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

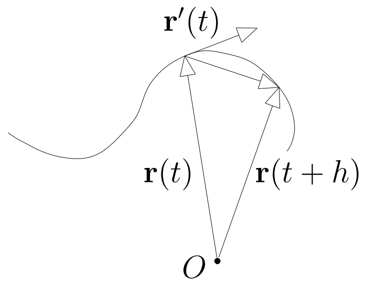
Tulos seuraa siitä, että $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ on kahta käyrän pistettä yhdistävä vektori, so. vektori, joka antaa käyrän erään sekantin suunnan. Tämän kanssa samansuuntainen on vektori

vektori
sekantti (suora)

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Jos $h \to 0$, lähestyvät pisteet toisiaan, jolloin sekantti kääntyy tangentiksi, ja toisaalta yo. erotusosamäärävektori lähestyy derivaattaa $\mathbf{r}'(t)$.

erotusosamäärä
derivaatta



Esitiedot: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste
Katso myös: taso, käyrä

Pinnan esitysmuodot

Kuten käyrän myös *pinnan* täsmällinen määrittely on vaikea tehtävä. Seuraavassa esitetään ainoastaan eri mahdollisuudet luonnehtia kolmiulotteisen avaruuden pinta paneutumatta tarkemmin esiintyviltä funktioilta vaadittaviin säännöllisyysominaisuuksiin. käyrä (taso-) käyrä (avaruus-)

1. Ne kolmiulotteisen avaruuden pisteet, joiden suorakulmaiset koordinaatit x, y ja z toteuttavat yhtälön $z = f(x, y)$, muodostavat pinnan. Tällöin siis xy-tason pistettä (x, y) vastaten lasketaan arvo z, joka ilmoittaa tämän pisteen kohdalla (xy-tason ylä- tai alapuolella) olevan pinnan pisteen korkeuden. Esimerkiksi $z = xy$ ja $z = x^2 - y^2$ ovat satulapintoja. koordinaatisto (xyz-) satulapinta

2. Muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö määrittää usein pinnan. Pinnan muodostavat ne pisteet, joiden koordinaatit (x, y, z) toteuttavat yhtälön. Esimerkiksi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ on origokeskinen pallopinta, $x + y + z - 1 = 0$ on taso. pallo taso (yhtälö)

   Muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö ei välttämättä toteudu ainoallakaan arvokolmikolla (x, y, z). Tällöin se ei geometrisesti esitä mitään. Esimerkiksi sopii $x^2 + e^y + \cosh z = 0$. Yhtälö voi esittää myös pistettä: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$ on piste $(1, 2, 3)$. Myös suora on mahdollinen: Yhtälö $(x+y+z+1)^2 + (x+2y+3z+4)^2 = 0$ toteutuu vain, jos $x + y + z + 1 = 0$ ja $x + 2y + 3z + 4 = 0$, ts. kyseessä on näiden yhtälöiden määrittämien tasojen leikkaussuora. eksponenttifunktio hyperbelikosini suora (kolmiulotteinen)

3. Kolmiulotteisen avaruuden pintojen käsittely on yleensä helpointa *parametriesityksen* avulla. Tällöin tarvitaan kaksi parametria:

   $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k},$$

   missä parametrit u ja v saavat arvot jostakin uv-tason alueesta. Jokaista parametriparia (u, v) vastaa siten paikkavektori $\mathbf{r}(u, v)$, ts. pinnan piste $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Esimerkkejä edempänä. paikkavektori

ESITIEDOT: funktiokäsite, reaalifunktiot, yhtälöt, koordinaatistot, piste
KATSO MYÖS: taso, käyrä

Esimerkkejä pintojen parametriesityksistä

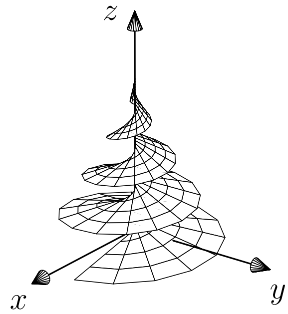
Origokeskisen R-säteisen pallon parametriesitys on pallo

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R\cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{i} + R\cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{j} + R\sin\vartheta\,\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2],\ \varphi \in [-\pi, \pi],$$

kuten pallokoordinaattien määritelmän perusteella voidaan päätellä. koordinaatisto (pallo-)

Toisena esimerkkinä olkoon eräs *ruuvipinta*:

$$\mathbf{r}(u, v) = u(1 - \frac{v}{8\pi})(\cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}) + \frac{1}{5}(v - u)\,\mathbf{k}, \quad u \in [0, 3],\ v \in [0, 8\pi].$$



Parametriesityksen käyttö mahdollistaa pintojen tangenttitasojen ja muiden geometristen ominaisuuksien tutkimisen derivaattojen avulla. Tällöin kuitenkin tarvitaan ns. usean muuttujan differentiaalilaskentaa. tangenttitaso

ESITIEDOT: käyrä, kulma, piste, suora
KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät

Ympyrä ja sen yhtälö

Tason pisteet, jotka ovat vakioetäisyydellä kiinteästä pisteestä, muodostavat *ympyrän* eli *ympyräviivan*. Kiinteä piste on ympyrän *keskipiste* ja vakioetäisyys sen *säde*.

ympyrä (ala)
käyrä (taso-)

Nimitystä ympyrä käytetään toisinaan myös ympyräviivan sisään jäävästä tasoalueesta. Ympyräviivaa itseään kutsutaan tällöin usein ympyrän *kehäksi*.

Analyyttisessa geometriassa ympyrää (ympyräviivaa) käsitellään sen yhtälön avulla. Pythagoraan lauseen perusteella ympyrän pisteet (x, y) toteuttavat yhtälön

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

missä (a, b) on ympyrän keskipiste ja R sen säde. Suorittamalla neliöönkorotukset yhtälö saadaan muotoon $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Kyseessä on siten eräs toisen asteen käyrä.

geometria (analyyttinen)
Pythagoraan lause
koordinaatisto (xy-)
etäisyys (pisteiden)
käyrä (toisen asteen)

Jos kääntäen on annettuna toisen asteen käyrän yhtälö, jossa neliötermien x^2 ja y^2 kertoimet ovat yhtä suuret eikä tulotermiä (xy-termiä) esiinny, voidaan neliöiksi täydentämällä tutkia, esittääkö tämä ympyrää. Menettely on seuraavan esimerkin mukainen:

Olkoon tarkasteltavana yhtälö $2x^2 + 2y^2 - x + 4y + c = 0$, missä c on jokin vakio. Tämä voidaan aluksi saattaa muotoon

$$2(x^2 - x/2) + 2(y^2 + 2y) + c = 0.$$

Jotta sulkulausekkeet voitaisiin tulkita binomin neliöiksi binomikaavan mukaisesti, on niihin lisättävä sopivat neliötermit; jotta yhtälö säilyisi voimassa, on nämä termit toisaalla vähennettävä pois:

binomi
binomikaava
binomikaava

$$\begin{aligned}
&2(x^2 - x/2 + 1/16) + 2(y^2 + 2y + 1) + c - 1/8 - 2 = 0 \quad \text{eli} \\
&2(x - 1/4)^2 + 2(y + 1)^2 = 17/8 - c \quad \text{eli} \\
&(x - 1/4)^2 + (y + 1)^2 = 17/16 - c/2.
\end{aligned}$$

Jos lauseke $17/16 - c/2$ on positiivinen, se voidaan tulkita ympyrän säteen neliöksi ja kyseessä todella on ympyrä. Esimerkiksi arvolla $c = -1$ saadaan säteeksi $R = 5/4$ ja ympyrän keskipiste on $(1/4, -1)$. Jos lauseke on $= 0$, kyseessä on piste; arvolla $c = 17/8$ yhtälö esittää siten pistettä $(1/4, -1)$. Jos lauseke on negatiivinen, ei yhtälö voi toteutua millään arvoilla (x, y) eikä se siis esitä mitään käyrää.

Ympyrän parametriesitys

Ympyrän yhtälö voidaan esittää parametrimuodossa trigonometristen funktioiden sin ja cos avulla. Ympyrän $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ parametriesitys on tällöin

$$x = a + R\cos t, \quad y = b + R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

parametriesitys (tasokäyrän)

sini

kosini

Sijoittamalla voidaan nähdä, että alkuperäinen yhtälö tällöin todellakin toteutuu: $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$.

Parametrin t saadessa arvot sinin ja kosinin jakson alueelta kiertää piste (x, y) ympyrän yhden kerran. Siten alueen $t \in [0, 2\pi]$ sijasta voidaan yhtä hyvin käyttää vaikkapa aluetta $t \in [-\pi, \pi]$.

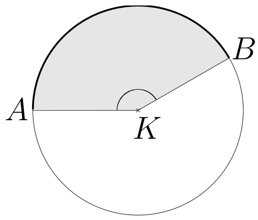
ESITIEDOT: käyrä, kulma, piste, suora
KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät

Sektori ja segmentti

Olkoot A ja B kaksi ympyrällä (ympyrän kehällä) olevaa pistettä. Nämä jakavat ympyrän kahteen *kaareen*; ellei toisin mainita, kaarella AB tarkoitetaan näistä pienempää.

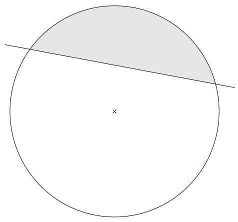
Kun kaaren päätepisteet A ja B yhdistetään ympyrän keskipisteeseen K, muodostuu kaarta vastaava *keskuskulma* AKB. Kaaren AB suuruutta mitataan sen keskuskulman suuruuden avulla yksikkönä aste, radiaani, tms. Kaaren AB ja säteiden KA ja KB rajaama tasoalue on ympyrän *sektori*.

kulma (taso-)
sektori (ala)



Ympyrän sekantti, so. suora, joka leikkaa ympyrää kahdessa pisteessä, jakaa ympyräalueen kahteen osaan. Näitä kutsutaan ympyrän *segmenteiksi*. Ellei toisin mainita, tarkoitetaan kahdesta mahdollisesta pienempää. Sekantista ympyrän sisään jäävä osa on ympyrän *jänne*. Jos sekantti erityisesti kulkee ympyrän keskipisteen kautta, jännettä sanotaan ympyrän *halkaisijaksi*.

sekantti (suora)
segmentti (ala)

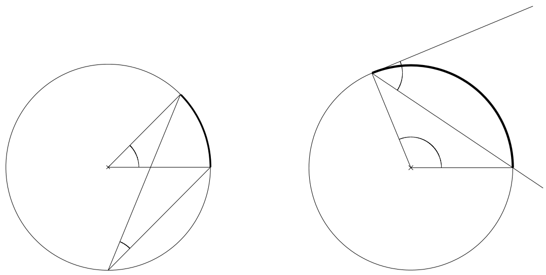


ESITIEDOT: käyrä, kulma, piste, suora
KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät

Kehäkulma

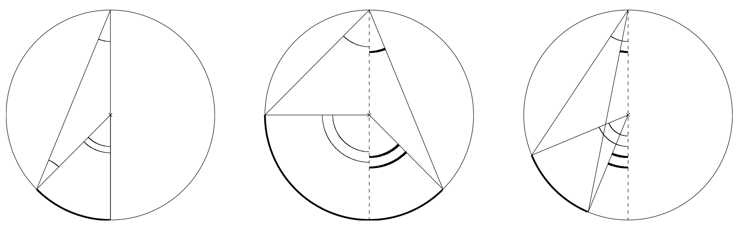
Ympyrän *kehäkulma* on kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja kylkinä on kaksi jännettä (sekanttia) tai jänne ja tangentti. Kehäkulman aukeamaan jäävä osa ympyrän kehää on kehäkulmaa vastaava kaari. Tätä kaarta vastaavaa keskuskulmaa kutsutaan myös kehäkulmaa vastaavaksi keskuskulmaksi.

kulma (taso-)
kehäkulma (esimerkki)
kehäkulma (esimerkki)
sekantti (suora)
tangentti (suora)



Kehäkulman suuruus on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Tämä voidaan päätellä piirtämällä ympyrään kummankin kulman kärkipisteen kautta kulkeva halkaisija alla olevien kuvioiden osoittamalla tavalla. Vasemmanpuolinen kuvio on perustapaus, jossa tulos seuraa siitä, että kolmion kulmien summa on 180° ja toisaalta vieruskulmien summa on myös 180°. Yleinen tapaus saadaan jakamalla tutkittavat kulmat halkaisijaan rajoittuvien kulmien summiksi tai erotuksiksi kahden jälkimmäisen kuvion osoittamalla tavalla. Tulos on voimassa myös, jos kehäkulman toisena kylkenä on ympyrän tangentti.

kolmio
kulma (vierus-)



Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria riippumatta kulman kärjen sijainnista ympyrän kehällä. Tämä on seuraus edellisestä: jokainen tällainen kehäkulma on suuruudeltaan puolet vastaavasta kaaresta (ts. keskuskulmasta).

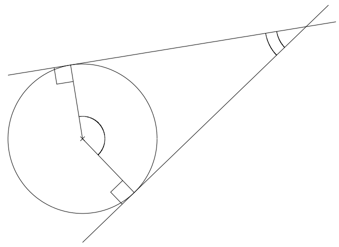
Tangenttikulma

Ympyrän *tangenttikulma* on kulma, jonka kyljet ovat ympyrän tangentteja ja kärkipiste siis ympyrän ulkopuolella. Tangenttikulmaa vastaava keskuskulma saadaan yhdistämällä tangenttien sivuamispisteet ympyrän keskipisteeseen.

kulma (taso-)
tangentti (suora)

Tangenttikulma ja vastaava keskuskulma ovat suplementtikulmia, ts. niiden summa on 180°.

kulma (suplementti-)



Pisteet, joissa tangenttikulman kyljet sivuavat ympyrää, löydetään piirtämällä ympyrä, jonka halkaisijana tangenttikulman kärjen ja ympyrän keskipisteen yhdysjana. Perusteena on, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. (Konstruoitaessa geometrisia kuvioita harpilla ja viivoittimella voidaan suora piirtää, jos kaksi sillä olevaa pistettä tunnetaan; tangentin piirtäminen suoraan ympyrää sivuamaan ei siis ole sallittua eikä käytännössä kovin tarkkaakaan. Tämän johdosta on sivuamispiste ensin konstruoitava.)

ESITIEDOT: käyrä, kulma, piste, suora

KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät

Pisteen potenssi

Olkoon P annetun ympyrän ulkopuolinen piste. Asetetaan pisteen P kautta ympyrän sekantti, joka leikkaa ympyrää pisteissä A ja B. Pisteestä P asetettu ympyrän tangentti sivutkoon ympyrää pisteessä C.

sekantti (suora)

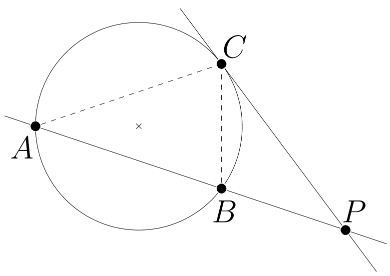
tangentti (suora)

Pisteen P potenssiksi ympyrän suhteen sanotaan janojen pituuksien tuloa $|PA||PB|$, mikä on riippumaton sekantin asemasta ja yhtä suuri kuin tangentilla olevan janan pituuden neliö $|PC|^2$.

Todistus ilmenee seuraavasta kuviosta, missä kolmiot PAC ja PCB ovat yhdenmuotoisia, koska niillä on yhteinen kulma pisteessä P ja toisaalta kulmat PAC ja PCB ovat yhtä suuria samaa kaarta BC vastaavina kehäkulmina. Kolmioiden sivujen verrannollisuudesta seuraa

yhdenmuotoisuus (kolmioiden)

$$\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PC|}{|PA|} \quad \text{eli} \quad |PA||PB| = |PC|^2.$$

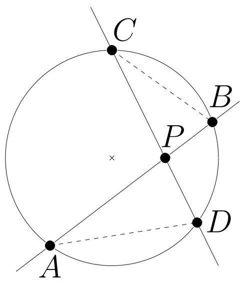


Jos piste P sijaitsee ympyrän sisällä, pätee vastaava. Jos pisteen kautta asetetaan sekantti, joka leikkaa ympyrää pisteissä A ja B, on tulo $|PA||PB|$ riippumaton sekantin asemasta. Tätä kutsutaan ympyrän sisäpuolella olevan pisteen P potenssiksi ympyrän suhteen.

Tulos todistetaan jälleen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Jos AB ja CD ovat pisteen P kautta kulkevia ympyrän jänteitä, ovat kolmiot APD ja CPB yhdenmuotoisia ja

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|} \quad \text{eli} \quad |PA||PB| = |PC||PD|.$$

Tulo on siis riippumaton siitä, mikä pisteen P kautta kulkeva sekantti on kyseessä.



ESITIEDOT: pinta, ympyrä
KATSO MYÖS: toisen asteen pinnat, geometria

Pallon yhtälö

Pallo on pinta, jonka kaikki pisteet ovat vakioetäisyydellä kiinteästä pisteestä, pallon *keskipisteestä*. Vakioetäisyys on pallon *säde*.

pallo (tilavuus)
pallo (ala)
pinta

Nimitys pallo voi tarkoittaa joko pallopintaa tai pallopinnan rajoittamaa avaruuden osaa.

Pythagoraan lauseesta seuraa, että kahden avaruuspisteen (a, b, c) ja (x, y, z) välinen etäisyys on $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, jolloin pallopinnan yhtälöksi saadaan

Pythagoraan lause
koordinaatisto (xyz-)
etäisyys (pisteiden)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

missä (a, b, c) on pallon keskipiste ja R sen säde.

Pallon yhtälöä voidaan tutkia samaan tapaan kuin ympyrän yhtälöä. Erityisesti jos toisen asteen pinnan yhtälössä termeillä x^2, y^2 ja z^2 on sama kerroin ja yz-, zx- ja xy-termit puuttuvat, yhtälö esittää joko palloa, pistettä tai ei mitään.

ympyrä
pinta (toisen asteen)

Esimerkiksi: Yhtälö

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 2 = 0$$

voidaan binomin neliöiksi täydentämällä saattaa muotoon

binomi

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 6z + 9) - 4 - 1 - 9 - 2 = 0 \quad \text{eli}$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 16.$$

Tämä esittää palloa, jonka keskipiste on $(-2, 1, -3)$ ja säde 4.

ESITIEDOT: pinta, ympyrä

KATSO MYÖS: toisen asteen pinnat, geometria

Pallon tasoleikkaukset

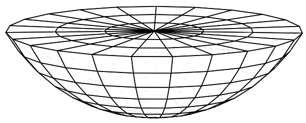
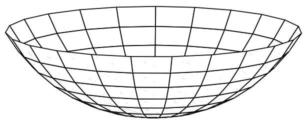
Jos palloa leikataan tasolla, leikkauskuvio on aina ympyrä. Jos leikkaava taso kulkee pallon keskipisteen kautta, leikkausympyrän säde on sama kuin pallon säde; jos taso ei kulje keskipisteen kautta, leikkausympyrän säde on pienempi. Edelliset ympyrät ovat pallon *isoympyröitä*, jälkimmäiset *pikkuympyröitä*.

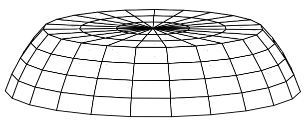
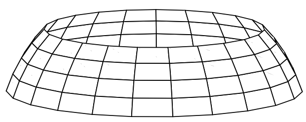
taso
ympyrä

Esimerkiksi maapallon pinnalla päiväntasaaja ja kaikki meridiaaniympyrät ovat isoympyröitä. Päiväntasaajaa lukuunottamatta leveyspiirit ovat pikkuympyröitä.

Jos palloa leikataan tasolla, jakautuu pallo kahteen kappaleeseen, joita kutsutaan *pallosegmenteiksi*. Vastaavat pallopinnan osat ovat *kalotteja*. Jos palloa leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, jää näiden väliin *katkaistu pallosegmentti* ja pallopinnasta *vyöhykkeeksi* kutsuttu osa.

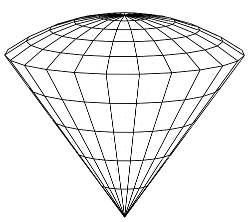
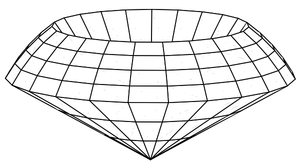
pallosegmentti (tilavuus)
kalotti (ala)
vyöhyke (ala)

Yhdistettäessä kalotin reunakäyrä säteillä pallon keskipisteeseen syntyy kappale, jota kutsutaan *pallosektoriksi*. Samaa nimitystä käytetään kappaleesta, joka syntyy yhdistettäessä vyöhykkeen molemmat reunaympyrät pallon keskipisteeseen; kyseessä on tällöin kappale, jota rajoittaa vyöhyke ja kaksi kartiopintaa.

pallosektori (tilavuus)
kartiopinta
kartiopinta

Geodeettiset viivat; pallokolmiot

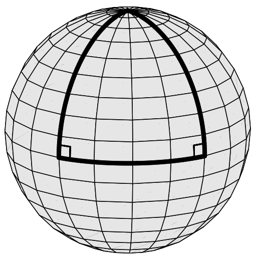
Geodeettiseksi viivaksi jollakin pinnalla kutsutaan käyrää, joka antaa lyhimmän pintaa pitkin kulkevan tien kahden annetun pisteen välillä. Voidaan osoittaa, että pallon geodeettisia viivoja ovat isoympyröiden kaaret. pinta käyrä (avaruus-)

Lyhin pallon pintaa pitkin kulkeva tie kahden pisteen välillä on siis näitä yhdistävä isoympyrän kaari. Taso, jossa kaari sijaitsee, määräytyy kolmen pisteen avulla: kaaren päätepisteet ja pallon keskipiste. taso

Pallon pinnalle voidaan muodostaa *elliptinen epäeuklidinen geometria* pitämällä isoympyröitä tämän geometrian suorina. Ajatus on sikäli luonnollinen, että tavallisessa tasogeometriassa kahden pisteen välinen lyhin tie on suoran osa, jana. Pallonpintageometriassa lyhin tie on vastaavalla tavalla tämän geometrian suoran osa, isoympyrän kaari. geometria (epäeuklidinen) geometria (epäeuklidinen) suora

Pallokolmio on pallonpintageometrian kolmio, jonka sivut ovat isoympyröiden kaaria. Sekä kolmion sivuja — kaaria — että sen kulmia voidaan siten mitata kulmamitoilla, esimerkiksi asteilla. Pallokolmioiden laskemista kutsutaan *pallotrigonometriaksi*. pallokolmio kulma (taso-)

Voidaan osoittaa, että pallokolmioiden kulmien summa on aina $> 180°$. Esimerkiksi jos pallokolmion sivuiksi otetaan päiväntasaajan kaari ja kaksi pohjoisnavalta päiväntasaajalle ulottuvaa meridiaanikaarta, saadaan pallokolmio, jonka kulmien summa on $90° + 90° + \alpha = 180° + \alpha$, missä α on meridiaanikaarten välinen pituusaste-ero. kolmio



Kartio ja lieriö

Esitiedot: pinta, ympyrä
Katso myös: toisen asteen pinnat, monitahokkaat

Kartio

Yleiseksi *kartiopinnaksi* kutsutaan pintaa, jonka voidaan ajatella syntyvän siten, että pinnan *muodostajasuora* liikkuu avaruudessa kulkien kaiken aikaa kiinteän pisteen kautta ja toisaalta koskettamalla kaiken aikaa kiinteää tukikäyrää. Kiinteätä pistettä kutsutaan kartiopinnan *kärkipisteeksi* eikä se saa sijaita tukikäyrällä. Pinta, jonka muodostajasuora liikkuessaan pyyhkii, on kartiopinta. Muodostajasuora on molemmissa suunnissa äärettömyyteen ulottuva, jolloin saadaan kahteen suuntaan aukeava rajoittamaton pinta.

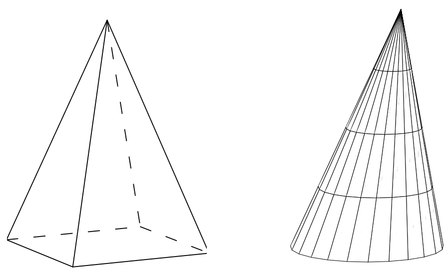
pinta
kartiopinta
käyrä (taso-)
käyrä (avaruus-)

Rajoitettu kartiopinta saadaan valitsemalla tukikäyräksi umpinainen tasokäyrä ja muodostajaksi kärkipisteestä tukikäyrälle ulottuva jana. Kärkipiste ei tällöin saa sijaita tukikäyrän tasossa. Tukikäyrän sisään jäävä tasoalue on *pohja* ja itse kartiopinta *vaippa*; näiden rajaamaa kappaletta sanotaan (yleiseksi) *kartioksi*. Muodostajajanaa kutsutaan myös kartion *sivujanaksi*.

kartio (tilavuus)
kartio (vaipan ala)
pyramidi (tilavuus)
monikulmio
ympyrä

Esimerkkejä tämän määritelmän mukaisista kartioista ovat *pyramidi*, jossa tukikäyränä on neliö tai yleisemmin tasomonikulmio, ja *ympyräkartio*, jossa tukikäyrä on ympyrä.

Ympyräkartiota sanotaan *suoraksi* tai *vinoksi* sen mukaan, onko kärjen ja pohjaympyrän keskipisteen yhdysjana kohtisuorassa vai vinossa pohjan tasoa vastaan. Suoran ympyräkartion vaippa on pyörähdyspinta, joka syntyy muodostajajanan pyörähtäessä em. yhdysjanan, kartion *akselin* ympäri.



Suoran ympyräkartion vaippa voidaan leikata auki jotakin sivujanaa pitkin ja taivuttaa tasoon ympyränsektoriksi, jonka säteenä on sivujana.

Jos kärkipiste asetetaan origoon, on suoran ympyräkartion yhtälö

koordinaatisto (xyz-)

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Poikkileikkaus korkeudella $|z|$ on siten ympyrä, jonka säde on $|z/a|$.

ESITIEDOT: pinta, ympyrä

KATSO MYÖS: toisen asteen pinnat, monitahokkaat

Katkaistu kartio

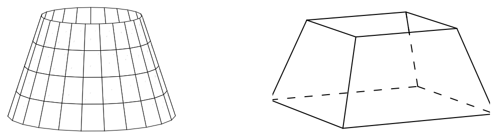
Katkaistu kartio saadaan leikkaamalla kartiosta kärki pois pohjan suuntaisella tasolla. Leikkaavasta tasosta kappaleen sisään jäävää osaa kutsutaan myös *pohjaksi*; katkaistulla kartiolla on siten kaksi pohjaa. Pohjien välinen pinnan osa on katkaistun kartion *vaippa*.

katkaistu kartio (tilavuus)

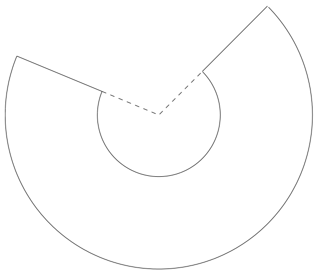
katkaistu kartio (vaipan ala)

Jos kyseessä on pyramidityyppinen kappale, puhutaan mieluummin *katkaistusta pyramidista*.

katkaistu pyramidi (tilavuus)



Katkaistun suoran ympyräkartion vaippa voidaan leikata auki ja taivuttaa tasokuvioksi samaan tapaan kuin kartion vaippa. Tällöin syntyy tasoalue, jota rajoittaa kaksi samakeskistä ympyränkaarta ja näiden yhteiseen keskipisteeseen suuntautuvat janat.



ESITIEDOT: pinta, ympyrä

KATSO MYÖS: toisen asteen pinnat, monitahokkaat

Lieriö

Yleiseksi *lieriöpinnaksi* kutsutaan pintaa, joka voidaan ajatella syntyvän seuraavasti: pinnan *muodostajasuora* liikkuu suuntansa säilyttäen siten, että se kaiken aikaa koskettaa kiinteää tukikäyrää; lieriöpinta on pinta, jonka suora tällöin pyyhkii.

pinta

lieriöpinta

Jos tukikäyrä on umpinainen tasokäyrä ja muodostajana on vakiopituinen jana, jonka toinen päätepiste on tukikäyrällä, saadaan *rajoitettu lieriöpinta*. Muodostajajanan päätepisteet sijaitsevat tällöin tasoissa, joista lieriöpinnan sisään jääviä osia sanotaan lieriön *pohjiksi*; itse pinta on *vaippa*. Pohjien ja vaipan rajaama kappale on (yleinen) *lieriö*. Muodostajajanaa kutsutaan lieriön *sivujanaksi*.

lieriö (tilavuus)

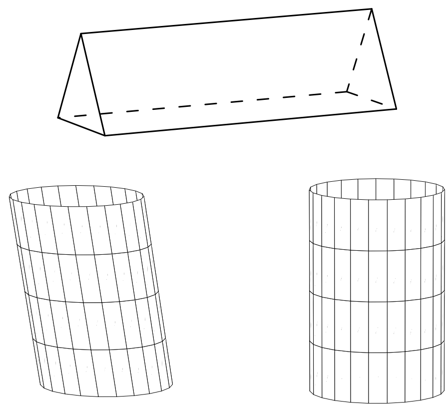
lieriö (vaipan ala)

Jos tukikäyrä on monikulmio, saadaan särmiöpinta, jota usein kutsutaan *prismaksi*. Jos se on ympyrä, saadaan *ympyrälieriö*; tämä on *vino* tai *suora* riippuen siitä, onko muodostajasuora vinossa vai kohtisuorassa ympyrän tasoon nähden.

monikulmio

prisma (tilavuus)

ympyrä



Kartion tavoin myös lieriön vaippa voidaan leikata auki sivujanaa pitkin ja levittää tasoon.

ESITIEDOT: käyrä, kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ympyrä, toisen asteen pinnat

Toisen asteen käyrä

Toisen asteen käyräksi kutsutaan käyrää, jonka yhtälö xy-koordinaatistossa on muuttujien x ja y suhteen toista astetta. Yleisimmässä muodossaan tämä on

käyrä (taso-)
yhtälö
koordinaatisto (xy-)

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

missä A, B, C, D, E ja F ovat vakioita. (Yhtälössä esiintyvät kakkoset ovat epäolennaisia; kertoimet on tapana kirjoittaa tähän muotoon, koska tällöin yhtälön pidemmälle menevä käsittely johtaa hieman yksinkertaisempiin lausekkeisiin.)

Kertoimista riippuen yhtälö esittää erilaisia käyriä. Päätyypit ovat ellipsi (sisältäen erikoistapauksenaan ympyrän), paraabeli ja hyperbeli. Yhtälö voi esittää myös yhtä tai kahta suoraa tai yhtä ainoaa pistettä. Lisäksi on mahdollista, että mikään piste (x, y) ei toteuta sitä eikä se siis esitä geometrisesti mitään.

ympyrä

Ellipsien, paraabelien ja hyperbelien tarkempi käsittely on edempänä.

Seuraavat esimerkit esittävät yhtä suoraa, kahta yhdensuuntaista suoraa, kahta toisensa leikkaavaa suoraa ja pistettä; viimeinen ei esitä mitään:

suora (yhtälö)

$$\begin{aligned}
&(x + y - 1)^2 = 0,\\
&(x + y - 1)(x + y - 2) = 0,\\
&(x + y - 1)(x - y - 1) = 0,\\
&2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 = 0,\\
&2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Tarkempaa yleisen toisen asteen käyrän tutkimista ei tässä käsitellä.

Esitiedot: käyrä, kartio ja lieriö
Katso myös: ympyrä, toisen asteen pinnat

Ellipsi

Ellipsi voidaan määritellä käyränä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Niiden kahdesta kiinteästä pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien summa on vakio.

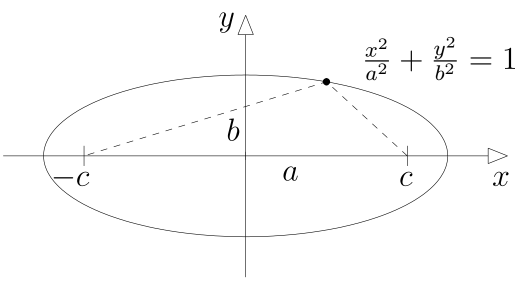
ellipsi (ala)
käyrä (taso-)

Jos polttopisteiksi valitaan xy-tason pisteet $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$ $(c \geq 0)$ ja em. vakioksi $2a$ $(a > c)$, saadaan ellipsin yhtälö yksinkertaiseen muotoon:

koordinaatisto (xy-)
yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Lukua a sanotaan ellipsin *ison akselin* puolikkaaksi, luku b on *pikku akselin* puolikas.



Suhdetta $e = c/a$ kutsutaan ellipsin *eksentrisyydeksi* ja se mittaa ellipsin litistyneisyyttä. Koska $0 \leq c < a$, on $0 \leq e < 1$.

Jos $c = 0$, polttopisteet yhtyvät ja käyrästä tulee ympyrä. Eksentrisyys on tällöin $e = 0$. Jos a on kiinteä ja $c \to a$, jolloin $b \to 0$ ja $e \to 1$, niin ellipsin iso akseli säilyy muuttumattomana, mutta pikku akseli pienenee ja käyrä litistyy kohden polttopisteitä yhdistävää janaa.

ympyrä

Nimitys polttopiste aiheutuu siitä, että jos toisesta polttopisteestä lähtee säde, joka ellipsiin osuessaan heijastuu heijastumislain mukaisesti, niin heijastunut säde kulkee toisen polttopisteen kautta. Geometrisesti tulkittuna tämä tarkoittaa, että ellipsin pisteestä polttopisteisiin piirrettyjen janojen välisen kulman puolittaja on ellipsin normaali.

normaali

Ellipsille käytetään usein myös parametriesitystä: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

parametriesitys (tasokäyrän)
sini
kosini

ESITIEDOT: käyrä, kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ympyrä, toisen asteen pinnat

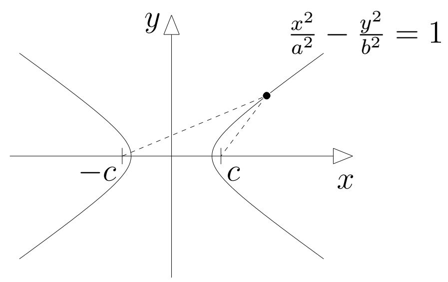
Hyperbeli

Hyperbeli määritellään samaan tapaan kuin ellipsi. Kyseessä on käyrä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Niiden kahdesta kiinteästä pisteestä (*polttopisteistä*) mitattujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on vakio. käyrä (taso-)

Kun polttopisteiksi valitaan xy-tason pisteet $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$ $(c \geq 0)$ ja vakioksi $2a$ $(0 < a < c)$, saadaan hyperbelille yhtälö koordinaatisto (xy-) yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Lukuja a ja b sanotaan hyperbelin *puoliakseleiksi*.



Jos $a = b$, sanotaan, että hyperbeli on *tasasivuinen*.

Suhde $e = c/a$ on hyperbelin *eksentrisyys*. Koska $c > a$, on $e > 1$.

Hyperbelillä on monia samantyyppisiä geometrisia ominaisuuksia kuin ellipsillä. Esimerkiksi hyperbelin pisteestä polttopisteisiin piirrettyjen yhdysjanojen välisen kulman puolittaja on hyperbelin tangentti. tangentti (suora)

Hyperbelille voidaan käyttää parametriesitystä $x = \pm a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. parametriesitys (tasokäyrän) hyperbelisini hyperbelikosini

Liittohyperbeli ja asymptootit

Jos hyperbelinyhtälössä

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

koordinaattien x ja y roolit vaihdetaan, jolloin hyperbelin polttopisteet $(0, c)$ ja $(0, -c)$ sijoitetaan y-akselille, ja vakioksi otetaan $2b$, saadaan alkuperäisen hyperbelin *liittohyperbeli*

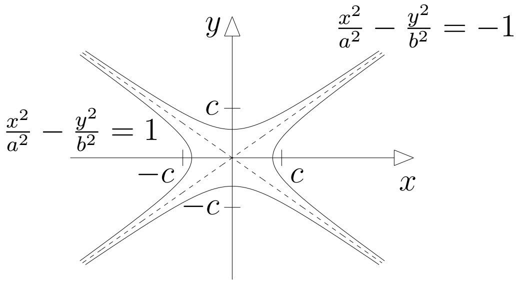
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Jos yhtälössä asetetaan oikeaksi puoleksi 0, saadaan toisen asteen yhtälö, joka esittää kahta suoraa:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{eli} \quad y = \pm\frac{b}{a}\,x.$$

Näitä kutsutaan hyperbelin ja liittohyperbelin yhteisiksi *asymptooteiksi*.

asymptootti (rationaalifunktion)



ESITIEDOT: käyrä, kartio ja lieriö

KATSO MYÖS: ympyrä, toisen asteen pinnat

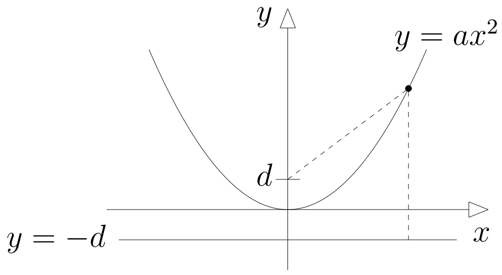
Paraabeli

Paraabeli on käyrä, jonka pisteillä on seuraava ominaisuus: Jokaisen pisteen etäisyys kiinteästä pisteestä (*polttopisteestä*) on yhtä suuri kuin sen etäisyys kiinteästä suorasta (*johtosuorasta*). käyrä (taso-)

Jos polttopiste on $(0, d)$ ja johtosuora x-akselin suuntainen suora $y = -d$, on paraabelin yhtälö xy-koordinaatistossa koordinaatisto (xy-) yhtälö

$$y = ax^2, \quad \text{missä } a = \frac{1}{4d}.$$

Polttopisteen kautta kulkeva johtosuoran normaali on paraabelin *akseli*, jonka suhteen käyrä on symmetrinen. Jos paraabeli sijoitetaan koordinaatistoon edellä kuvatulla tavalla, sen akseli on y-akseli. normaali



Heijastuessaan paraabelista akselin suuntaiset säteet kohtaavat polttopisteessä. Tämän johdosta paraabelimuotoa käytetään mm. lautasantenneissa.

Tietyssä mielessä paraabeli on ellipsin ja hyperbelin välitapaus. Tämä ei ole nähtävissä edellä käsitellyistä käyrien yhtälöistä, mutta esimerkiksi napakoordinaattiyhtälöistä (joissa (toinen) polttopiste asetetaan origoon) se ilmenee. Tämän johdosta on luontevaa sanoa, että paraabelin eksentrisyys on $= 1$. koordinaatisto (napa-)

ESITIEDOT: käyrä, kartio ja lieriö

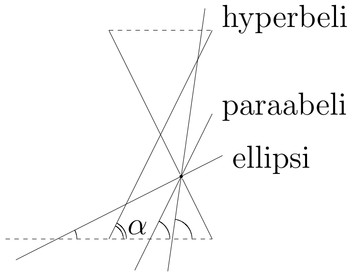
KATSO MYÖS: ympyrä, toisen asteen pinnat

Kartioleikkaukset

Ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä kutsutaan usein yhteisellä nimellä *kartioleikkaukset*. Tämä johtuu siitä, että suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyrä on aina jokin näistä. Mikä on kyseessä, riippuu leikkaavan tason ja kartion sivuviivan välisestä kulmasta seuraavan kuvion osoittamalla tavalla:

ympyräkartio (suora)

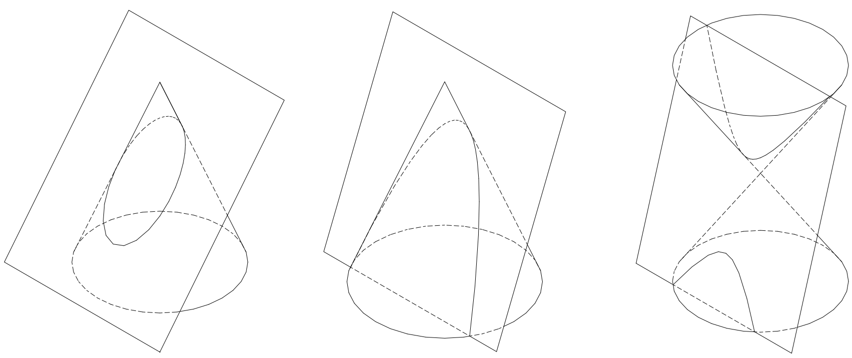
taso



Jos kartion sivuviivan kaltevuuskulma kartion pohjatasoon nähden on α ja leikkaavan tason kaltevuuskulma β, niin leikkauskäyrä on

$$\begin{array}{ll} \text{ellipsi,} & \text{jos } \beta < \alpha; \\ \text{paraabeli,} & \text{jos } \beta = \alpha; \\ \text{hyperbeli,} & \text{jos } \beta > \alpha. \end{array}$$

Jotta hyperbelin molemmat haarat tulisivat mukaan, on tarkasteltava kartiota kaksihaaraisena, so. kärkipisteensä suhteen symmetrisenä molempiin vastakkaisiin suuntiin avautuvana pintana.



Että leikkauskäyrät todella ovat ellipsejä, paraabeleja ja hyperbelejä, voidaan todistaa synteettisen avaruusgeometrian keinoin. Tällöin on apukonstruktiona sijoitettava kartion sisään kaksi *Dandelinin palloa*, paraabelitapauksessa yksi. Nämä ovat palloja, jotka sivuavat kartiopintaa pitkin ympyräviivaa ja koskettavat leikkaavaa tasoa yhdessä pisteessä, joka osoittautuu leikkauskäyrän polttopisteeksi.

geometria (synteettinen)

pallo

ESITIEDOT: käyrä, kartio ja lieriö
KATSO MYÖS: ympyrä, toisen asteen pinnat

Kartioleikkausten napakoordinaattiyhtälöt

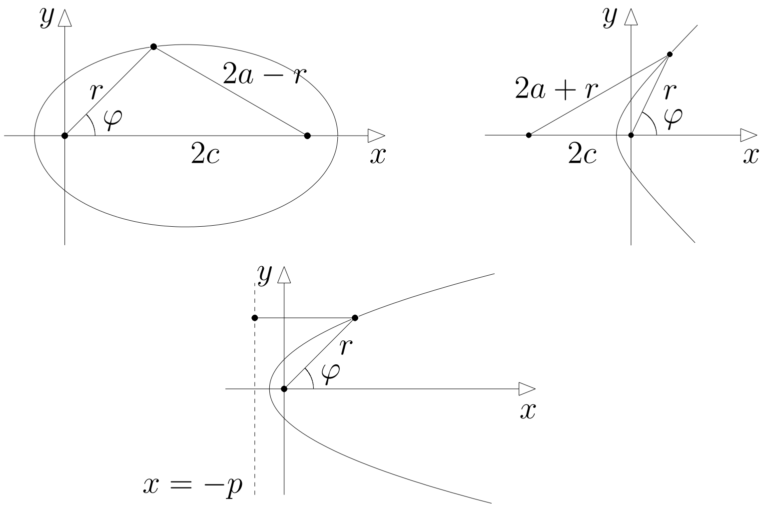
Jos (toinen) polttopiste sijoitetaan origoon, voidaan ellipsi, paraabeli ja hyperbeli esittää napakoordinaattiyhtälön avulla:

koordinaatisto (napa-)

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

missä p on vakio ja e eksentrisyys (vakio).

Jos $e < 1$, kyseessä on ellipsi. Jos $e > 1$, saadaan hyperbelin toinen haara. Arvo $e = 1$ antaa paraabelin.



Tässä muodossa on luontevaa käsitellä kartioleikkausten tärkeää sovellusta, planeettaliikettä. Gravitaatiolaista seuraa nimittäin, että jos tarkastellaan yhden planeetan liikettä Auringon ympärillä ottamatta huomioon muiden planeettojen aiheuttamia häiriöitä, rata on ellipsi, paraabeli tai hyperbeli, jonka polttopisteessä Aurinko on.

ESITIEDOT: pinta

KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö

Toisen asteen pinta

Toisen asteen pinnaksi kutsutaan pintaa, jonka yhtälö kolmiulotteisessa xyz-koordinaatistossa on toista astetta muuttujien x, y ja z suhteen. Yhtälön yleinen muoto on

pinta

yhtälö

koordinaatisto (xyz-)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0,$$

missä A, B, C, D, E, F, G, H, J ja K ovat vakioita.

Pinnat, joita yhtälö voi esittää, jaotellaan ellipsoidi-, hyperboloidi-, paraboloidi- ja lieriötyyppeihin. Lisäksi tulevat kysymykseen näiden erilaiset surkastumat, kuten piste, suora, taso, kaksi leikkaavaa tai kaksi yhdensuuntaista tasoa. On myös mahdollista, että yhtälö ei esitä geometrisesti mitään (ts. minkään pisteen koordinaatit (x, y, z) eivät toteuta yhtälöä).

suora (kolmiulotteinen)

taso (yhtälö)

Esitiedot: pinta
Katso myös: toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö

Ellipsoidi

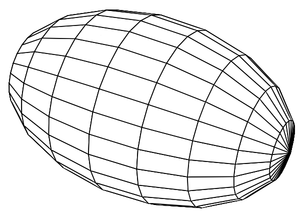
Ellipsoidin yhtälö on muotoa

ellipsoidi (tilavuus)
yhtälö
koordinaatisto (xyz-)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

missä a, b ja c ovat vakioita ($\neq 0$). Mikäli kaksi näistä on yhtä suuria, kyseessä on *pyörähdysellipsoidi*, joka syntyy ellipsin pyörähtäessä jommankumman akselinsa ympäri. Jos kaikki vakiot ovat yhtä suuria, kyseessä on pallo.

ellipsi
pallo



ESITIEDOT: pinta
KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö

Hyperboloidit

Muotoa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

oleva toisen asteen yhtälö, missä a, b ja c ovat mitä tahansa nollasta eroavia vakioita ja $d = 1$, -1 tai 0, esittää hyperboloidityypin pintaa.

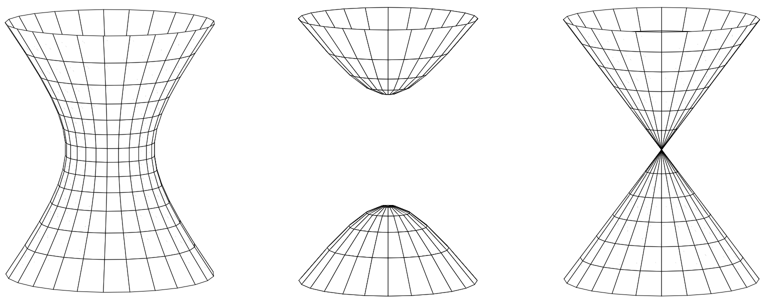
yhtälö
koordinaatisto (xyz-)
hyperbeli

Jos $d = 1$, kyseessä on *yksivaippainen hyperboloidi*; jos $d = -1$, pinta on *kaksivaippainen hyperboloidi*. Jos $d = 0$, kyseessä on näiden väliin jäävä *kartiopinta*, jota kutsutaan myös hyperboloidien *asymptoottikartioksi*.

kartiopinta

Jos kartiotapauksessa $a = b$, saadaan suora ympyräkartio, ts. pinnan poikkileikkaus akselia vastaan kohtisuoralla tasolla on ympyrä.

ympyräkartio (suora)



Esitiedot: pinta

Katso myös: toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö

Paraboloidit

Yhtälö

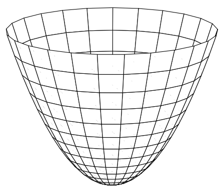
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z,$$

yhtälö

koordinaatisto (xyz-)

missä p ja q ovat vakioita ($\neq 0$), esittää *elliptistä paraboloidia*. Jos $p = q$, kyseessä on *pyörähdysparaboloidi*, joka syntyy, kun paraabeli pyörähtää akselinsa ympäri.

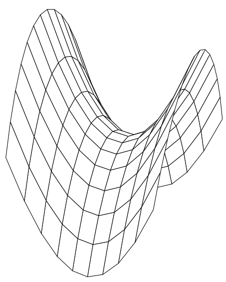
paraabeli



Yhtälö

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z,$$

missä jälleen p ja q ovat nollasta eroavia vakioita, esittää *hyperbolista paraboloidia* eli *satulapintaa*. Jos $p = q = 1$, saadaan pinta $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, joka on yhtenevä pinnan $z = xy$ kanssa.



ESITIEDOT: pinta

KATSO MYÖS: toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö

Lieriöt

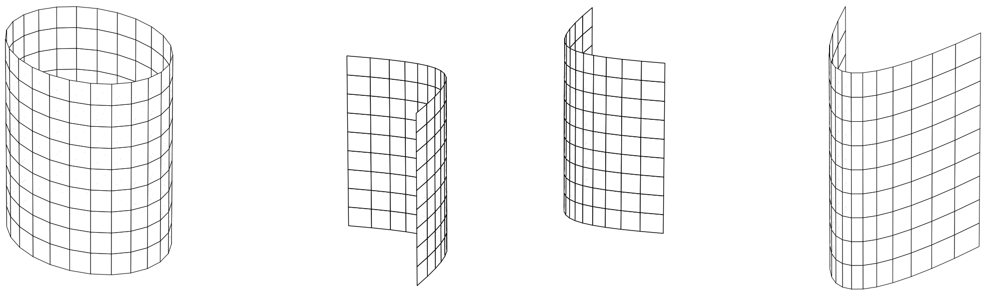
Toista astetta olevien lieriöpintojen perustyypit ovat *elliptinen lieriö*, *parabolinen lieriö* ja *hyperbolinen lieriö*, joiden yhtälöt ovat

lieriöpinta
yhtälö
koordinaatisto (xyz-)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = ax^2.$$

Jos elliptisessä lieriössä on $a = b$, saadaan suora ympyrälieriö, jonka poikkileikkaus akselia vastaan kohtisuoralla tasolla on ympyrä.

ympyrälieriö (suora)



Eo. yhtälöt ovat samoja kuin xy-tason ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöt. Koska ne eivät lainkaan sisällä muuttujaa z, niiden tulkitseminen kolmiulotteisen avaruuden pinnoiksi merkitsee, että jos piste $(x, y, 0)$ on kyseisellä xy-tason käyrällä, niin piste (x, y, z) on pinnalla z-arvosta riippumatta. Pinnat ovat siis lieriöpintoja, jotka syntyvät siten, että pystysuorassa asennossa liikkuva suora tukeutuu kyseiseen xy-tason käyrään.

ellipsi
hyperbeli
paraabeli

Esitiedot: suora, käyrä, pinta

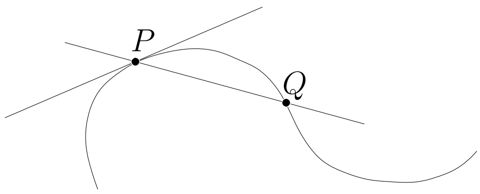
Katso myös: geometriset probleemat, geometriset kuvaukset

Sekantti ja tangentti

Suoraa, joka leikkaa tarkasteltavaa käyrää vähintään kahdessa pisteessä, kutsutaan käyrän *sekantiksi*.

suora
käyrä (taso-)
käyrä (avaruus-)

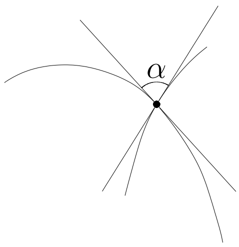
Olkoon leikkauspiste P kiinteä ja lähestyköön toinen leikkauspiste Q sitä käyrää pitkin. Jos käyrä on sileä pisteen P kohdalla, ts. kyseessä ei ole käyrällä oleva kärkipiste tai muulla tavoin epäsäännöllinen piste, kääntyy sekantti tällöin suoraksi, joka *sivuaa* käyrää pisteessä P. Siitä tulee tällöin käyrän *tangentti* eli *sivuaja*.



Muodossa $y = f(x)$ annetun tasokäyrän tangentin yhtälö voidaan määrittää derivaatan avulla. Sama koskee minkä tahansa käyrän tangenttisuunnan määrittämistä vektorina.

derivaatta
differentiaali
tangenttivektori
kulma (taso-)

Kahden käyrän sanotaan leikkaavan toisensa kulmassa α, jos käyrien leikkauspisteeseen asetettujen tangenttien välinen kulma on α.



Esitiedot: suora, käyrä, pinta

Katso myös: geometriset probleemat, geometriset kuvaukset

Tangenttitaso

Käyrän tangenttia (suoraa) vastaa pinnan *tangenttitaso*. Pinnan pisteeseen P asetettu tangenttitaso voidaan määritellä tasoksi, joka sisältää kaikki ne pisteen P kautta kulkevat suorat, jotka ovat tangentteja jollekin pinnalla sijaitsevalle pisteen P kautta kulkevalle käyrälle. Tangenttitason sanotaan *sivuavan* pintaa pisteessä P.

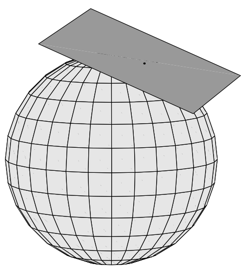
käyrä (taso-)
käyrä (avaruus-)
suora
pinta
taso

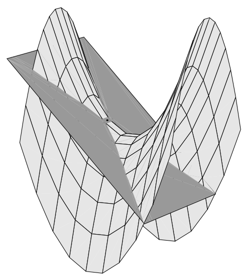
Jotta pinnalla olisi tangenttitaso tietyssä pisteessä, tulee sen olla sileä tämän pisteen kohdalla. Esimerkiksi kartiolla ei ole tangenttitasoa kärkipisteessä.

kartio

Pinnalla ja tangenttitasolla voi sivuamispisteen ympäristössä olla muitakin yhteisiä pisteitä. Esimerkiksi satulapinta leikkaa tangenttitasoaan pitkin kahta sivuamispisteen kautta kulkevaa suoraa.

satulapinta





Muodossa $z = f(x, y)$ annetun pinnan tangenttitaso voidaan määrittää differentiaalilaskennan keinoin; tällöin kuitenkin tarvitaan kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ osittaisderivaatan käsitettä.

funktio (kahden muuttujan)

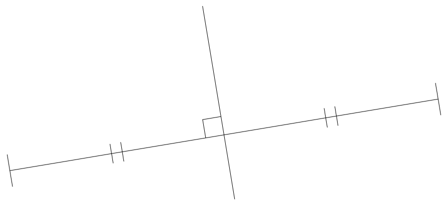
ESITIEDOT: suora, käyrä, pinta

KATSO MYÖS: geometriset probleemat, geometriset kuvaukset

Normaali

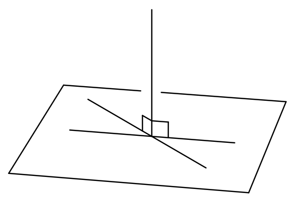
Suora, joka on kohtisuorassa toista suoraa vastaan, on tämän *normaali*. Janan *keskinormaali* on janaa vastaan kohtisuora sen keskipisteen kautta kulkeva suora.

suora
jana
keskinormaali (kolmion)



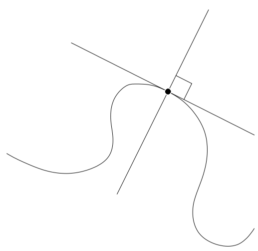
Avaruusgeometriassa suoraa vastaan kohtisuora taso on sen *normaalitaso*. Tasoa vastaan kohtisuora suora on sen *normaali*.

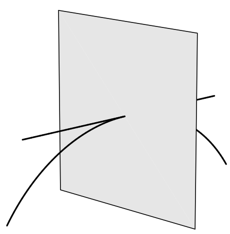
taso



Tasokäyrän pisteeseen P asetettu *normaali* on suora, joka on kohtisuorassa tähän pisteeseen asetettua tangenttia vastaan. Avaruuskäyrän tapauksessa puhutaan vastaavasti *käyrän normaalitasosta*.

käyrä (taso-)
käyrä (avaruus-)





Pinnan normaali on sen tangenttitasoa vastaan kohtisuora suora.

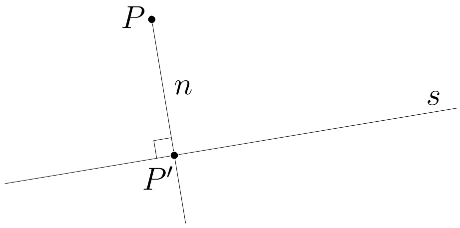
pinta

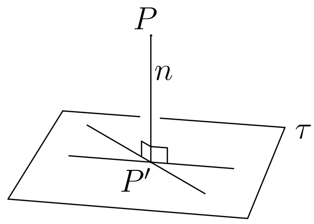
ESITIEDOT: suora, käyrä, pinta
KATSO MYÖS: geometriset probleemat, geometriset kuvaukset

Projektio

Pisteen P *projektio* tai täsmällisemmin *kohtisuora projektio* suoralle s määrätään asettamalla pisteen kautta suoran normaali n. Tämän normaalin *kantapiste*, so. piste, jossa normaali leikkaa suoran, on projektiopiste P'.

suora



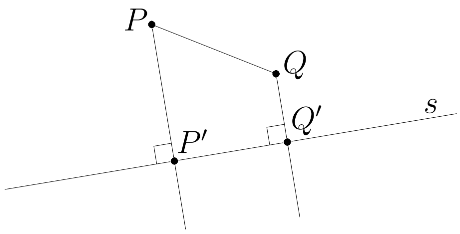


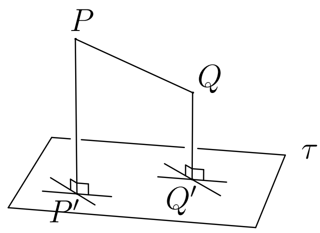
Vastaavalla tavalla määritellään avaruuspisteen P kohtisuora projektio tasolle τ: Asetetaan pisteen kautta kulkeva tason normaali n; piste, jossa tämä kohtaa tason, on projektiopiste P'.

taso

Monimutkaisemmat geometriset kuviot projisioidaan suoralle tai tasolle projisioimalla periaatteessa kuvion jokainen piste erikseen. Tällöin esimerkiksi janan projektio saadaan projisioimalla sen päätepisteet: näiden yhdysjana on janan projektio.

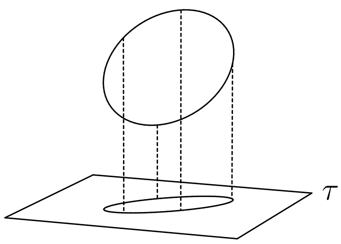
jana





Avaruudessa sijaitsevan ympyrän projektio tasolle on ellipsi. Jos ympyrän taso on projektiotason suuntainen, tulee ellipsistä ympyrä. Jos ympyrän taso on kohtisuorassa projektiotasoa vastaan, kutistuu ellipsi anaksi.

ympyrä
ellipsi (xy-koordinaateissa)
ellipsi (kartioleikkauksena)



Projektion käsite on itse asiassa yleisempi; ks. geometriset kuvaukset.

geometrinen kuvaus

Geometriset kuvaukset

ESITIEDOT: funktiokäsite, piste, koordinaatistot
KATSO MYÖS: tangentti ja normaali, kompleksiluvut

Geometrinen kuvaus

Geometriseksi kuvaukseksi kutsutaan funktiota, jonka lähtöjoukkona ja samoin maalijoukkona on tasogeometriassa koko taso ja avaruusgeometriassa koko kolmiulotteinen avaruus.

funktio
kuvaus
lähtöjoukko
maalijoukko

Kuvaus liittää jokaiseen lähtöjoukon pisteeseen P jonkin maalijoukon pisteen P'. Merkitään $P' = F(P)$, missä F on kuvauksen nimi.

Kuvaus F voidaan ilmoittaa kertomalla, miten kuvapisteen P' suorakulmaiset koordinaatit (x', y') lasketaan, kun argumenttipisteen P koordinaatit (x, y) tiedetään; avaruudessa vastaavasti (x', y', z') ja (x, y, z):

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = f_1(x, y, z), \\ y' = f_2(x, y, z), \\ z' = f_3(x, y, z). \end{cases}$$

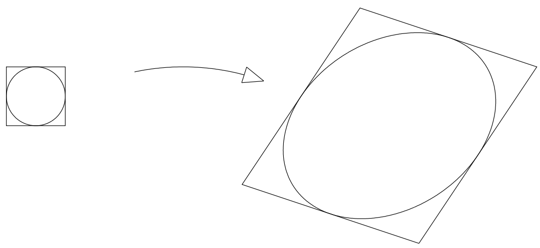
Geometrisen kuvion kuvautuminen määritetään periaatteessa pisteittäin: lasketaan kuvion jokaisen pisteen kuva erikseen.

Tasotapauksessa kuvaus voidaan esimerkiksi määritellä yhtälöillä

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$

Tässä jokainen suora kuvautuu suoraksi ja esimerkiksi ympyrän kuva on ellipsi:

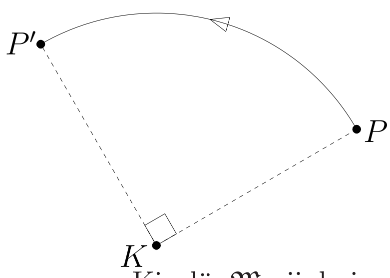
suora
ympyrä
ellipsi



Kuvaukset voivat olla monimutkaisempiakin eikä suoran välttämättä tarvitse kuvautua suoraksi, vaan tuloksena voi aivan hyvin olla jokin käyrä.

Kuvaus voidaan toisaalta määritellä myös synteettisen geometrian käsittein. Esimerkiksi pisteen P kuvaksi asetetaan piste, joka saadaan kiertämällä tätä 90° positiiviseen suuntaan pitkin ympyräviivaa, jonka keskipisteenä on kiinteä piste K.

geometria
(synteettinen)



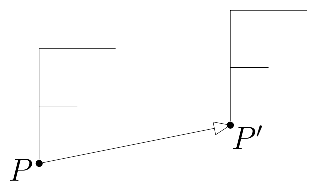
Euklidiset kuvaukset: siirto ja kierto

Geometrisia kuvauksia, jotka säilyttävät kuvattavan geometrisen kuvion muodon, kutsutaan *euklidisiksi kuvauksiksi*. Näitä ovat *siirto*, *kierto*, *peilaus* ja *skaalaus* sekä näistä yhdistämällä saadut kuvaukset.

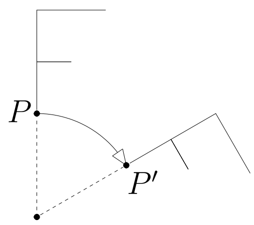
funktio
kuvaus
yhdistetty funktio
geometria (vektori-)

Esimerkiksi vektorigeometriaa käyttäen voidaan kuvauksille johtaa lausekkeet, missä kuvapisteen P' koordinaatit (x', y') tai (x', y', z') lausutaan pisteen P koordinaattien (x, y) tai (x, y, z) avulla.

- Kuvaus on *siirto*, jos pisteen P kuvapiste P' saadaan siirtämällä pistettä P annetun matkan annettuun suuntaan.



- Kuvaus on *kierto*, jos tasotapauksessa kuvapiste P' saadaan kiertämällä pistettä P annetun kulman verran annetun pisteen, *kiertokeskuksen* ympäri. Jos kyseessä on kierto kolmiulotteisessa avaruudessa, kiertokeskus on korvattava suoralla, *kiertoakselilla*.

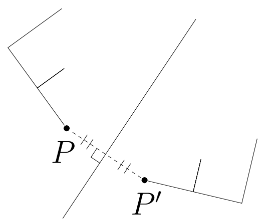


Jatkuu

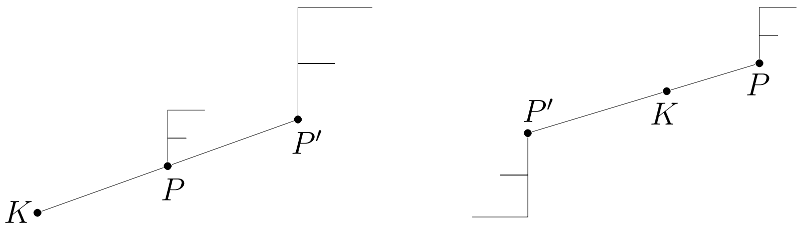
Esitiedot: funktiokäsite, piste, koordinaatistot
Katso myös: tangentti ja normaali, kompleksiluvut

Euklidiset kuvaukset: peilaus ja skaalaus

- Kuvaus on *peilaus*, jos kuvapiste P' asetetaan pisteen P kanssa symmetriseen asemaan annetun suoran suhteen. Avaruustapauksessa suora on korvattava tasolla.



- Kuvaus on *skaalaus* keskuksena annettu piste K, jos kuvapiste P' asetetaan samalle pisteestä K alkavalle säteelle kuin piste P ja etäisyyksille pätee $|KP'| = \alpha|KP|$, missä α on *skaalaussuhde*. Jos $\alpha < 0$, asetetaan P' vastakkaiselle puolelle keskusta K kuin P.



ESITIEDOT: funktiokäsite, piste, koordinaatistot
KATSO MYÖS: tangentti ja normaali, kompleksiluvut

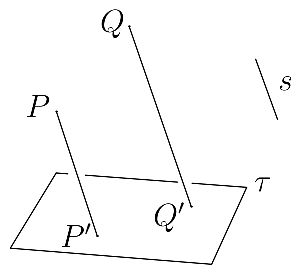
Projektiokuvaukset

Projektiokuvauksissa lähtöjoukkona on kolmiulotteinen avaruus ja maalijoukkona jokin tämän taso. Kun kolmiulotteisen avaruuden kuvion tai kappaleen jokainen piste kuvataan tällaisella kuvauksella, saadaan kuvion tai kappaleen *kuva* kaksiulotteiseen tasoon. Tasoa sanotaan tämän johdosta *kuvatasoksi.*

funktio
kuvaus
lähtöjoukko
maalijoukko

Projektiokuvauksia on kahta tyyppiä: *yhdensuuntaisprojektioita* ja *keskusprojektioita.*

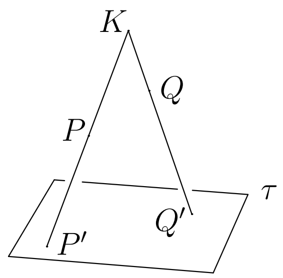
Yhdensuuntaisprojektiossa täytyy kuvatason lisäksi olla annettuna *projektiosäteiden suunta.* Tämä ei saa olla kuvatason suuntainen. Pisteen P kuvapiste P' löydetään asettamalla pisteen P kautta *projektiosäde*, so. suora, jolla on em. suunta, ja määrittämällä piste, jossa projektiosäde leikkaa kuvatason.



Jos projektiosäteet ovat kohtisuorassa kuvatasoa vastaan, puhutaan *ortogonaaliprojektiosta*; jos näin ei ole, projektio on *vino.*

projektio

Keskusprojektiossa tarvitaan kuvatason lisäksi kiinteä piste, *projektiokeskus* K, joka ei saa olla kuvatasossa. Pisteen P kuvapiste P' on projektiosäteen KP ja kuvatason leikkauspiste. Aivan kaikille avaruuden pisteille P ei tällä tavoin kuvapistettä löydetä: Jos säde KP on kuvatason suuntainen, ei leikkauspistettä luonnollisestikaan ole.



Geometriset kuvaukset 5/7

Esitiedot: funktiokäsite, piste, koordinaatistot
Katso myös: tangentti ja normaali, kompleksiluvut

Aksonometria; perspektiivikuvat

Yhdensuuntaisprojektiolla muodostettuja kuvia sanotaan *aksonometrisiksi kuviksi*. Tunnetuin esimerkki on *kavaljeeriprojektio*, jossa kuvatasona on yz-taso ja projektiosäteiden suunta on hieman vinossa x-akseliin nähden; kyseessä ei siis ole ortogonaaliprojektio. Toinen merkittävä aksonometria on *dimetrinen ortogonaaliprojektio*, jota käytetään varsinkin teknisen suunnittelun havainnekuvissa.

koordinaatisto (xyz-)

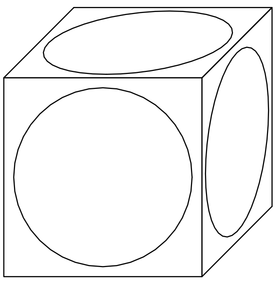
Keskusprojektiolla muodostetut kuvat ovat *perspektiivikuvia*.

Ihmissilmä ja kamera muodostavat kuvia likimain keskusprojektion periaatteella. Tämän johdosta perspektiivikuvat näyttävät varsin luonnollisilta. Aksonometriset kuvat näyttävät usein tietyllä tavoin venähtäneiltä, sitä enemmän, mitä vinommasta aksonometriasta on kyse. Niiden etuna on kuitenkin — ainakin ollut käsinpiirtämisen kautena — helpompi konstruoitavuus.

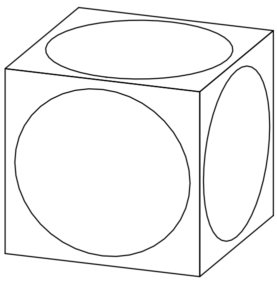
Yhdensuuntais- ja keskusprojektion määritelmien perusteella voidaan johtaa synteettisen geometrian säännöt, joilla projektiokuvat on piirrettävä. Tällöin puhutaan *deskriptiivisestä geometriasta*. Toisaalta esimerkiksi vektorialgebraa käyttäen voidaan projektioille johtaa myös laskukaavat, joita käyttäen kuvien tekeminen tietokoneella tulee mahdolliseksi.

geometria (synteettinen)

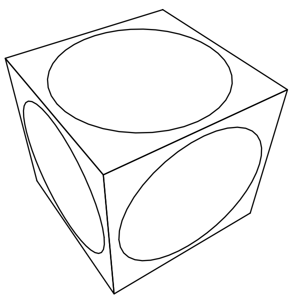
geometria (vektori-)



kavaljeeriprojektio



dimetrinen ortogonaaliprojektio



keskusprojektio

Mandelbrotin joukko

Sellaiset tason kuvaukset itseensä, joiden lausekkeet ovat ns. *epälineaarista* tyyppiä, saattavat johtaa varsin mutkikkaisiin kuvioihin. Näitä kutsutaan usein *fraktaaleiksi*. Tunnettu esimerkki on *Mandelbrotin joukko*. kuvaus joukko

Kuvaus F, joka synnyttää Mandelbrotin joukon, esitetään yleensä kompleksilukujen avulla: $w = F(z) = z^2 + c$, missä c, z ja w ovat kompleksilukuja. Ajattelemalla kompleksiluvut z ja w tason pisteiksi se voidaan kuitenkin tulkita kuvaukseksi tasosta tasoon. kompleksiluku kompleksitaso

Itse asiassa jos $z = x + iy$, $w = x' + iy'$ ja $c = a + ib$, niin yhtälö $w = F(z)$ voidaan hajottaa reaali- ja imaginaariosaan:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + a, \\ y' = 2xy + b. \end{cases}$$

Tässä on siis kyse kuvauksesta, jossa pisteen (x, y) kuvapiste (x', y') lasketaan eo. kaavoilla.

Mandelbrotin joukko määritellään seuraavasti:

Muodostetaan jono tason pisteitä siten, että seuraava piste z_{n+1} eli (x_{n+1}, y_{n+1}) lasketaan aina edellisen pisteen z_n eli (x_n, y_n) avulla:

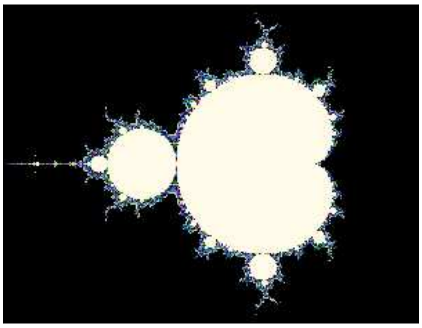
$$z_{n+1} = F(z_n) = z_n^2 + c \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \end{cases}$$

Aloituspisteenä on origo $z_0 = 0$ eli $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ja ensin lasketaan piste z_1, ts. (x_1, y_1) soveltamalla edellä olevia kaavoja arvolla $n = 0$. Seuraava piste z_2 eli (x_2, y_2) saadaan tämän jälkeen asettamalla $n = 1$, jolloin kaavojen oikealle puolelle sijoitetaan z_1 eli (x_1, y_1). Näin jatketaan.

Pistejonon käyttäytyminen riippuu kompleksiluvusta (pisteestä) c eli (a, b). Jos jono karkaa äärettömyyteen, tämä piste ei kuulu Mandelbrotin joukkoon. Jos pistejono sen sijaan pysyy rajoitetulla alueella (itse asiassa origokeskisessä ympyrässä, jonka säde on $= 2$), piste (a, b) kuuluu Mandelbrotin joukkoon.

Tuloksena on varsinkin reunoiltaan häkellyttävän monimutkainen kuvio. Mistään säännöllisestä reunakäyrästä ei voida puhua. Kuviota suurennettaessa havaitaan, että samat (tai samankaltaiset) yksityiskohdat kertautuvat yhä pienemmässä mittakaavassa. Kuvio seuraavassa. käyrä (taso-)

Mandelbrotin joukon kuva



Kuvissa Mandelbrotin joukko esitetään yleensä yhdellä värillä, usein mustalla tai valkealla. Joukon ulkopuoliset alueet esitetään useilla eri väreillä. Tietyn pisteen (a, b) väri kuvaa sitä, miten nopeasti edellä kuvattu pistejono karkaa äärettömyyteen, kun koordinaatteja a, b käytetään laskennassa. Väriskaala sinänsä on mielivaltainen ja valitaan pikemminkin esteettisten mieltymysten mukaan.

Yllä joukko on valkea, sen ulkopuoli musta.

Esitiedot: monikulmiot, ympyrä, toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö, toisen asteen pinnat

Katso myös: pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Laskemisesta ja määrittelystä

Tasokuvioiden pinta-alojen sekä avaruuskappaleiden tilavuuksien ja pinta-alojen laskeminen perustuu suoraviivaisten kuvioiden tai kappaleiden tapauksessa yleensä alkeisgeometrisiin päättelyihin. Käyrien viivojen ja pintojen rajoittamat alat ja tilavuudet lasketaan yleensä integroimalla.

pinta-ala (integroimalla)
tilavuus (integroimalla)

Käyrän kaarenpituuden, tasokuvion alan, avaruuspinnan alan ja kappaleen tilavuuden käsitteet eivät ole aivan yksinkertaisesti määriteltävissä. Määritelmät perustuvat seuraaviin ideoihin:

käyrä (taso-)
käyrä (avaruus-)
pinta

- Käyrän kaarenpituuden määrittelyssä lähtökohtana on, että janan pituus osataan määrittää. Kaarenpituutta approksimoidaan sijoittamalla käyrälle peräkkäisiä jakopisteitä ja yhdistämällä nämä murtoviivaksi. Tämän pituus voidaan laskea summeeraamalla osajanojen pituudet. Jos murtoviivan pituudella on raja-arvo jakopisteistöä tihennettäessä, se määritellään kaarenpituudeksi.

jana
etäisyys (pisteiden)
raja-arvo (lukujonon)

- Tasokuvion pinta-alan määrittelyn lähtökohtana on, että suorakulmion ala on erisuuntaisten sivujen pituuksien tulo. Kuvion sisään asetetaan suorakulmioita, jotka eivät peitä toisiaan, ja lasketaan näiden yhteinen pinta-ala. Pienin mahdollinen yläraja tällaisten suorakulmiojoukkojen yhteispinta-alalle on tasokuvion pinta-alan sisäapproksimaatio. Samalla tavoin kuvio voidaan peittää suorakulmioilla, jotka eivät peitä toisiaan, ja laskea näiden yhteinen pinta-ala. Suurin alaraja kuviota peittävien suorakulmiojoukkojen pinta-aloille on tasokuvion pinta-alan ulkoapproksimaatio. Jos sisä- ja ulkoapproksimaatio ovat yhtä suuret, yhteistä arvoa kutsutaan kuvion alaksi.

suorakulmio
pienin yläraja
suurin alaraja

- Avaruuskappaleen tilavuus määritellään samaan tapaan kuin tasokuvion pinta-ala, mutta suorakulmioiden sijasta käytetään suorakulmaisia särmiöitä. Tällaisen särmiön tilavuus on samasta kärjestä lähtevien sivujen pituuksien tulo.

särmiö (suorakulmainen)

- Avaruudessa olevan pinnan ala voidaan määritellä asettamalla pinnalle jakopisteitä ja yhdistämällä nämä kolmioverkoksi. Jokainen kolmio on tasokuvio ja sen pinta-ala voidaan laskea. Kolmioverkon yhteispinta-ala on approksimaatio avaruuspinnan alalle. Jos jakopisteistöä tihennettäessä yhteispinta-alalla on raja-arvo, tätä kutsutaan avaruuspinnan alaksi.

kolmio

Edellä mainittujen raja-arvojen olemassaolo tai sisä- ja ulkoapproksimaatioiden yhtäsuuruus ei ole itsestään selvää. Esimerkeiksi kelpaavat monet fraktaalikuviot.

ESITIEDOT: monikulmiot, ympyrä, toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö, toisen asteen pinnat

KATSO MYÖS: pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Tasokuviot

Kolmio — kolmio

ala $= ah/2$; a kanta, h kantaa vastaan kohtisuora korkeus

Suorakulmio — suorakulmio

ala $= ab$; a, b samasta kärjestä alkavien sivujen pituudet

Suunnikas — suunnikas, vektoritulo

ala $= ah$; a kanta, h kantaa vastaan kohtisuora korkeus

ala $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ samasta kärjestä alkavat sivuvektorit

Puolisuunnikas — puolisuunnikas

ala $= \dfrac{a+b}{2} h$; a, b kannat, h näitä vastaan kohtisuora korkeus

Ympyrä — ympyrä

kehänpituus $= 2\pi r$; r ympyrän säde

ala $= \pi r^2$; r ympyrän säde

Ympyrän sektori — sektori, keskuskulma, radiaani

kaarenpituus $= \alpha r$; α keskuskulma radiaaneissa, r säde

ala $= \alpha r^2/2$; α keskuskulma radiaaneissa, r säde

ala $= rs/2$; r säde, s kaarenpituus

Ympyrän segmentti — segmentti

vastaava sektori

$-$ vastaava keskuskolmio, jos $0 \leq \alpha \leq \pi$,

$+$ vastaava keskuskolmio, jos $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$;

α keskuskulma radiaaneissa

Ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ — ellipsi (xy-koordinaateissa), puoliakseli (ellipsin)

ala $= \pi ab$; a, b ellipsin puoliakselit

ESITIEDOT: monikulmiot, ympyrä, toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö, toisen asteen pinnat

KATSO MYÖS: pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Kappaleet I

Suorakulmainen särmiö
  tilavuus $= abc$; a, b, c samasta kärjestä alkavien särmien pituudet

särmiö (suorakulmainen)
särmä

Suuntaissärmiö
  tilavuus $= Ah$; A pohjan ala, h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus
  tilavuus $= |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}|$;
  $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ samasta kärjestä alkavat särmävektorit

särmiö (suuntais-)
skalaarikolmitulo

Lieriö, prisma
  tilavuus $= Ah$; A pohjan ala, h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

lieriö
prisma

Suora ympyrälieriö
  tilavuus $= \pi r^2 h$; r pohjaympyrän säde, h korkeus
  vaipan ala $= 2\pi r h$; r pohjaympyrän säde, h korkeus

ympyrälieriö (suora)

Kartio, pyramidi
  tilavuus $= Ah/3$; A pohjan ala,
  h pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

kartio
pyramidi

Suora ympyräkartio
  tilavuus $= \pi r^2 h/3$; r pohjaympyrän säde, h korkeus
  vaipan ala $= \pi r s$; r pohjaympyrän säde, s sivujana

ympyräkartio (suora)

Katkaistu kartio, katkaistu pyramidi
  tilavuus $= h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)/3$;
  A_1, A_2 pohjien alat,
  h pohjia vastaan kohtisuora korkeus

kartio (katkaistu)
pyramidi (katkaistu)

Katkaistu suora ympyräkartio
  tilavuus $= \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$;
  r_1, r_2 pohjaympyröiden säteet, h korkeus
  vaipan ala $= \pi(r_1 + r_2)s$;
  r_1, r_2 pohjaympyröiden säteet, s sivujana

Esitiedot: monikulmiot, ympyrä, toisen asteen käyrät, pallo, kartio ja lieriö, toisen asteen pinnat
Katso myös: pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Kappaleet II

Pallo — pallo
tilavuus $= 4\pi r^3/3$; r pallon säde
ala $= 4\pi r^2$; r pallon säde

Kalotti, vyöhyke — kalotti, vyöhyke
ala $= 2\pi rh$; r pallon säde, h kalotin tai vyöhykkeen pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Pallosektori — pallosektori
tilavuus $= 2\pi r^2 h/3$; r pallon säde, h sektoria vastaavan kalotin tai vyöhykkeen pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Pallosegmentti — pallosegmentti
tilavuus $= \pi h^2(r - h/3)$; r pallon säde, h segmentin pohjaa vastaan kohtisuora korkeus

Ellipsoidi $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ — ellipsoidi
tilavuus $= 4\pi abc/3$; puoliakselit a, b ja c

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: logiikka, reaaliluvut

Joukon käsite

Matemaattisen päättelyn (todistamisen) pohjana pidetään usein formaalin logiikan ohella *joukko-oppia*. Vaikka näkemystä voidaankin kritisoida eikä joukko-oppi ole lähtökohtana ongelmaton eikä aina tarpeellinenkaan, on peruskäsitteiden tuntemus kuitenkin välttämätöntä. logiikka

Joukko on jonkinlainen kokoelma tarkasteltavana olevan *perusjoukon* objekteja eli *alkioita*.

Tyypillisiä perusjoukkoja ovat reaalilukujoukko $\mathbb{R}$, kompleksilukujoukko $\mathbb{C}$ tai vaikkapa reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. reaaliluku kompleksiluku

Perusjoukossa $\mathbb{R}$ voidaan muodostaa esimerkiksi joukko, joka koostuu positiivisista reaaliluvuista. Jos tälle käytetään nimeä $\mathbb{R}_+$, merkitään $2 \in \mathbb{R}_+$ ja $-2 \notin \mathbb{R}_+$ osoittamaan, että luku 2 *kuuluu* joukkoon ja luku -2 *ei kuulu*; vaihtoehtoisesti voidaan sanoa, että 2 *on alkiona* ko. joukossa, tms. funktio funktio (reaali-)

Joukkoja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla ja niiden määrittelyssä käytetään aaltosulkumerkintää seuraavaan tapaan:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}.$$

Pystyviivan vasemmalla puolella osoitetaan, että perusjoukkona on reaaliluvut $\mathbb{R}$. Oikealla puolella on joukon alkioilta vaadittava ehto. Esimerkin joukkoon A siis kuuluvat reaaliluvut, jotka ovat $> \sqrt{2}$ tai $< -\sqrt{2}$. Jos asiayhteydestä on selvää, mistä perusjoukosta on kyse, merkitään lyhyemmin: $\{x \mid x^2 > 2\}$.

Jos joukossa on äärellisen monta alkiota, se voidaan antaa luettelemalla alkiot. Esimerkiksi $A = \{1, 3, 5, 7\}$ on neljän alkion (luvun) muodostama joukko.

Joukko voi luonnollisesti käsittää kaikki perusjoukon alkiot. Toisaalta puhutaan myös *tyhjästä joukosta*, jossa ei ole ainuttakaan alkiota. Tätä merkitään symbolilla $\emptyset$. Esimerkiksi $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \emptyset$.

Muita esimerkkejä joukkomerkinnän käytöstä ovat kompleksitason origokeskinen R-säteinen ympyrä $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ ja sellaisten jatkuvien reaalifunktioiden joukko, joiden kuvaaja kulkee origon kautta: kompleksitaso itseisarvo (kompleksiluvun) jatkuvuus

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva},\ f(0) = 0\}.$$

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: logiikka, reaaliluvut

Osajoukko

Joukon A sanotaan olevan joukon B *osajoukko*, merkitään $A \subset B$, jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio, ts. logiikan merkinnöin $x \in A \implies x \in B$. logiikka

Merkintää $A \subset B$ käytettäessä on myös mahdollista, että joukot A ja B ovat samat eli $A = B$. Jos erityisesti halutaan osoittaa, että A on *aito osajoukko*, ts. on olemassa ainakin yksi alkio x siten, että $x \in B$ ja $x \notin A$, merkitään usein $A \subsetneqq B$. Näiltä osin merkinnät eivät kuitenkaan ole täysin vakiintuneita.

Tyhjän joukon katsotaan olevan minkä tahansa joukon osajoukko: $\emptyset \subset A$.

Esimerkiksi: Jos joukko F muodostuu kaikista funktioista $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joukko C_0 jatkuvista ja C_1 derivoituvista funktioista $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin $C_1 \subset C_0 \subset F$, koska jokainen derivoituva funktio on myös jatkuva. Kummassakin tapauksessa osajoukko on aito. jatkuvuus derivoituvuus

Joukko-oppi 3/4

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: logiikka, reaaliluvut

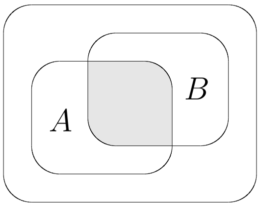
Joukkoalgebraa

Seuraavat eri joukkojen väliset suhteet tai operaatiot edellyttävät, että puhe on saman perusjoukon joukoista.

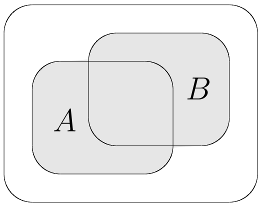
Joukkojen A ja B *leikkaus* muodostuu niiden yhteisestä osasta:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

Tämä voi luonnollisesti olla tyhjä joukko.



$A \cap B$



$A \cup B$

Joukkojen A ja B *unioniin* kuuluvat molempien joukkojen alkiot:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

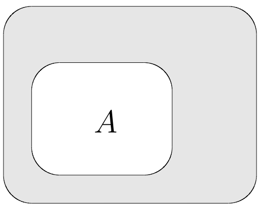
Erityisesti on siis $A \cap B \subset A \cup B$.

Joukon A *komplementti* (perusjoukon suhteen) muodostuu joukkoon A kuulumattomista alkioista:

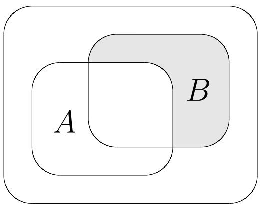
$$\complement A = \{x \mid x \notin A\}.$$

Joukon A komplementti joukon B suhteen on

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ja } x \notin A\}.$$



$\complement A$



$B \setminus A$

Kuvatut operaatiot voidaan ymmärtää joukkojen välisiksi laskutoimituksiksi. Näillä on omat laskusääntönsä, esimerkiksi:

$$\begin{aligned}
&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\\
&\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B),\\
&(A \cap \complement B) \cap (\complement C) = A \cap \complement(B \cup C).
\end{aligned}$$

Tällöin puhutaan *joukkoalgebrasta.*

Laskusääntöjen voimassaolo voidaan usein päätellä piirtämällä mahdollisimman yleistä tapausta koskeva kuvio.

Reaalilukujoukon välit

Reaalilukujoukon (lukusuoran) $\mathbb{R}$ *avoimeen väliin* kuuluvat tietyllä välillä olevat luvut ilman välin päätepisteitä; *suljettuun väliin* kuuluvat myös päätepisteet: reaaliluku lukusuora

$$\begin{aligned} \text{avoin väli:} \qquad &]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ \text{suljettu väli:} \qquad & [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Avoimen välin merkintänä käytetään joskus myös kaarisulkuja: $(a,b) =]a,b[$.

Väli voi olla myös *puoliavoin*: $[0,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

Välin päätepisteenä käytetään toisinaan myös symbolia ∞. Esimerkiksi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2,\infty[.$$

Välimerkintä viittaa osajoukkoon, jolloin joukko-opin operaatioita voidaan kohdistaa väleihin. Esimerkiksi

$$]-2,0[\cup [0,1] =]-2,1], \qquad [1,5] \cap [3,10] = [3,5].$$

Joukko-opillisten merkintöjen turhaa käyttöä on kuitenkin syytä välttää. On luontevampaa kirjoittaa 'tapauksessa $|x| \leq 2,\ x \neq 0$' kuin '$x \in [-2,0[\cup]0,2]$' tai '$x \in \{x \mid |x| \leq 2,\ x \neq 0\}$'.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS:

Formaali logiikka

Luonnollinen logiikka muodostaa perustan arkielämän päättelyille. Sen käyttö on intuitiivista ja usein tiedostamatonta. Mikäli logiikka halutaan täsmällistää — esimerkiksi tietokoneelle ohjelmointia varten — tarvitaan formaalit päättelysäännöt. Näiden muodostamaa kokonaisuutta kutsutaan *formaaliksi logiikaksi.* Käsitteenmuodostusta ohjaa tällöin luonnollinen logiikka; kyseessä on luonnollisen logiikan formalisointi.

Formaalissa logiikassa tarkastellaan lausumia, *propositioita*, joista oletetaan, että ne ovat aina joko *tosia* tai *epätosia.* Tätä kutsutaan logiikan *kaksiarvoisuudeksi.*

Esimerkkejä propositioista ovat 'ulkona sataa (tässä paikassa, tällä hetkellä)'; '$2 > 5$'; 'menen kauppaan'. Propositiot voivat myös olla laajempia: 'jos ulkona sataa ja minun täytyy mennä kauppaan, otan auton'. Propositioita sen sijaan eivät ole '$x > 3$'; 'oletko lähdössä?'; 'osta se!'.

Propositiologiikka

Propositioista p ja q voidaan johtaa uusia propositioita käyttämällä seuraavia *loogisia operaattoreita* eli *konnektiiveja*:

konjunktio:	$p \wedge q$	'p ja q',
disjunktio:	$p \vee q$	'p tai q',
negaatio:	$\neg p$	'ei p',
implikaatio:	$p \implies q$	'p:stä seuraa q', 'jos p niin q',
ekvivalenssi:	$p \iff q$	'p ja q ovat yhtäpitäviä', 'p jos ja vain jos q'.

Näiden merkitys on pääosin luonnollisen logiikan mukainen. Täsmällinen merkitys ilmenee seuraavasta *totuusarvotaulusta*, missä loogisen operaattorin avulla saadun proposition totuusarvo on määritelty kaikkia propositioiden p ja q totuusarvoja vastaten (1 = tosi, 0 = epätosi).

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Erityisesti on syytä huomata disjunktion merkitys: $p \vee q$ tarkoittaa siis 'p tai q tai molemmat'. Kyseessä on siten ns. 'ei-poissulkeva tai'. Luonnollisen logiikan kannalta ei myöskään liene itsestään selvää, että $p \implies q$ on tosi propositiosta q riippumatta, jos p on epätosi. Kyseessä onkin tarkoituksenmukaisuussyistä tehty määrittely; tavoitteena on toimiva kalkyyli.

Eo. määrittelyissä p ja q ovat *atomipropositioita*; konnektiivien avulla muodostetut ovat *johdettuja propositioita.* Mistä tahansa propositioista voidaan muodostaa uusia propositioita yhdistelemällä niitä konnektiivien avulla.

Jos johdettu propositio on tosi riippumatta sen atomipropositioiden totuusarvoista, sitä sanotaan *tautologiaksi.* Esimerkki seuraavassa.

Esimerkki: epäsuora todistus

Olkoon tarkasteltavana johdettu propositio r:

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

Tämän totuusarvo voidaan selvittää muodostamalla totuusarvotaulu, missä p ja q saavat kaikki mahdolliset totuusarvot:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$	r
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Osoittautuu siis, että propositio r on aina tosi, ts. se on tautologia. Tämä merkitsee, että propositiot $p \implies q$ ja $\neg q \implies \neg p$ ovat joko molemmat tosia tai molemmat epätosia.

Kyseessä on itse asiassa matematiikassa paljon käytetyn *epäsuoran todistamisen* periaate. Luonnollista logiikkaa käyttäen tämän voi esittää seuraavasti:

Jos on osoitettava, että lausumasta p seuraa lausuma q, mutta tämän päättely osoittautuu vaikeaksi, voidaankin tarkastella, mitä tapahtuu, jos q ei ole voimassa. Tutkitaan siis, mitä seuraa lausumasta $\neg q$, ns. *vastaoletuksesta* eli *antiteesista*. Jos tällöin voidaan osoittaa, että $\neg p$ on voimassa, päädytään ristiriitaan, koska alkuperäisessä tehtävässä p on tosi. Lausuma $\neg q$ ei siis voi olla tosi, ts. q on tosi. Alkuperäisen tehtävän $p \implies q$ sijasta tässä siis todistetaankin, että $\neg q \implies \neg p$.

Esimerkkinä epäsuoran todistuksen käytöstä olkoon seuraavan lauseen todistaminen:

Ei ole olemassa suurinta alkulukua. alkuluku

Tämä lause on propositio q; propositio p muodostuu kaikista tunnetuista luonnollisten lukujen ominaisuuksista. Propositio $\neg q$ on tällöin 'on olemassa suurin alkuluku'. luonnollinen luku

Olkoon siis suurin alkuluku olemassa ja tämä olkoon n. Tällöin alkulukuja on äärellinen määrä; nämä ovat $2, 3, 5, 7, \dots, n$. Olkoon $m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n) + 1$. Jos tämä jaetaan millä tahansa alkuluvuista $2, 3, 5, 7, \dots, n$, saadaan jakojäännökseksi 1. Koska jako ei mene tasan, on m alkuluku, jolloin se on pienempi tai yhtä suuri kuin suurin alkuluku n; siis $m \leq n$. Selvästi on kuitenkin $m > n$, jolloin on syntynyt ristiriita luonnollisten lukujen suuruusjärjestykseen nähden.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS:

Predikaattilogiikka

Muotoa '$x > 5$' tai 'x ja y ovat naimisissa' olevat lausumat eivät ole propositioita, koska niiden totuusarvo riippuu siitä, mitä muuttujien x ja y paikalle sijoitetaan. Tällaisia vapaista muuttujista riippuvia lausumia kutsutaan *predikaateiksi* ja niitä merkitään funktioiden tapaan: $p(x)$, $m(x, y)$. funktio

Kun muuttuja(t) *sidotaan*, esimerkiksi niille annetaan arvot jostakin perusjoukosta, predikaatit muuttuvat propositioiksi. Edellisen esimerkin tapauksessa luonnollinen perusjoukko on reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ ja asettamalla $x = \pi$ saadaan epätosi propositio $\pi > 5$. Jälkimmäisessä esimerkissä muuttujan x luonnollinen perusjoukko muodostuu kaikista miehistä, muuttujan y kaikista naisista, jolloin esimerkiksi '(tietty) Pekka ja (tietty) Maija ovat naimisissa' on propositio, jonka totuusarvo on mahdollista selvittää.

Muuttujat voidaan sitoa myös *kvanttoreilla*, joista tärkeimmät ovat seuraavat:

kaikilla-kvanttori:	$\forall x\, p(x)$	'kaikilla x on ominaisuus $p(x)$',
on olemassa -kvanttori:	$\exists x\, p(x)$	'on olemassa x, jolla on ominaisuus $p(x)$'.

Esimerkiksi sitomalla predikaatti $|x| \geq 0$ kaikilla-kvanttorilla (perusjoukkona reaaliluvut) saadaan propositio $\forall x\, (|x| \geq 0)$, joka on tosi. itseisarvo (reaaliluvun) reaaliluku

Sitomalla predikaatti $x^2 < 0$ on olemassa -kvanttorilla (perusjoukkona reaaliluvut) saadaan epätosi propositio $\exists x\, (x^2 < 0)$. Jos perusjoukkona sen sijaan ovat kompleksiluvut, saadaan tosi propositio. kompleksiluku

Jos predikaatissa on useampia muuttujia, nämä on kaikki sidottava. Esimerkiksi $\exists x\, \forall y\, m(x, y)$ on epätosi, kun $m(x, y)$ on predikaatti 'x ja y ovat naimisissa'.

Predikaateille voidaan muodostaa laskusääntöjä. Luonnollisen logiikan pohjalta esimerkiksi seuraavat ovat ilmeisiä:

$$\neg \forall x\, p(x) \iff \exists x\, \neg p(x),$$
$$\neg \exists x\, p(x) \iff \forall x\, \neg p(x),$$
$$\forall x\, [p(x) \wedge q(x)] \iff [\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)],$$
$$\exists x\, [p(x) \wedge q(x)] \implies [\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)].$$

Logiikka ja matematiikka

Logiikkaa voidaan pitää matemaattisen päättelyn — lauseiden eli teoreemojen todistamisen — työkaluna. Yleensä matematiikassa ei kuitenkaan esitetä todistuksia formaalin logiikan muotoon puettuna, vaan pikemminkin sovelletaan luonnollista logiikkaa ja vain tarvittaessa turvaudutaan formaalin logiikan kalkyyliin. Syynä on tradition ohella todistusten luettavuus: tiukka formaalin logiikan käyttö johtaa raskaisiin ja vaikeaselkoisiin esityksiin.

Tietokoneiden tekoälysovelluksissa — joissa myös voidaan pyrkiä lauseiden todistamiseen — formaalin logiikan käyttö sen sijaan on välttämättömyys.

Matematiikka voidaan nähdä järjestelmänä, jonka pohjana ovat *aksioomat*, tosiksi sovitut lausumat. Näiden perusteella johdetaan ainakin periaatteessa logiikan keinoin joukko lauseita, jotka muodostavat tarkasteltavana olevan matemaattisen teorian. Jokainen lause todistetaan joko aiemmin todistettuihin lauseisiin tai suoraan aksioomiin vedoten.

aksiooma

Esimerkiksi reaalisten funktioiden jatkuvuusteorian pohjana voisivat olla aksioomat, jotka määrittelevät reaalilukujoukon. Näihin vedoten voidaan määritellä jatkuvuuden käsite ja logiikkaan pohjautuvalla päättelyketjulla todistaa vaikkapa Bolzanon lause: *Jos jatkuva funktio saa suljetun välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, sillä on ainakin yksi nollakohta tällä välillä.*

funktio (reaali-)
jatkuvuus
Bolzano

Modernin geometrian pohjana eivät enää ole Eukleideen antiikin Kreikassa esittämät aksioomat vaan näiden modernimpi versio, jota yleensä kutsutaan *Hilbertin aksioomiksi* saksalaisen matemaatikon David Hilbertin (1862 – 1943) mukaan. Geometrioitakin on erilaisia; näitä vastaavat erilaiset aksioomajärjestelmät.

geometria
geometria
Eukleides
Hilbert

Sovellusten kannalta matemaattinen teoria on malli, joka jollakin tavoin kuvaa sovellusta, reaalimaailman ilmiötä. Malli ei ole sama asia kuin ilmiö vaan lähes aina yksinkertaistus, jonka pätevyydellä on rajoituksensa.

matemaattinen malli
matemaattinen malli

Periaatteessa voidaan ajatella, että kaikki matematiikka rakennetaan yhden aksioomasysteemin varaan ja tältä pohjalta johdetaan jokainen matemaattinen teoria määrittelemällä uusia käsitteitä ja todistamalla näitä koskevia lauseita. Näkemystä kutsutaan usein *bourbakistiseksi* 1930-luvulla syntyneen salanimeä Nicolas Bourbaki käyttäneen ranskalaisen matemaatikkoryhmän mukaan. Ryhmä on julkaissut joukko-opillisista perusteista lähtenyttä 20. vuosisadan matematiikan yleisesitystä, joka ei kuitenkaan ole saavuttanut alkuperäisiä tavoitteitaan.

joukko-oppi

Luontevampaa onkin nähdä aksiomaattisen menetelmän merkitys rajoitetummin: kullakin matematiikan osa-alueella on oma aksioomasysteeminsä, johon tulokset perustetaan. Silti hyvinkin erilaisilla alueilla on yllättäviäkin kosketuskohtia. Sovellusaloilla ei toisaalta välttämättä tarvitse olla edes kovin tietoinen aksiomaattisesta perustasta.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: logiikka

Induktion periaate

Olkoon $P(n)$ jokin luonnollisesta luvusta n riippuva väittämä, joka halutaan osoittaa voimassa olevaksi, olipa n mikä tahansa luonnollinen luku. luonnollinen luku

Esimerkiksi $P(n)$ voisi tarkoittaa yhtälöä

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Jos $n = 5$, kyseessä on yhtälö $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5(5+1)(2 \cdot 5 + 1)$; merkintä $P(5)$ tarkoittaa tätä yhtälöä. Arvolla $n = 2$ saadaan väittämä $P(2)$ eli $1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2(2+1)(2 \cdot 2 + 1)$. Arvolla $n = 1$ kutistuu väittämä $P(1)$ muotoon $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$. Kaikki nämä ovat voimassa olevia yhtälöitä, kuten yksinkertaiset laskut osoittavat.

Yhtälö on voimassa joka ainoalle luonnolliselle luvulle n, ts. $P(n)$ on tosi kaikilla n, mutta muutamien arvojen kokeilu ei tietenkään riitä todistamaan tätä.

Matemaattinen induktio on todistusmenetelmä, jota voidaan käyttää tämäntyyppisten asioiden todistamiseen.

Todistuksen rakenne on seuraava:

1) Osoitetaan aluksi, että väittämä $P(1)$ on tosi. Tämä on yleensä yksinkertainen lasku.

2) Todistetaan ns. *induktioaskel*: *Jos $P(n)$ on tosi, niin myös $P(n+1)$ on tosi* eli symbolein $P(n) \implies P(n+1)$. Tämä todistus on suoritettava siten, että päättely on pätevä kaikille luonnollisille luvuille n.

Tällöin katsotaan väittämän $P(n)$ tulleen todistetuksi kaikille arvoille $n \in \mathbb{N}$. Perusteluna on seuraavan ketjun syntyminen:

$$P(1) \implies P(2) \implies P(3) \implies P(4) \implies \ldots.$$

Aluksi on nimittäin todettu $P(1)$ voimassa olevaksi. Koska induktioaskel on todistettu jokaiselle arvolle n, se pätee erityisesti arvolla $n = 1$: jos $P(1)$ on tosi, niin myös $P(2)$ on. Mutta $P(1)$ on jo osoitettu todeksi ja siis myös $P(2)$ on tosi. Arvolla $n = 2$ induktioaskel antaa $P(2) \implies P(3)$. Koska edellä on jo $P(2)$ osoitettu todeksi, seuraa tästä, että myös $P(3)$ on tosi. Näin jatketaan.

Induktiotodistuksen alkukohdan ei välttämättä tarvitse olla $n = 1$, vaan aivan hyvin voidaan aloittaa jostakin muustakin arvosta $n = n_0$ ja samalla periaatteella osoittaa väittämä päteväksi arvoilla $n \geq n_0$.

Esimerkki matemaattisesta induktiosta

Todistetaan induktiolla luonnollisten lukujen $1, 2, \ldots, n$ neliöiden summaa koskeva väittämä $P(n)$ eli

luonnollinen luku

summamerkintä

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

oikeaksi kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

1) Arvolla $n = 1$ on

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \text{ja} \\ &\frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\, 1(1+1)(2\cdot 1+1) = 1. \end{aligned}$$

Väittämä $P(1)$ on siis tosi.

2) Induktioaskel. Oletetaan, että $P(n)$ on tosi ja osoitetaan tätä hyväksi käyttäen, että myös $P(n+1)$ on tosi. Väittämän $P(n+1)$ vasen puoli on

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\, (n+1)(2n^2+7n+6). \end{aligned}$$

Toisen yhtäläisyysmerkin kohdalla on käytetty oletusta, että $P(n)$ on tosi. Toisaalta väittämän $P(n+1)$ oikea puoli on

$$\frac{1}{6}\, (n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1] = \frac{1}{6}\, (n+1)(2n^2+7n+6).$$

$P(n+1)$ on siis tosi, koska sen vasen ja oikea puoli ovat samat.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: joukko-oppi, binomi- ja multinomikertoimet

Samapituisten merkkijonojen lukumäärä I

Olkoon tehtävänä muodostaa annetuista merkeistä (olioista, alkioista)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

jonoja, joissa on p kappaletta merkkejä.

Jonoa muodostettaessa voidaan sen ensimmäinen merkki valita n eri tavalla: mikä tahansa merkeistä a_k kelpaa. Toinen merkki valitaan ensimmäisestä riippumatta ja sekin siis voidaan valita n eri tavalla. Kaksimerkkisiä jonoja on siten n^2 kappaletta. Koska kolmaskin merkki valitaan edellisistä riippumatta, voidaan kaksimerkkisten jonojen loppuun liittää mikä tahansa merkeistä ja jokainen jono siten jatkaa n eri tavalla: kolmimerkkisiä jonoja on kaikkiaan n^3 kappaletta.

Jatkamalla tällä tavoin päädytään seuraavaan tulokseen:

Jos käytettävissä on n erilaista merkkiä, näistä voidaan muodostaa p merkin pituisia jonoja n^p kappaletta.

Jonojen muodostaminen voi tapahtua noudattamalla jotakin johdonmukaista menetelmää. Jos esimerkiksi käytettävissä olevat merkit ovat a, b, c ja d, saadaan kolmimerkkisiä jonoja $4^3 = 64$ kappaletta. Nämä ovat

$$\begin{array}{l}
aaa,\ aab,\ aac,\ aad,\ aba,\ abb,\ abc,\ abd,\\
aca,\ acb,\ acc,\ acd,\ ada,\ adb,\ adc,\ add,\\
baa,\ bab,\ bac,\ bad,\ bba,\ bbb,\ bbc,\ bbd,\\
bca,\ bcb,\ bcc,\ bcd,\ bda,\ bdb,\ bdc,\ bdd,\\
caa,\ cab,\ cac,\ cad,\ cba,\ cbb,\ cbc,\ cbd,\\
cca,\ ccb,\ ccc,\ ccd,\ cda,\ cdb,\ cdc,\ cdd,\\
daa,\ dab,\ dac,\ dad,\ dba,\ dbb,\ dbc,\ dbd,\\
dca,\ dcb,\ dcc,\ dcd,\ dda,\ ddb,\ ddc,\ ddd.
\end{array}$$

Samapituisten merkkijonojen lukumäärä II

Olkoon tehtävänä muodostaa p merkkiä (oliota, alkiota) käsittävät jonot, joissa ensimmäinen merkki valitaan n_1 merkin kokoelmasta, toinen merkki n_2 merkin kokoelmasta jne.

Samalla ajattelulla kuin edellä päädytään seuraavaan: Ensimmäinen merkki voidaan valita n_1 tavalla. Tämän perään voidaan asettaa toinen merkki n_2 tavalla; kahden merkin jonoja on siten $n_1 n_2$ kappaletta. Jokaisen kaksimerkkisen jonon perään voidaan asettaa kolmas merkki n_3 tavalla; kolmen merkin jonoja on $n_1 n_2 n_3$ kappaletta.

Yleisesti:

Jos ensimmäiseen merkkiin on käytettävissä n_1 erilaista merkkiä, toiseen n_2 merkkiä, jne. on p-merkkisiä jonoja kaikkiaan $n_1 n_2 \ldots n_p$ kappaletta.

Esimerkiksi kolmesta kirjaimesta ja kolmesta numerosta muodostuvia erilaisia rekisterinumeroita on $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 10\ 950\ 300$ kappaletta, kun käytössä on 23 kirjainta ja ensimmäinen numero ei saa olla 0.

Joukon osajoukkojen lukumäärä

Joukossa A olkoon äärellisen monta alkiota, n kappaletta: joukko alkio

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Tämän osajoukot ovat joukkoja, joihin on otettu joitakin näistä alkioista. Esimerkiksi $\{a_1, a_3, a_7\}$ on osajoukko (mikäli n on vähintään 7). Yhden alkion muodostamat joukot ovat myös osajoukkoja, esimerkiksi $\{a_1\}$. Tyhjää joukkoa, so. joukkoa, jossa ei ole ainuttakaan alkiota, ja joukkoa A itseään pidetään myös osajoukkoina. osajoukko tyhjä joukko

Jokainen osajoukko voidaan esittää nollista ja ykkösistä muodostuvalla jonolla, jossa on n merkkiä, so. yhtä monta merkkiä, kuin joukossa A on alkioita. Nolla tarkoittaa, että vastaava alkio ei kuulu osajoukkoon, ykkönen puolestaan, että se kuuluu. Jos $n = 7$, on osajoukon $\{a_1, a_3, a_7\}$ esitys 1010001. (Edellytyksenä on, että joukosta A poimitut alkiot luetellaan aina tietyssä, esimerkiksi kasvavan indeksin mukaisessa järjestyksessä.)

Kysymys osajoukkojen lukumäärästä pelkistyy tällöin kysymykseksi merkkijonojen lukumäärästä: Miten monta jonoa voidaan muodostaa merkeistä 0 ja 1, kun jonojen pituus on n? Vakiopituisten jonojen lukumäärää koskevan tuloksen perusteella saadaan seuraavaa:

Jos joukossa on n alkiota, sen osajoukkojen lukumäärä on 2^n.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: joukko-oppi, binomi- ja multinomikertoimet

Järjestysten eli permutaatioiden lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

jotka on järjestettävä kaikkiin mahdollisiin järjestyksiin. Näitä kutsutaan merkkien *permutaatioiksi*.

Permutaatioiden lukumäärä voidaan selvittää muodostamalla ne merkki kerrallaan. Ensimmäinen merkki voidaan valita n eri tavalla, koska kaikki merkit ovat tällöin käytettävissä. Toisen merkin valitsemiseen on enää $n-1$ mahdollisuutta, koska yksi on jo käytetty; kolmas on valittava jäljellä olevista $n-2$ merkistä, jne. Viimeisen merkin kohdalla ei enää ole valinnan varaa: se on on ainoa jäljellä oleva.

Permutaatioiden lukumäärä on sama kuin valintamahdollisuuksien lukumäärä kuvatussa muodostamisprosessissa:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Tätä kutsutaan n-kertomaksi ja merkitään $n!$. kertoma

Tulokseksi saadaan siis:

n merkkiä voidaan järjestää $n!$ erilaiseen järjestykseen.

Järjestykset voidaan muodostaa jotakin johdonmukaista menetelmää käyttäen. Jos esimerkiksi merkkeinä ovat a, b, c ja d, on erilaisia järjestyksiä eli permutaatioita $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ kappaletta. Nämä ovat

$$\begin{gathered} abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb,\ adbc,\ adcb, \\ bacd,\ badc,\ bcad,\ bcda,\ bdac,\ bdca, \\ cabd,\ cadb,\ cbad,\ cbda,\ cdab,\ cdba, \\ dabc,\ dacb,\ dbac,\ dbca,\ dcab,\ dcba. \end{gathered}$$

Esitiedot:
Katso myös: joukko-oppi, binomi- ja multinomikertoimet

Järjestettyjen osajonojen lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

joista on kaikilla mahdollisilla tavoilla poimittava p kappaletta ja esitettävä nämä kaikissa mahdollisissa järjestyksissä. Näitä kutsutaan toisinaan merkkien *p-variaatioiksi.*

Ensimmäinen merkki voidaan valita n eri tavalla, koska kaikki merkit ovat käytettävissä. Seuraava on valittava jäljellä olevista $n-1$ merkistä, joten mahdollisuuksia on $n-1$. Kolmatta merkkiä valittaessa mahdollisuuksia on $n-2$. Kun näin jatketaan, on viimeiselle eli p:nnelle merkille $n-p+1$ valintamahdollisuutta.

Mahdollisuuksia on kaikkiaan kertoma

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Siis:

n merkin p-variaatioiden lukumäärä on $n!/(n-p)!$.

Esimerkiksi merkeistä a, b, c, d voidaan poimia kahden merkin järjestettyjä jonoja $4!/(4-2)!=12$ kappaletta. Nämä ovat

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,$$
$$ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc.$$

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: joukko-oppi, binomi- ja multinomikertoimet

p-alkioisten osajoukkojen eli kombinaatioiden lukumäärä

Olkoon annettuna n kappaletta merkkejä (olioita, alkioita)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Tehtävänä on selvittää, monellako tavalla näistä voidaan poimia p kappaletta, kun huomiota ei kiinnitetä poimittavien merkkien keskinäiseen järjestykseen. Sama voidaan lausua toisin: Montako p alkion muodostamaa osajoukkoa joukolla $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ on? osajoukko

Poimittavia p merkin yhdelmiä kutsutaan *p-kombinaatioiksi.* joukko

Jos poimittavien merkkien keskinäinen järjestys otetaan huomioon, on kyseessä p-variaatioiden lukumäärä. Variaatioita on $n!/(n-p)!$ kappaletta. Näiden joukossa on kuitenkin sellaisia, joissa on samat merkit, mutta eri järjestyksissä. Koska tietyt p merkkiä voidaan järjestää $p!$ järjestykseen, on samat merkit sisältäviä järjestyksiä aina $p!$ kappaletta, jolloin p-kombinaatioiden määrä saadaan jakamalla p-variaatioiden määrä luvulla $p!$. Lukumäärä on siis

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Tätä kutsutaan myös binomikertoimeksi ja merkitään $\binom{n}{p}$. binomikerroin

Siis: binomikerroin

n alkion joukosta voidaan valita p kappaletta $\binom{n}{p}$ eri tavalla, kun järjestykseen ei kiinnitetä huomiota.

Esimerkiksi merkeistä a, b, c, d voidaan poimia kahden merkin yhdelmiä $\binom{4}{2} = 6$ kappaletta. Nämä ovat

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

Koska p-kombinaatiot ovat p-alkioisia osajoukkoja, tulee näiden lukumäärien summan olla sama kuin kaikkien osajoukkojen lukumäärä, kun huomioon otetaan kaikki mahdolliset arvot p, ts. $p = 0, 1, \ldots, n$. On siis oltava summamerkintä

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Tämä on erikoistapaus binomikaavasta $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$, kun asetetaan $x = y = 1$. binomikaava

binomikaava

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: joukko-oppi, binomi- ja multinomikertoimet

Toisiaan leikkaavien joukkojen alkioiden lukumäärä

Merkitään äärellisen monesta alkiosta muodostuvan joukon B alkioiden lukumäärää $N(B)$.

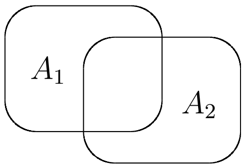
alkio
joukko

Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ äärellisen monen alkion muodostamia joukkoja. Jos joukoissa on yhteisiä alkioita, ts. ne leikkaavat toisiaan, joukkojen unioniin kuuluvien alkioiden määrää laskettaessa joudutaan ottamaan huomioon yhteisten alkioiden lukumäärät.

unioni
leikkaus

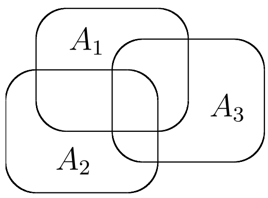
Kahden joukon $A_1,\ A_2$ tapauksessa tulos on yksinkertainen:

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2).$$



Kolmen joukon tapauksessa tulos on myös pääteltävissä kuviosta:

$$\begin{aligned} &N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_2 \cap A_3) - N(A_3 \cap A_1) \\ &\qquad + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$



Joukkojen määrän kasvaessa tilanne tulee monimutkaisemmaksi, mutta edeltä ilmenevä periaate on yleistettävissä summamerkintää käyttäen:

summamerkintä

$$\begin{aligned} &N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \\ &= \sum_{1 \le k \le n} N(A_k) - \sum_{1 \le j < k \le n} N(A_j \cap A_k) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}$$

Esitiedot:

Katso myös: polynomit, lukumäärän laskeminen

Kertoma

n ensimmäisen luonnollisen luvun tulo on n-*kertoma*; tätä merkitään huutomerkin avulla: luonnollinen luku

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Lisäksi asetetaan $0! = 1$.

Esimerkiksi $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Kertomafunktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n!$ kasvaa erittäin nopeasti argumentin n kasvaessa. Esimerkiksi funktio

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000,$$

missä on 48 numeroa; $100!$ on suuruusluokaltaan 10^{158}.

Suuria kertomia voidaan arvioida *Stirlingin kaavalla*:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(James Stirling oli englantilaissyntyinen Venetsiassa toiminut professori, joka julkaisi kaavan vuonna 1730.)

Kertomafunktion yleistyksenä on *gammafunktio* $\Gamma(x)$, joka positiivisilla reaaliarvoilla x määritellään integraalilla funktio (reaali-) määrätty integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

ja jolle pätee $n! = \Gamma(n+1)$, missä n on luonnollinen luku.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: polynomit, lukumäärän laskeminen

Binomikertoimet

Binomikertoimeksi kutsutaan lauseketta binomikerroin

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

missä n ja p ovat kokonaislukuja ja $n \geq 0$, $0 \leq p \leq n$.

Kombinatoriselta kannalta kerroin $\binom{n}{p}$ osoittaa, miten monella tavalla n olion joukosta voidaan valita p oliota, ts. montako p-kombinaatiota n oliosta voidaan muodostaa. kombinaatio

Kertoimet esiintyvät myös binomikaavassa binomikaava

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p,$$

jonka avulla voidaan kehittää binomin $x+y$ potenssit. binomi

Näillä kahdella näkökulmalla on selvä yhteys. Binomin potenssi voidaan kirjoittaa

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y),$$

missä tekijöitä $x+y$ on siis n kappaletta.

Summien kertominen voidaan ajatella tapahtuvaksi siten, että poimitaan kaikilla mahdollisilla tavoilla jokaisesta tekijästä $(x+y)$ aina yksi termi ja nämä kerrotaan keskenään; lopuksi saadut tulot lasketaan yhteen. Siten esimerkiksi tapauksessa $n=3$ saadaan $xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy$. Yleisesti termejä on 2^n kappaletta. termi

Termeissä on kuitenkin samanmuotoisia, jotka voidaan yhdistää. Edellä oleva lauseke saa tällöin muodon $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Yleisessä tapauksessa muotoa x^py^{n-p} olevien termien lukumäärä ratkeaa sen mukaan, monellako tavalla n tekijästä $(x+y)$ voidaan poimia ne p kappaletta, joista valitaan termiksi x; muista valitaan termiksi y. Kombinaatiotarkastelujen perusteella näiden lukumäärä on juuri $\binom{n}{p}$, jolloin päädytään binomikaavaan. lukumäärä (merkkijonojen) lukumäärä (merkkijonojen)

Pascalin kolmio

Mekaaninen lasku (kertomia käyttäen) osoittaa, että binomikertoimien välillä vallitsee yhtälö

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}.$$

Jos kertoimet kirjoitetaan riveille siten, että rivillä n ovat peräkkäin lueteltuina kertoimet $\binom{n}{p}$, kun $p = 0, 1, \ldots, n$, saadaan ns. *Pascalin kolmio*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & - & & - & & - & & & &
\end{array}$$

Binomikertoimien välinen yhtälö merkitsee, että seuraavan rivin kertoimet saadaan laskemalla yhteen kaksi viistosti yläpuolella olevaa. Pascalin kolmion avulla voidaan siis helposti laskea binomikertoimet käyttämättä kertomaan perustuvia lausekkeita. binomikaava

Esitiedot:

Katso myös: polynomit, lukumäärän laskeminen

Multinomikertoimet

Binomikertoimien yleistyksenä ovat *multinomikertoimet*. Näiden lauseke on

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!},$$

missä $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. Jos $m = 2$, nämä antavat binomikertoimet.

Multinomikertoimet ilmaisevat, miten monella tavalla n alkion joukko voidaan jakaa m osajoukkoon, joiden alkioiden lukumäärät ovat p_1, p_2, …, p_m.

lukumäärä (kombinaatioiden)

Binomikaavaa vastaa multinomikaava

binomikaava

multinomikaava

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_m=m} \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m}.$$

ESITIEDOT: joukko-oppi, lukumäärän laskeminen, funktiokäsite
KATSO MYÖS: tilastomatematiikka, todennäköisyysjakaumat

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

Todennäköisyyslaskennassa tarkastelun kohteena ovat *satunnaisilmiöt*. Esimerkkejä tällaisista ovat tavallisen kuusitahkoisen nopan heitto ja vaikkapa tikan heitto tauluun.

Kaikki ilmiön mahdolliset tulokset muodostavat joukon Ω, jota kutsutaan *otosavaruudeksi*. Nopan tapauksessa tämä on joukko $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vastaten heiton tuloksena saatavia silmälukuja. Tikanheitossa tulokset ovat sopivassa koordinaatistossa ilmoitettuja koordinaattipareja (x, y), jotka ilmaisevat, mihin pisteeseen tikka osuu. Luontevaa on valita tikkataulun keskipiste origoksi ja yksiköksi senttimetri. Otosavaruudeksi voidaan tällöin ottaa xy-taso, vaikka kaikki sen pisteet eivät varmasti olekaan mahdollisia heittotuloksia. joukko

Otosavaruuden alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*.

Tapahtumalla tarkoitetaan otosavaruuden Ω osajoukkoa. Nopanheitossa se voi olla esimerkiksi tulos 'vähintään 3', ts. joukko $\{3, 4, 5, 6\}$; tikanheitossa 'alle 5 senttimetrin päähän keskipisteestä' eli $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$. osajoukko

Jokaiseen tapahtumaan liitetään *todennäköisyys* P, so. funktio, jonka argumentteina ovat em. osajoukot. Tällä tulee olla seuraavat ominaisuudet: funktio unioni leikkaus

- $0 \leq P(A) \leq 1$, olipa A mikä tahansa tapahtuma.
- $P(\Omega) = 1$ eli ns. varman tapahtuman todennäköisyys on $= 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, jos $A \cap B = \emptyset$, ts. jos A ja B ovat erillisiä.

Funktio P kuvaa tapahtuman todennäköisyyttä: mitä lähempänä $P(A)$ on arvoa 1, sitä todennäköisempi on tapahtuma A.

Eo. ominaisuuksien seurauksena on mm. *komplementtitapahtuman* $\bar{A} = \Omega \setminus A$ todennäköisyyttä koskeva sääntö: Koska $P(A)+P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, on $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (Todennäköisyyslaskennassa käytetään yleensä merkintää $\bar{A}$ joukko-opillisen komplementin merkinnän $\complement A$ sijasta.) komplementti (joukon)

Eo. ominaisuudet eivät määrää funktiota P, vaan ainoastaan asettavat sille tietyt järkevyysvaatimukset. Funktion määrittäminen kussakin yksityistapauksessa edellyttää jotakin lisätietoa ilmiöstä.

Hieman täsmällisempään muotoon kirjoitettuina funktiolta P vaadittavia ominaisuuksia kutsutaan *Kolmogorovin* aksioomiksi todennäköisyyslaskennan perusteita tutkineen neuvostoliittolaisen matematiikan Andrei Nikolajevitš Kolmogorovin (1903 – 1987) mukaan. aksiooma aksiooma Kolmogorov

Todennäköisyysfunktio P

Monissa alkeellisissa todennäköisyyslaskennan probleemoissa otosavaruus on luonnollista valita siten, että alkeistapauksia on äärellinen määrä ja niitä on perusteltua pitää yhtä todennäköisinä. Jos alkeistapausten lukumäärä on n, on jokaisen alkeistapauksen e_k todennäköisyys tällöin $P(e_k) = 1/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. funktio

Esimerkiksi heitettäessä virheetöntä noppaa tarkoittaa 'virheettömyys' sitä, että kaikki silmäluvut ovat keskenään yhtä todennäköisiä. Alkeistapauksia on siten kuusi: 'heiton tuloksena on yksi', 'heiton tuloksena on kaksi', jne. ja jokaisen todennäköisyys on $1/6$, esimerkiksi $P(\{2\}) = 1/6$. Erillisten tapahtumien unionia koskeva sääntö antaa tällöin esimerkiksi tapahtuman 'heitto antaa vähintään 3' todennäköisyydeksi

$$P(\{3,4,5,6\}) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Tämäntyyppisissä esimerkeissä todennäköisyys voidaan luonnehtia tapahtuman kannalta suotuisien alkeistapausten ja kaikkien alkeistapausten lukumäärien suhteeksi. Tätä luonnehdintaa kutsutaan *klassiseksi* todennäköisyydeksi.

Alkeistapausten symmetrisyys ei kuitenkaan välttämättä merkitse sitä, että ne olisivat yhtä todennäköisiä. Jossakin mielessä esimerkiksi poikien ja tyttöjen syntyminen on symmetristä, mutta tilastojen mukaan poikia kuitenkin syntyy hieman enemmän kuin tyttöjä. Tällöin on luontevaa määrittää todennäköisyysfunktio P tilastollisen frekvenssin perusteella, so. määrittämällä riittävän pitkältä ajanjaksolta syntyvien poikien ja tyttöjen prosenttiosuudet. Suomalaisten tilastojen perusteella saadaan tällöin $P(\text{poika}) \approx 0.51$ ja $P(\text{tyttö}) \approx 0.49$. frekvenssi tilastotiede (matemaattinen)

Tällaisessa tilanteessa puhutaan todennäköisyyden *frekvenssitulkinnasta*.

Tikanheittoon liittyvien todennäköisyyksien määrittäminen ei ole yhtä helppoa. Ne ilmeisesti riippuvat myös heittäjästä. Määrittäminen voisi tapahtua frekvenssitulkinnan mukaisesti pitkän heittosarjan pohjalta. Tällöin jollakin tavalla tilastoitaisiin tietyn heittäjän saamat tulokset ja näiden avulla luonnehdittaisiin hänen todennäköisyysjakaumansa. Luonnehdinnan tulisi olla sellainen, että sen avulla voidaan ainakin jollakin tarkkuudella määrittää esimerkiksi todennäköisyys, että tikka osuu kahdeksikkoon taulussa ylöspäin osoittavassa 45 asteen sektorissa.

ESITIEDOT: joukko-oppi, lukumäärän laskeminen, funktiokäsite
KATSO MYÖS: tilastomatematiikka, todennäköisyysjakaumat

Esimerkkejä kombinatorisesta todennäköisyyslaskennasta

Mikäli alkeistapauksia on äärellinen määrä ja on perusteltua pitää näitä yhtä todennäköisinä, johtaa todennäköisyyksien laskeminen usein erilaisten kombinaatioiden lukumäärien laskemiseen.

1) Arpajaisissa on 100 arpaa, joista kymmenen on voittoarpoja. Henkilö ostaa viisi arpaa. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin yhden voiton?

Alkeistapauksia olkoot 100 arvan joukosta poimitut viiden arvan kombinaatiot. Näitä on kaikkiaan $\binom{100}{5} = 75287520$. Kombinaatioita on perusteltua pitää yhtä todennäköisinä, jolloin tietyn kombinaation todennäköisyys on $1/\binom{100}{5} = 1/75287520$.

Tapahtuma, jonka todennäköisyyttä kysytään, on $A =$ 'ainakin yksi voitto'. Tämän komplementtitapahtuma on $\bar{A} =$ 'ei yhtään voittoa'. Tapahtumaan $\bar{A}$ kuuluvia kombinaatioita on $\binom{90}{5} = 43949268$ kappaletta ja siis

$$P(\bar{A}) = 43949268 \cdot \frac{1}{75287520} \approx 0.584.$$

Todennäköisyys saada ainakin yksi voitto on siis $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0.416$.

2) Hyvin sekoitetusta korttipakasta vedetään neljä korttia. Millä todennäköisyydellä ne ovat eri maita?

Keskenään yhtä todennäköisiä alkeistapauksia ovat 52 kortin pakasta otetut neljän kortin kombinaatiot, joiden lukumäärä on $\binom{52}{4}$. Jokaisen kombinaation todennäköisyys on siis $1/\binom{52}{4}$. Eri maita olevien kombinaatioiden määrä on 13^4, koska jokaisesta maasta kortti voidaan valita 13 tavalla. Todennäköisyys on siten

$$13^4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{4}} \approx 0.105.$$

lukumäärä (merkkijonojen)
lukumäärä (merkkijonojen)
lukumäärä (osajoukkojen)
lukumäärä (permutaatioiden)
lukumäärä (osajonojen)
lukumäärä (kombinaatioiden)
lukumäärä (leikkaavien joukkojen alkioiden)

Ehdollinen todennäköisyys

Tiettyyn ilmiöön liittyvän todennäköisyysfunktion P määrittämisen ohjenuorana voidaan todennäköisyyden frekvenssitulkinnan mukaisesti pitää tilastollisia kokeita. Haluttaessa määrittää todennäköisyys tapahtumalle B, *kun tapahtuma A on sattunut*, on luonnollista suorittaa koesarja ja laskea tapaukset, joissa sattuu A ja joissa sattuu sekä A että B. Jos näiden lukumäärät ovat $n(A)$ ja $n(A \cap B)$, todennäköisyyttä approksimoi suhde

funktio

tilastotiede (matemaattinen)

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B)/N}{n(A)/N},$$

missä N tarkoittaa sarjan kokeiden kokonaismäärää. Lausekkeen oikean puolen voidaan tulkita approksimoivan tapahtumien $A \cap B$ ja A todennäköisyyksien suhdetta $P(A \cap B)/P(A)$.

Ehdollinen todennäköisyys $P(B|A)$ tapahtumalle B, kun tapahtuma A on sattunut, määritellään tämän johdosta asettamalla

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Esimerkkinä olkoon seuraava:

Hyvin sekoitetusta korttipakasta vedetään peräkkäin kaksi korttia. Ensimmäinen osoittautuu ässäksi. Millä todennäköisyydellä toinenkin on ässä?

Kahden kortin variaatioita on $52 \cdot 51 = 2652$ kappaletta. On luonnollista pitää näitä yhtä todennäköisinä, jolloin jokaisen todennäköisyys on $1/2652$. Tarkoittakoon A tapahtumaa 'ensimmäinen kortti on ässä, toinen mikä tahansa' sekä B tapahtumaa 'toinen kortti on ässä, ensimmäinen mikä tahansa'. Tapahtumia A ja $A \cap B$ vastaavien korttiparien lukumäärät ovat $4 \cdot 51 = 204$ ja $4 \cdot 3 = 12$, jolloin vastaavat todennäköisyydet ovat

variaatio

$$P(A) = 204 \cdot \frac{1}{2652} = \frac{1}{13} \quad \text{ja} \quad P(A \cap B) = 12 \cdot \frac{1}{2652} = \frac{1}{221}.$$

Kysytty ehdollinen todennäköisyys on tällöin

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{13}{221} = \frac{1}{17} \approx 0.059.$$

Tapahtumien riippumattomuus

Tapahtumat A ja B ovat *riippumattomat*, jos $P(B|A) = P(B)$, ts. jos tapahtuman B todennäköisyys ei riipu siitä, onko A sattunut vai ei.

Yhdistämällä tähän ehdollisen todennäköisyyden määritelmä, saadaan riippumattomille tapahtumille kaava $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Esimerkkinä olkoon ehdollisen todennäköisyyden laskeminen sille, että toisessa nopanheitossa saadaan kuutonen sen jälkeen, kun ensimmäisen heiton tuloksena on ollut kuutonen:

Alkeistapauksia ovat kahdessa heitossa saatavat mahdolliset silmälukuparit. Näitä on $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta ja niitä on perusteltua pitää yhtä todennäköisinä jokaisen todennäköisyyden ollessa $1/36$. Jos A tarkoittaa tapahtumaa 'ensimmäinen heitto antoi kuutosen (ja toinen mitä tahansa)' ja B tapahtumaa 'toinen heitto antoi kuutosen (ja ensimmäinen mitä tahansa)', on

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Ehdollinen todennäköisyys on siis

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6}.$$

Tämä on sama kuin $P(B)$, kuten luonnollisesti pitää ollakin, koska perättäiset nopanheitot eivät millään tavoin riipu toisistaan.

Koska samaa koetta toistettaessa perättäiset toistot ovat toisistaan riippumattomia, voidaan niiden todennäköisyyksiä laskea helposti: Jos A tarkoittaa tapahtumaa 'ensimmäinen nopanheitto antaa enintään kolmosen' ja B tapahtumaa 'toinen heitto antaa vähintään kolmosen', on todennäköisyys saada ensimmäisellä heitolla 1, 2 tai 3 ja toisella 3, 4, 5 tai 6 kaavan $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ mukaisesti $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$.

Esitiedot: joukko-oppi, lukumäärän laskeminen, funktiokäsite
Katso myös: tilastomatematiikka, todennäköisyysjakaumat

Stokastinen muuttuja

Otosavaruudessa Ω määritelty funktio on *stokastinen muuttuja* eli *satunnaismuuttuja*. Yleensä tämä on reaaliarvoinen. funktio

Kahta noppaa heitettäessä otosavaruus Ω muodostuu pareista (m, n), missä m ja n ovat heiton tuloksena saadut silmäluvut, ts. m ja n saavat toisistaan riippumatta arvot $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Esimerkki stokastisesta muuttujasta on näiden summa: $X(m, n) = m + n$. Stokastinen muuttuja (siis funktio) X saa tällöin äärellisen monta arvoa: $2,\ 3,\ \ldots,\ 12$.

Heitettäessä tikkaa tauluun voidaan otosavaruudeksi Ω ottaa xy-taso, jonka origo sijaitsee taulun keskipisteessä. Alkeistapaukset eli otosavaruuden alkiot muodostuvat koordinaattipareista (x, y), jotka kuvaavat tikan osumiskohtaa. Eräs stokastinen muuttuja on osumiskohdan etäisyys taulun keskipisteestä: $D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Muuttujan D arvoja ovat kaikki ei-negatiiviset reaaliluvut.

Edellisessä esimerkissä on kyseessä *diskreetti* stokastinen muuttuja, koska se saa vain erillisiä arvoja. Jälkimmäisessä tapauksessa muuttuja on *jatkuva*.

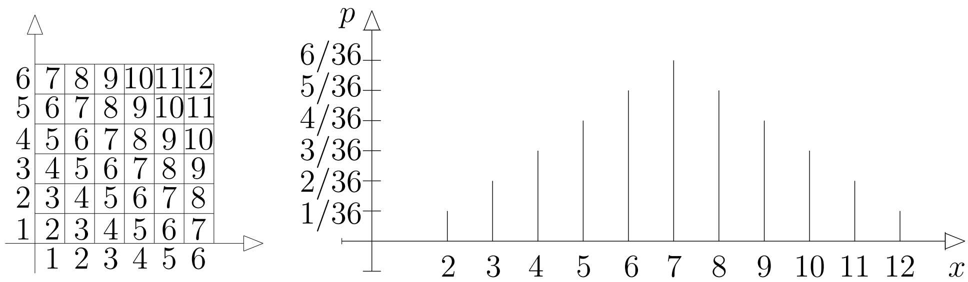
Stokastisten muuttujien argumentit on yleensä tapana jättää kirjoittamatta. Esimerkiksi merkintä $X = x$ tarkoittaa, että stokastinen muuttuja X saa arvon x.

Noppaesimerkissä merkintä $\{X = 5\}$ tarkoittaa otosavaruuden osajoukkoa eli tapahtumaa $\{(m, n) \in \Omega \mid X(m, n) = 5\}$. Vastaavasti tikanheittoesimerkkiin liittyvä joukko $\{D \leq 5\} = \{(x, y) \in \Omega \mid D(x, y) \leq 5\}$ on tapahtuma.

Stokastisten muuttujien saamiin arvoihin liittyvien todennäköisyyksien tarkastelu johtaa tilastollisten jakaumien tarkasteluun.

Seuraavissa kuvissa on kahden nopan heittoon liittyvä otosavaruus ja funktion $X(m, n) = m + n$ sen eri osissa saamat arvot sekä todennäköisyysfunktion $p(x) = P(\{X = x\})$ kuvaaja. kuvaaja

jakauma (diskreetti)



Todennäköisyyslaskennan historiaa

Todennäköisyyslaskennan historia alkaa 1600-luvulta, jolloin ranskalaiset matemaatikot Pierre Fermat (1601 – 1655) ja Blaise Pascal (1623 – 1662) kävivät kirjeenvaihtoa uhkapeleistä. (Kumpikaan ei kuitenkaan itse ollut peluri.) Myöhempiä merkittäviä nimiä ovat sveitsiläinen Jakob Bernoulli (1654 – 1705), ranskalaissyntyinen, Englannissa elänyt Abraham de Moivre (1667 – 1754) ja ranskalainen Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827). Jokaisella on ansioita myös muilla matematiikan aloilla. Laplace kiteytti todennäköisyyslaskennan siihenastiset tulokset teokseensa *Théorie analytique des probabilités*.

Fermat
Pascal
Bernoulli
Bernoulli
de Moivre
Laplace

Todennäköisyys ymmärrettiin tällöin ns. klassisena todennäköisyytenä, jossa — esimerkiksi jonkin korttipelitilanteen — todennäköisyys määritellään suotuisien tapausten ja kaikkien tapausten lukumäärien suhteena. Tämä edellyttää, että pohjana ovat jotkin alkeistapaukset, joita on perusteltua pitää keskenään yhtä todennäköisinä. Suotuisien tapauksien määrän laskeminen johtaa tällöin yleensä kombinatorisiin tehtäviin, minkä johdosta todennäköisyyslaskenta usein vieläkin mielletään jonkinlaiseksi kombinaatioopiksi.

Matematiikassa 1800-luku merkitsi voimakasta kehitystä ja erityisesti abstraktimpaan käsittelytapaan siirtymistä. Käsitteet pyrittiin määrittelemään aksiomaattisesti irrallaan sovelluksista, jolloin teoria muodosti oman itsenäisen kokonaisuutensa. Tällä saavutettiin se etu, että samaa teoriaa voitiin soveltaa hyvinkin erilaisiin, mutta periaatteelliselta rakenteeltaan samankaltaisiin ongelmiin.

Seurauksena oli, että klassisen todennäköisyyden käsitettä ei enää pidetty riittävänä eikä todennäköisyyslaskentaa aina edes matematiikkana. Tilanne muuttui 1900-luvun alkupuolella, jolloin myös todennäköisyyslaskenta sai aksiomaattisen perustansa. Todennäköisyysteorian perusteet kiteytti neuvostoliittolainen matemaatikko Andrei Nikolajevitš Kolmogorov (1903 – 1987) vuonna 1933 julkaistussa kirjoituksessaan.

aksiooma
aksiooma
Kolmogorov

ESITIEDOT: todennäköisyyslaskenta, määrätty integraali
KATSO MYÖS: tilastomatematiikka

Diskreetit jakaumat

Olkoon X diskreetti stokastinen muuttuja, joka saa erilliset arvot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Näitä voi olla myös ääretön määrä: x_k, missä k saa arvoikseen kaikki luonnolliset luvut.)

stokastinen muuttuja (diskreetti)

Diskreetin stokastisen muuttujan jakauma, *diskreetti jakauma*, so. muuttujan saamiin arvoihin liittyvät todennäköisyydet voidaan määritellä antamalla *pistetodennäköisyydet* p_k jokaiselle indeksille k:

todennäköisyys (funktio)

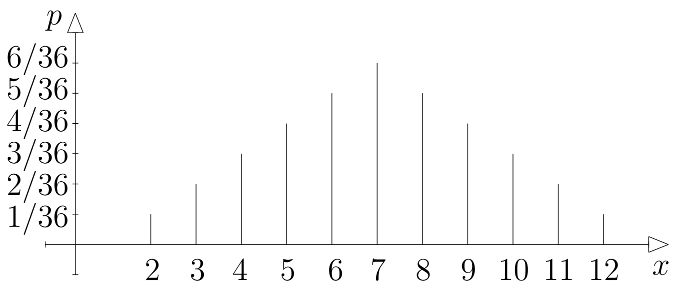
todennäköisyys (funktio)

$$P(X = x_k) = p_k.$$

Nämä ovat ≥ 0 ja niiden summa on $\sum_k p_k = 1$.

summamerkintä

Pistetodennäköisyydet voidaan graafisesti esittää pystysuorien janojen avulla. Esimerkiksi kahta noppaa heitettäessä pistelukujen summa on stokastinen muuttuja, joka saa arvot 2, 3, ..., 12. Näiden todennäköisyysjakauma ilmenee seuraavasta graafisesta esityksestä:



Usein esiintyvä diskreetti jakauma on *binomijakauma*. Tämä kuvaa saman kokeen toistamista, missä toistot ovat toisistaan riippumattomia ja kussakin toistossa tuloksena on joko A tai tämän komplementtitapahtuma $\bar{A}$. Jos näiden todennäköisyydet ovat $P(A) = p$ ja $P(\bar{A}) = 1 - p$, niin toistettaessa koe n kertaa saadaan tulos A täsmälleen k kertaa todennäköisyydellä

riippumattomuus (todennäköisyyslaskennassa)

komplementtitapahtuma

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Diskreettejä jakaumia on paljon muitakin.

ESITIEDOT: todennäköisyyslaskenta, määrätty integraali
KATSO MYÖS: tilastomatematiikka

Jatkuvat jakaumat

Jatkuva stokastinen muuttuja X saa reaaliarvoja joltakin reaaliakselin väliltä $[a, b]$ (tai mahdollisesti kaikki reaaliarvot). Tällöin yksittäisen reaaliarvon todennäköisyys on $= 0$, vaikka arvo ei olekaan mahdoton. Sen sijaan todennäköisyys, että arvo osuu jollekin osavälille $[c, d]$, on yleensä positiivinen.

stokastinen muuttuja (jatkuva)
väli (reaaliakselin)

Jatkuvan muuttujan X jakauma, ns. *jatkuva jakauma* määritellään yleensä *tiheysfunktion* $f(x)$ avulla. Tämä on kaikkialla ≥ 0 ja todennäköisyys, että muuttujan X arvo on välillä $[c, d]$, saadaan integraalista:

todennäköisyys (funktio)
todennäköisyys (funktio)
määrätty integraali

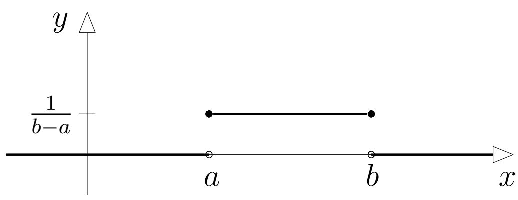
$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\, dx.$$

Jos integroidaan satunnaismuuttujan kaikkien mahdollisten arvojen muodostaman välin yli (voidaan ajatella koko reaaliakselin yli), on kyseessä varma tapahtuma ja siis $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

tapahtuma (todennäköisyyslaskennassa)

Yksinkertainen esimerkki jatkuvasta jakaumasta on *tasainen jakauma* välillä $[a, b]$. Tämän tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kun } x \in [a, b], \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Jatkuvia jakaumia on paljon muitakin; erityisen tärkeä on *normaalijakauma*, jota käsitellään edempänä.

Todennäköisyysjakaumat **3/5**

ESITIEDOT: todennäköisyyslaskenta, määrätty integraali

KATSO MYÖS: tilastomatematiikka

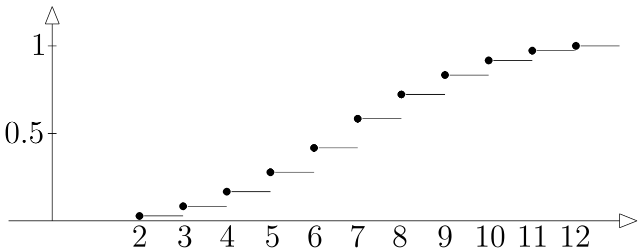
Kertymäfunktio

Diskreetin tai jatkuvan stokastisen muuttujan X *kertymäfunktioksi* kutsutaan funktiota $F(x) = P(X \leq x)$. Koska kyseessä on todennäköisyys, on $0 \leq F(x) \leq 1$ kaikilla x. Funktio on kaikkialla kasvava (so. jos $x_1 < x_2$, niin $F(x_1) \leq F(x_2)$; funktio voi siis olla paloittain vakio).

stokastinen muuttuja (diskreetti)
stokastinen muuttuja (jatkuva)

Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio on porrasfunktio; esimerkkinä olkoon kahta noppaa heitettäessä saatavan pistesumman kertymäfunktio:

todennäköisyys (funktio)
todennäköisyys (funktio)
kasvava (funktio)
kasvava (funktio)



Jatkuvan jakauman kertymäfunktiolle $F(x)$ ja tiheysfunktiolle $f(x)$ pätee

määrätty integraali

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

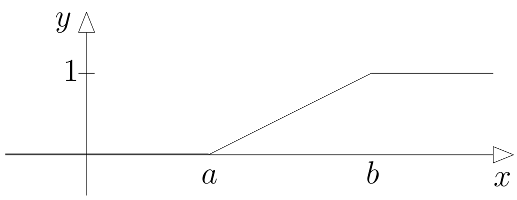
Jos tiheysfunktio on jatkuva, pätee myös

jatkuvuus
derivoituvuus
integraalifunktio

$$F'(x) = f(x).$$

Esimerkkinä jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktiosta olkoon väliä $[a, b]$ vastaavan tasaisen jakauman kertymäfunktio:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kun } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{kun } x \geq b. \end{cases}$$



ESITIEDOT: todennäköisyyslaskenta, määrätty integraali
KATSO MYÖS: tilastomatematiikka

Jakauman tunnusluvut

Erilaisia jakaumia pyritään luonnehtimaan sopivilla *tunnusluvuilla*.

Tärkein näistä on *odotusarvo*, jota voidaan luonnehtia stokastisen muuttujan saamien arvojen painotetuksi keskiarvoksi, jossa painoina ovat todennäköisyydet.

Jos diskreetti satunnaismuuttuja X saa arvot x_k todennäköisyyksillä p_k, odotusarvo on

$$E(X) = \sum_k x_k p_k.$$

Jos jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $f(x)$, on odotusarvo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Tämäkin on todennäköisyyksillä painotettu keskiarvo, kuten nähdään tarkastelemalla integraalia vastaavaa Riemannin summaa.

Esimerkiksi yhden nopan heitossa odotusarvo on

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5\,;$$

kyseessä on silmälukujen suora keskiarvo, koska kaikki pistetodennäköisyydet ovat samoja.

Binomijakauman ja väliä $[a, b]$ vastaavan tasaisen jakauman odotusarvoiksi saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}.$$

Jakauman laajuutta — *hajontaa* — odotusarvon $E(X) = \mu$ ympärillä voidaan mitata tarkastelemalla etäisyyttä $|X - \mu|$ (joka itse on stokastinen muuttuja). Tämän neliön odotusarvo on jakauman *varianssi*:

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2).$$

Varianssin neliöjuuri $\sigma = \sqrt{E((X-\mu)^2)}$ on jakauman *keskihajonta*.

Diskreetin ja jatkuvan jakauman tapauksessa varianssille voidaan johtaa lausekkeet

$$\sigma^2 = \sum_k (x_k - \mu)^2 p_k \qquad \text{ja} \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

Näiden avulla saadaan esimerkiksi binomijakauman varianssiksi $np(1-p)$ ja tasaisen jakauman varianssiksi $(b-a)^2/12$.

stokastinen muuttuja (diskreetti)
stokastinen muuttuja (jatkuva)
keskiarvo (painotettu)
summamerkintä
määrätty integraali
Riemannin summa
keskihajonta

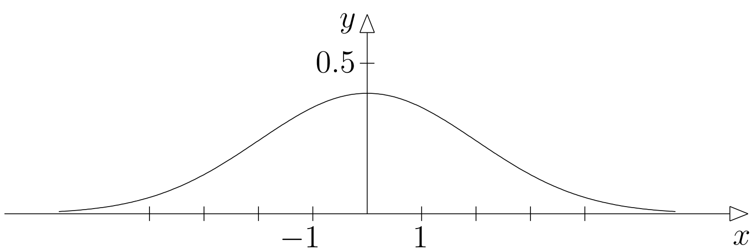
Normaalijakauma

Jatkuvista jakaumista tärkein on *normaalijakauma*. Sitä tarvitaan sekä monissa sovelluksissa että teoreettisissa tarkasteluissa kuvaamaan ilmiöitä, joissa keskialueen arvot ovat tietyllä tavalla todennäköisempiä kuin kummankin ääripään arvot.

Standardinormaalijakauman tiheysfunktio on

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

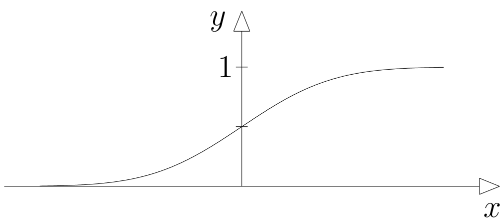
Tämän kuvaajaa kutsutaan Gaussin *kellokäyräksi*. Gauss



Standardinormaalijakauman kertymäfunktio on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt,$$

missä integraalia ei voida laskea tavallisten alkeisfunktioiden avulla. Useat tietokoneohjelmat kuitenkin kykenevät laskemaan funktiolle $\Phi(x)$ numeerisia arvoja. Näitä on myös taulukoituina. integraalifunktio alkeisfunktio



Standardinormaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.

Normaalijakaumasta käytetään usein myös yleistä muotoa, jossa odotusarvo on $= \mu$ ja keskihajonta $= \sigma$. Tiheysfunktio ja kertymäfunktio ovat tällöin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: todennäköisyyslaskenta, todennäköisyysjakaumat, keskiarvo

Tilastodata

Tilastojen pohjana on jollakin johdonmukaisella tavalla kerätty jotakin ilmiötä koskeva *data* (tiedot). Esimerkkejä ovat tuhannelta hengeltä kysytty poliittinen puoluekanta, koululuokan matematiikan kokeen arvosanat ja joukko-osaston alokkaiden pituudet.

Data voi olla *diskreettiä*, jolloin vain tietyt arvot tulevat kysymykseen (puoluekanta, arvosanat), tai *jatkuvaa*, jolloin periaatteessa mikä tahansa jollakin välillä oleva reaaliarvo on mahdollinen (ihmisten pituudet). Data voi olla *numeerista* (arvosanat, pituudet) tai *nominaalista* (puolueiden nimet). Jälkimmäisessä tapauksessa se voidaan koodata numeeriseen muotoon, mutta koodaus ei (välttämättä) merkitse järjestyksen muodostamista: vaikka puolueille annettaisiinkin numerot, nämä tuskin kuvaavat puolueiden sijoittumista vaikkapa oikeisto-vasemmisto -akselille.

Diskreetin datan tapauksessa voidaan jokaiselle data-arvolle laskea sen *frekvenssi*: montako kertaa arvo esiintyy datassa. Jatkuva data voidaan ensin luokitella (esimerkiksi sijoittaa ihmisten pituuksien arvot viiden senttimetrin pituisille väleille) ja tämän jälkeen muodostaa luokkien frekvenssit.

Frekvenssit voidaan esittää havainnollisessa muodossa erilaisina diagrammeina. Tavallisimpia ovat *pylväsdiagrammit* eli *histogrammit*, joissa esitetään yleensä absoluuttiset frekvenssit, ja *piirakkadiagrammit*, joista ilmenevät frekvenssien suhteelliset osuudet kokonaisuudesta.

Jos data esittää ilmiön kehitystä ajan mukana, ts. kyseessä on *aikasarja*, voidaan ilmiötä kuvata ajan funktiona. Argumenttina vaaka-akselilla on tällöin aika. funktio

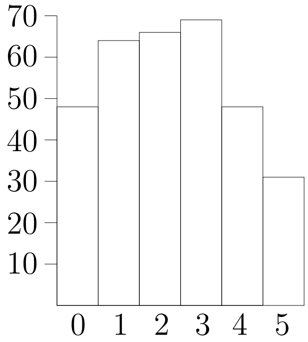
Esimerkkejä seuraavassa.

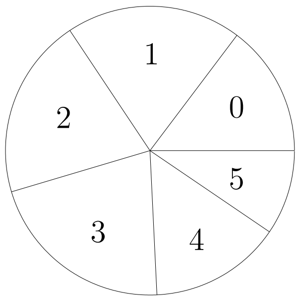
ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: todennäköisyyslaskenta, todennäköisyysjakaumat, keskiarvo

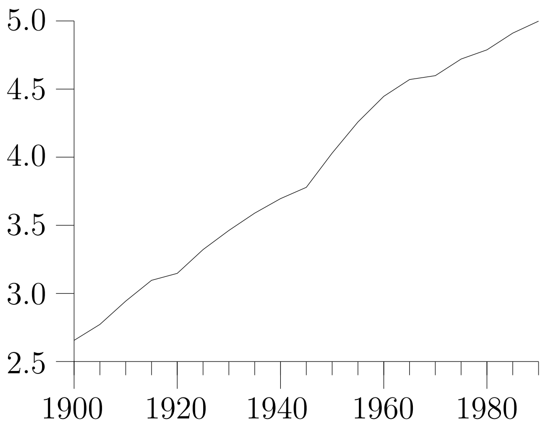
Tilastodatan esittäminen

Esimerkkinä pylväs- ja piirakkadiagrammista olkoon Teknillisen korkeakoulun erään matematiikan peruskurssin arvosanajakauma. Pylväsdiagrammissa on vaaka-akselilla eri arvosanat (0 = hylätty, huonoin hyväksytty 1, paras 5); pystyakselilla ovat eri arvosanan saaneiden opiskelijoiden absoluuttiset määrät. Piirakkadiagrammista ilmenevät eri arvosanojen suhteelliset osuudet havainnollisesti.





Suomen väkilukudata muodostaa aikasarjan. Alla on väkiluvun kehitystä 1900-luvulla kuvaava funktio. Pystyakselilla on väkiluku miljoonina.



Datan tunnusluvut

Datasta voidaan myös muodostaa *tunnuslukuja*, jotka kuvaavat joitakin sen oleellisia piirteitä. Tavallisimmat ovat seuraavat:

- *Moodi* on se datassa esiintyvä arvo, jota on lukumääräisesti eniten. Käyttö tulee kysymykseen vain diskreetin datan tapauksessa. Esimerkiksi kannatukseltaan suurin puolue tai yleisin koearvosana.

- *Mediaani* on suuruusjärjestykseen asetetun datan keskimmäinen arvo (tai jos arvoja on parillinen määrä, kahden keskimmäisen keskiarvo). Tällöin datan tulee olla numeerista.

- *Keskiarvo* voidaan laskea numeerisesta datasta. Jos data muodostuu luvuista $x_1, x_2, \ldots, x_n$, näiden keskiarvo on keskiarvo (aritmeettinen) summamerkintä

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

- *Keskihajonta* kuvaa datan keskimääräistä poikkeamaa keskiarvosta. Todennäköisyyslaskennan teoriaan liittyvistä syistä lasketaan poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri: keskihajonta todennäköisyyslaskenta

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]}.$$

  Jälkimmäinen lauseke on toisinaan edellistä kätevämpi, koska tällöin sekä keskiarvon että keskihajonnan laskemista varten tarvitaan ainoastaan datassa olevien lukujen summa ja neliöiden summa.

Keskiarvon ja keskihajonnan lausekkeet voidaan esittää myös frekvenssien avulla. Nämä johdetaan melko helposti edellä esitetyistä.

Esitiedot:

Katso myös: todennäköisyyslaskenta, todennäköisyysjakaumat, keskiarvo

Matemaattinen tilastotiede

Tilastodatan perusteella pyritään usein tekemään johtopäätöksiä laajemmasta joukosta, kuin mistä data on kerätty. Esimerkiksi puolueiden kannatusta äänioikeutetun väestön keskuudessa arvioidaan haastattelemalla tuhat sopivasti valittua henkilöä; tietyn ikäisen miespuolisen väestön pituusjakaumaa tutkitaan mittaamalla osa asevelvollisten kutsuntoihin osallistuvista; hehkulamppujen käyttöikäjakaumaa arvioidaan polttamalla loppuun varsin rajoitettu osa tuotannosta.

Tyypillistä tällaisissa tilanteissa on, että koko joukkoa — tarkasteltavaa populaatiota — ei voida tutkia joko tutkimuksen hankaluuden tai kalleuden tähden, sen takia että tutkimus tuhoaa populaation (hehkulamput), siksi että halutaan selvittää jokin yleinen ominaisuus rajallisella määrällä toistettavia kokeita tai jostakin muusta tällaisesta syystä.

Tällöin muodostetaan koko populaatiosta *otos*, so. tutkitaan vain rajallista määrää populaation yksilöitä ja pyritään täten saadun datan avulla tekemään yleisiä johtopäätöksiä. Otos valitaan jollakin satunnaismenettelyllä siten, että systemaattisia virheitä ei synny. Käytössä on useita erilaisia menetelmiä.

Koko populaation tutkimisessa otoksen avulla on pohjana *matemaattinen tilastotiede*, joka perustuu todennäköisyyslaskentaan. todennäköisyyslaskenta

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: todennäköisyyslaskenta, todennäköisyysjakaumat, keskiarvo

Estimointi

Matemaattisen tilastotieteen perusprobleema on tutkittavaan ilmiöön liittyvän todennäköisyysjakauman tunnuslukujen määrittäminen.

Olkoon tarkasteltavana ilmiö, jonka oletetaan luonteensa perusteella noudattavan jotakin todennäköisyysjakaumaa, mutta jotkin jakauman parametrit — esimerkiksi tiheysfunktion lausekkeessa olevat vakiot — ovat tuntemattomia. Näiden määrittämiseksi voidaan muodostaa otos, jonka avulla pyritään arvioimaan eli *estimoimaan* parametreille sopivat arvot.

tiheysfunktio

Esimerkiksi voidaan olettaa, että ihmisten pituudet noudattavat normaalijakaumaa, mutta tämän odotusarvo μ ja keskihajonta σ ovat tuntemattomia. Mittaamalla sopivasti valittu ihmisjoukko (otos), voidaan nämä estimoida.

jakauma (normaali-)
odotusarvo
keskihajonta

Jos otosdataa merkitään $x_1, x_2, \dots, x_n$, saadaan todennäköisyyslaskennan teorian perusteella odotusarvon estimaatiksi (jakaumasta riippumatta) *otoskeskiarvo*

todennäköisyyslaskenta

summamerkintä

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad (= \bar{x}).$$

Keskihajonnan estimaatti on vastaavasti *otoskeskihajonta*

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}.$$

Tämä poikkeaa koko datan keskihajonnasta s siten, että summamerkin edessä on jakajana $n-1$ havaintojen lukumäärän n sijasta.

Tuntemattomat parametrit voivat olla muunkinlaisia. Niiden estimaateille johdetaan vastaavantyyppiset lausekkeet todennäköisyyslaskennan teorian avulla.

Tilastollinen testaus

Jotakin ilmiötä tutkittaessa siitä tehdään usein *hypoteeseja* ja tilastodatan (otoksen) perusteella pyritään päättelemään, pitävätkö hypoteesit paikkansa. Tätä sanotaan hypoteesien *tilastolliseksi testaamiseksi*.

Tällöin joudutaan varautumaan kahden eri lajin virheeseen: hypoteesi hyväksytään, vaikka se on väärä; hypoteesi hylätään, vaikka se on oikea.

Todennäköisyyslaskennan teorian avulla suunnitellaan testi (otoksen koko, sopivan testisuureen laskeminen), jolla hypoteesin voimassaolo voidaan tarkistaa siten, että kummankin lajin virheen todennäköisyys saadaan riittävän pieneksi. todennäköisyyslaskenta

Yksikertainen esimerkki on arpanopan virheettömyyden testaaminen. Hypoteesina on tällöin, että eri silmäluvut ovat yhtä todennäköisiä. Noppaa heitetään useita kertoja, jolloin saadaan joukko heittotuloksia. Nämä muodostavat otoksen kaikista mahdollisista nopalla tehtävistä heitoista. Tilastomatemaattisena probleemana on määrittää riittävä heittojen määrä ja muodostaa heittotuloksista testisuure, jonka arvon perusteella voidaan päättää, onko hypoteesia pidettävä oikeana esimerkiksi 99 prosentin varmuudella.

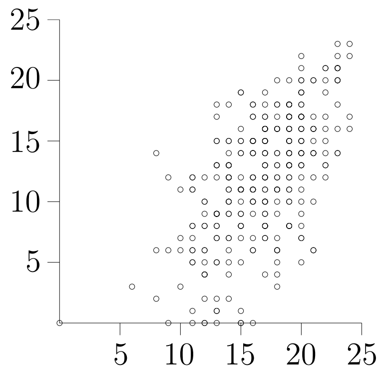
Toisena esimerkkinä olkoon tuote-erän kelvollisuuden testaaminen: Tietty osa tuotteista tutkitaan (mikä voi merkitä niiden rikkomista) ja tulosten perusteella lasketaan arvo sopivasti muodostetulle testisuureelle. Tämän perusteella päätetään, päästetäänkö erä markkinoille vai ei. Todennäköisyys, että virheellinen erä hyväksytään, on saatava riittävän pieneksi. Toisaalta virheettömän erän hylkäystodennäköisyys ei myöskään saa olla liian suuri.

Korrelaatio

Tutkimuksen kohteena olevasta populaatiosta tai siitä muodostetusta otoksesta voidaan koota kahta eri ominaisuutta koskeva data. Tällaisia voivat olla esimerkiksi jonkin koulun oppilaiden päästötodistusten matematiikan ja A-kielen arvosanat. Halutaan selvittää, millainen riippuvuus näiden välillä vallitsee: menestyvätkö matemaattisesti lahjakkaat yleensä hyvin myös kielissä vai keskittyvätkö oppilaat jompaankumpaan toisen jäädessä vähemmälle huomiolle.

Jos tarkastelussa on n oppilasta, joiden matematiikan arvosanat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja kieliarvosanat vastaavasti $y_1, y_2, \ldots, y_n$, voidaan muodostaa graafinen esitys, jossa pisteet (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, sijoitetaan xy-koordinaatistoon. Tämä antaa jo jonkinlaisen kuvan tilanteesta.

Alla olevassa kuvassa on Teknillisen korkeakoulun matematiikan peruskurssin ensimmäisen ja toisen välikokeen tuloksista muodostettu graafinen esitys. Ensimmäisen välikokeen tulokset ovat vaaka-akselilla ja toisen pystyakselilla.



Näyttää ilmeiseltä, että välikoemenestysten välillä on positiivinen riippuvuus, ts. pisteet sijoittuvat nousevan suoran $y = kx + b$, $k > 0$, ympärille. kulmakerroin

Tarkempi mitta riippuvuudelle on korrelaatiokerroin; ks. seuraavaa.

Korrelaatiokerroin

Korrelaatiokerrointa laskettaessa kumpikin data ensin skaalataan sen keskiarvolla ja keskihajonnalla, minkä jälkeen muodostetaan parittainen tulosumma:

summamerkintä

$$r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \bar{x}}{s_x} \frac{y_k - \bar{y}}{s_y}.$$

Tässä $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ tarkoittavat kummastakin datasta laskettuja keskiarvoja, s_x ja s_y ovat vastaavasti keskihajonnat. Lauseke voidaan saattaa myös muotoon

$$r = \frac{n \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{\sqrt{n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2}},$$

jolloin tarvitsee laskea datasta vain summat, neliösummat ja tulosumma.

Korrelaatiokerroin on aina välillä $[-1, 1]$. Sen merkin mukaan puhutaan *positiivisesta* tai *negatiivisesta korrelaatiosta*. Mitä lähempänä ykköstä arvo on, sitä vahvempaa on ominaisuuksien esiintyminen yhdessä. Lähellä arvoa -1 oleva korrelaatiokerroin osoittaa vastaavasti, että ominaisuudet eivät yleensä esiinny samanaikaisesti.

Vahvan positiivisen korrelaation sanotaan usein tarkoittavan ominaisuuksien välistä riippuvuutta. Tästä ei kuitenkaan voida päätellä, että ominaisuuksien välillä olisi kausaalisuhde, ts. toinen olisi toisen syy. Kyse on vain siitä, että ominaisuudet käyttäytyvät samansuuntaisesti. Niillä saattaa esimerkiksi olla jokin kolmas ominaisuus yhteisenä syynä.

Kun korrelaatiokerroin lasketaan otoksesta, joudutaan erikseen miettimään sen merkitsevyyttä. Otoksen epäedustavuus tai pienuus saattaa johtaa siihen, että esimerkiksi korrelaatiokertoimen arvon $|r| \leq 0.5$ ei voida katsoa merkitsevästi poikkeavan nollasta.

Edellä olevassa Teknillisen korkeakoulun matematiikan peruskurssin välikokeita koskevassa esimerkissä välikoemenestysten välinen korrelaatiokerroin on 0.61.

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS:

Yleistä matematiikan merkinnöistä

Nykyään käytössä olevat matematiikan merkinnät ovat kehittyneet vuosisatojen kuluessa eivätkä monet niistä ole kovinkaan vanhoja. Varsin tavallista on, että jonkin osa-alueen alkuperäisten ideoiden luoja ei lainkaan tuntisi niitä merkintöjä, joita käyttäen hänen nimeään kantavat tulokset nykyään esitetään.

Esimerkiksi antiikin Kreikan geometriassa tarkasteltiin janojen pituuksien keskinäisiä suhteita, mutta ei ilmaistu näitä algebrallisin lausekkein kuten nykyään. Algebra levisikin arabimaista Eurooppaan vasta keskiajan lopulla. Vielä 1500-luvun algebralliset merkinnät — mm. potenssien merkintä — poikkesivat nykyisestä.

geometria
geometria
algebra

Isaac Newtonin tapa esittää differentiaali- ja integraalilaskenta 1600-luvun lopulla ei aivan helposti avaudu nykyajan lukijalle erilaisten merkintöjen ja osin käsitteidenkin takia; alan perustavat merkintätavat ovat peräisin sen toiselta kehittäjältä, Gottfried Wilhelm Leibnizilta. Suurimman osan differentiaali- ja integraalilaskennan merkinnöistä on kuitenkin vakiinnuttanut 1700-luvulla Leonhard Euler. Hän on myös ottanut käyttöön symbolit π, e ja i matematiikan tärkeille vakioille.

Newton
Leibniz
Euler
pii
Neperin luku
imaginaariyksikkö

Varsinkin painetussa tekstissä noudatetaan nykyään matematiikan merkinnöissä tapoja, joiden tarkoituksena on jäsentää lausekkeet mahdollisimman selvästi ja jo merkintätavalla osoittaa, minkä tyyppinen olio milloinkin on kyseessä.

Esimerkiksi erilaiset muuttujat, vakiot ja tarkemmin määräämättömät funktiot kirjoitetaan kursivoituina: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a), \quad f(x)$. Standardifunktioiden nimet sen sijaan kirjoitetaan antiikvalla: $\sin x$, $\log_a x$. (Johdonmukaista, mutta ei tavanomaista olisi lisätä näihin sulut: $\sin(x)$, $\log_a(x)$.)

Vektorit merkitään joko lihavoituina, $\mathbf{a}$, tai merkitsemällä viiva tai nuoli symbolin päälle, $\bar{a}$, $\vec{a}$.

Erikoistilanteissa käytetään myös esimerkiksi kaunokirjoitus-, fraktuura- tai muita symboleja: $\mathcal{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathbb{R}$.

Kreikkalaiset kirjaimet ovat varsin laajassa käytössä osoittamassa esimerkiksi kulmien suuruuksia tai usein skalaareja (vektorin vastakohtana).

Kreikkalaiset kirjaimet

Kreikkalaisia kirjaimia on 24. Näistä omikron lienee ainoa, jota matematiikassa ei käytetä.

pieni kirjain	iso kirjain	nimi
α	A	alfa
β	B	beeta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε, ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zeeta
η	H	eeta
ϑ, θ	Θ	theeta
ι	I	ioota
$\varkappa$, κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	myy
ν	N	nyy
ξ	Ξ	ksii
o	O	omikron
π	Π	pii
ϱ, ρ	P	rhoo
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	ypsilon
φ, ϕ	Φ	fii
χ	X	khii
ψ	Ψ	psii
ω	Ω	oomega

Esitiedot:
Katso myös: matemaatikot

Matematiikan osa-alueet

Perinteisesti matematiikka on tapana jakaa kolmeen osa-alueeseen: *aritmetiikka* (luvuilla laskeminen), *algebra* (kirjaimilla laskeminen) ja *geometria*. Aritmetiikan ja geometrian juuret ovat vanhassa ajassa, algebra on arabialaista syntyperää.

Omaksi alakseen on 1700-luvulta lähtien erotettava (*matemaattinen*) *analyysi*, ts. differentiaali- ja integraalilaskenta. Myös *trigonometriaa* voidaan pitää omana alueenaan 1500-luvulta lähtien.

Tätä jakoa on noudatettu koulumaailmassa 1960-luvulle saakka: Laskennon (aritmetiikan) jälkeen opiskeltiin algebraa ja geometriaa jossain määrin erillisinä oppiaineina. Myös trigonometria muodosti oman kokonaisuutensa. Analyysia ei kouluissa opiskeltu kovinkaan laajalti ennen 1960-lukua.

Kun matematiikkaa tarkastellaan tieteenalana, on em. jako vanhentunut viimeistään viime vuosisadalla. Algebra ja geometria ovat sekoittuneet, lukuteoria on itsenäistynyt eikä ole osa aritmetiikkaa, kokonaan uusia alueita on syntynyt.

Matematiikkaa sellaisena kuin se tällä hetkellä on, kuvatkoon seuraava jaottelu, joka on peräisin laajimmalle levinneestä matematiikan referaattilehdestä *Mathematical Reviews*, jossa lyhyesti esitellään uudet tieteelliset julkaisut (artikkelit ja kirjat). Lehteä julkaisee *American Mathematical Society* (Yhdysvaltain matemaattinen yhdistys).

Esitiedot:
Katso myös: matemaatikot

Mathematical Reviews -lehden ylimmän tason ryhmäjako

historia
matemaattinen logiikka
joukko-oppi
kombinatoriikka
järjestysrelaatiot, lattiisit
yleiset algebralliset systeemit
lukuteoria
kuntateoria ja polynomit
kommutatiiviset renkaat ja algebrat
algebrallinen geometria
lineaarinen ja multilineaarinen algebra, matriisit
assosiatiiviset renkaat ja algebrat
ei-assosiatiiviset renkaat ja algebrat
kategoriateoria, homologinen algebra
K-teoria
ryhmäteoria
topologiset ryhmät, Lien ryhmät
reaalifunktiot
mitta- ja integrointiteoria
kompleksimuuttujan funktiot
potentiaaliteoria
usean kompleksimuuttujan funktiot
erikoisfunktiot
tavalliset differentiaaliyhtälöt
osittaisdifferentiaaliyhtälöt
äärelliset differenssit, funktionaaliyhtälöt
jonot, sarjat, summautuvuus
approksimointi
Fourier-analyysi
abstrakti harmoninen analyysi
integraalimuunnokset, operaattorilaskenta
integraaliyhtälöt
funktionaalianalyysi
operaattoriteoria
variaatiolaskenta, optimaalinen säätö, optimointi
geometria
konveksi ja diskreetti geometria
differentiaaligeometria
yleinen topologia
algebrallinen topologia
monistot
globaali analyysi, analyysi monistoilla
todennäköisyyslaskenta, stokastiset prosessit
tilastotiede
numeerinen analyysi
tietojenkäsittelytiede
massapistemekaniikka
kiinteiden kappaleiden mekaniikka
nestemekaniikka
optiikka, sähkömagneettinen teoria
termodynamiikka, lämmön siirtyminen
kvanttiteoria
statistinen mekaniikka, aineen rakenne
suhteellisuus- ja gravitaatioteoria
tähtitiede ja astrofysiikka
geofysiikka
taloustiede, operaatiotutkimus, peliteoria
biologia, käyttäytymistieteet
systeemi- ja säätöteoria
informaatio ja kommunikaatio

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: matemaatikot

Matematiikan varhaishistoria

Matematiikan historia alkaa muinaisesta Egyptistä, Kaksoisvirranmaasta, Intiasta ja Kiinasta. Käytännölliset tehtävät kuten kauppa, maanmittaus ja hallinto vaativat laskutoimitusten suorittamista. Tätä varten kehitettiin sääntöjä, mutta nämä olivat mekaanisesti sovellettavia ohjeita, joiden perusteita ei yleensä pohdittu.

Matematiikka deduktiivisena tieteenä — jossa uudet tulokset loogisesti päätellään aiemmista — syntyi antiikin Kreikassa, jossa pääasiassa keskitytti in geometriaan. Kreikan matematiikassa on erotettavissa kaksi vaihetta, varhaisempi vuosien 600 – 100 eKr. välillä, myöhäisempi välillä 100 – 400 jKr. Edellinen keskittyi Aigeian meren äärelle, osittain Etelä-Italiaan, jälkimmäinen Aleksandriaan. Kreikan matematiikalla tarkoitetaankin yleensä vanhalla ajalla kreikkalaisen kulttuurin piirissä eri puolilla Välimerta harjoitettua matematiikkaa.

geometria

Antiikin matematiikka hiipui viimeistään 600-luvulla islamilaisten vallattua Aleksandrian ja tuhottua sen kirjaston.

Keskiajalla matematiikan harjoitus kukoisti arabimaailmassa, aluksi 800-luvulla Bagdadissa, myöhemmin Persiassa ja Samarkandissa. Arabit omaksuivat vaikutteita muinaisen Kaksoisvirranmaan aritmetiikasta, kreikkalaisesta geometriasta ja intialaisesta matematiikasta. Intiasta on peräisin kantalukuun 10 perustuva paikka- (positio-) järjestelmä lukujen merkitsemisessä sekä numeromerkit, jotka tosin ovat muuntuneet moneen kertaan. Arabikulttuurin piirissä alkoi algebran kehitys.

positiojärjestelmä

Arabikulttuurin saavutukset kulkeutuivat vähitellen myös Eurooppaan. 1100-luvulta lähtien käännettiin arabien ja myös antiikin kreikkalaisten teoksia. Laajemmin antiikin perinnöstä kiinnostuttiin renessanssiaikana 1400-luvulta lähtien.

Matematiikan historia renessanssiajasta lähtien

Renessassiaikana Euroopassa tutustuttiin algebraan ja alettiin 1500-luvulla kehittää sitä edelleen. Se muotoutui tällöin tehokkaaksi kalkyyliksi ja mahdollisti jo antiikin aikana käsiteltyjen geometristen probleemojen uuden tarkastelun. Samaan aikaan kehittyi myös trigonometria.

1600-luku kytki lopullisesti algebran ja geometrian: syntyi analyyttinen geometria (Descartes). Monet matemaatikot tutkivat mm. pinta-alanmääritystä ja käyrän tangenttien asettamista, mikä vuosisadan lopulla johti differentiaali- ja integraalilaskennan eli matemaattisen analyysin syntyyn (Newton, Leibniz).

geometria (analyyttinen)
Descartes
Newton
Leibniz

1700-luku merkitsi analyysin kehitystä ja muokkaamista tehokkaaksi työkaluksi (erityisesti Euler). Vuosisadan lopussa ranskalaiset vallankumousajan matemaatikot saattoivat soveltaa analyysia jo moniin matemaattisen fysiikan probleemoihin.

Euler

1800-luvulla analyysin kehitys vei tarpeeseen paneutua huolellisemmin käsitteiden määrittelyyn ja yleensäkin matematiikan perusteisiin, mikä johti abstraktiotason nousuun. Algebra, lukuteoria, geometrian perusteiden tutkimus kehittyivät voimakkaasti. Joukko-oppi ja matemaattinen logiikka syntyivät. Alkoi myös kehittyä näkemys matematiikasta logiikkaan pohjautuvana työkaluna, joka tarjoaa abstrakteja malleja erilaisten luonnon- tai muiden ilmiöiden kuvaamiseen. Matemaatikkoja oli aiempaa enemmän ja uusia osa-alueita syntyi. Tieteenalan yhtenäisyys — yksi henkilö saattoi pääpiirteissään hallita alan — alkoi pirstoutua.

joukko-oppi
logiikka

Kehitys on jatkunut samaan suuntaan 1900-luvulla.

1600-luvulta lähtien on analyysin tutkimuksen rinnalla kehittynyt numeerinen laskenta. Sen juurina ovat trigonometria ja logaritmit, mutta 1800-luvulta lähtien on syntynyt suuri määrä erilaisia numeerisia tekniikkoja, kehittäjinä usein luonnontieteiden ja tekniikan alojen soveltajat eivätkä niinkään varsinaiset matemaatikot. Tietokoneiden kehityksen myötä numeerinen analyysi on myös saavuttanut huomattavan korkean abstraktiotason ja yhteydet muihin matematiikan aloihin.

todennäköisyyslaskenta

Numeerisen analyysin ohella todennäköisyyslaskenta on vähitellen kehittynyt 1600-luvulta lähtien. Se sai 1900-luvun alkupuolella täsmällisen perustansa, jolla on yhtymäkohdat moniin muihin matematiikan osa-alueisiin.

Matemaatikot

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: matematiikka

Vanha aika, ennen Kristusta

Thales Miletolainen n. 600 eKr. Kreikkalainen matemaatikko ja filosofi, ilmeisesti varhaisin tunnettu länsimainen matemaatikko. Perehtyi matkoillaan Kaksoisvirranmaan ja Egyptin matematiikkaan ja ilmeisesti täten aloitti geometrian harrastuksen Kreikassa.

Thales (geometria)
Thales (Pythagoraan lause)

Pythagoras Samoslainen n. 580 – 500 eKr. Kreikkalainen matemaatikko, filosofi ja lukumystikko. Matkusteli Kaksoisvirranmaassa ja Egyptissä, keräsi myöhemmin ympärilleen koulukunnan Etelä-Italian Krotonissa. Nämä *pythagoralaiset* tutkivat kokonaislukuja ja niiden suhteita sekä löysivät mm. viisikulmion sivujen ja lävistäjien väliset irrationaaliset suhteet.

geometria
geometria
Pythagoras (geometria)
Pythagoras (lause)
irrationaaliluku

Platon n. 428 – 348 eKr. Kreikkalainen filosofi, Sokrateen oppilas. Platonin ajattelussa ja hänen ylläpitämässään oppilaitoksessa Ateenan Akademeiassa matematiikalla oli tärkeä asema. Varsinainen uutta luova matemaatikko ei Platon liene ollut.

Platon (geometria)

Eudoksos Knidoslainen n. 408 – 355 eKr. Kreikkalainen matemaatikko, Platonin Akatemian oppilas. Tutki suhteita ja verrantoja sekä määritti pinta-aloja *ekshaustiomenetelmällä*. Tätä voidaan pitää määrätyn integraalin perusidean ensimmäisenä esiintymisenä.

määrätty integraali

Eukleides Aleksandrialainen n. 300 eKr. Kreikkalainen matemaatikko, joka toimi Aleksandriaan perustetun koulun, Museionin, opettajana. Eukleides kirjoitti maailman kuuluisimman matematiikan oppikirjan *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*, suomeksi *Alkeet*. Kirja käsittelee geometriaa. Pohjana on edeltävien vuosisatojen useiden kreikkalaisten matemaatikkojen tutkimustulokset, mutta Stoikheia ei ole kokoomateos siihenastisesta matematiikasta vaan pikemminkin alkeisoppikirja. Esityksen pohjana ovat aksioomat, ja tulokset todistetaan näihin sekä aiemmin todistettuihin tuloksiin (teoreemoihin) perustuen.

Eukleides (pii)
Eukleides (integraali)
Eukleides (geometria)
Eukleides (geometria)
aksiooma
aksiooma

Arkhimedes n. 287 – 212 eKr. Syrakusalainen matemaatikko, fysiikan ilmiöiden ja tekniikan tutkija. Kehitti ekshaustiomenetelmää edelleen; löysi luvulle π arvion $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, jota tarkempi pystyttiin laskemaan vasta 1400-luvulla.

Arkhimedes (pii)
Arkhimedes (integraali)
Arkhimedes (geometria)
pii

Eratosthenes Kyreneläinen n. 276 – 194 eKr. Kreikkalainen tähtitieteilijä ja matemaatikko, joka tunnetaan maapallon ympärysmitan määrittämisestä ja alkulukujen etsimiseen käytetystä menetelmästä (*Eratostheneen seula*).

alkuluku

Apollonios Pergeläinen n. 262 – 190 eKr. Aleksandriassa opiskellut ja Pergamonissa vaikuttanut matemaatikko, joka kirjoitti kartioleikkauksia (ellipsejä, paraabeleja, hyperbelejä) käsittelevän kirjan *Konika*.

kartioleikkaus

Esitiedot:
Katso myös: matematiikka

Vanha aika, jälkeen Kristuksen

Heron Aleksandrialainen n. 60 jKr. Matematiikko ja insinööri, joka laski geometristen kuvioiden ja kappaleiden mittoja, pinta-aloja ja tilavuuksia. Näkökulma on pikemminkin käytännöllinen ja poikkeaa siten klassisesta kreikkalaisesta geometriasta. geometria

Ptolemaios, Klaudios n. 150 jKr. Aleksandriassa työskennellyt tähtitieteilijä ja matematiikko. Merkittävin teos on on arabialaisella nimellään tunnettu *Almagest*, jossa kehitetään trigonometriaa lähinnä tähtitieteen tarpeisiin. geometria Ptolemaios (trigonometria) trigonometria trigonometria

Diofantos Aleksandrialainen n. 250 jKr. Lukuteoriaa tutkinut matematiikko, pääteos *Arithmetica*.

Pappos Aleksandrialainen n. 300 jKr. Aleksandriassa vaikuttanut matematiikko, joka kirjoitti kommentaareja ja lisäyksiä Eukleideen ja Apollonioksen teoksiin. Näillä on myöhemmin ollut merkityksensä geometrian kehityksessä. Pappos (geometria)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: matematiikka

Keskiaika

al-Khwarizmi, Muhammed ibn Musa n. 780 – 850. Arabimatemaatikkojen ns. Bagdadin ryhmään kuulunut matemaatikko ja tähtitieteilijä, joka on merkittävästi vaikuttanut algebran kehitykseen, mm. ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöiden ratkaisemiseen. Vaikutteet ovat peräisin Babylonian, Persian, Intian ja Kreikan varhaisemmasta matematiikasta. algebra

Omar Khaijam n. 1048 – 1122. Persialainen runoilija, matemaatikko ja tähtitieteilijä, jotka ratkaisi toisen asteen yhtälön sekä algebrallisesti että geometrisesti ja kehitti geometrisen ratkaisun kolmannen asteen yhtälölle.

Nasir ad-Din at-Tusi, Abu Gafar Muhammed ibn Muhammed 1201 – 1272. Nimi kirjoitetaan myös muodossa Nasir Eddin. Maraghassa Persiassa työskennellyt matemaatikko, joka tutki erityisesti pallotrigonometriaa ja paralleeliaksiooman todistusta. pallokolmio pallokolmio paralleeliaksiooma

Oresme, Nicole n. 1323 – 1382. Ranskalainen skolastikko, joka kehitti suhteiden ja verrantojen käyttöön pohjautuvan teorian, joka vastaa murtolukupotenssien käyttöä. Tutki muuttuvia suureita graafisten esitysten avulla. paralleeliaksiooma paralleeliaksiooma

al-Kaši, Ghiyath ad-Din 1400-luvun alkupuolella. Samarkandissa toiminut persialainen matemaatikko, joka laski numeerisia laskuja sekä seksagesimaali- että desimaalijärjestelmässä. Laskenut 16-numeroisen likiarvon luvulle π. al-Kaši (pii) pii

Regiomontanus, Johannes (alkuaan Müller) 1436 – 1476. Königsbergistä (tästä nimi Regiomontanus) kotoisin oleva Unkarin hoviastronomi ja myöhemmin kirjankustantaja Nürnbergissä, joka kirjoitti länsimaiden ensimmäisen trigonometrian oppikirjan. Teoksessa näkyy arabimatematiikan vaikutus. Regiomontanus (trigonometria) trigonometria trigonometria

Matematiikot **4/15**

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: matematiikka

1500-luku

Leonardo da Vinci 1452 – 1519. Italian renessanssiajan taiteilija ja yleisnero, joka harrasti matematiikkaa, luonnontieteitä, tekniikkaa. Matematiikan historiassa mainittava lähinnä geometristen perspektiivilakien tutkijana. perspektiivikuva

Dürer, Albrecht 1471 – 1528. Saksalainen renessanssiajan taiteilija, joka tutki yksityiskohtaisesti perspektiivioppia ja deskriptiivistä geometriaa. geometria (deskriptiivinen)

Tartaglia, Niccolo 1500 – 1557. Oikeastaan Niccolo Fontano, nimi Tartaglia aiheutui hänen puheviastaan; italialainen. Löysi kolmannen asteen yhtälön algebrallisen ratkaisukaavan, jonka ilmaisi Cardanolle vaitiololupauksen saatuaan; Cardano kuitenkin julkaisi kaavan. Mahdollisesti idea ei ollut Tartagliankaan oma, sillä kaavan lienee jo aiemmin tuntenut myös italialainen Scipione del Ferro. Tartaglia (polynomiyhtälöt)

Cardano, Geronimo 1501 – 1576. Pohjoisitalialainen lääkäri, astrologi ja matemaatikko, joka algebraa käsittelevässä teoksessaan *Ars Magna* julkaisi kolmannen ja neljännen asteen yhtälön ratkaisukaavat. Edellinen oli peräisin Niccolo Tartaglialta, jälkimmäinen Ludovico Ferrarilta. Cardano lienee ensimmäisenä kiinnittänyt huomiota negatiivisten lukujen neliöjuuriin — kompleksilukuihin — mutta piti niitä hyödyttöminä. Cardano (polynomiyhtälöt) yhtälö (polynomi-) kompleksiluku

Viète, François 1540 – 1603. Nimi esiintyy myös latinalaisessa muodossa Franciscus Vieta. Ranskalainen juristi, joka harrasti matematiikkaa. Viète kehitti symboleiden käytön algebran perustaksi, taulukoi kaikkien kuuden trigonometrisen funktion arvot ja johti trigonometrian kaavoja. Viète (trigonometria) Viète (geometria) trigonometria trigonometria

Esitiedot:

Katso myös: matematiikka

1600-luvun alkupuoli

Napier, John 1550 – 1617. Nimi esiintyy myös muodossa Neper. Skotlantilainen kartanonherra ja matemaatikko, joka kehitti logaritmijärjestelmän numeeristen kerto- ja jakolaskujen helpottamiseksi. Neper ei itse käyttänyt kantalukuna Neperin lukua e, mutta jälkeenpäin on voitu todeta hänen järjestelmänsä olleen yksinkertaisessa suhteessa luonnollisiin logaritmeihin. Logaritmit korvasivat aiemman *prostafaireesi*-menettelyn, joka perustui trigonometrian kaavojen käyttöön. Samoihin aikoihin logaritmit keksi Napierista riippumatta sveitsiläissyntyinen Jobst Bürgi.

Napier (Neperin luku)
Napier (logaritmi)
Neperin luku
logaritmi (luonnollinen)

Briggs, Henry 1561 – 1630. Englantilainen Oxfordissa työskennellyt matemaatikko ja tähtitieteilijä, joka jatkoi Napierin työtä ja loi kymmenkantaisen logaritmijärjestelmän. Julkaisi logaritmitaulukot.

Briggs (logaritmi)

Galilei, Galileo 1564 – 1642. Italialainen tähtitieteilijä, fyysikko ja matemaatikko, joka tutki liikkuvien kappaleiden mekaniikkaa. Hän määritti myös tasokuvioiden pinta-aloja ajattelemalla nämä muodostetuiksi indivisiibeleistä, äärettömän pienistä osista; menettely on askel integraalilaskennan suuntaan. Galilei joutui inkvisitiotuomioistuimeen kopernikaanisten tähtitieteellisten näkemystensä takia.

Galilei (integraali)

Kepler, Johannes 1571 – 1630. Saksalainen tähtitieteilijä ja matemaatikko, joka tunnetaan lähinnä planeettaliikettä koskevista tähtitieteellisistä laeistaan. Tutki myös kartioleikkauksia.

kartioleikkaus

1600-luvun puoliväli

Desargues, Girard 1591 – 1661. Lyonissa vaikuttanut ranskalainen arkkitehti ja insinööri, joka tutki perspektiivioppia ja geometriaa ja jonka kirjoitukset loivat pohjan projektiiviselle geometrialle. Omaperäisyytensä takia ne jäivät omana aikanaan vähälle huomiolle.

Desargues (geometria)
geometria (projektiivinen)

Descartes, René 1596 – 1650. Nimestä käytetään myös latinalaista muotoa Cartesius. Ranskalainen filosofi ja matemaatikko. Loi analyyttisen geometrian (koordinaattigeometrian) perusteet pääteoksensa *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* satasivuisessa liitteessä *La géométrie*. Descartes kuoli Tukholmassa, jonne oli kuningatar Kristiinan kutsusta saapunut 1649.

Descartes (geometria)
geometria (analyyttinen)

Cavalieri, Bonaventura 1598 – 1647. Pohjoisitalialainen matemaatikko, Galilein oppilas. Määritti pinta-aloja, tilavuuksia ja painopisteitä indivisiibeleiden pohjalta kehitetyllä menetelmällä, ts. integraalilaskennan esimuotoa käyttäen.

Cavalieri (integraali)

de Fermat, Pierre 1601 – 1655. Ranskalainen lainoppinut ja humanisti Toulousesta, itseoppinut matemaatikko. Tutki pinta-alojen määrittämistä ja ääriarvotehtäviä menetelmillä, joista myöhemmin kehittyi differentiaali- ja integraalilaskenta. Tutki myös lukuteoriaa ja todennäköisyyslaskentaa. Fermat'n muistiinpanoista on löydetty marginaalimerkintä, jonka mukaan hän on keksinyt todistuksen, että yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole kokonaislukuratkaisua x, y, z, jos $n > 2$, mutta todistus ei mahdu marginaaliin. Tätä ns. *Fermat'n suurta lausetta* on yritetty moneen kertaan todistaa, mutta menestyksettä. Nyt (1995) sille on löytynyt todistus (Andrew Wiles), mutta tämä on erittäin pitkä ja pohjautuu pitkälle kehitettyihin teorioihin, joista ei Fermat'n aikana voinut olla minkäänlaista näkemystä.

Fermat (derivaatta)
Fermat (todennäköisyys)

Torricelli, Evangelista 1608 – 1647. Italialainen fyysikko ja matemaatikko, Galilein oppilas. Tutki tilavuuksien ja käyrien kaarenpituuksien määrittämistä menetelmillä, jotka johtivat integraalilaskennan syntyyn.

Pascal, Blaise 1623 – 1662. Ranskalainen matemaatikko ja uskonnollinen ajattelija. Matematiikassa Pascal tutki erityisesti projektiivista geometriaa ja erilaisia tasokäyriä sekä myöhemmin integrointiin johtaneita menettelyjä. Todennäköisyyslaskennasta hän oli kirjeenvaihdossa Fermat'n kanssa. Pascal rakensi myös mekaanisen laskukoneen.

Pascal (geometria)
Pascal (todennäköisyys)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: matematiikka

1600-luvun loppupuoli

Gregory, James 1638 – 1675. Skotlantilainen matemaatikko. Eräs monista, jotka 1600-luvun puolivälissä kehittivät päättymättömiä menettelyjä kuten sarjoja, tuloja ja ketjumurtolukuja ennen integraalilaskennan syntymistä. sarja

Newton, Isaac 1642 – 1727. Englantilainen matemaatikko, fyysikko ja taivaanmekaniikan tutkija, joka harrasti myös teologiaa ja alkemiaa; Cambridgen yliopiston matematiikan professori. Newton tutki erilaisia sarjakehitelmiä, loi differentiaali- ja integraalilaskennan (ulkoasultaan nykyisestä poikkeavassa 'fluksiokalkyylin' muodossa) sekä sovelsi tuloksia fysiikkaan ja taivaanmekaniikkaan johtaen mm. Keplerin lait yleisemmistä periaatteista. Newtonin pääteos *Philosophiae naturalis principia mathematica* ilmestyi vuonna 1687.

Newton (derivaatta)
Newton (iteraatio)
Newton (integraali)
Newton (merkinnät)
differentiaali

Leibniz, Gottfried Wilhelm 1646 – 1716. Leipzigissa syntynyt ja pääasiassa Hannoverissa vaikuttanut saksalainen matemaatikko, joka opiskeli myös teologiaa, juridiikkaa ja filosofiaa sekä toimi diplomaattina. Tutki sarjakehitelmiä ja päätyi differentiaali- ja integraalilaskennan luomiseen ilmeisestikin Newtonista riippumatta; nykyiset merkintätavat ovat suurelta osin peräisin Leibnizilta. Pääteos differentiaalilaskennan osalta *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantites moratur* vuodelta 1684. Ajautui prioriteettikiistaan Newtonin kanssa. Leibnizin kirjoituksissa esiintyy myös kompleksilukuja koskevia ajatuksia.

integraalifunktio
määrätty integraali
Leibniz (derivaatta)
Leibniz (integraali)
Leibniz (merkinnät)

Bernoulli, Jakob (Jacques) 1654 – 1705. Matematiikan professori Baselissa, Johann Bernoullin veli. Suku oli lähtöisin Antwerpenista ja monista sen jäsenistä tuli matemaatikkoja. Merkittävä differentiaali- ja integraalilaskennan sekä variaatiolaskennan kehittäjä; tutki myös todennäköisyyslaskentaa.

Bernoulli (derivaatta)
Bernoulli (todennäköisyys)

de l'Hospital, Guillaume François Antoine 1661 – 1704. Ranskalainen matemaatikko, joka kirjoitti oppikirjat differentiaali- ja integraalilaskennasta sekä kartioleikkausten analyyttisesta geometriasta.

Bernoulli, Johann (Jean) 1667 – 1748. Matematiikan professori Groningenissa Hollannissa ja veljensä Jakobin jälkeen Baselissa. Differentiaali- ja integraalilaskennan sekä differentiaaliyhtälöiden tutkija.

Valistusaika (1700-luku)

de Moivre, Abraham 1667 – 1754. Ranskalainen hugenotti, joka pakeni Nantesin ediktin kumoamisen jälkeen Englantiin, missä toimi opettajana. Tutki differentiaali- ja integraalilaskentaa, todennäköisyyslaskentaa.

Taylor, Brook 1685 – 1731. Englantilainen matemaatikko. Tutki differentiaali- ja integraalilaskentaa, interpolaatio- ja sarjateoriaa, perspektiivioppia.

Maclaurin, Colin 1698 – 1746. Skotlantilainen matematiikan professori. Tutki algebrallisten käyrien teoriaa, sarjateoriaa.

Bernoulli, Daniel 1701 – 1784. Johann Bernoullin poika, matematiikan professori Pietarissa, myöhemmin fysiikan professori Baselissa. Tutki matemaattista fysiikkaa.

Euler, Leonhard 1707 – 1783. Syntyisin Baselista, Johann Bernoullin oppilas, Daniel Bernoullin ystävä, työskenteli Pietarissa ja Berliinissä. Euler oli erittäin tuottelias ja antoi edellisen sadan vuoden aikana syntyneelle analyyttiselle geometrialle, differentiaali- ja integraalilaskennalle sekä sarjateorialle niiden yhtenäisen vakiintuneen muodon sekä muokkasi niistä tehokkaan kalkyylin. Luvun π, Neperin luvun ja imaginaariyksikön merkit ovat häneltä peräisin, samoin kompleksisten trigonometristen funktioiden ja logaritmin määrittely.

Euler (pii)
Euler (Neperin luku)
Euler (kompleksiluvut)
Euler (trigonometria)
Euler (derivaatta)
Euler (merkinnät)

d'Alembert, Jean Baptiste le Rond 1717 – 1783. Ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, ensyklopedisti, kirjeenvaihdossa Eulerin kanssa. Tutki algebran peruslausetta, raja-arvoja, differentiaaliyhtälöitä, matemaattista fysiikkaa.

Ranskan vallankumouksen ja Napoleonin aika

Lagrange, Joseph Louis 1736 – 1813. Italialais-ranskalainen matemaatikko, työskennellyt Torinossa, Berliinissä ja Pariisissa; École Polytechniquen ensimmäinen professori. Soveltanut differentiaali- ja integraalilaskentaa mekaniikkaan (pääteos *Mécanique analytique*), tutkinut funktioteoriaa, lukuteoriaa.

Lagrange (derivaatta)

Monge, Gaspard 1746 – 1818. Ranskalainen matemaatikko ja Napoleonin suosikki, École Polytechniquen professori. Loi deskriptiivisen geometrian sotilaallisen ja teknillisen suunnittelun apuvälineeksi.

geometria (deskriptiivinen)

de Laplace, Pierre Simon 1749 – 1827. Ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, École Militairen professori Pariisissa. Tutki taivaanmekaniikkaa (pääteos *Mécanique céleste*) ja matemaattista fysiikkaa, differentiaaliyhtälöitä ja todennäköisyyslaskentaa.

Laplace (derivaatta)

Laplace (todennäköisyys)

Legendre, Adrien-Marie 1752 – 1833. Ranskalainen matemaatikko, toimi opettajana École Militairessa, École Normalessa ja École Polytechniquessa. Tutki lukuteoriaa, elliptisiä integraaleja sekä kirjoitti oppikirjan alkeisgeometriasta.

Fourier, Jean-Baptiste-Joseph 1768 – 1830. Ranskalainen matemaatikko, École Normalen ja École Polytechniquen professori, Napoleonin suosikki. Loi lämpöoppia käsittelevässä teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* myöhemmin Fourier-analyysina tunnetun matematiikan alan.

Fourier (derivaatta)

Gauss, Carl Friedrich 1777 – 1855. Saksalainen matemaatikko, Göttingenin yliopiston professori, joka toimi myös Berliinissä, Wienissä, Pariisissa ja Pietarissa. Tutki erittäin monia aloja: algebran peruslauseen todistus väitöskirjassa vuonna 1799, lukuteoriaa käsittelevä *Disquisitiones arithmeticae* 1801, planeettojen ratalaskuja, differentiaaligeometrian perusteet, sarjojen suppeneminen ja hajaantuminen, kompleksitason käsite (jonka oli aiemmin esittänyt norjalaissyntyinen Caspar Wessel, mutta työ jäi vaille huomiota tanskankielisenä).

Gauss (polynomiyhtälöt)

Gauss (derivaatta)

Gauss (geometria)

algebran peruslause

sarja

kompleksitaso

Poisson, Siméon-Denis 1781 – 1840. Ranskalainen, Lagrangen ja Laplacen oppilas. Tutki matemaattista fysiikkaa.

Bolzano, Bernard 1781 – 1848. Tšekkiläinen. Esitti modernin funktiokäsitteen määrittelyn (vastakohtana analyyttiselle lausekkeelle).

Poncelet, Jean-Victor 1788 – 1867. Ranskalainen insinööriupseeri ja matemaatikko, Mongen oppilas. Loi uuden näkökulman projektiiviseen geometriaan jouduttuaan vangiksi Napoleonin Suuren armeijan Venäjän retkellä.

Poncelet (geometria)

geometria (projektiivinen)

ESITIEDOT:
KATSO MYÖS: matematiikka

1800-luvun puoliväli

Cauchy, Augustin Louis 1789 – 1857. Ranskalainen matemaatikko, joka mm. toimi professorina École Polytechniquessa ja Sorbonnen yliopistossa. Cauchy esitti teoksessaan *Cours d'analyse* modernit määritelmät analyysin peruskäsitteille, kuten raja-arvolle, jatkuvuudelle, differentioituvuudelle. Tutkimuksia myös ryhmäteoriasta, funktioteoriasta, differentiaaliyhtälöistä.

Cauchy (kompleksiluvut)
Cauchy (derivaatta)
Cauchy (integraali)
analyysi

Babbage, Charles 1792 – 1871. Englantilainen matematiikan professori, joka tunnetaan pyrkimyksistään rakentaa ohjelmoitava mekaaninen laskukone. Babbage ei itse saanut konetta toimimaan, mutta myöhemmin tässä onnistuttiin.

Lobatševski, Nikolai Ivanovitš 1793 – 1856. Venäläinen matemaatikko, Kazanin yliopiston matematiikan professori. Loi epäeuklidisen geometrian ja osoitti täten mahdottomaksi todistaa paralleeliaksiooma muista geometrisista aksioomista lähtien. Samaan tulokseen oli Gauss ilmeisesti päätynyt jo aiemmin, mutta julkaisematta asiasta mitään.

Lobatševski (geometria)
geometria (epäeuklidinen)
geometria (epäeuklidinen)
paralleeliaksiooma
paralleeliaksiooma
paralleeliaksiooma

Abel, Niels Henrik 1802 – 1829. Norjalainen matemaatikko, joka osoitti, että viidennen asteen yhtälöä ei yleisessä tapauksessa voida algebrallisesti ratkaista. Tutkinut lisäksi ryhmäteoriaa ja elliptisiä funktioita.

Bolyai, Janos 1802 – 1860. Unkarilainen upseeri ja matemaatikko, joka Lobatševskista riippumatta keksi epäeuklidisen geometrian.

Abel (polynomiyhtälöt)
Bolyai (geometria)

Jacobi, Karl Gustav Jacob 1804 – 1851. Saksalainen Königsbergissä ja Berliinissä vaikuttanut matemaatikko. Tutki mm. elliptisiä funktioita ja mekaniikkaa.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 1805 – 1859. Ranskalais-saksalainen matemaatikko, Gaussin seuraaja Göttingenissä. Tutki lukuteoriaa Gaussin teosten pohjalta, trigonometrisia sarjoja, potentiaaliteoriaa.

Hamilton, William Rowan 1805 – 1865. Irlantilainen. Tutki kompleksilukuja ja kehitti näiden yleistyksenä kvaternioalgebran. Tästä voidaan katsoa kehityksen abstraktiin algebraan alkaneen.

Hamilton (geometria)

de Morgan, Augustus 1806 – 1871. Englantilainen. Tutki formaalia logiikkaa.

logiikka

Galois, Evariste 1811 – 1832. Nuorena kaksintaistelussa kuollut ranskalainen matemaatikko. Tutki algebrallisia yhtälöitä, ryhmästruktuureja.

ESITIEDOT:

KATSO MYÖS: matematiikka

1800-luvun loppupuoli

Sylvester, James Joseph 1814 – 1897. Englantilainen matemaatikko ja juristi. Tutki algebrallisia yhtälöitä, matriiseja ja determinantteja. determinantti

Boole, George 1815 – 1864. Englantilainen formaalin logiikan ja algebran tutkija. logiikka

Weierstrass, Karl 1815 – 1897. Saksalainen matemaatikko, aluksi oppikoulunopettaja, myöhemmin Berliinin yliopiston professori. Reaali- ja kompleksifunktioiden teorian kehittäjä, joka mm. konstruoi jatkuvan funktion, joka ei missään pisteessä ole derivoituva. (Tällaisen oli Bolzano tosin esittänyt aiemmin, mutta työtä ei tunnettu.)

Kronecker, Leopold 1823 – 1891. Saksalainen algebrikko ja lukuteoreetikko, konstruktivistisen matematiikan kannattaja ja joukko-opillisten näkemysten vastustaja.

Tšebyšev, Pafnuti Lvovitš 1821 – 1894. Venäläinen, professori Pietarissa. Tutki analyysin eri aloja, erityisesti approksimaatioteoriaa.

Cayley, Arthur 1821 – 1895. Englantilainen algebrikko ja juristi, joka tutki mm. matriiseja ja abstrakteja ryhmiä.

Hermite, Charles 1822 – 1901. Ranskalainen, Sorbonnen yliopiston professori. Tutki analyysin ja algebran eri aloja. Hermite (Neperin luku)

Riemann, Bernhard 1826 – 1866. Saksalainen matemaatikko, joka tutki funktioteorian perusteita, differentiaaligeometriaa. Riemann (kompleksiluvut) Riemann (integraali)

Esitiedot:

Katso myös: matematiikka

Vuosisadan vaihde 1800 – 1900

Dedekind, Richard 1831 – 1916. Saksalainen; lukukäsite, erityisesti irrationaaliluvut, joukko-oppi. irrationaaliluku

Gibbs, Josiah Willard 1839 – 1903. Amerikkalainen fyysikko; vektorianalyysi. Gibbs (geometria)

Lie, Sophus 1842 – 1899. Norjalainen; ryhmäteoria.

Schwarz, Hermann Amandus 1843 – 1921. Saksalainen; analyysi ja sen geometriset sovellukset.

Cantor, Georg 1845 – 1918. Saksalainen; joukko-oppi, lukukäsite. joukko-oppi

Mittag-Leffler, Gösta 1846 – 1927. Ruotsalainen; funktioteoria.

Klein, Felix 1849 – 1925. Saksalainen; geometria, ryhmäteoria, topologia.

Kovalevskaja, Sonja 1850 – 1891. Venäläinen, Weierstrassin oppilas, professori Tukholmassa; differentiaaliyhtälöt.

Poincaré, Henri 1854 – 1912. Ranskalainen; funktioteoria, differentiaaliyhtälöt, matemaattinen fysiikka, topologia. Poincaré (kompleksiluvut)

Markov, Andrei Andrejevitš 1856 – 1922. Venäläinen; todennäköisyyslaskenta.

1900-luvun alku

Picard, Émile 1856 – 1941. Ranskalainen; funktioteoria, differentiaaliyhtälöt.

Pearson, Karl 1857 – 1936. Englantilainen; tilastotiede.

Peano, Giuseppe 1858 – 1932. Italialainen; logiikka, luonnolliset luvut, analyysi.

Volterra, Vito 1860 – 1940. Italialainen; integraaliyhtälöt.

Hilbert, David 1862 – 1943. Saksalainen; logiikka, algebra, geometrian perusteet, analyysin eri alat.

Hilbert (geometria)
Hilbert (logiikka)

Hadamard, Jacques 1866 – 1963. Ranskalainen; funktioteoria, differentiaaliyhtälöt.

Hausdorff, Felix 1868 – 1942. Saksalainen; joukko-oppi, topologia.

Lindelöf, Ernst 1870 – 1946. Suomalainen; funktioteoria.

Zermelo, Ernst 1871 – 1953. Saksalainen; joukko-oppi.

Borel, Émile 1871 – 1956. Ranskalainen; funktioteoria, mittateoria.

Carathéodory, Constantin 1873 – 1950. Kreikkalais-saksalainen; funktioteoria, integrointiteoria.

Baire, René-Louis 1874 – 1932. Ranskalainen; reaalifunktioiden teoria.

Lebesgue, Henri 1875 – 1941. Ranskalainen; reaalifunktioiden teoria, mitta- ja integrointiteoria.

Lebesgue (integraali)

Schmidt, Erhard 1876 – 1959. Virolais-saksalainen; funktionaalianalyysi.

Hardy, Godefrey Harold 1877 – 1947. Englantilainen; analyysi.

Riesz, Frigyes 1880 – 1956. Unkarilainen; funktionaalianalyysi.

Noether, Emmy 1882 – 1935. Saksalainen; algebra.

Haar, Alfred 1885 – 1933. Unkarilainen; funktionaalianalyysi.

Weyl, Hermann 1885 – 1955. Saksalais-amerikkalainen; matemaattinen fysiikka, algebra.

Ramanujan, Srinivasa 1887 – 1920. Intialainen; analyyttinen lukuteoria, asymptoottiset kaavat.

Banach, Stefan 1892 – 1945. Puolalainen; funktionaalianalyysi.

Esitiedot:
Katso myös: matematiikka

1900-luvun puoliväli

Wiener, Norbert 1894 – 1964. Amerikkalainen; Fourier-analyysi, funktionaalianalyysi, kybernetiikka.

Nevanlinna, Rolf Herman 1895 – 1980. Suomalainen; funktioteoria. Nevanlinna (kompleksiluvut)

von Neumann, Johann (John) 1903 – 1957. Unkarilais-amerikkalainen; logiikka, funktionaalianalyysi, peliteoria.

Kolmogorov, Andrei Nikolajevitš 1903 – 1987. Venäläinen; todennäköisyyslaskenta. Kolmogorov (todennäköisyys) Kolmogorov (todennäköisyys) todennäköisyyslaskenta

Gödel, Kurt 1906 – 1978. Itävaltalais-amerikkalainen; matemaattinen logiikka.

Turing, Alan 1912 – 1954. Englantilainen; logiikka, laskettavuuden teoria.

Esitiedot:

Katso myös: matematiikka

Kirjallisuutta

Edellä olevan lähteinä ja sopivana lisälukemisena ovat seuraavat teokset:

Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 1968, 1989, 1991; suomennettu nimellä Tieteiden kuningatar, matematiikan historia I, II, Art House, 1994.

E. T. Bell, The Development of Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1940, 1945.

E. T. Bell, Matematiikan miehiä, WSOY, 1963.

Herbert Meschkowski, Mathematiker-Lexikon, Hochschultaschenbücher 414, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1964.

John Daintith, R. D. Nelson (toim.), The Penguin Dictionary of Mathematics, Penguin Books, 1989.

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

Ka – Kl

Ko – Kä

L

M

N

O

Pa – Pl

Po – Pä

R

S

T – U

V – W

Y – Ä