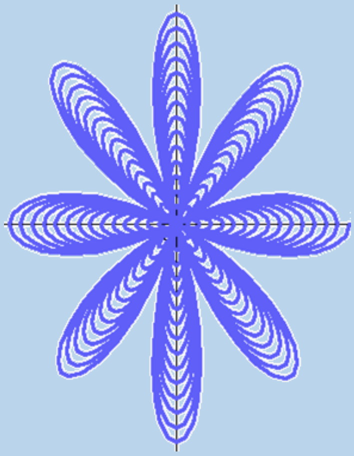
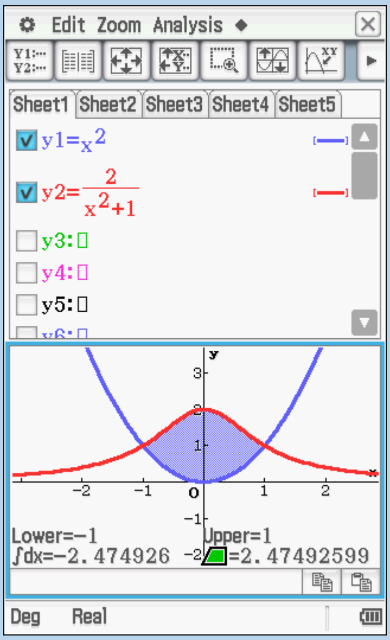
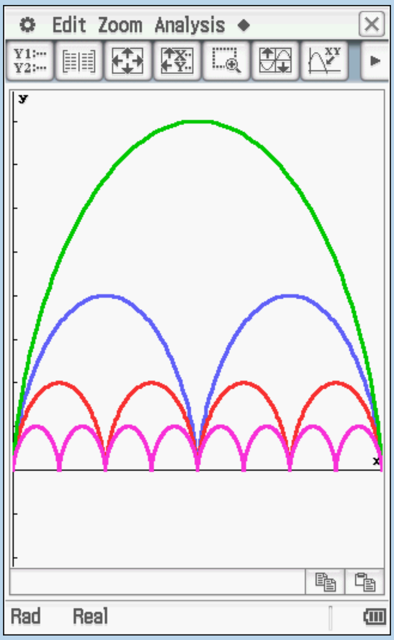
Casio Scandinavia AS

Laskuissa mukana ClassPad II fx-CP400 toisen asteen opintoihin







Tor Andersen

Suomeksi toimittanut:
Pepe Palovaara

Tästä ohjekirjasta:

Tämä käyttöesimerkkejä sisältävä Casio ClassPad II fx-CP400 -laitteelle suunniteltu ohjekirja kuuluu sarjaan ohjekirjoja, jotka Tor Andersen on kirjoittanut Casio-laskimille. Ohjekirjat on suunnattu erityisesti toisen asteen opiskelijoille. Tämä esimerkein varustettu opas antaa vinkkejä tehtävien ratkaisuun toisen asteen opintojen eri vaiheissa.

Esimerkkien näyttökuvat ovat englanninkielisestä käyttöliittymästä, mutta käyttäjä voi halutessaan vaihtaa käyttökieleksi suomen System-sovelluksen kautta. (toim.huom.)

Esimerkit eivät korvaa laitteelle suunniteltua ja sen mukana tulevaa käyttäjän käsikirjaa, vaan ne täydentävät tätä helpottaen laskimen käyttöä matematiikan opiskelussa.

Kirjoittaja: Tor Andersen (tor.andersen@ude.oslo.kommune.no)

Tor Andersen toimii opetushallinnon erikoiskonsulttina Oslossa sijaitsevassa "Pedagogisen kehityksen ja laadun instituutissa" (Institutionen för pedagogisk utveckling och kvalitet).

Hän on kirjoittanut matematiikan oppikirjoja ja julkaissut Casio-laskinten ja -ohjelmistojen käyttäjille suunnattua kirjallisuutta. Tor Andersen toimii myös Casionytt-julkaisun toimittajana.

Tämä ohjekirja on kirjoitettu Casio-laskimelle ClassPad II fx-CP400.

ESIPUHE

Tämä kirja ei korvaa ohjekirjaa, mutta sen tarkoitus on tukea laskimen käyttöä matematiikan tunneilla lukioissa ja ammattikouluissa. Esimerkit ja tiedot perustuvat keskeiseen oppiainekseen.

Ensimmäisissä luvuissa on kuvatta laskimen käyttöä yksityiskohtaisemmin – aina näppäinpainalluksia myöten. Toivottavasti nämä ohjeet auttavat niitä käyttäjiä, jotka eivät ole aiemmin käyttäneet laskinta.

Tämän kirjan tarkoitus ei ole myöskään korvata matematiikan oppikirjoja. Kirjassa on myös esimerkkejä ilman, että aiheeseen liittyvää teoriaa on ensin käsitelty. Tämän takia kirjaa tulisi käyttää oppikirjojen rinnalla. Tämä kirja ei myöskään sisällä erillistä tehtäväkirjaa harjoittelua varten.

Casion ClassPad II fx-CP400 mukana tuleva käyttöohje on hyvin kattava. Siinä on paljon sellaisiakin komentoja ja toimintoja, joita ei ole kuvattu tässä kirjassa. Olemme asettaneet etusijalle yleisimmin toisen asteen opinnoista käytettävät toiminnot, jotta laskinta voisi käyttää mahdollisimman hyvin hyödyksi opiskelussa.

Haluan kiittää Kjell Skajaata Casio Scandinavia AS:stä hyvästä yhteistyöstä ja hänen avustaan tämän ohjekirjan tekemisessä.

Oslossa - syyskuussa 2013

Tor Andersen

tor.andersen@ude.oslo.kommune.no

Contents

1. Aloitus

1.1 Päävalikko

Kytke CP400-laskimen virta painamalla 

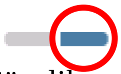
. Virta katkaistaan painamalla ensin 

ja sitten 

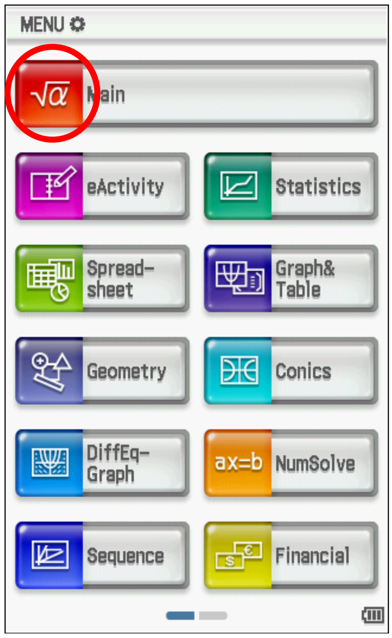
. Kosketuskynä on upotettuna laskimen päädyssä ja ponnahtaa esiin, kun sitä hieman painetaan sisäänpäin.

Kun laskin käynnistetään, seuraava näyttö ilmestyy näkyviin. Katso kuva alla vasemmalla.

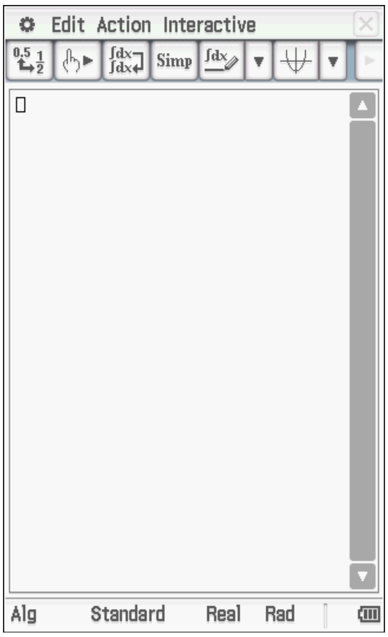
Päävalikko.

Paina  .
Näet päävalikon sivun 2.

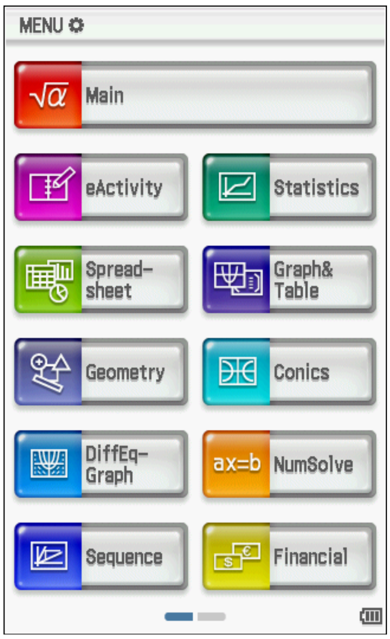
Valitse Main.



Pääsovellus avautuu.

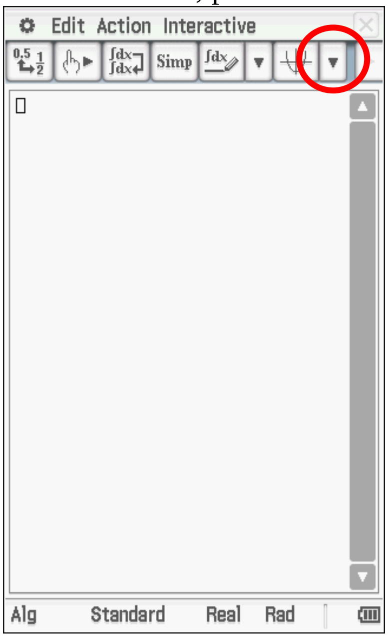


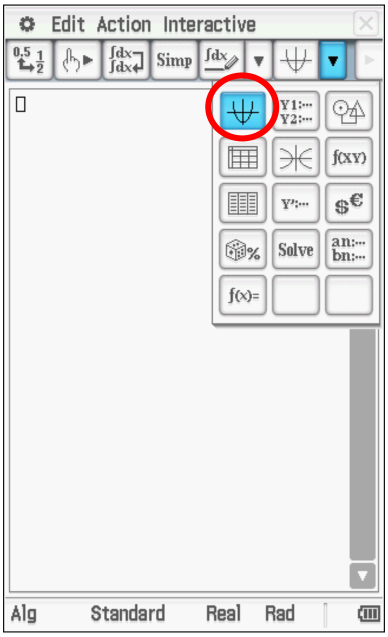
Takaisin päävalikkoon.

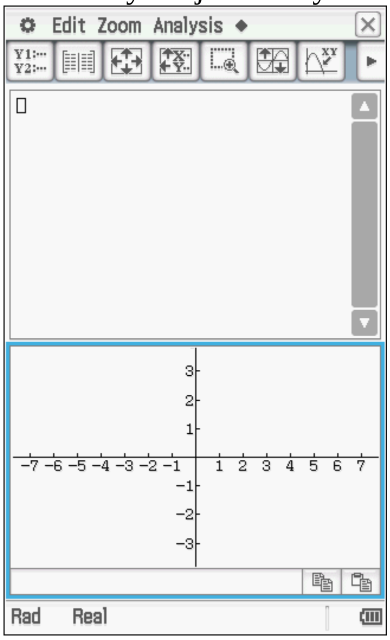


1.2 Jaettu näyttö sekä vedä ja pudota -toiminto

Main –sovellus, paina nuolta. Valitse. Laskin näyttää jaetun näytön.

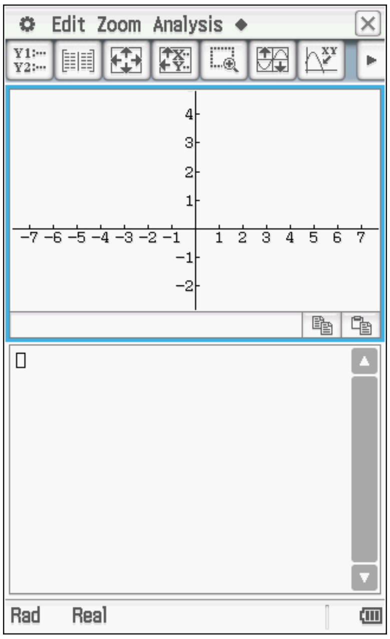


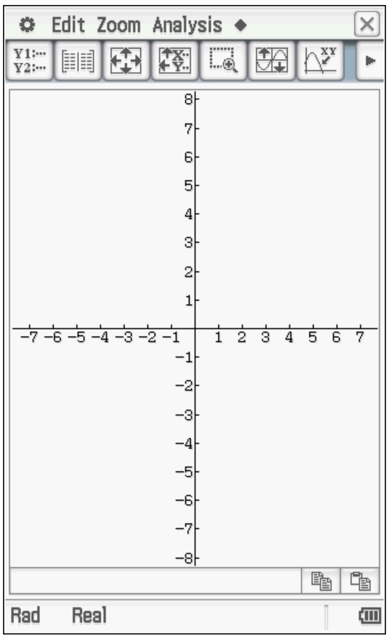


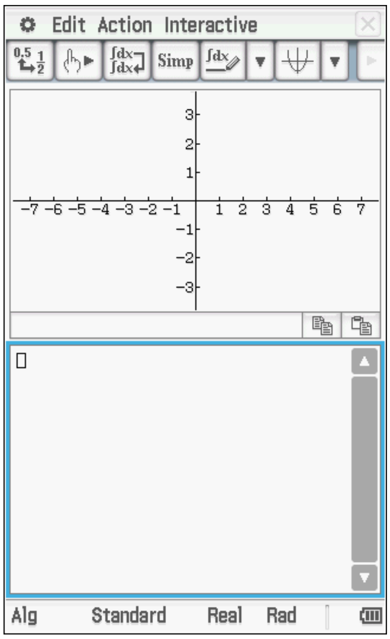


Kuvassa ylhäällä oikealla jaettu näyttö, jossa ylhäällä Main-sovellus ja sen alapuolella koordinaatisto. Main-sovelluksen ikkunan voi jakaa 13 eri sovelluksen kesken.

Valitse uudelleen Resize.

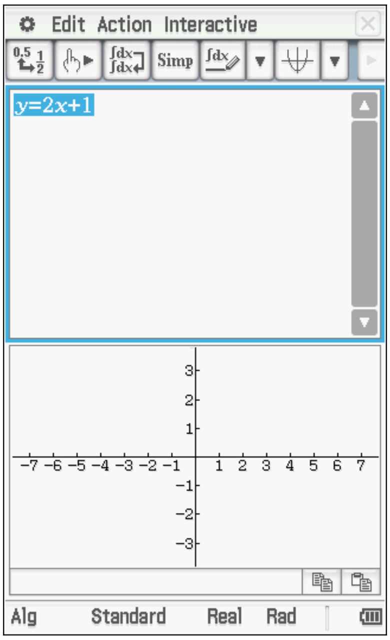




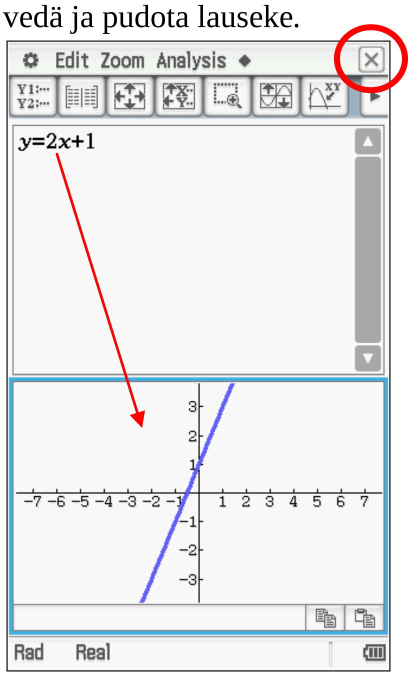


Valitse Main-ikkuna napauttamalla sitä. Aktiivisessa ikkunassa on sininen kehys ja Resize-komento suurentaa aina sillä hetkellä valitun aktiivisen ikkunan.

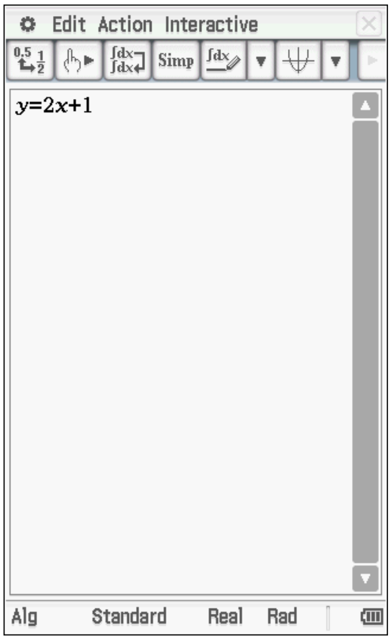
Syötä y=2x+1
Valitse kosketuskynällä.



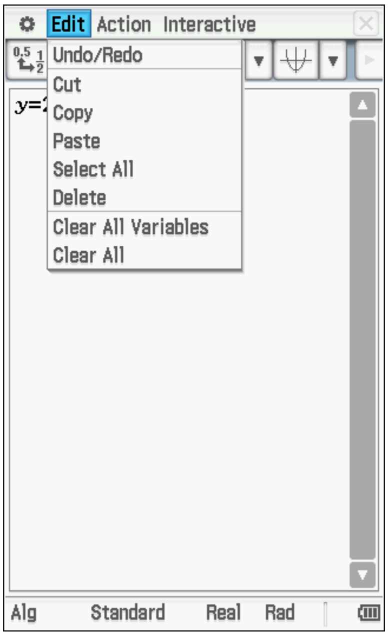
Nosta kynä hetkeksi,
vedä ja pudota lauseke.



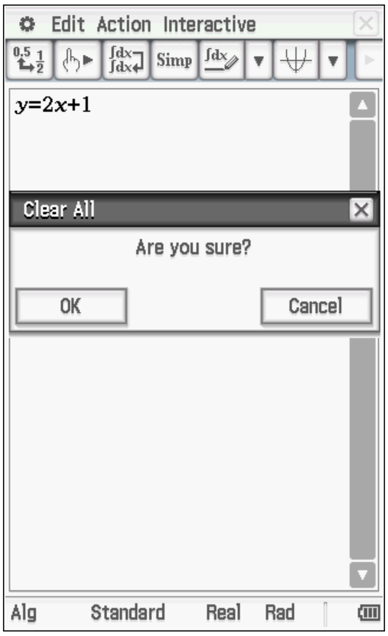
Sulje koordinaatisto painamalla X-näppäintä.



Valitse Edit ja Clear All.



Paina OK.



Voit oppia lisää Edit-toiminnoista seuraavassa kappaleessa.

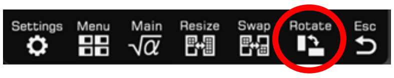
Edit, Clear All tyhjentää aktiivisen sovelluksen tiedot. Jos tyhjennät Main-sovelluksen, esim. Geometry-sovelluksen tiedot jäävät ennalleen.

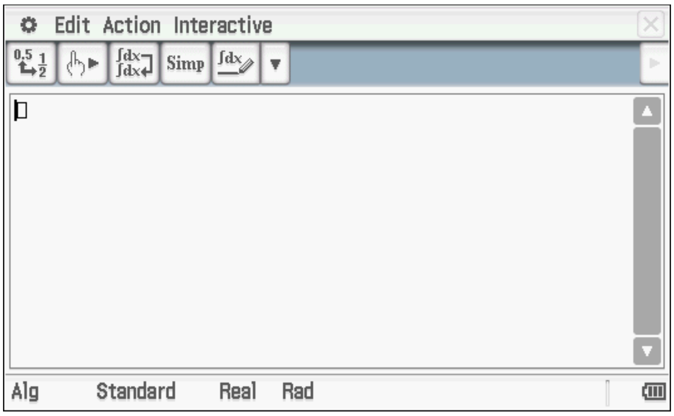
Kaikkien sovellusten tiedot voi poistaa päävalikon sovelluksesta System, Reset, ”All of the above” -> Reset, OK.

Huomaa! Laskimeen on mahdollisuus tallentaa muuttujille arvoja. Tällöin esim. muuttujalle x voi antaa arvon 2. Tämän jälkeen muuttuja x on 2 jokaisessa sovelluksessa. Jos haluat nopeasti päästä eroon tallettamistasi muuttujan arvoista, käytä valikko Edit, Clear All Variables.

Jos haluat poistaa muuttujia yksitelle, ks. luku 2.14 Muuttujien käyttö.

1.3 Vaakanäyttö





Kääntää näytön vaakasuoraan Main-sovelluksessa.

Vaakanäyttö sopii erityisesti pitkien lausekkeiden tarkasteluun.

Takaisin pystysuoraan näyttötilaan pääset painamalla uudelleen Rotate.

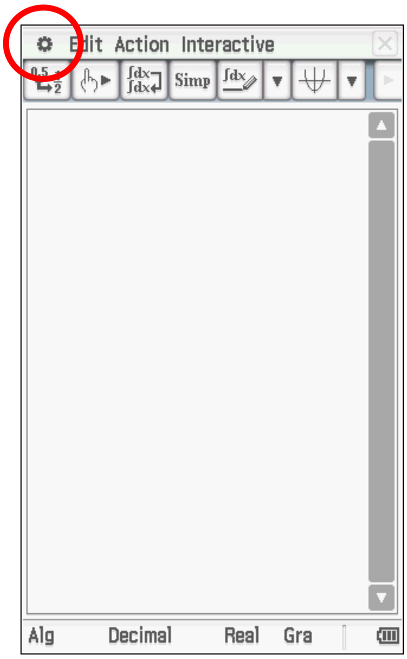
1.4 Asetukset

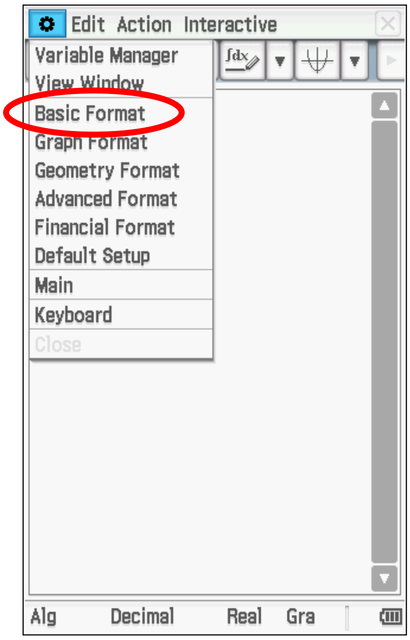
Voit muokata ohjelmien asetuksia painamalla 

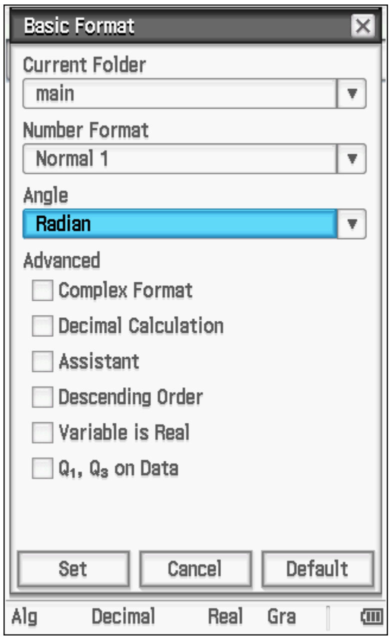
Valitse Main ja paina.

Valitse Basic Format.

Vahvista valinta painamalla SET.







Asetukset näkyvät ikkunan alalaidassa.

Paina Rad ja tarkkaile mitä tapahtuu.

Lisätietoja asetuksista löydät käyttäjän oppaasta. Voit vaihtaa nopeasti esim. asteiden ja radiaanien välillä pelkästään koskemalla kynällä näytön alareunan tekstiä Rad.

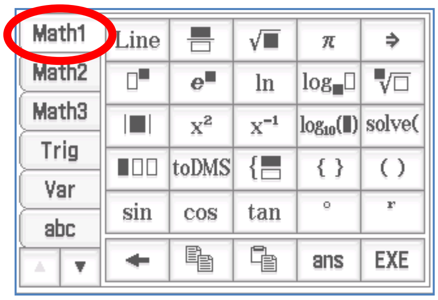
1.5 Virtuaalinäppäimistö

CP400-laite on varustettu lisänäppäimistöllä. Tämä näppäimistö ilmestyy näkyviin, kun painat painiketta 

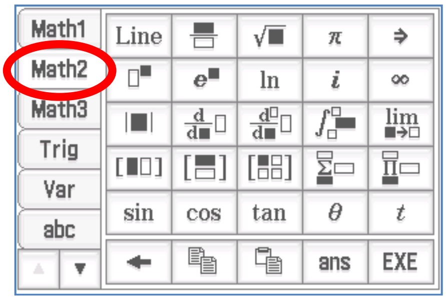
.

Saat virtuaalinäppäimistön katoamaan painamalla samaa painiketta uudelleen.

Tässä on valittu Math1.



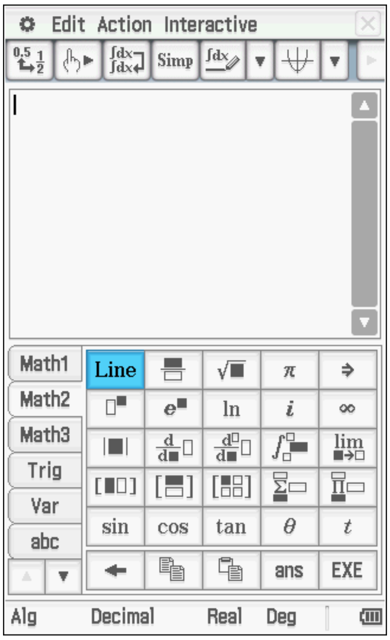
Math2



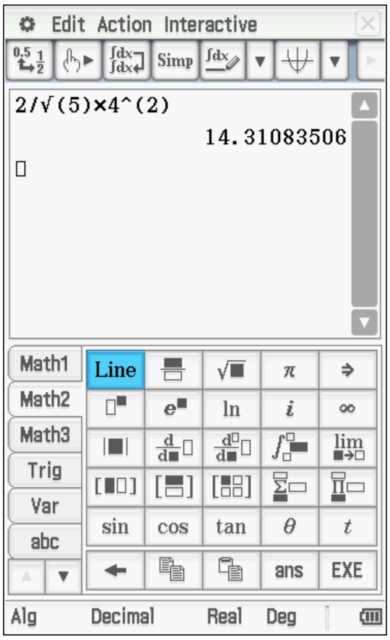
Tutustu näyttönäppäimistön eri painikkeiden toimintaan kokeilemalla niitä.

Huomaa!

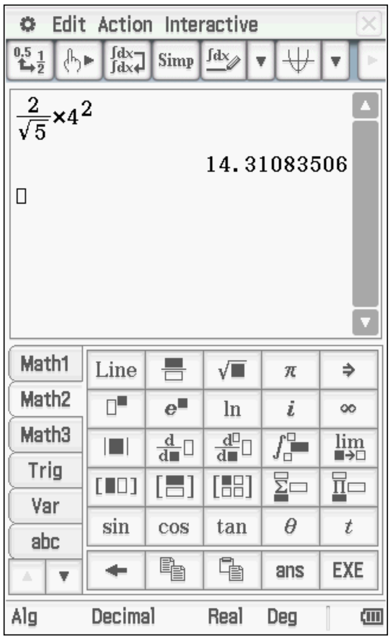
Tässä on valittuna Line.



Laskut tulevat yhdelle riville.



Line pois -> oppikirjamuoto

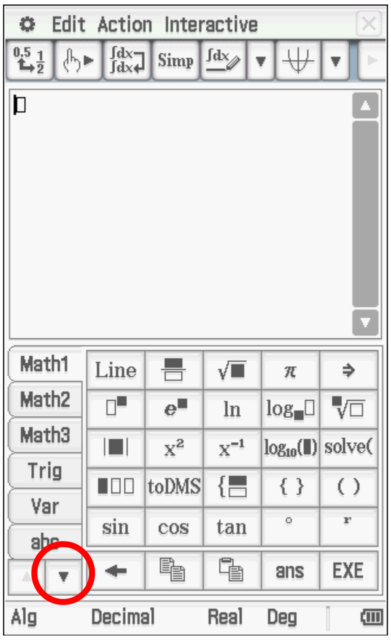


Keskimmäisestä kuvasta näkyy, kuinka laite näyttää murtoluvut, neliöjuuret ja potenssit, kun Line-toiminto on valittuna. Tässä ohjekirjassa Line-toimintoa ei käytetä. Murtoluvut, potenssit, neliöjuuret ja matemaattiset lausekkeet näytetään oppikirjamuodossa.

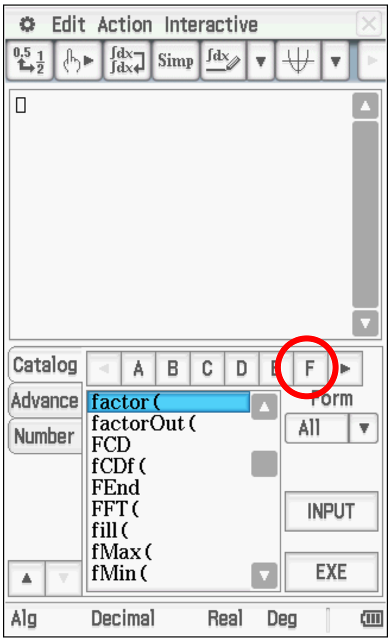
1.6 Luettelo

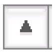
Luettelosta (Catalog) löydät laitteen kaikki komennot ja toiminnot. Suuri osa ja eniten käytetyt komennot on myös alasvetovalikoissa.

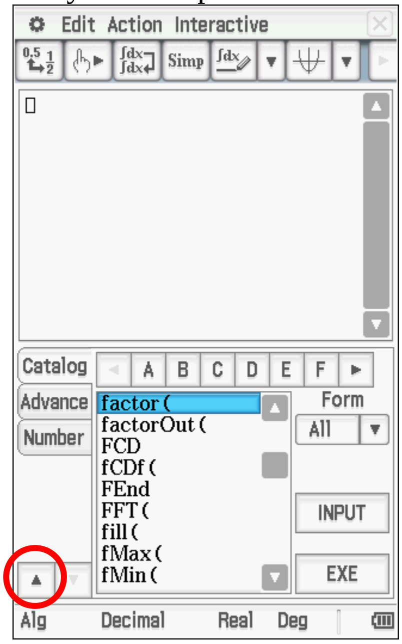
Valitse Main. Paina 



Paina esimerkiksi F.

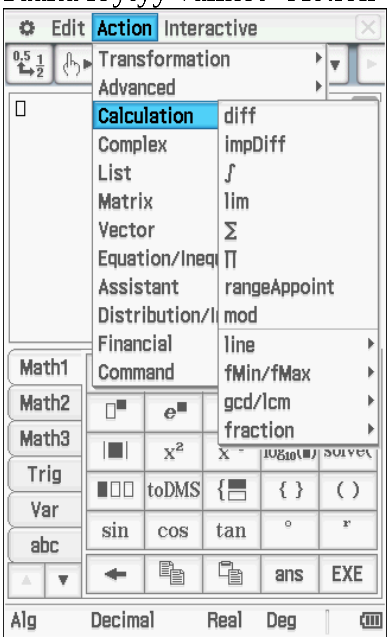


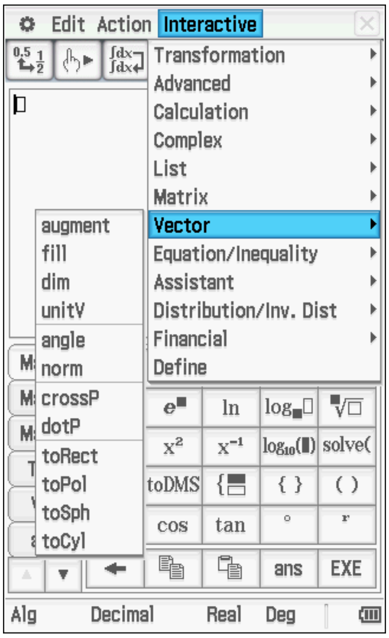
Siirry takaisin painamalla 



Huomaa!

Täältä löytyy valikot "Action" ja "Interactive".





Action-valikko on niille, jotka haluavat käyttää laskinta komentojen avulla. Tällöin pitää tietää laskimen syntaksi, esim. diff(f(x),x,2,4).

Koska em. tapa vaatii käyttäjältä paljon opettelua, on laskimeen kehitetty **Interactive-valikko**, jolloin **syntaksia ei tarvitse tietää**.

Esim. kirjoita funktion lauseke, maalaa se kynällä ja valitse Interactive, Calculation, diff, jolloin **laskin** kysyy derivointiin vaikuttavat seikat ja **täydentää käskyt käyttäjän puolesta**.

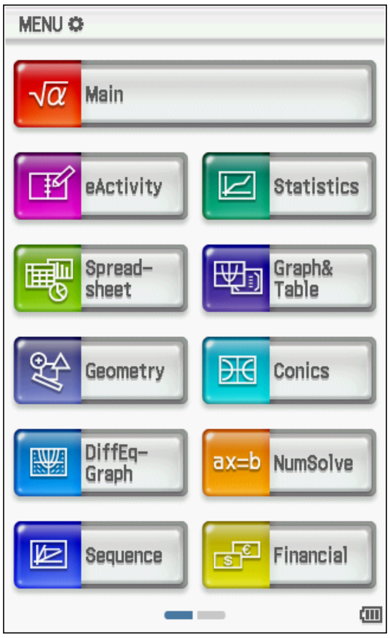
2. Peruslaskenta

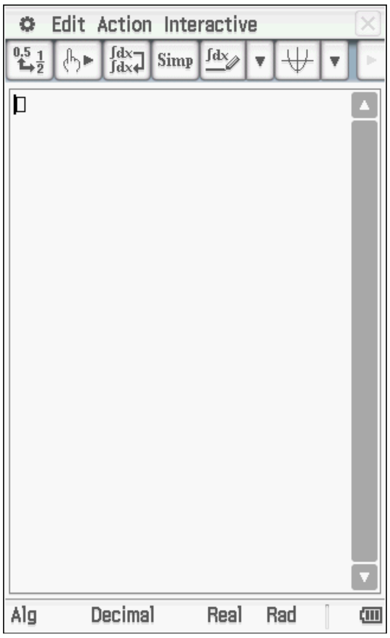
2.1 Yhteen- ja vähennyslasku

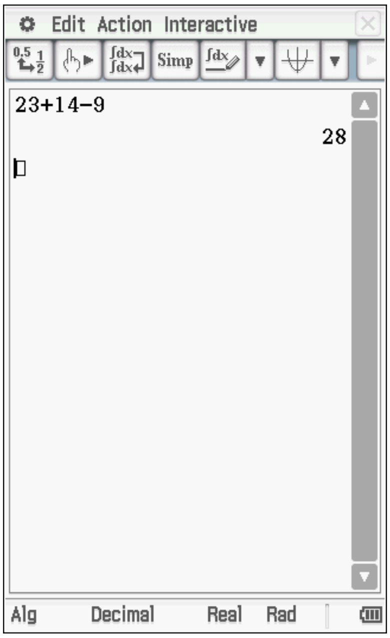
Laske: $23+14-9=$

MENU. Valitse Main

Syötä laskulauseke.
Paina EXE.



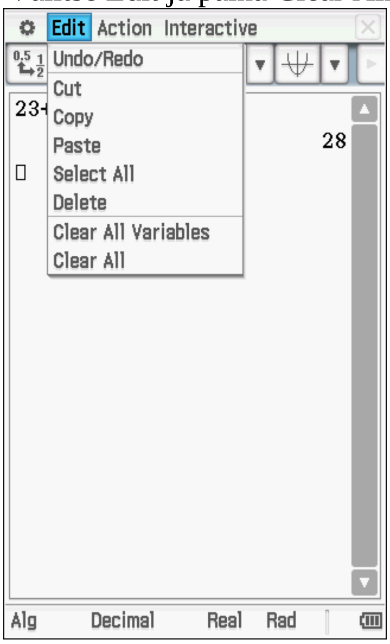


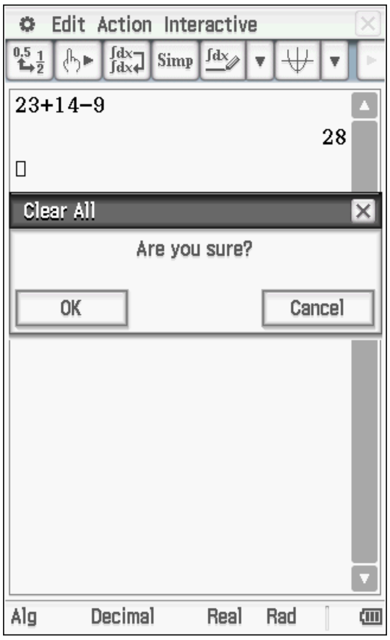


Laskut kirjoitetaan vasempaan reunaan, vastaukset tulevat oikeaan reunaan.

2.2 Näytön tyhjennys

Valitse Edit ja paina Clear All. Paina OK.



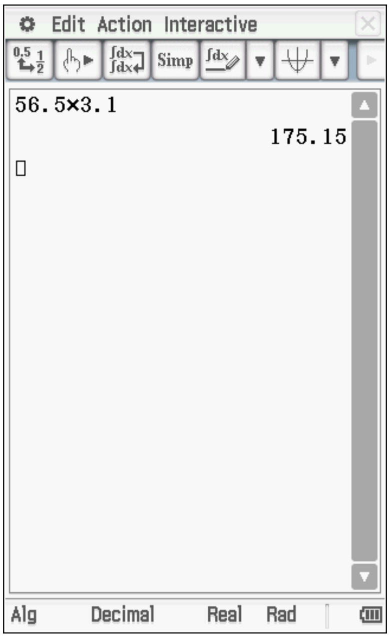


Huomaa! Desimaalierottimena käytetään pistettä.

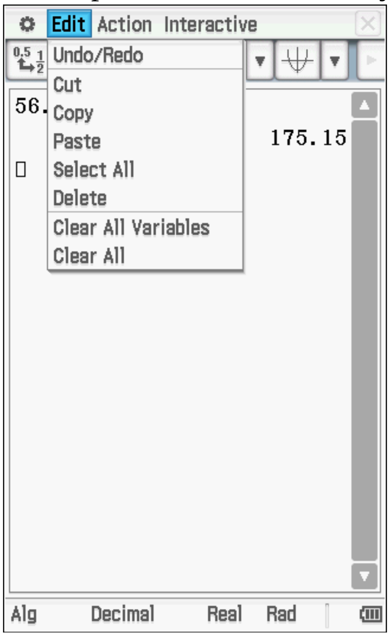
2.3 Kertolasku

Laske: $56{,}5 \cdot 3{,}1 =$

Syötä laskulauseke.
Paina EXE.



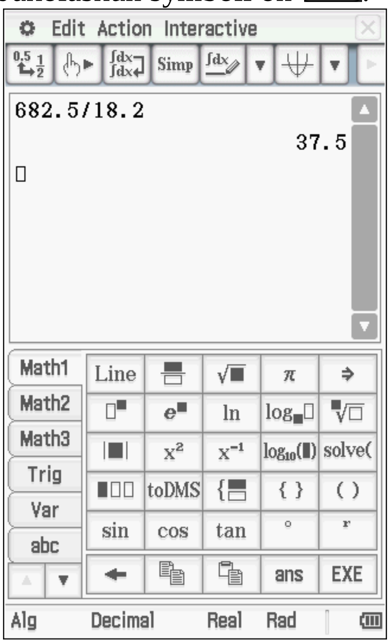
Edit.
Delete poistaa vain sen rivin, jolla osoitin sijaitsee.



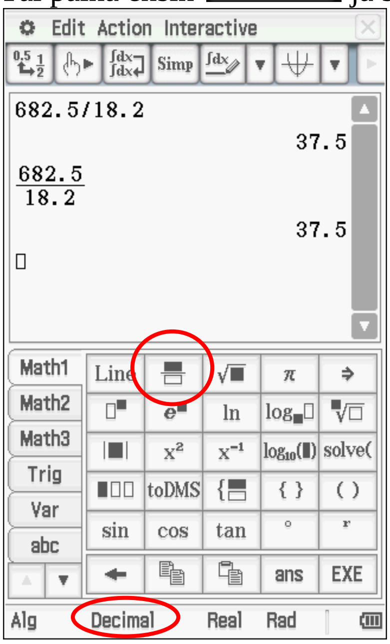
2.4 Jakolasku

Laske: $682{,}5 : 18{,}2 =$

Jakolaskun symboli on .



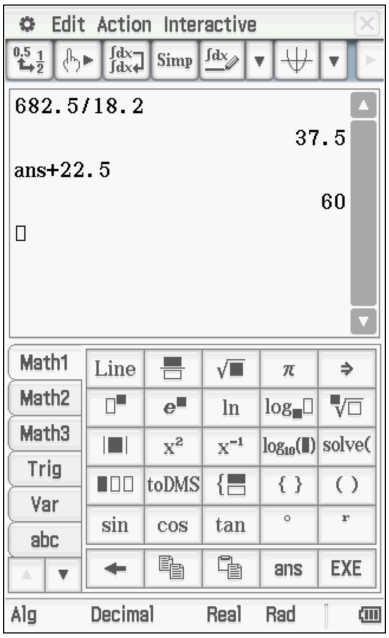
Tai paina ensin  ja sitten .



Jos asetuksena on Decimal, niin murtoluvut näytetään desimaalimuodossa.

2.5 Laskennan jatkaminen saadulla tuloksella

Aiempi laskentatulos on 37,5. Lisää tulokseen 22,5.

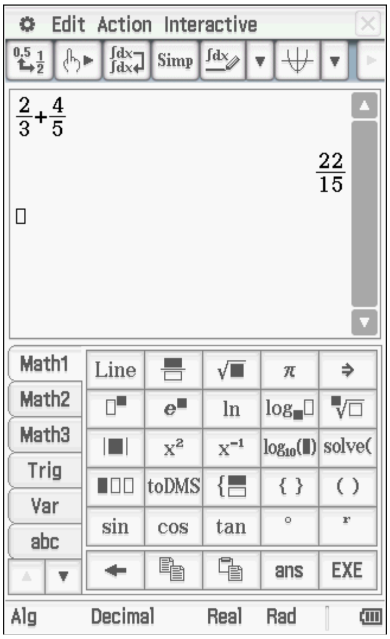


Paina + ja syötä 22,5.
Huom: "ans" ilmestyy automaattisesti näyttöön.

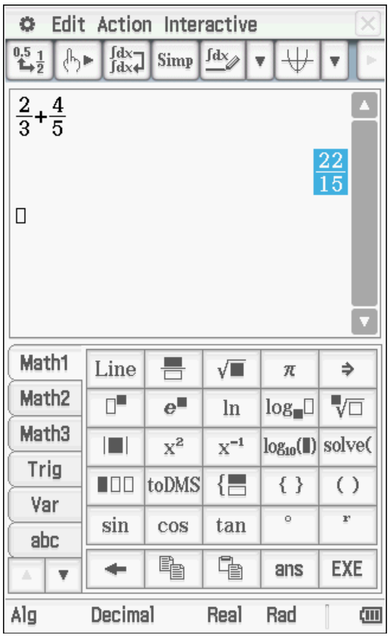
2.6 Murtoluvut

Laske: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

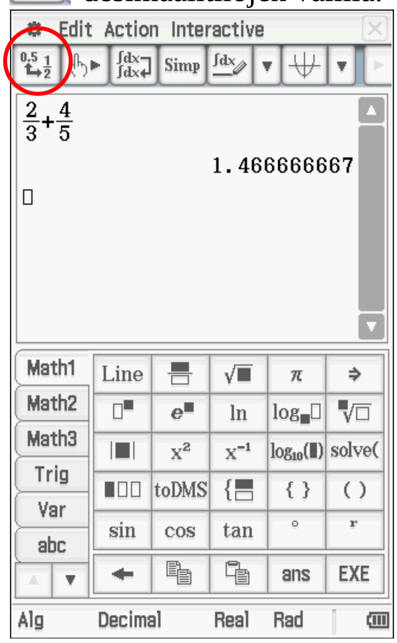
Syötä murtoluvut. Nuolipainikkeet ovat myös käytettävissä osoittimen siirtämiseen.



Valitse vastaus.



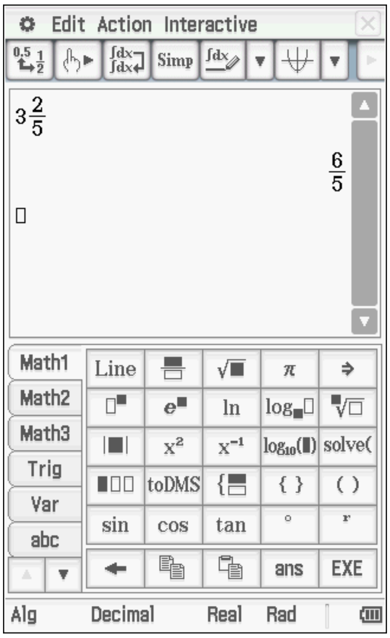
Vaihtaa murtoluku- ja desimaalitilojen välillä.



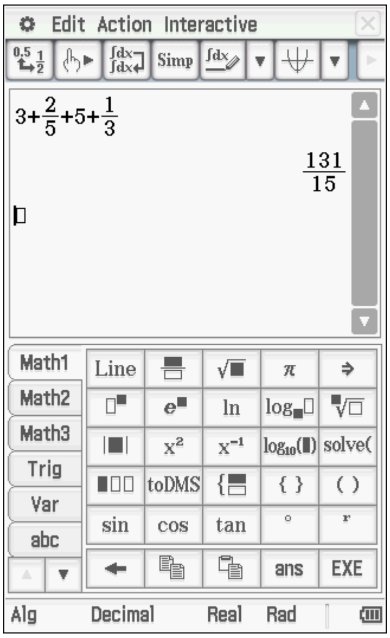
2.7 Sekaluvut

Laske: $3\frac{2}{5}+5\frac{1}{3}=$

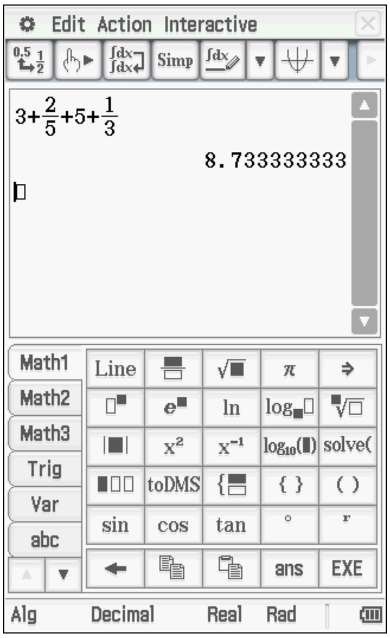
Huomaa, että $3\frac{2}{5}$ on sama kuin $3\times\frac{2}{5}$ fx-CP400-laskimessa.



Ratkaisu.

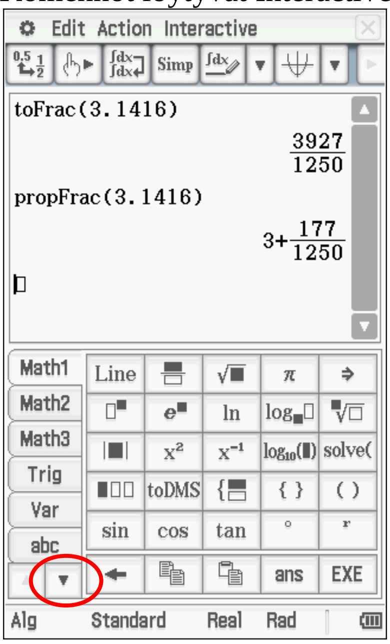


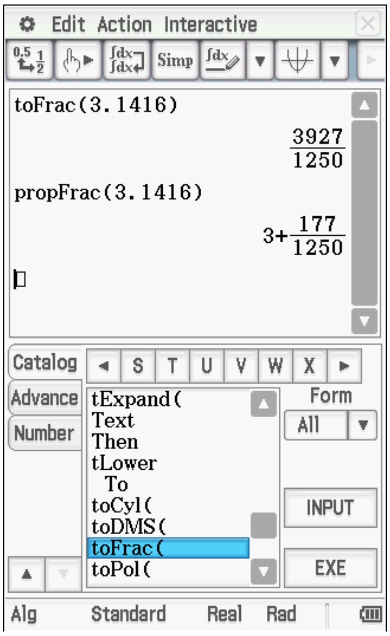
Vastaus desimaalilukuna.



Desimaaliluku 3,1416 on suunnilleen sama kuin π . Kirjoita luku murtolukuna ja sekalukuna.

Komennot löytyvät Interactive, Transformation, Fraction –valikosta tai Catalog-valinnan kautta.

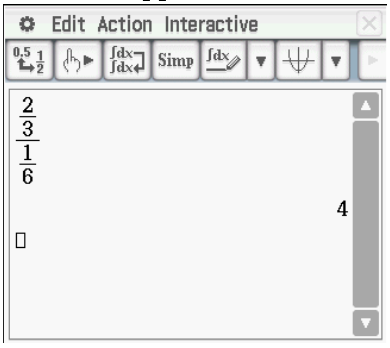




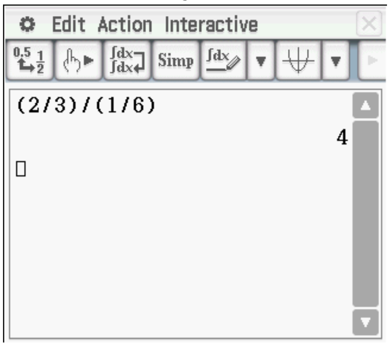
2.8 Murtoluvun jakaminen

Laske: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} =$

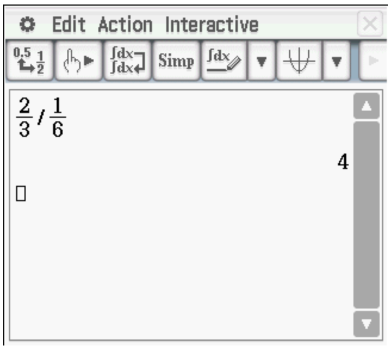
Virtuaalinäppäimistön kautta.



Sulkeita on käytettävä.



Tai näin.

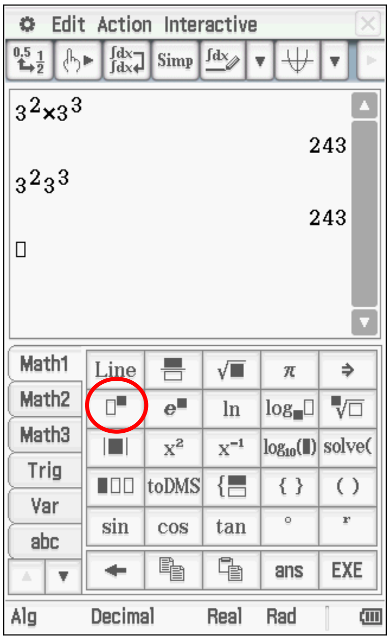


2.9 Potenssit

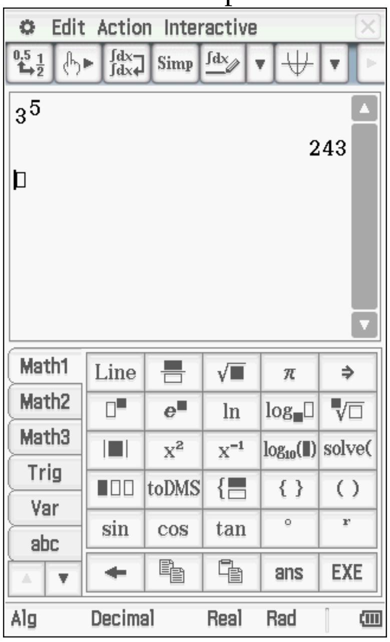
Laske: $3^2 \cdot 3^3 =$

Valitse .

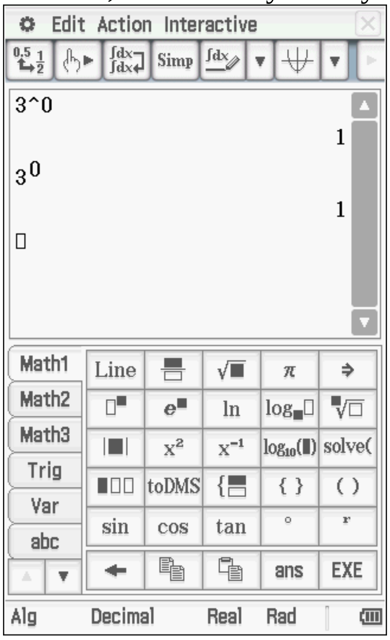
Kertomerkki ei ole välttämätön.



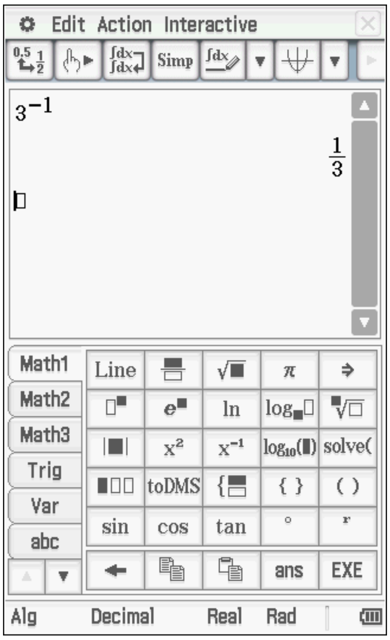
Samankantaisten potenssien laskusääntö?



Huomaa, että voit käyttää myös ^.

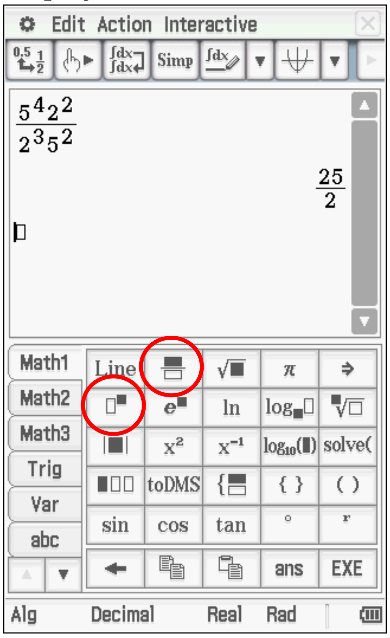


Huomaa!

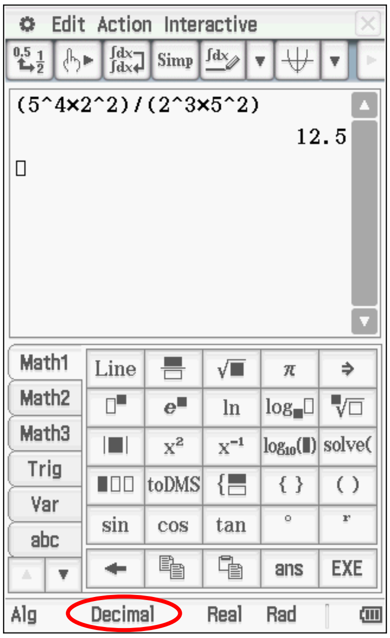


 Laske: $\dfrac{5^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^2} =$

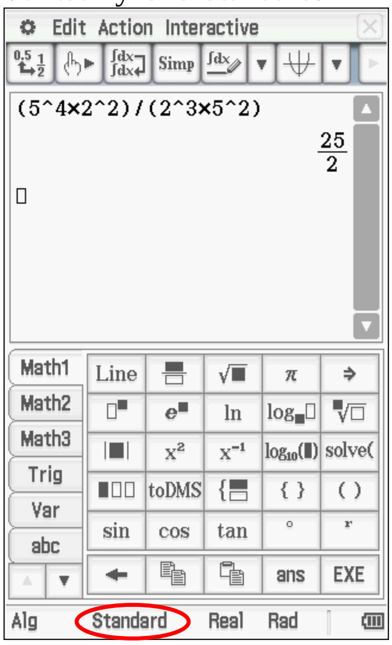
Display.



Vastaus desimaalilukuna.



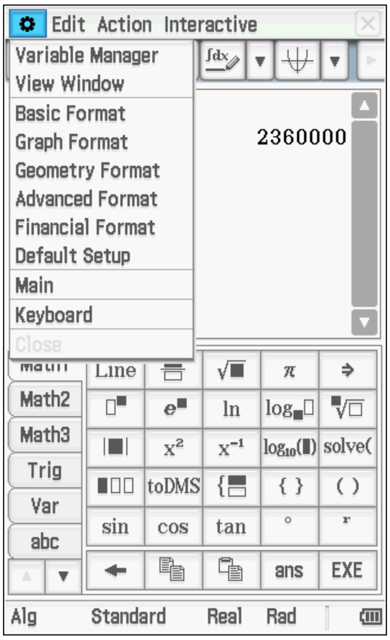
Valitse kynällä Standard.



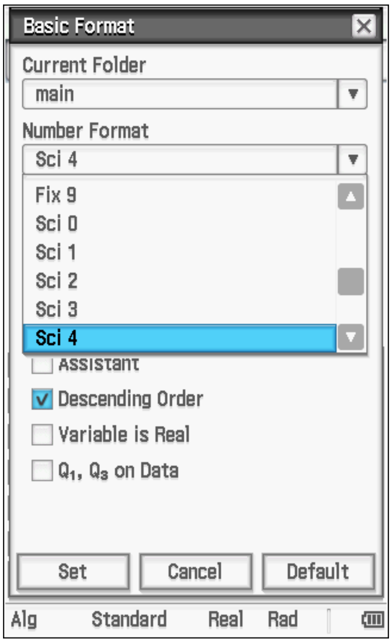
2.10 Merkitsevät numerot

 Syötä 2 3600 000 neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

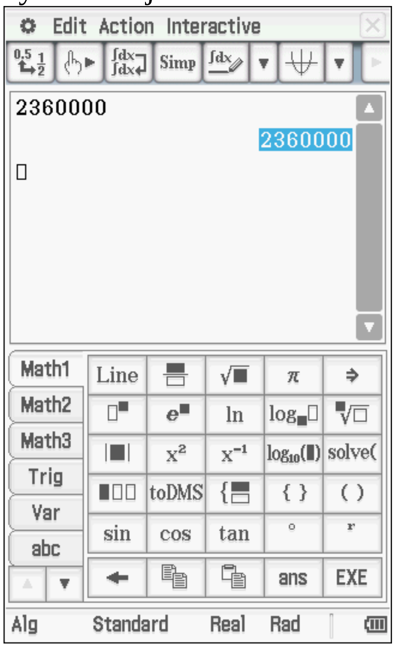
Valitse Basic Format.



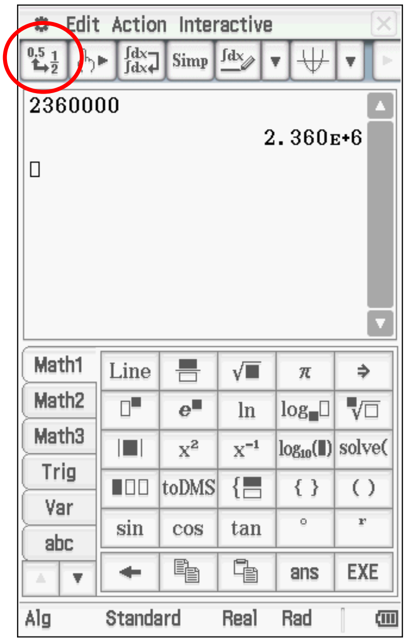
Valitse esimerkiksi Sci 4.



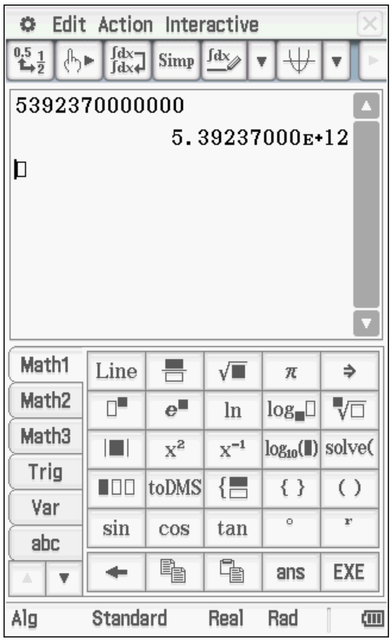
Syötä luku ja valitse.



Paina  Sci 4 muuttaa luvun neljän merkitsevän numeron tarkkuuteen.



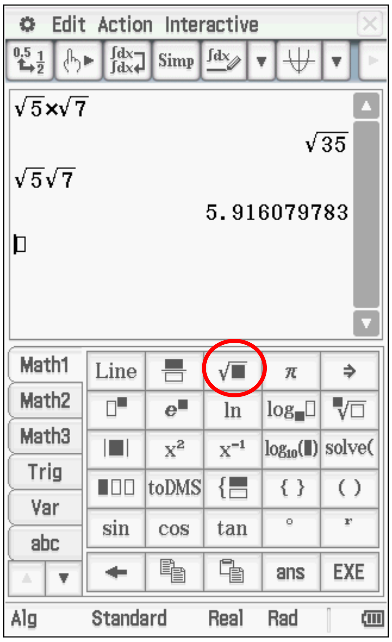
Tässä on valittu Sci 9. Vaihda takaisin Normal 1.



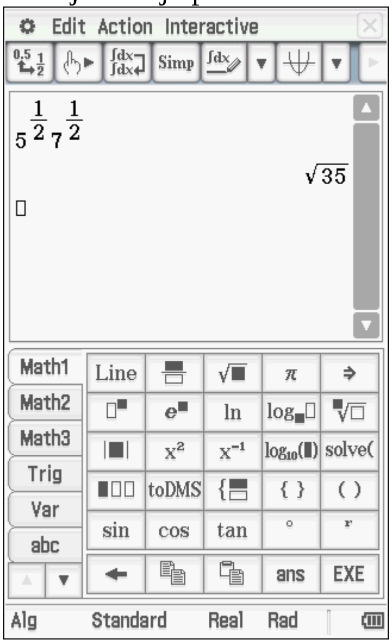
2.11 Neliöjuuri ja n. juuri

Laske: $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=$

Kertomerkki ei ole välttämätön.

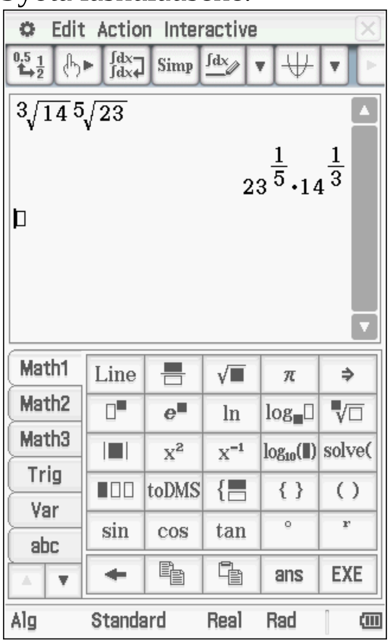


Neliöjuuren ja potenssin välinen suhde.

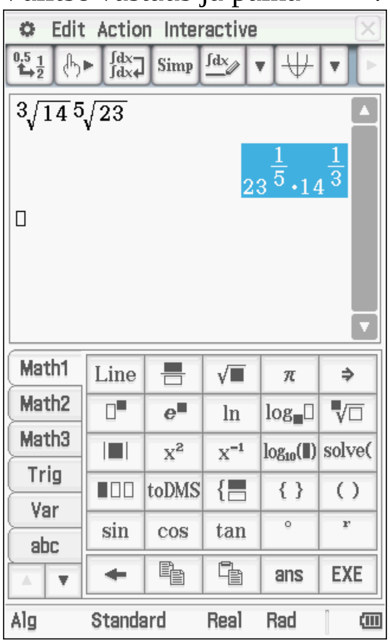


Laske: $\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[5]{23}=$

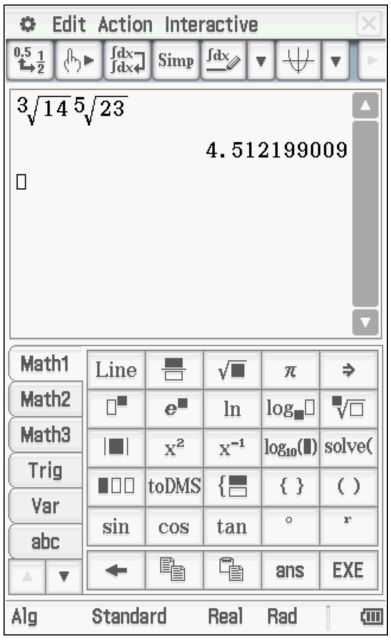
Syötä laskulauseke.



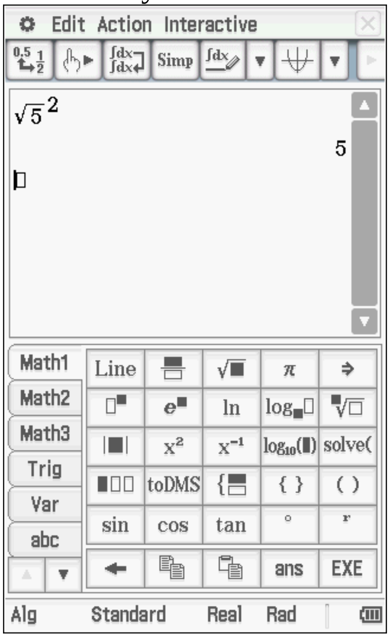
Valitse vastaus ja paina .



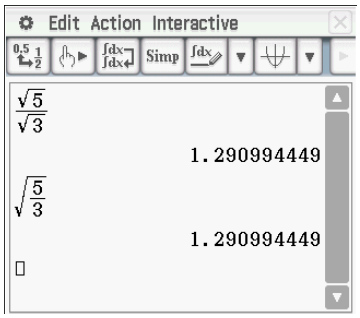
Vastaus desimaalilukuna.



Huomaa myös tämä.

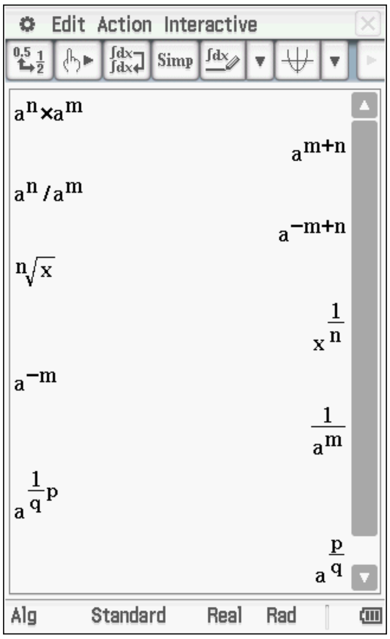


2.12 Laskusäännöt ja kaavat

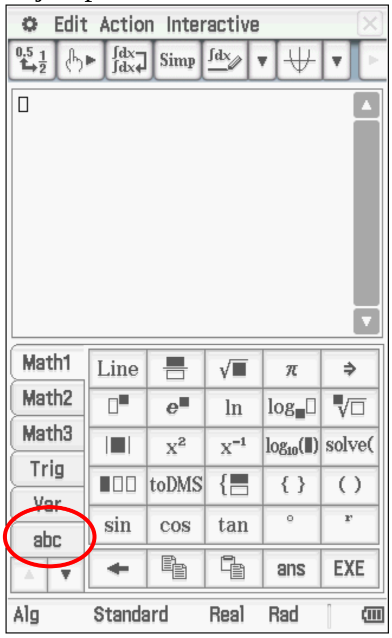
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $+(a+b)=a+b$ $-(a-b)=-a+b$ $-(-a)=a$	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ $a^n:a^m=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$a^0=1$ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ $=a^{\frac{1}{q}\cdot p}=a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	

fx-CP400-laskimella voit myös toistaa sääntöjä ja kaavoja.

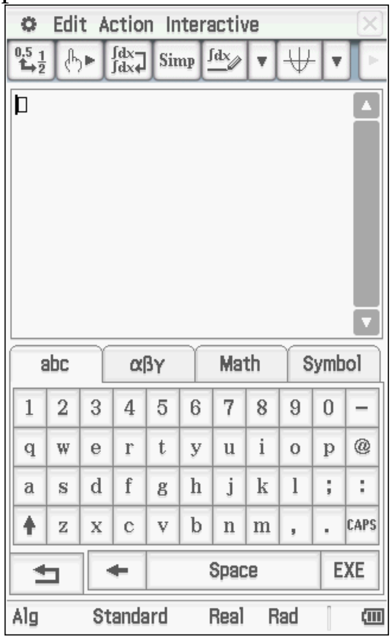
Esimerkiksi.



abc-painike näyttää kirjainpainikkeet.



Voit palata takaisin painamalla .

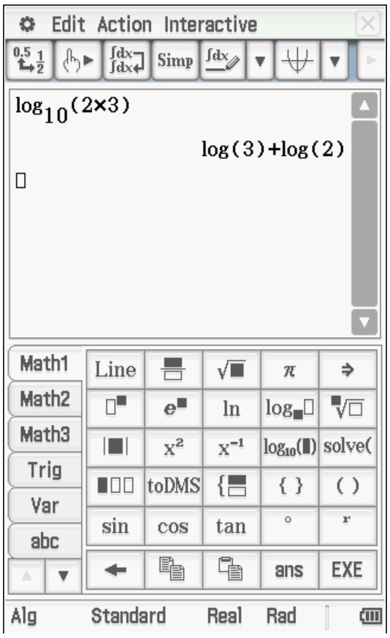


2.13 Logaritmit

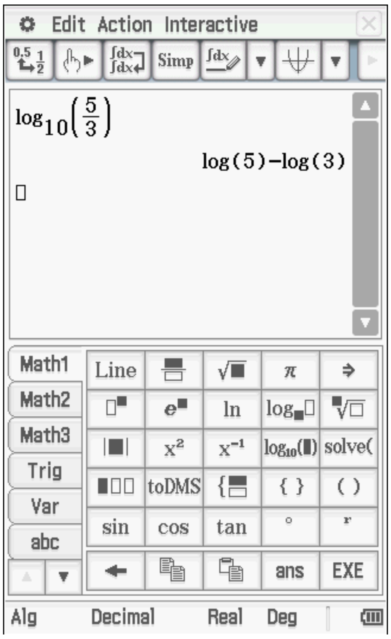
10-kantainen logaritmi 10-kantainen logaritmi	$10^{\lg x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \lg 10^x = x$	$x > 0$
Logaritmiyhtälö	$\lg x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^c$	
Logaritmilait *a* ja *b* ovat positiivisia lukuja. Lait pätevät kaikille logaritmijärjestelmille.	1) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ 2) $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ 3) $\lg a^x = x \cdot \lg a$	Huomaa! $\lg 3^2 = 2 \cdot \lg 3$ $(\lg 3)^2 = \lg 3 \cdot \lg 3$

Tutki kaikkia kolmea logaritmilakia. Aseta muuttujat esimerkiksi $a = 2$, $b = 3$ ja $x = 4$.

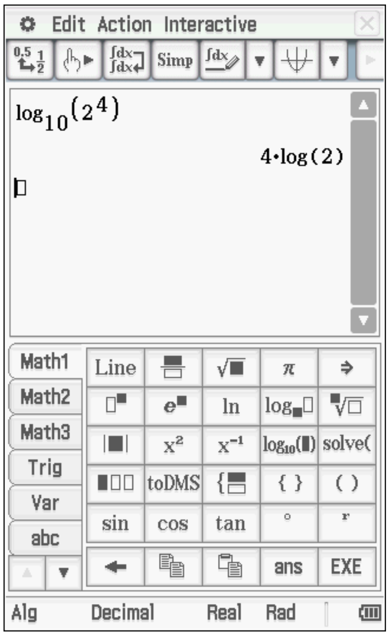
Laki 1.



Laki 2.

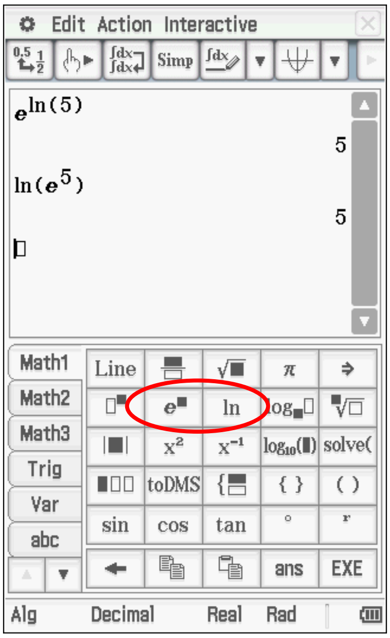


Laki 3.

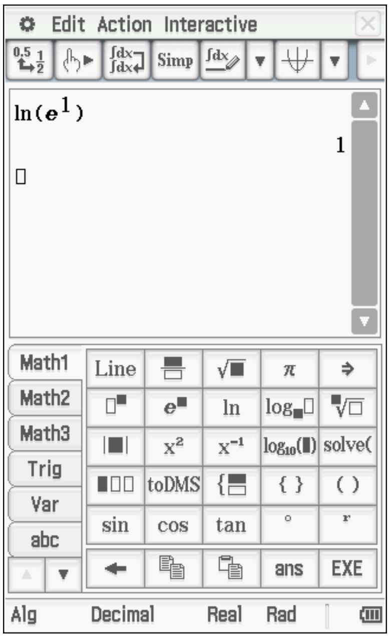


Tutki, onko $\mathrm{e}^{\ln x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \ln \mathrm{e}^{x} = x$. Aseta muuttujaksi esimerkiksi $x = 5$.

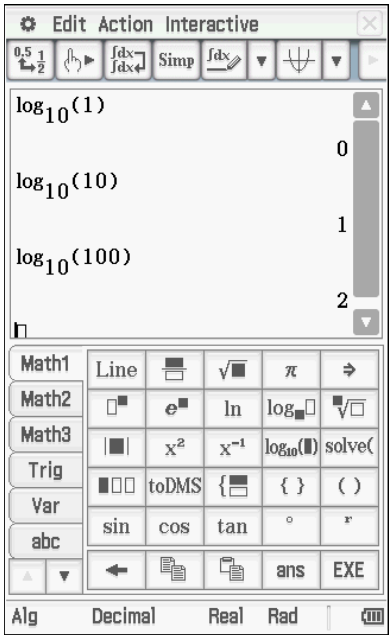
Ratkaisu.



Huomaa!Miksi?

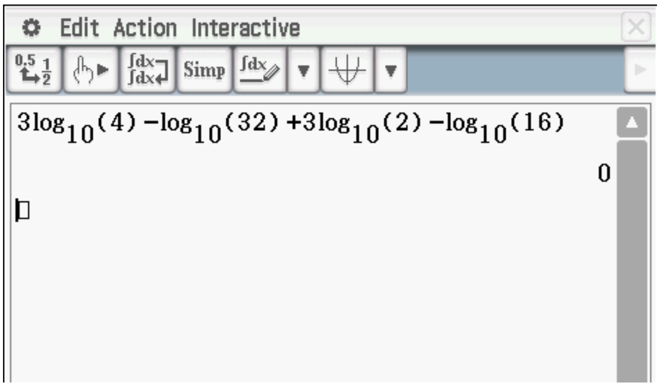


Mitä on $\log 1000$?



Kirjoita mahdollisimman yksinkertaisesti: $3\lg 4 - \lg 32 + 3\lg 2 - \lg 16$

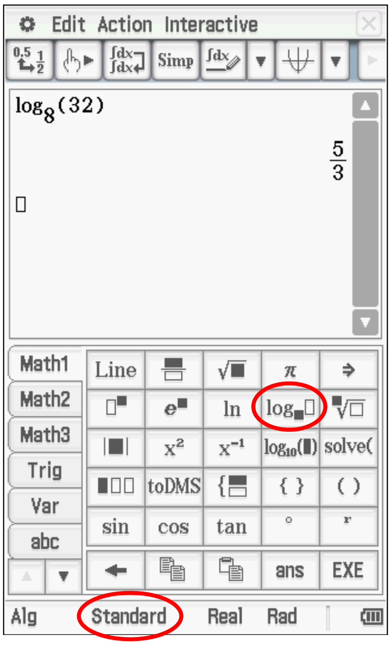
Ratkaisu.



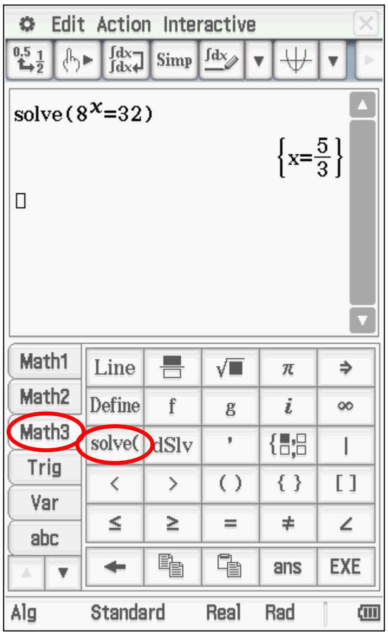
Selitä käyttämättä laskinta miksi vastaus on nolla.

Laske $\log_8 32$

Asetus on Standard ja saamme tuloksen murtolukuna.



Pohdi, miksi?

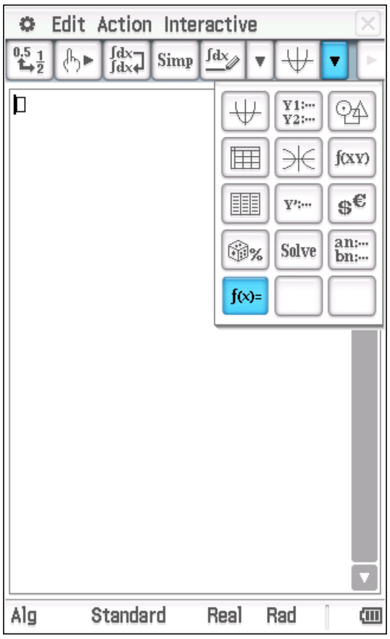


solve –komento löytyy esimerksiksi välilehdeltä Math3.

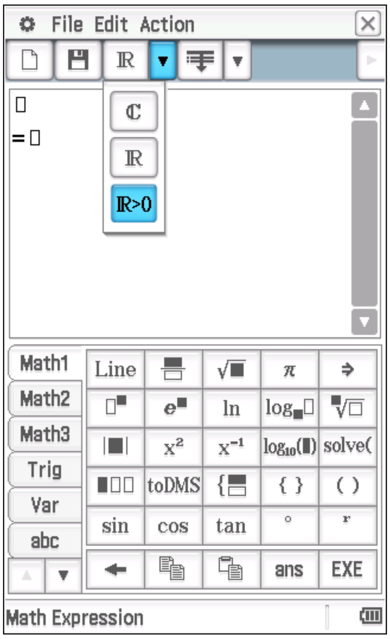
Voit aina ratkaista yhtälön myös maalaamalla sen kynällä ja valitsemalla Interactive – valikosta komennon Advanced -> solve. Hyväksy lasku koskemalla OK.

Tarkista, pitääkö paikkansa, että $log_3(9xy) = 2 + log_3(x) + log_3(y)$.

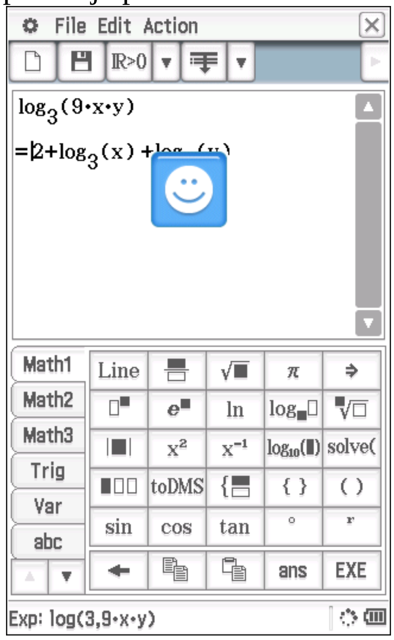
Valitse sovellus f(x)=



Valitse positiiviset luvut.



Syötä yhtälön molemmat puolet ja paina EXE.

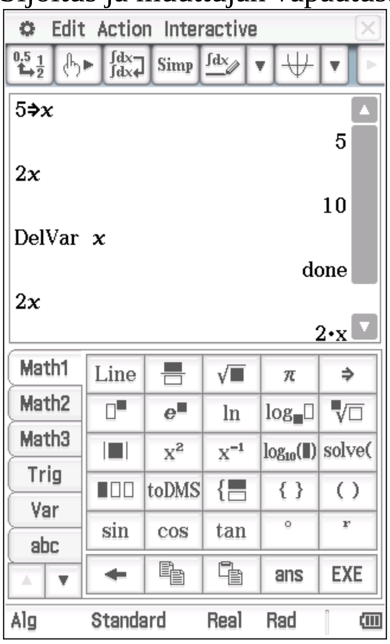


Hymynaama kertoo yhtälön puolten olevan ekvivalentit. Saman voi tehdä laskemalla vasemman ja oikean puolen erotukseksi luvun 0 Main-sovelluksessa.

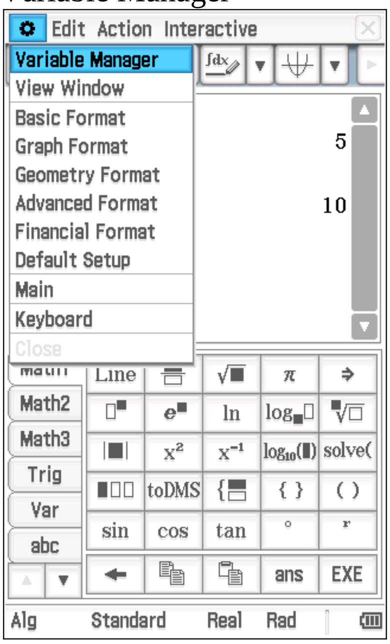
2.14 Muuttujien käyttö

Vahvennetun nuolen avulla voi sijoittaa muuttujille arvoja. Tässä esimerkissä muuttujan x arvoksi on sijoitettu 5. Tällöin 2x on tietenkin 10. Muuttujan arvon voi vapauttaa komennolla DelVar tai muuttujienhallinnan Variable Manager kautta.

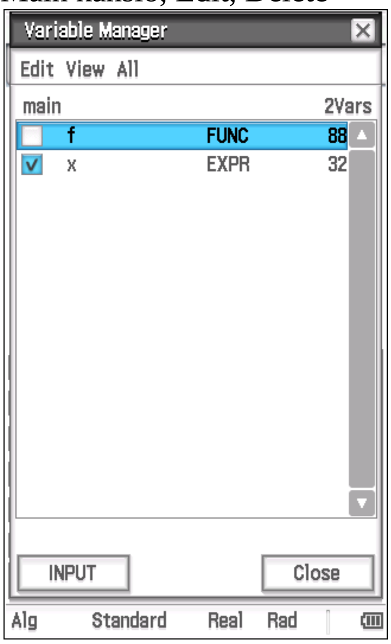
Sijoitus ja muuttujan vapautus.



Variable Manager



Main kansio, Edit, Delete



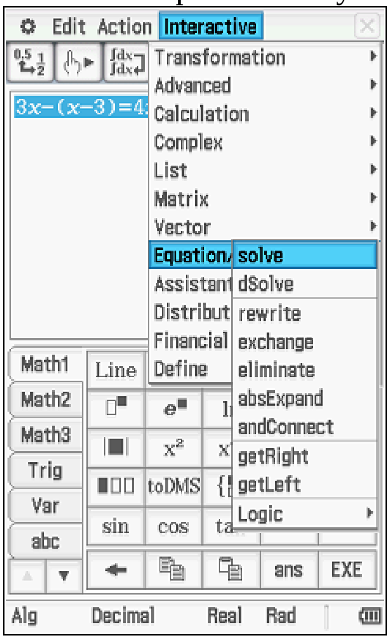
3. Yhtälöt

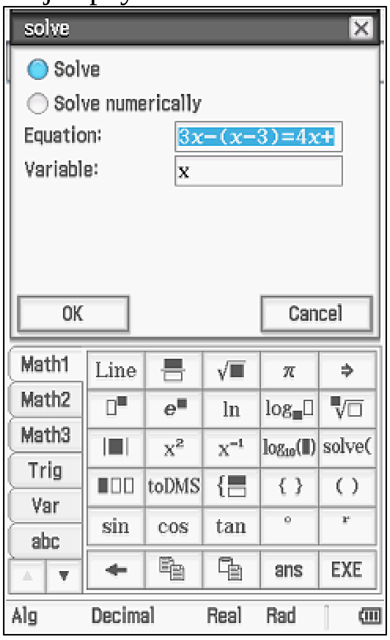
Fx-CP400 -laskimella voit ratkaista yhtälöitä ja yhtälöryhmiä eri tavoin.

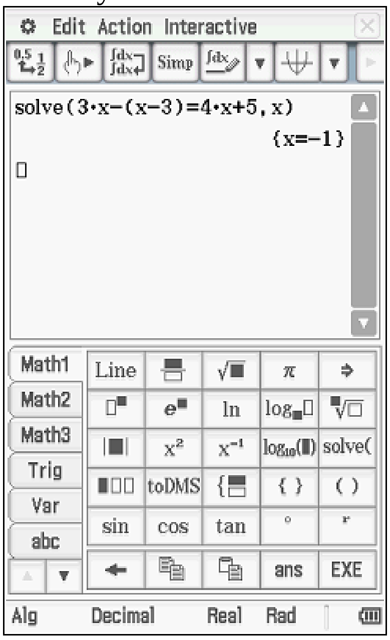
3.1 Ensimmäisen asteen yhtälöt

Ratkaise yhtälö. $3x-(x-3)=4x+5$

Kirjoita tehtävä sellaisenaan, maalaa se ja käytä Interactive –valikon solve -komentoa. Tämä menetelmä sopii kaikkien yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisuun. Laskin täydentää komennot.

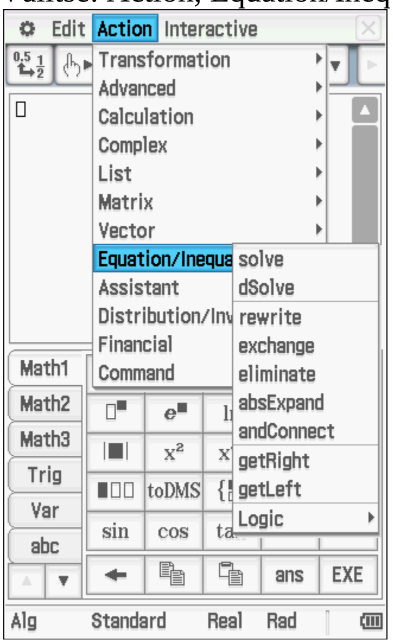




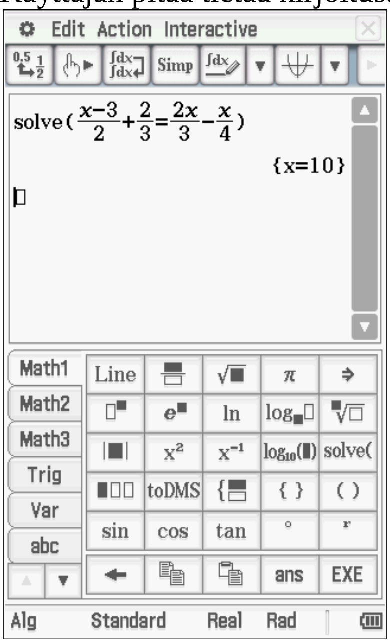


Ratkaise yhtälö. $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{4}$

Valitse: Action, Equation/Inequality, solve



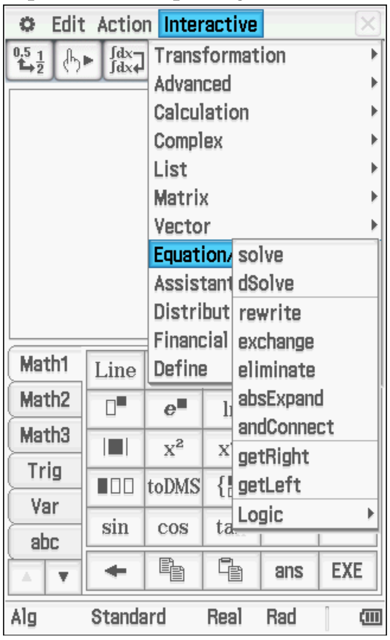
Käyttäjän pitää tietää kirjoitusasu.



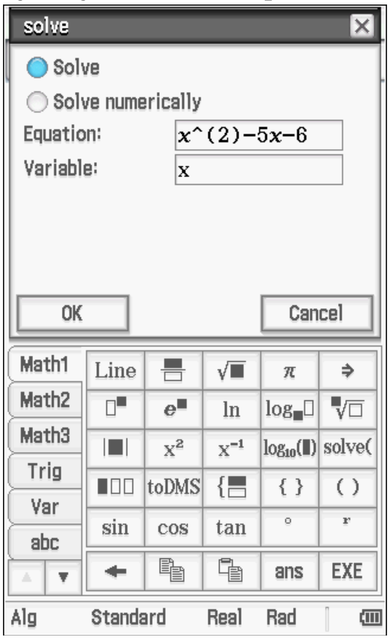
3.2 Toisen asteen yhtälöt


Ratkaise toisen asteen yhtälö. $x^2 - 5x - 6 = 0$

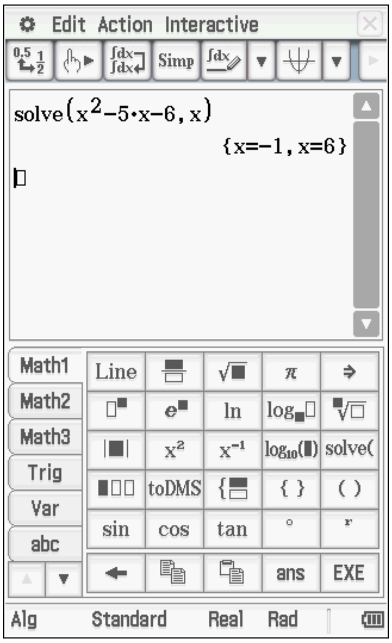
Valitse Interactive, Equation/Inequality, solve



Syötä yhtälön vasen puoli.



Saat lausekkeen nollakohdat.



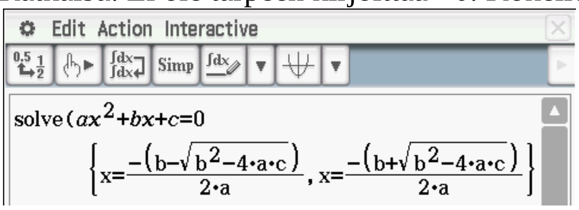
Voit myös **ensin kirjoittaa yhtälön, maalata sen kynällä ja valita sitten Interactive –valikon**. Tällöin maalattu yhtälö siirtyy automaattisesti keskimmäisessä ikkunassa näkyvään kohtaan Equation.

Kommentti: Toisen asteen yhtälön normaalimuoto on $ax^2 + bx + c = 0$ ja sen ratkaisukaava on

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


Ratkaise toisen asteen yhtälö. $ax^2 + bx + c = 0$.

Ratkaisu. Ei ole tarpeen kirjoittaa =0. Kokeile itse.

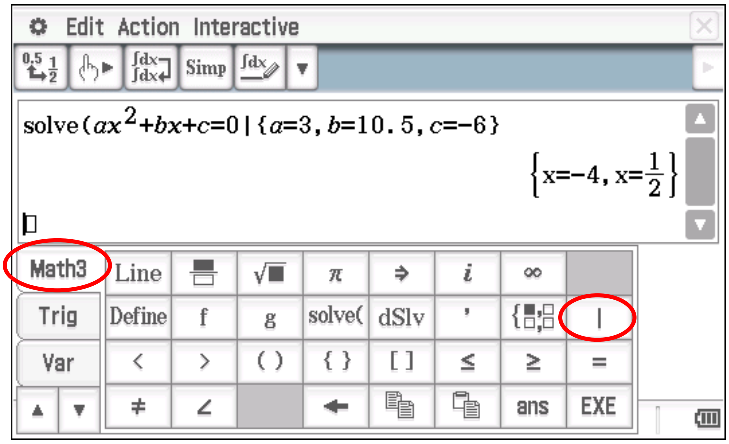


Osoita, että $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja että $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Ratkaise toisen asteen yhtälö: $3x^2 - 10{,}5x - 6 = 0$

Otetaanpa erilainen lähestymistapa. Tehtävän yhtälö annetaan yleisessä muodossa ja ratkaisu saadaan sijoittamalla tunnetut arvot.

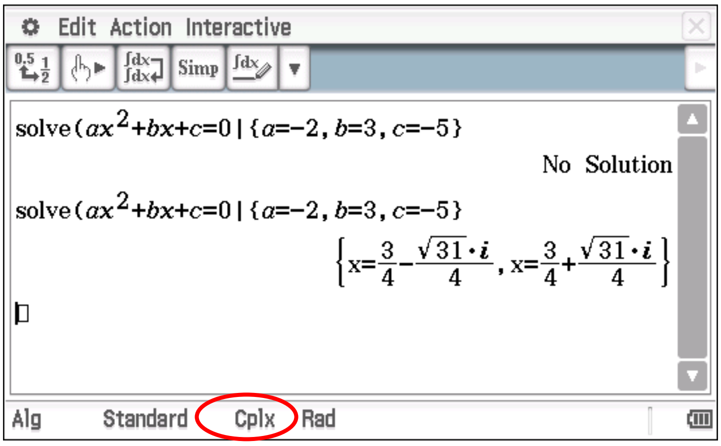
Löydät Math3-valikosta symbolin | jonka avulla voit syöttää ehtoja. Samassa valikossa on myös aaltosulut.



3.3 Toisen asteen yhtälön kompleksiset ratkaisut

Ratkaise toisen asteen yhtälö: $-2x^2 + 3x - 5 = 0$

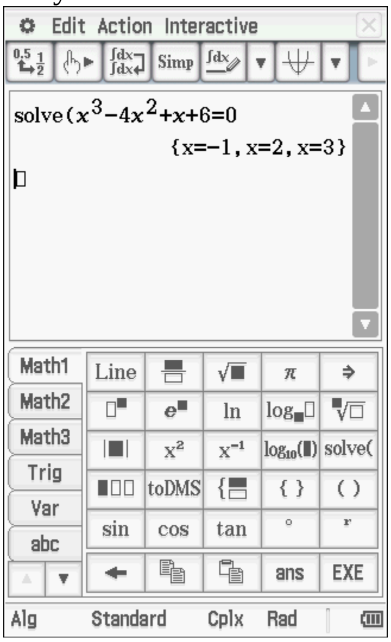
Vaihda Real-tilasta Cplx-tilaan kynän avulla. Yhtälöllä ei ole reaalisia juuria (ylempi laskurivi), mutta sillä on kompleksiset juuret (alempi laskurivi).



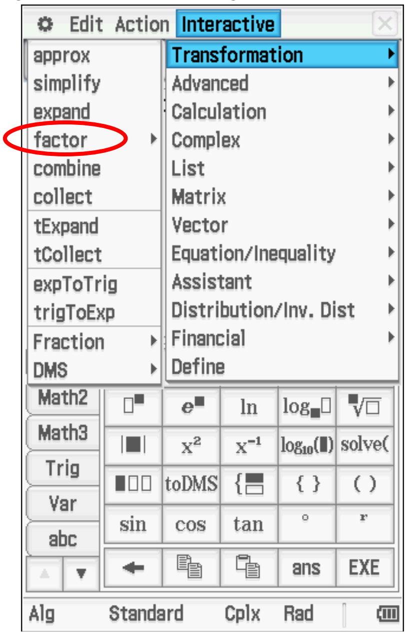
3.4 Kolmannen asteen yhtälöt

Ratkaise kolmannen asteen yhtälö. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

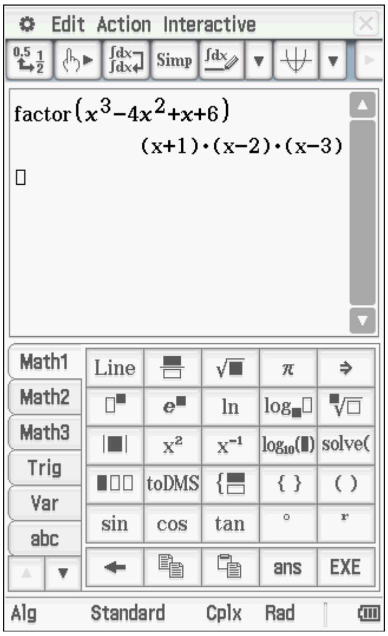
Näkymä 1



Yhtälö voidaan ratkaista jakamalla se tekijöihin.



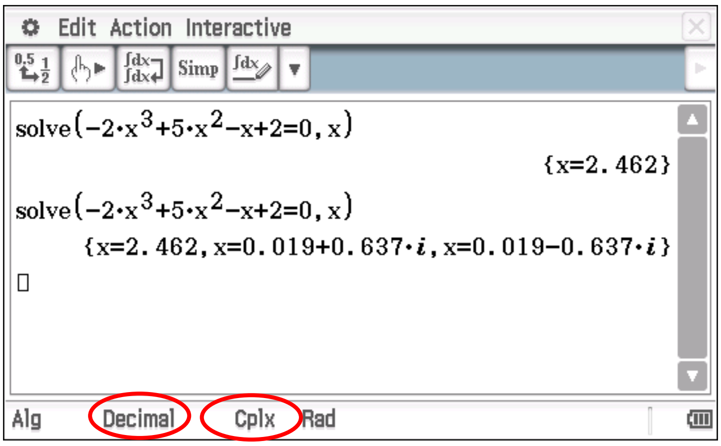
Vertaan näkymään 1.



Kolmannen asteen yhtälöllä voi esimerkiksi olla reaalinen juuri ja kaksi kompleksista juurta. Katso alla oleva tehtävä.

Ratkaise kolmannen asteen yhtälö. $-2x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

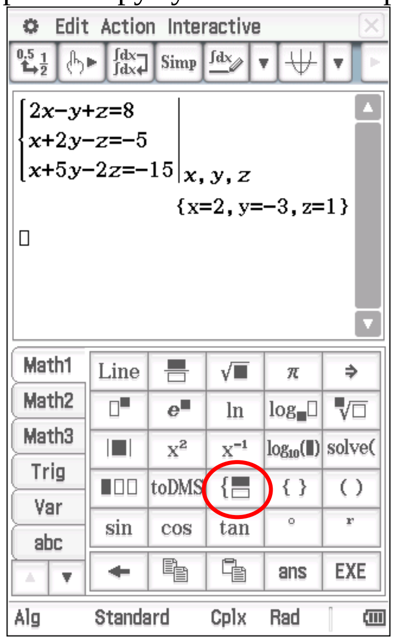
Jos fx-CP400 -laskin on Real-tilassa, tulokseksi saadaan vain x=2,462 (ylempi laskurivi). Jos käytetään Cplx-tilaa, laskin etsii myös kompeksiset juuret. Käytä likiarvoja Decimal.



3.5 Yhtälöryhmät

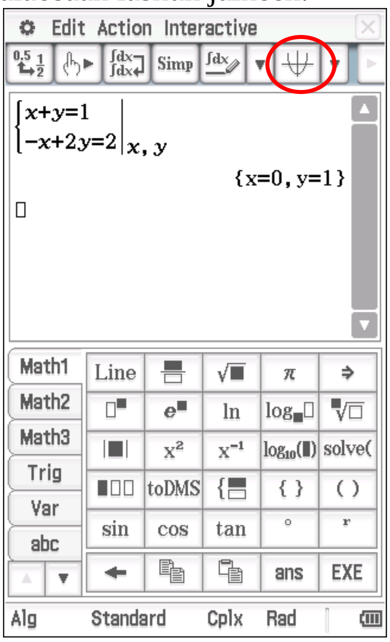
Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y - z = -5 \\ x + 5y - 2z = -15 \end{cases}$.

Koske yhtälöparin symbolia kahdesti saadaksesi kolmannen yhtälön. Erota ratkaistavat muuttujat pilkuilla pystyviivan oikealle puolelle ja ratkaise koskemalla EXE.

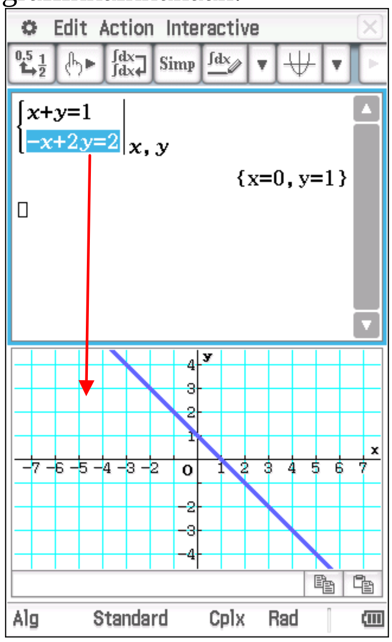


Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$.

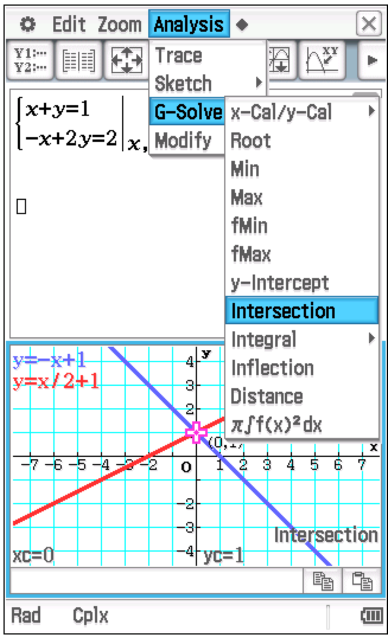
Avaa grafiikkaikkuna näytön alaosaan laskun jälkeen.



Valitse lauseke ja vedä se grafiikkaikkunaan.



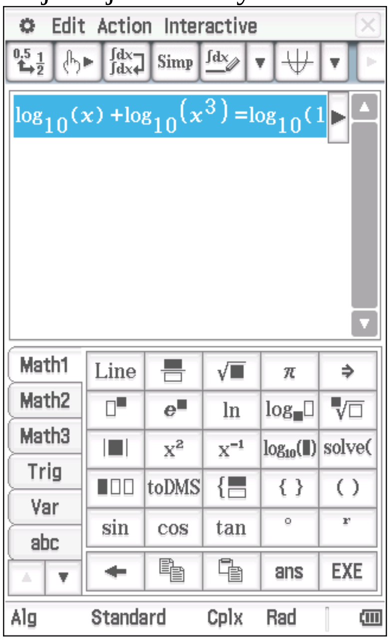
Algebrallinen ja graafinen ratkaisu.



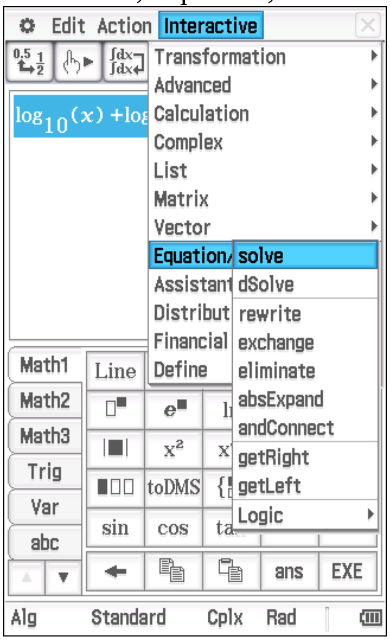
3.6 Logaritmiyhtälöt

Ratkaise logaritmiyhtälö $\lg x + \lg x^3 = \lg 16$.

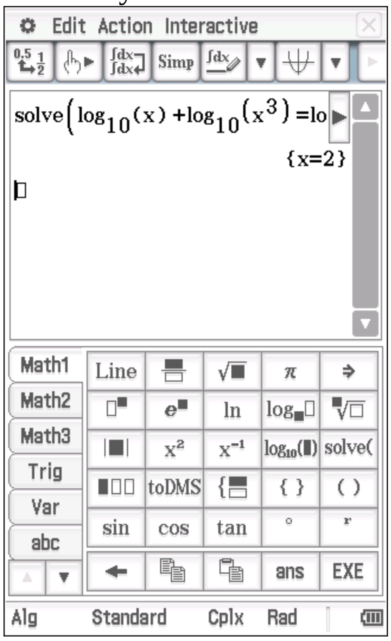
Kirjoita ja maalaa yhtälö



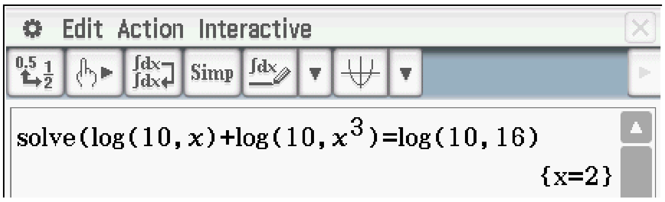
Interactive, Equation, solve

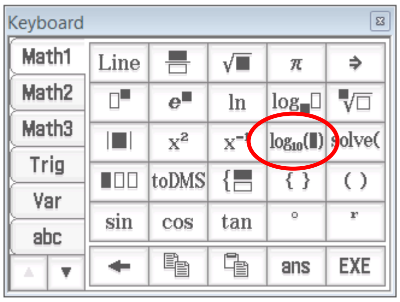


Laskin täydentää komennot.



Vaihtoehtoisesti näin





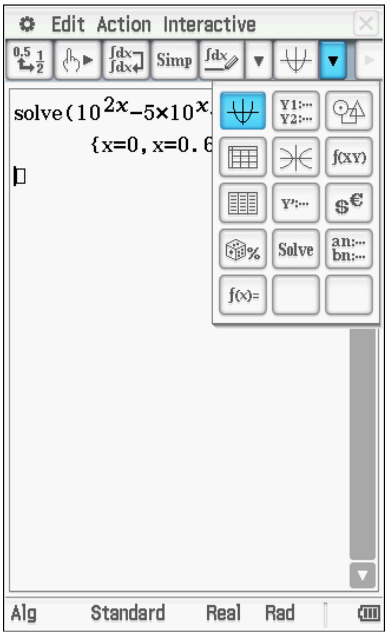
Huomaa, että $x \le 0$ on jätettävä huomiotta logaritmiyhtälöitä ratkaistaessa.

3.7 Eksponenttiyhtälöt

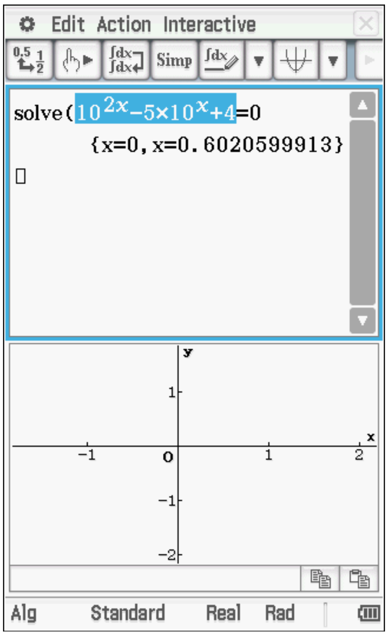
Eksponentiaaliyhtälö	$a^x = b \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg b}{\lg a}$ $a > 0$ og $b > 0$	Huomaa! $a^n = a^m \Rightarrow n = m$ $10^x = a \Leftrightarrow x = \lg a$

Ratkaise yhtälö: $10^{2x} - 5 \cdot 10^x + 4 = 0$

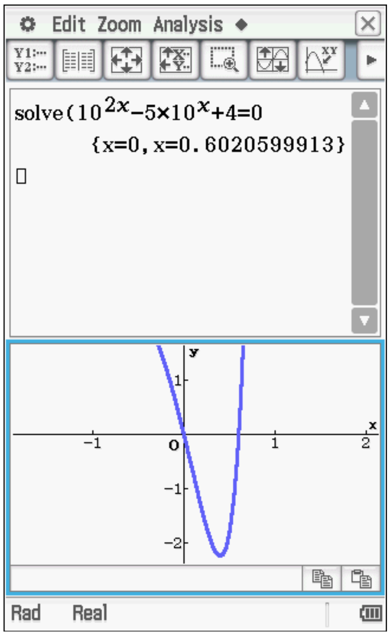
Ratkaise solve –komennolla.



Valitse funktion lauseke ja raahaa se koordinaatistoon.



Algebrallinen ja graafinen ratkaisu tukevat toisiaan.

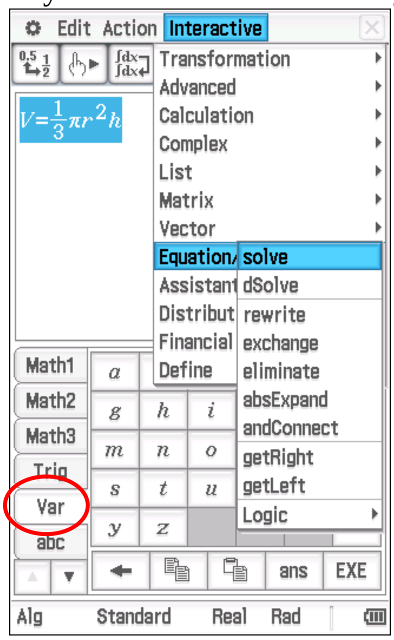


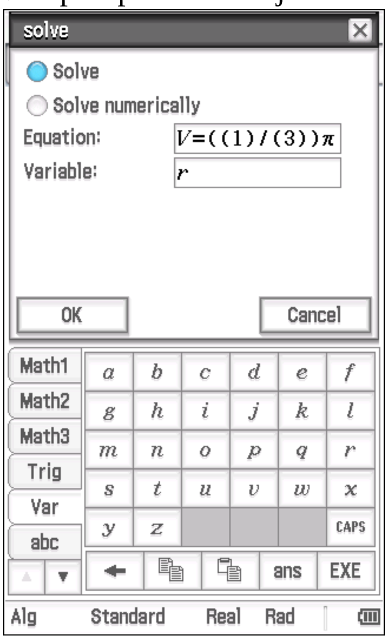
3.8 Kaavan kanssa työskentely

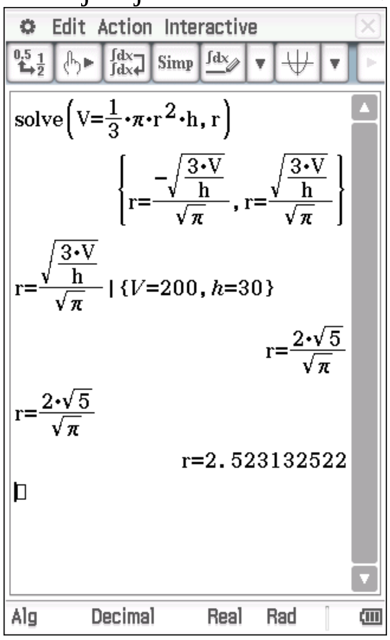
Laske ympyräkartion säde, kun tilavuus $V = 200\ \text{cm}^3$ ja korkeus $h = 30\ \text{cm}$.

Ympyräkartion tilavuuden kaava: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Kirjoitetaan yhtälö sellaisenaan, maalataan se ja valitaan solve –komento Interactive –valikosta. Käytä var – välilehden muuttujia. Kopioi positiivinen juuri laskuriville ja sijoita tunnetut arvot.





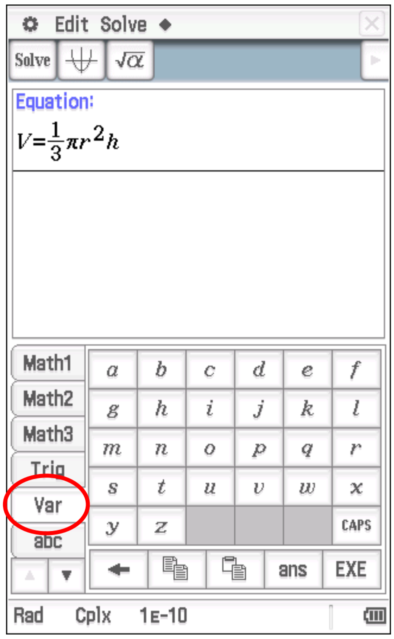


Ympyräkartion pohjan säteen pituus on noin 2,52 cm.

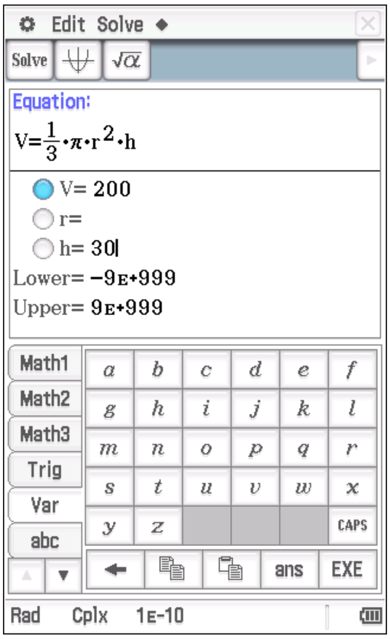
3.9 NumSolve –sovellus

ClassPadissa on oma sovelluksensa numeeristen arvojen ratkaisemiseksi. Päävalikosta löydät sovelluksen NumSolve.

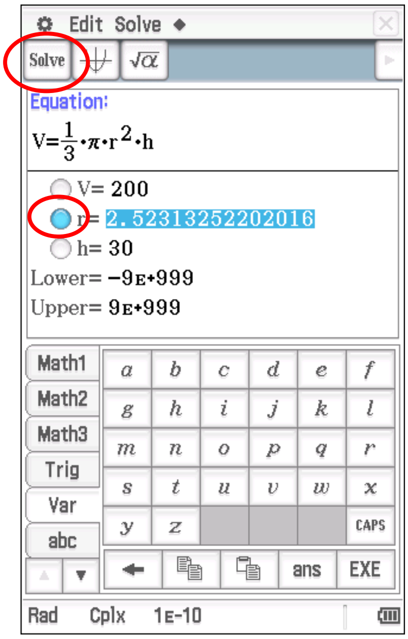
Kirjoita yhtälö sellaisenaan var-välilehden avulla. EXE.



Kirjoita tunnetut mitat niille varatuille paikoille.



Valitse ratkaistava suure ja paina solve-näppäintä.



Ympyräkartion pohjan säteen pituus on noin 2,52 cm.

Tämä sovellus sopii erinomaisesti fysiikan kaavojen avulla ratkaistaviin numeerisiin tehtäviin.

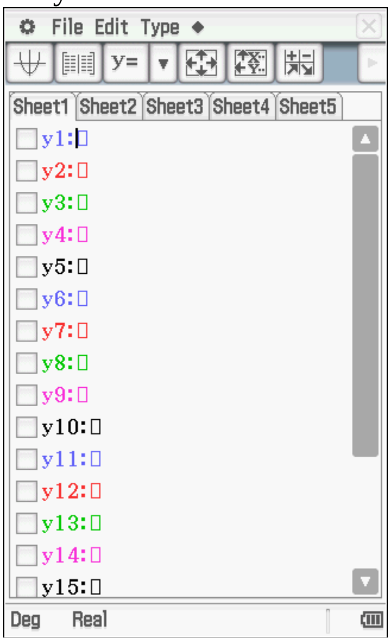
4. Funktiot ja kuvaajat

4.1 Funktioiden syöttäminen ja kuvaajien piirtäminen

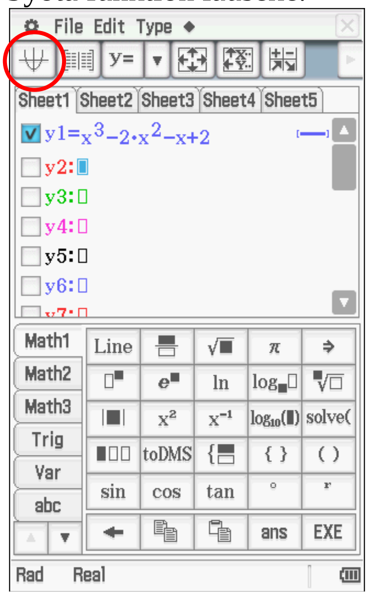
Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ja piirrä sen kuvaaja.

Valitse päävalikosta Graph & Table.

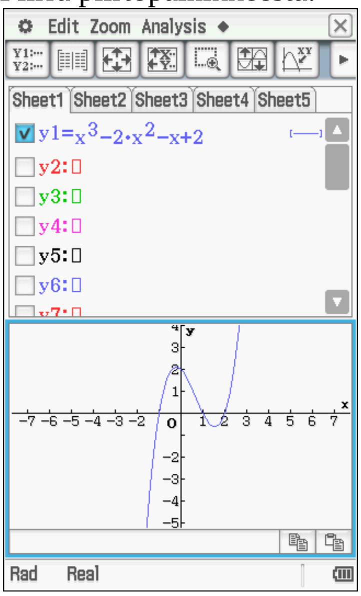
Näkymä.



Syötä funktion lauseke.

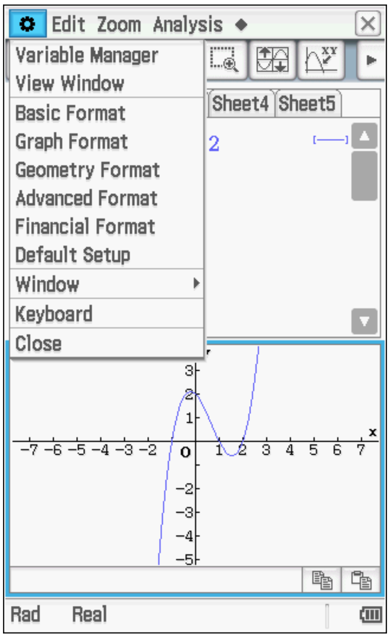


Piirrä piirtopainikkeesta.

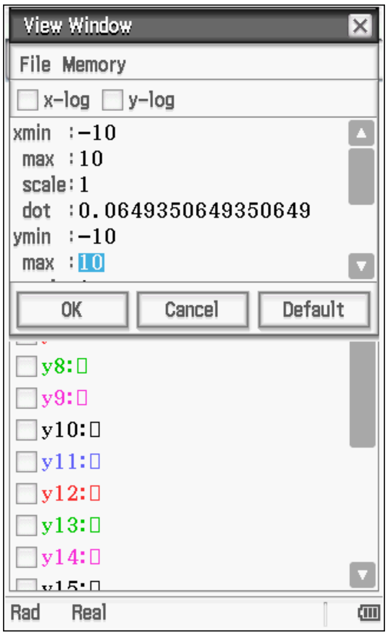


Kuvaaja ei välttämättä näytä tällaiselta. Voi olla, ettei kuvaaja näy kokonaisuudessaan. Tämä tarkoittaa sitä, että näyttöikkunaa zoomausta on säädettävä.

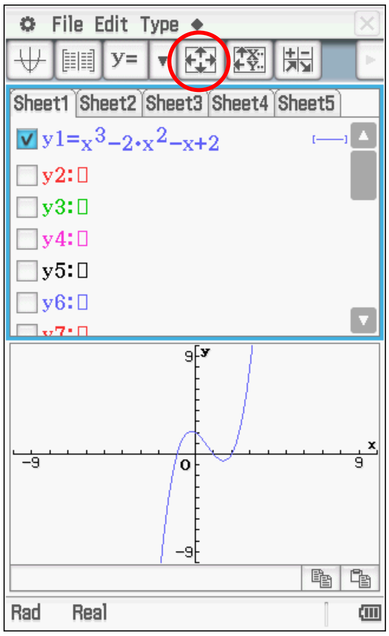
Valitse View Window.



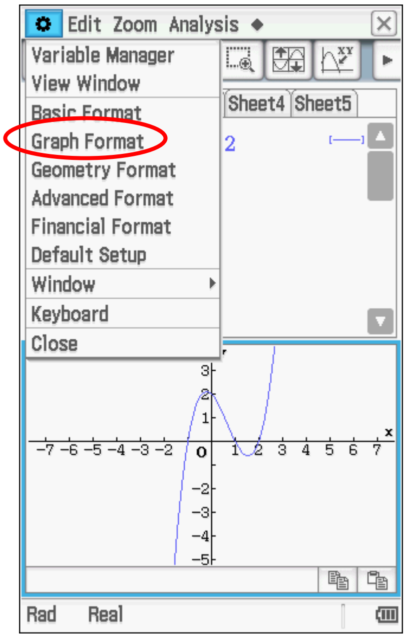
Voit valita esimerkiksi seuraavan asetuksen:



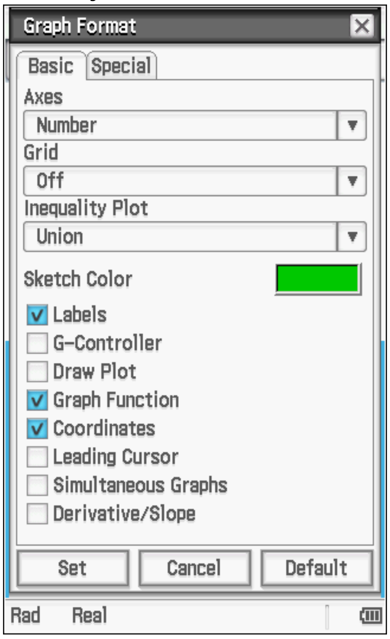
Tämäkin näyttää View Window -valinnan.



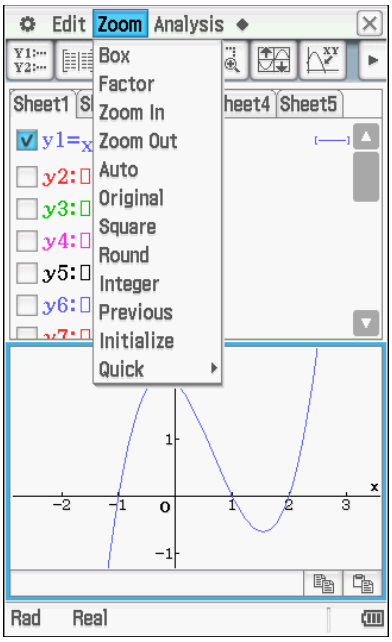
Grafiikkatilassa voit valita esimerkiksi komennot Grid On ja Labels off tai muita komentoja tarpeen mukaan.



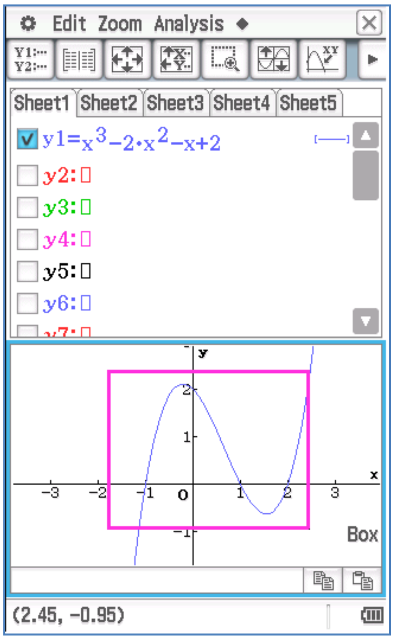
Voit myös valita värin.

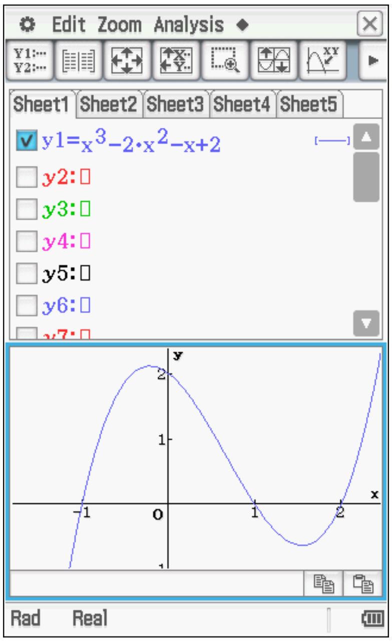


Kokeile Zoom-komentoa.



Tässä on valittu Zoom, Box lähentämistä varten. Harjoittele suurentamista ja pienentämistä.

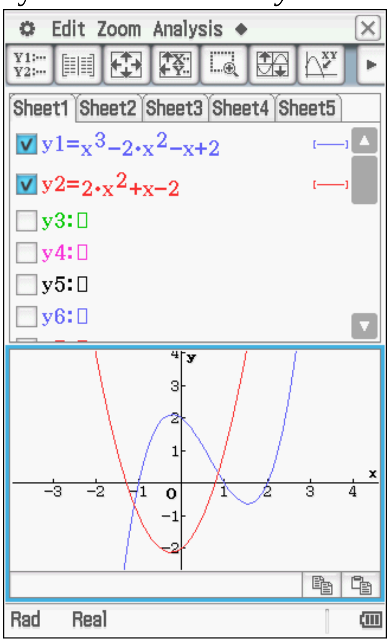


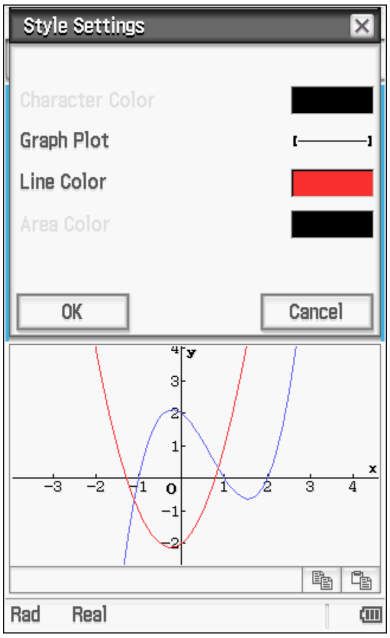


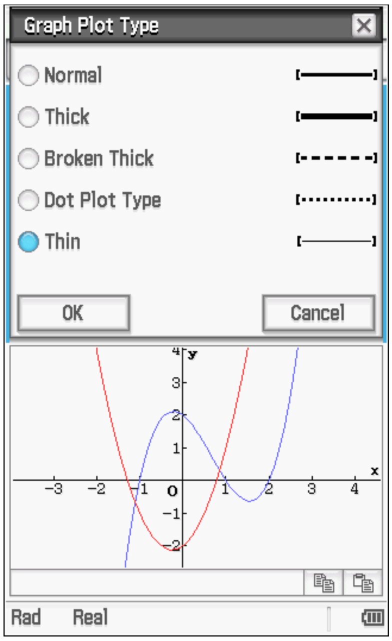
Voit palata alkuperäiseen kuvaan valitsemalla Zoom -> Original.

Piirrä samaan koordinaatistoon kuvaajat f ja g, jotka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ja $g(x) = 2x^2 + x - 2$.

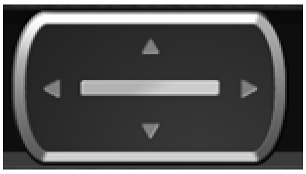
Valitse päävalikosta Graph & Table.
Syötä funktiolauseke $y2$.







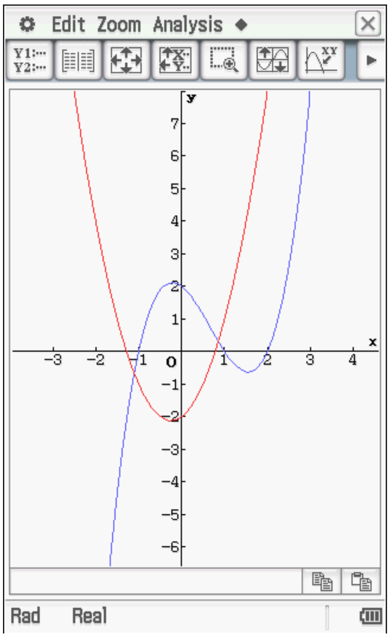
Tässä näemme kuinka helppoa on erottaa kuvaajat toisistaan käyttämällä eri värejä. Voit muuttaa värejä ja viivan vahvuuksia funktiolausekkeen oikealla puolella sijaitsevien värivalintojen avulla.

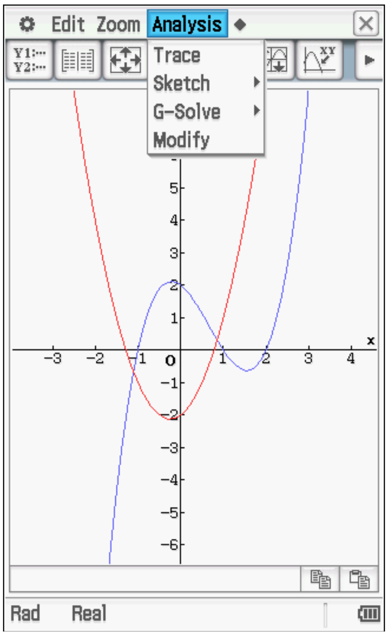


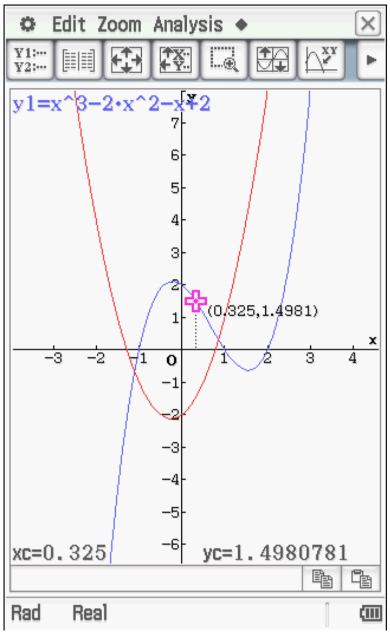
Resize-komennolla voit suurentaa ikkunan koko näyttöön.

Valitse Analysis ja Trace.

Voit käyttää ylös/alas-nuolipainikkeita kuvaajan vaihtamiseen.







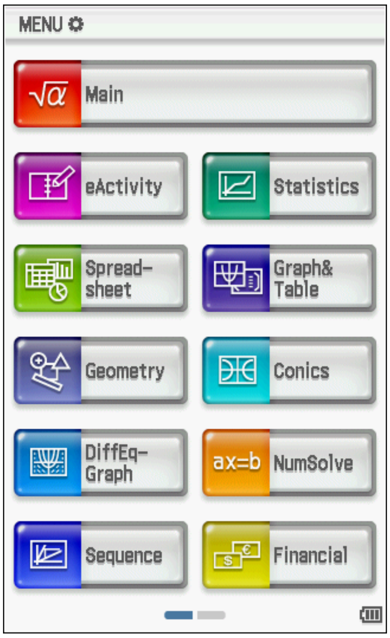
Vasen/oikea-nuolipainikkeella voit siirtää kohdistinta. Voit saada selville valitulle käyrälle kuuluvan pisteen *x*- ja *y*-koordinaattien arvot. Numeronäppäimen painaminen siirtää kohdistimen tarkasti haluttuun kohtaan, esim. kohtaan π.

4.2 Taulukot

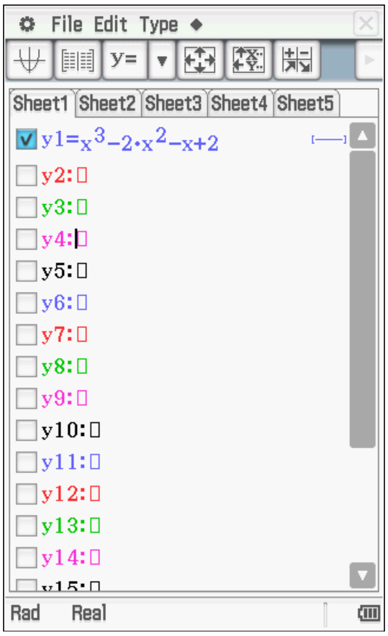
Jos haluat piirtää kuvaajan käsin, on käytettävä taulukkoa, joka näyttää *x*- ja *y*-koordinaattien yhteenkuuluvat arvot. Laskinta voi käyttää tällaisen taulukon luomiseen.


Luo taulukko *x*- ja *y*-koordinaattien arvoille lausekkeessa $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

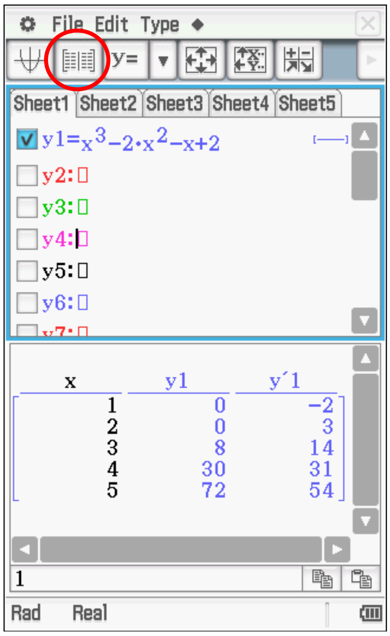
Valitse Graph & Table.



Syötä funktiolauseke

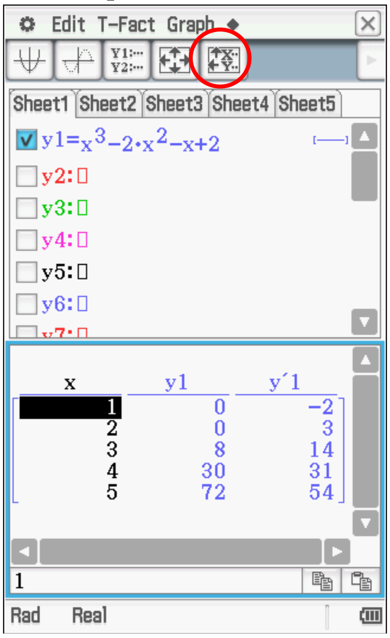


Valitse taulukkopainike.

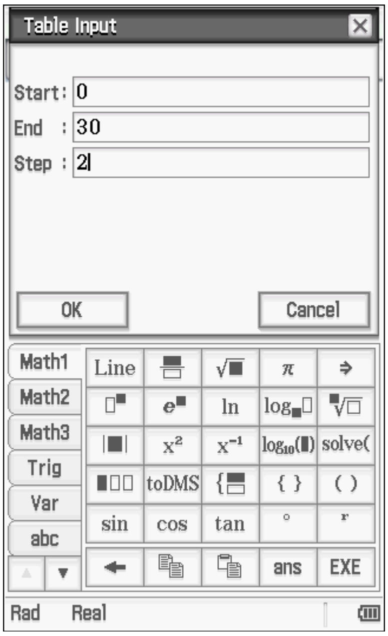


Kuvaaja ei välttämättä näytä tällaiselta. Tämä riippuu siitä, millainen Table Input -tila on valittuna laskimessa.

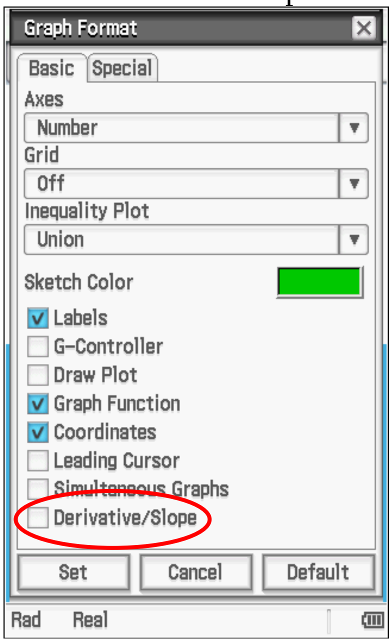
Paina painiketta Table Input.



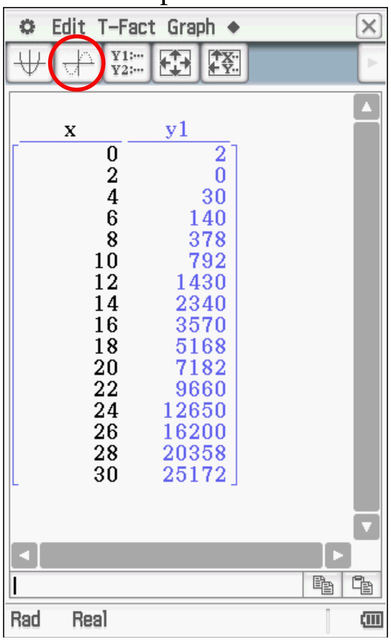
Valitse Start, End ja Step.



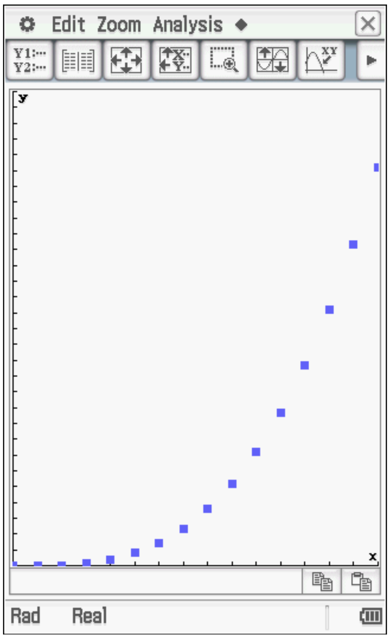
Valitse Derivative/Slope Off.



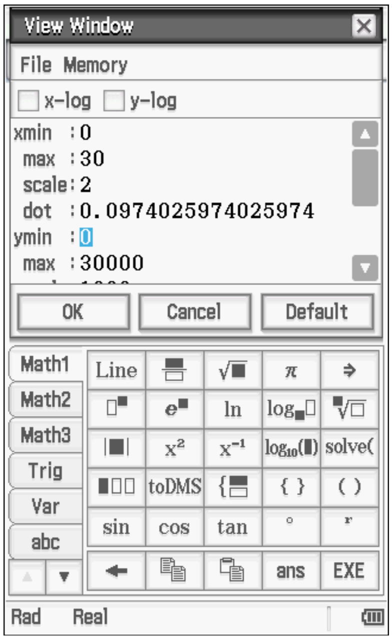
Taulukko näyttää nyt tällaiselta.
Paina Draw-painiketta.



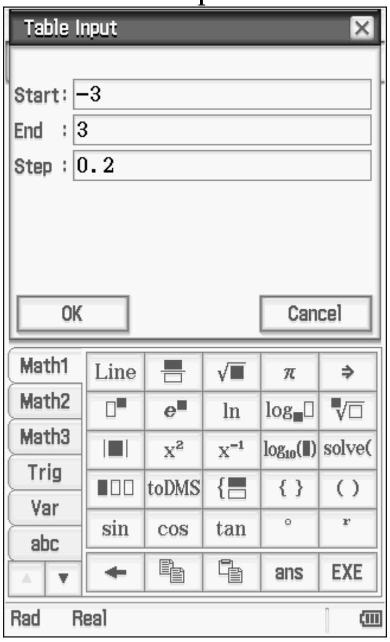
Tulos



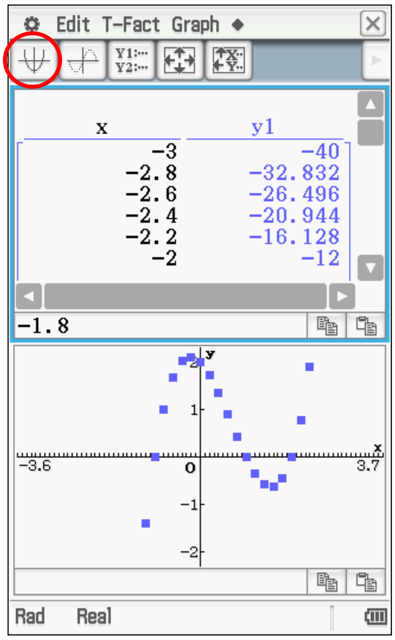
View Window.



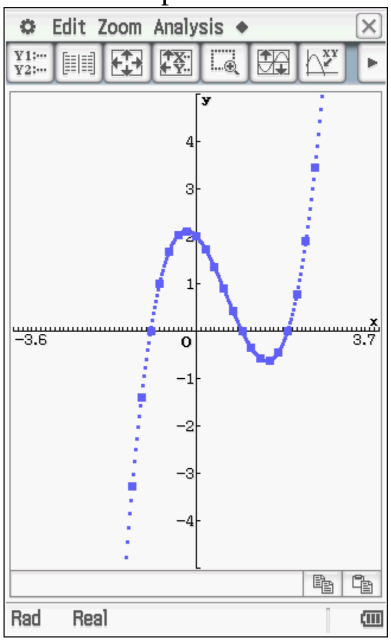
Muuta Table Input -valintaa.



Tulos



Paina Draw-painiketta.



4.3 Kuvaajan pisteet, nollakohta, maksimi- ja minimipisteet

Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ ja piirrä sen kuvaaja.

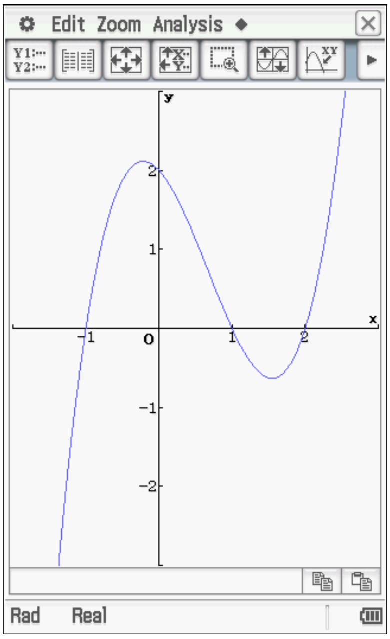
b) Määritä $f(2{,}5)$

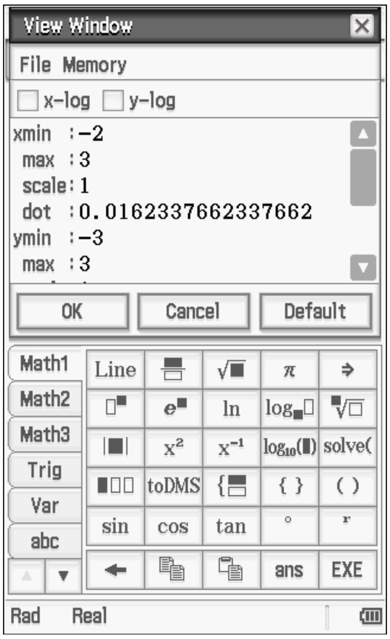
c) Määritä x kun $f(x)=-12$

d) Määritä kuvaajan mahdolliset nollakohdat.

d) Määritä kuvaajan mahdolliset maksimi- ja minimipisteet.

a)
Katso kappale 4.1 ja jatka kuvaajan kanssa työskentelyä seuraavassa näytössä. Käytä oikealla näkyviä asetuksia koordinaatistolle.

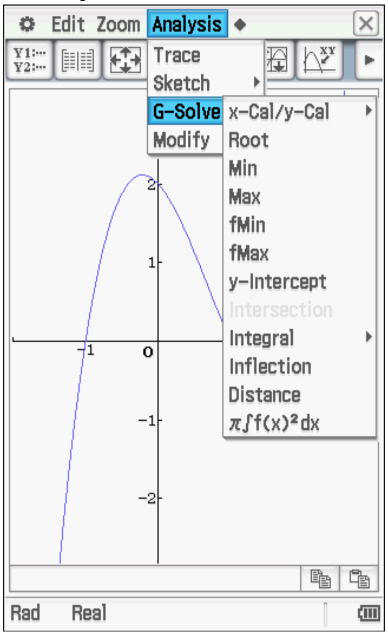




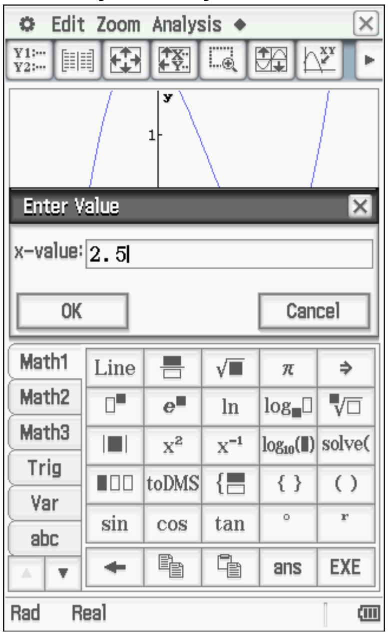
b)

Valitse Analysis, G-Solve.

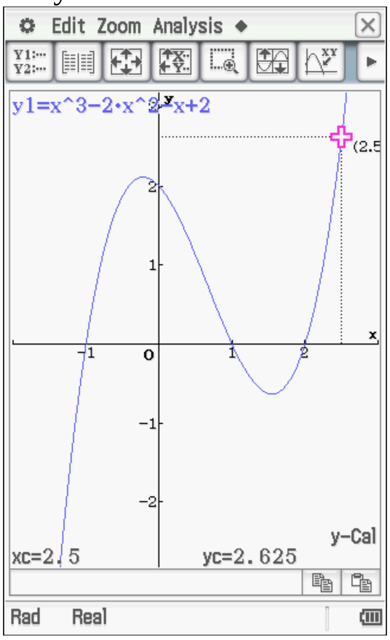
x-Cal/y-Cal.



Valitse y-Cal. Syötä x:n arvo.



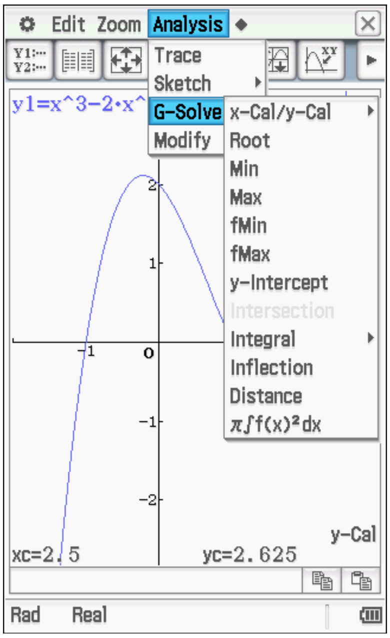
Näkymä.

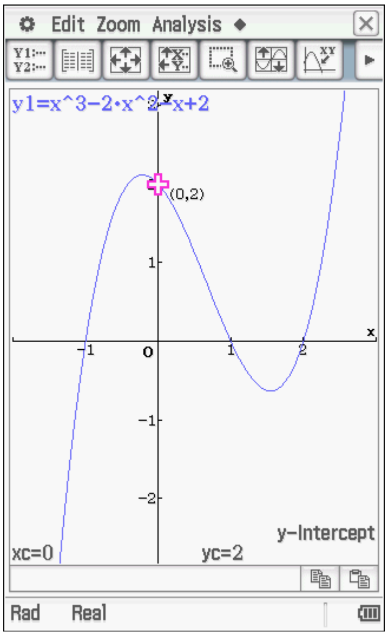


Vastaus: $f(2{,}5)=2{,}625$

Kommentti:

Voit määrittää kuvaajan ja *y*-akselin leikkauspisteen y-Cal -toiminnon avulla.
Sen sijaan, että antaisimme arvon $x=0$, voimme käyttää myös y-Intercept -toimintoa.





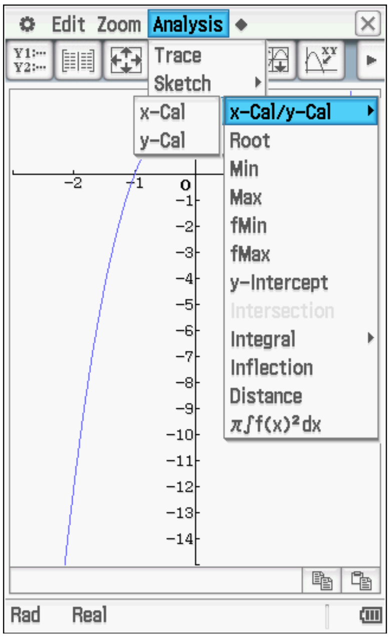
Leikkauspiste *y*-akselilla on $(0,2)$.

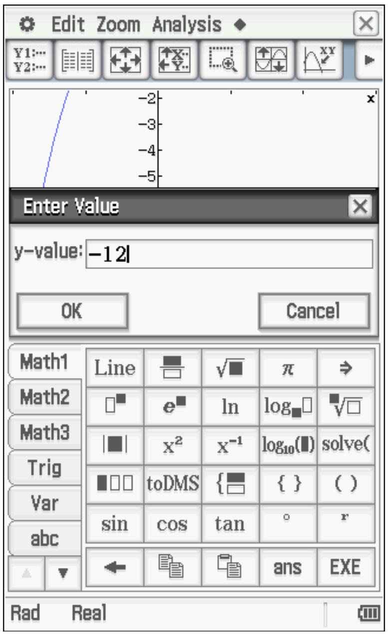
c)

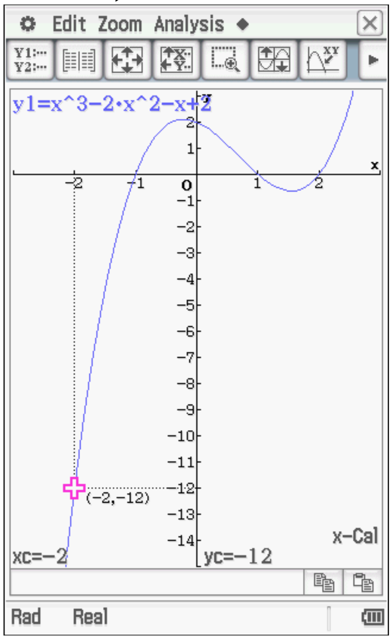
Analysis, G-Solve ja *x*-Cal.

Syötä *y*-arvo. Paina OK.

Tässä ikkunan kokoa on jo muutettu, View Window.



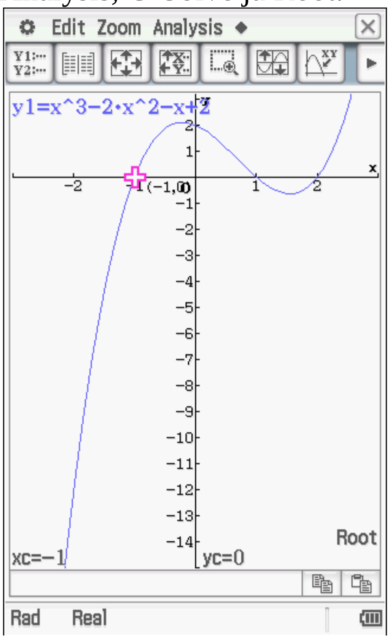


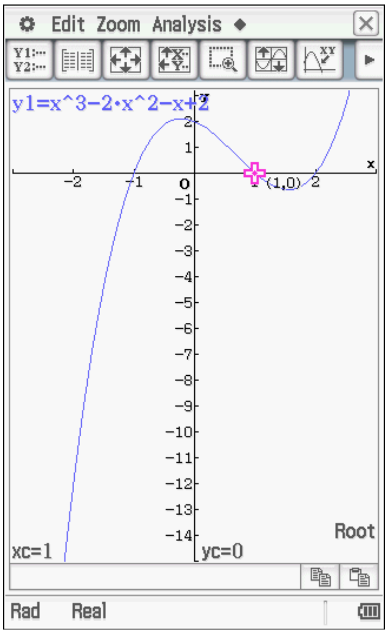


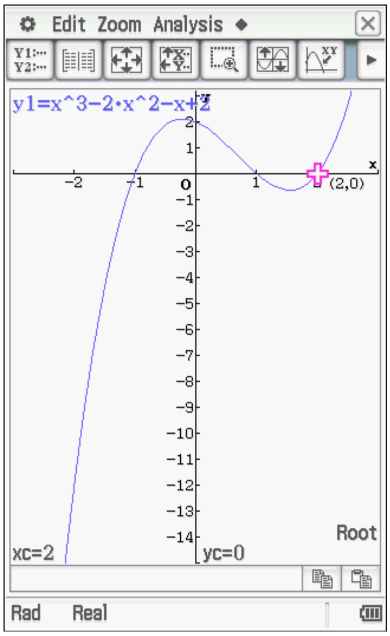
Vastaus: $x = -2$ kun $f(x) = -12$

d)

Analysis, G-Solve ja Root.





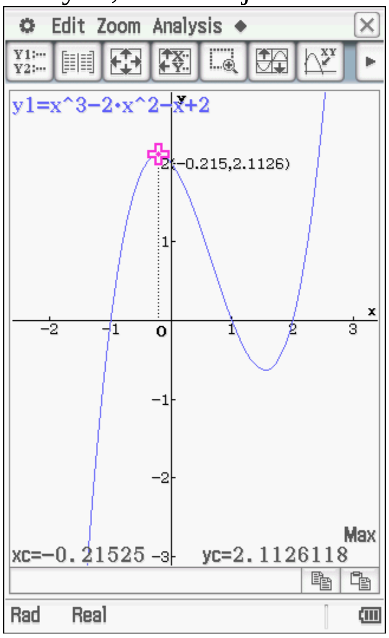


Muut nollakohdat löytyvät painamalla oikeaa nuolipainiketta.
Vastaus: Kuvaajan nollakohdat ovat (-1,0), (1,0) ja (2,0).

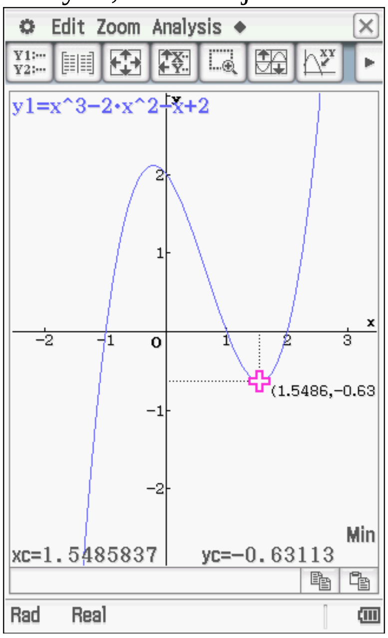
Kommentti:
Voimme ratkaista yhtälön $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ graafisesti määrittämällä kuvaajan *f* nollakohdat. Voit lukea lisää yhtälöjen graafisesta ratkaisusta kappaleesta 4.5.

e)

Analysis, G-Solve ja Max.



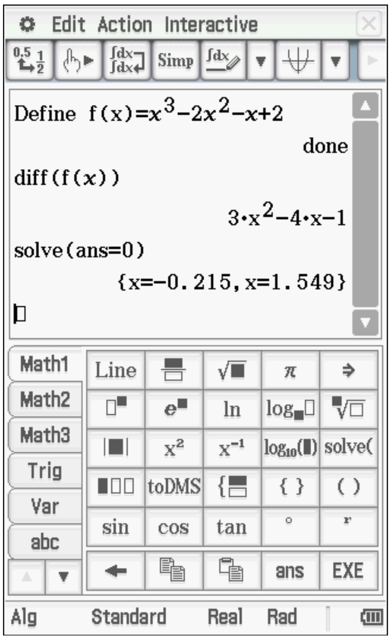
Analysis, G-Solve ja Min.

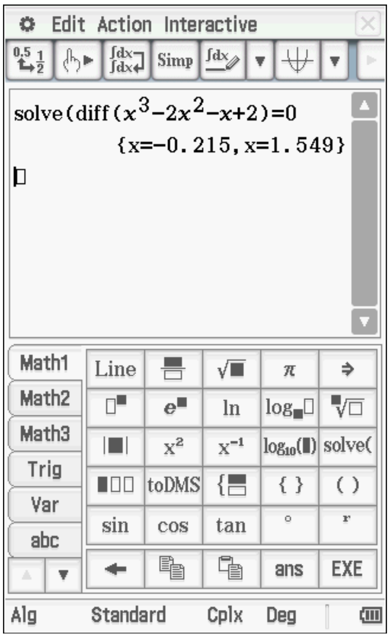


Kuvaajan maksimikohta on $(-0{,}215, 2{,}113)$ ja minimikohta $(1{,}549, 0{,}631)$.

Huomaa! Jos kuvaajalla on useampia maksimi- ja minimikohtia, voit näyttää niiden koordinaatit painamalla oikeaa nuolipainiketta.

Tarkista:





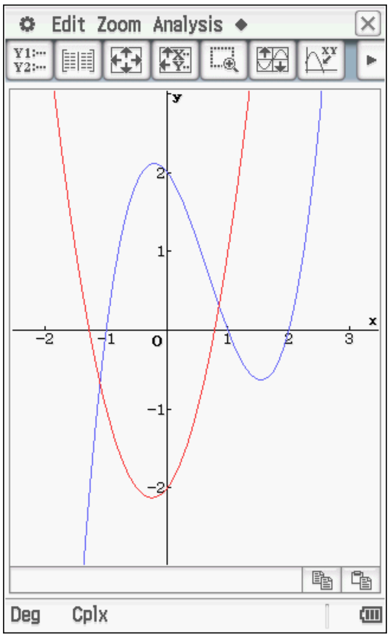
Tämä tehdään näin: $f'(x) = 0$, kun $x = -0{,}215$ tai $x = 1{,}549$.

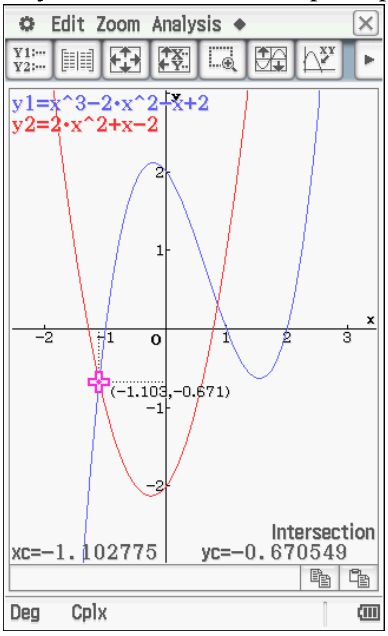
4.4 Kuvaajien leikkauspisteet

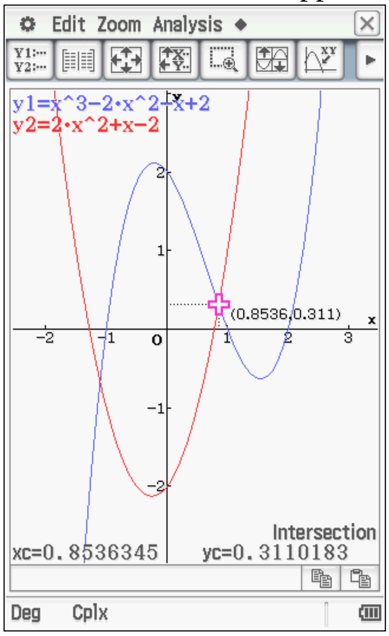
Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ ja piirrä sen kuvaaja.
Piirrä *g*:n kuvaaja, joka määritellään $g(x)=2x^2+x-2$ samaan koordinaatistoon.
Määritä näiden kahden kuvaajan mahdolliset leikkauspisteet.

Analysis, G-Solve ja Intersection.

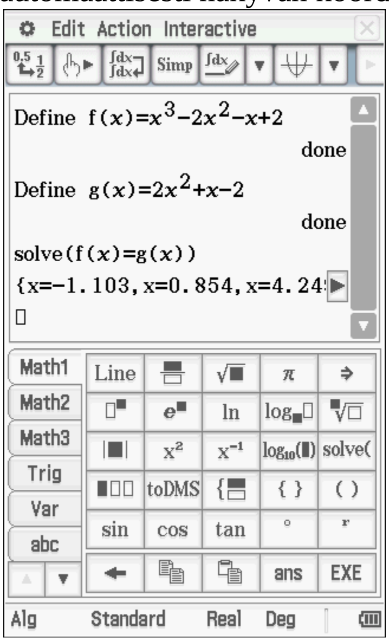
Näytä seuraava leikkauspiste painamalla oikeaa nuolinäppäintä.

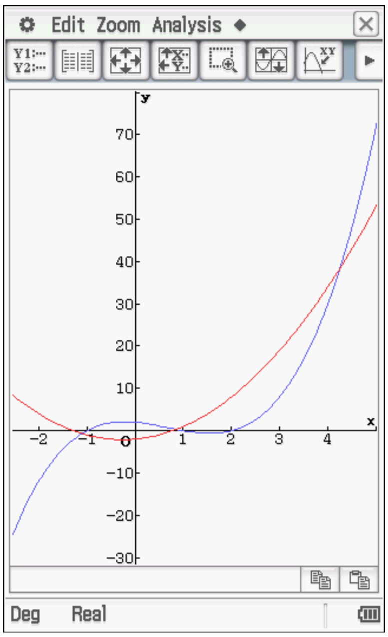


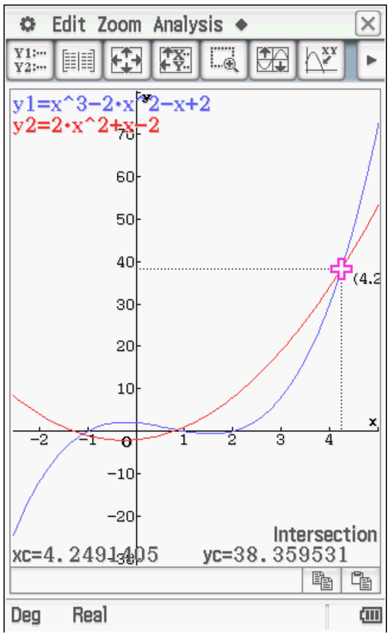




Vastaus: Kuvaajien leikkauspisteet ovat (-1,103; -0,671) ja (0,854; 0,311).
Kommentti:
Muista tarkistaa graafinen vastaus ratkaisemalla yhtälö $x^3-2x^2-x+2=2x^2+x-2$ algebrallisesti. On olemassa myös kolmas leikkauspiste. G-Solve valikon komennot rajataan automaattisesti näkyvän koordinaatiston alueelle.







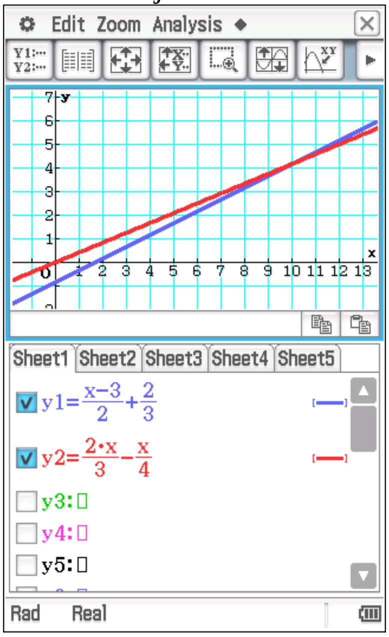
On siis olemassa kolmaskin leikkauspiste niiden kahden lisäksi, jotka ensin löysimme graafisesti. Löytääksemme tämän kolmannen leikkauspisteen koordinaatistosta meidän on siirryttävä akseleilla positiiviseen suuntaan.

Kolmannen leikkauspisteen *x*-koordinaatti on 4,249.

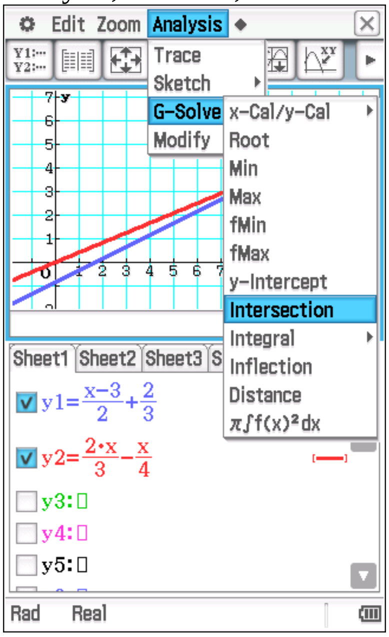
4.5 Yhtälöiden graafinen ratkaiseminen

Käytämme ensin Intersection-komentoa yksinkertaisen yhtälön ratkaisemiseen.
Kappaleessa 3 ratkaisimme yhtälön $\frac{x-3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}-\frac{x}{4}$ Main-sovelluksessa. Tämä yhtälö voidaan ratkaista myös graafisesti. Sijoitamme yhtälön vasemmalle puolelle y1 ja oikealle y2.

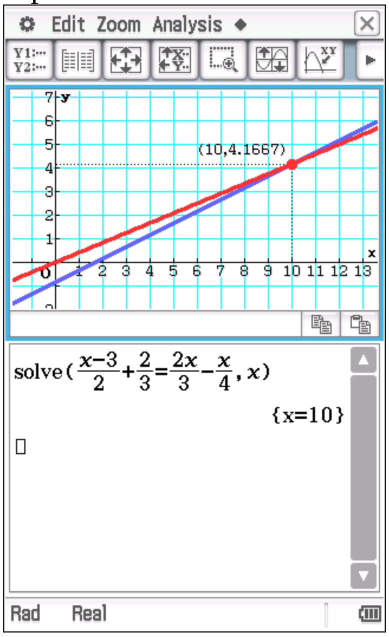
Valitse molemmat yhtälöt. Piirrä kuvaajat.



Säädä View Window sopivaksi. Analysis, G-Solve, Intersection.



Painamalla EXE voit merkata pisteen. Tarkistus laskemalla.

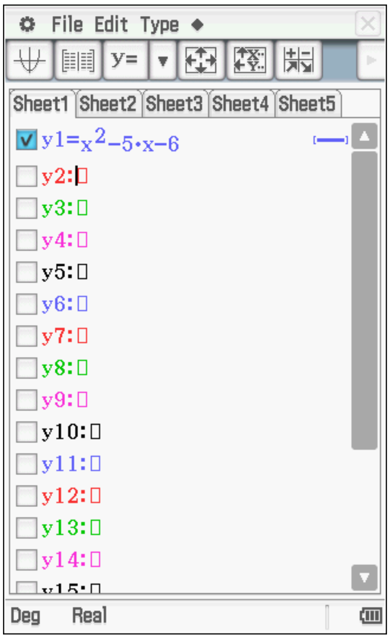


Yhtälön $\frac{x-3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}-\frac{x}{4}$ ratkaisu on $x=10$.

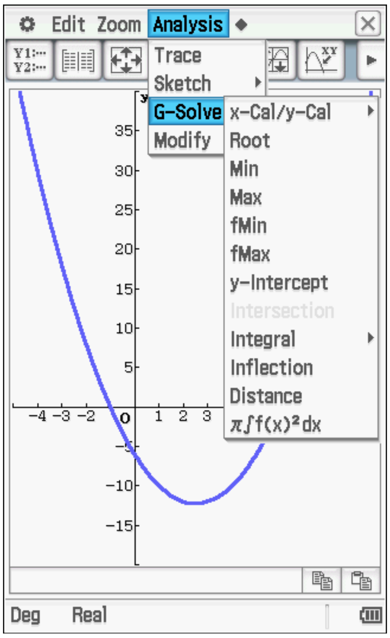
 Ratkaise toisen asteen yhtälö $x^2-5x-6=0$.

Tässä tehtävässä käytämme Root-komentoa yhtälön ratkaisuun.

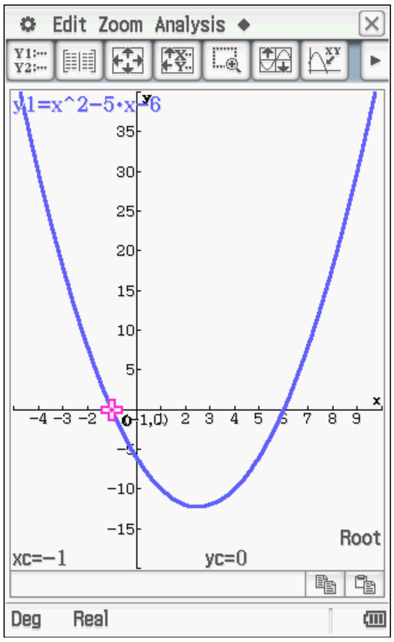
Syötä funktion lauseke.

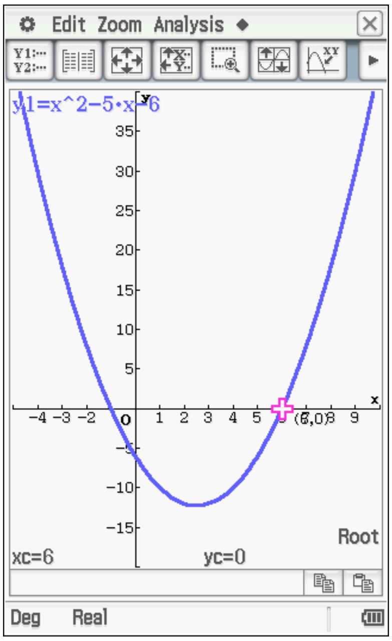


Analysis, G-Solve, Root.

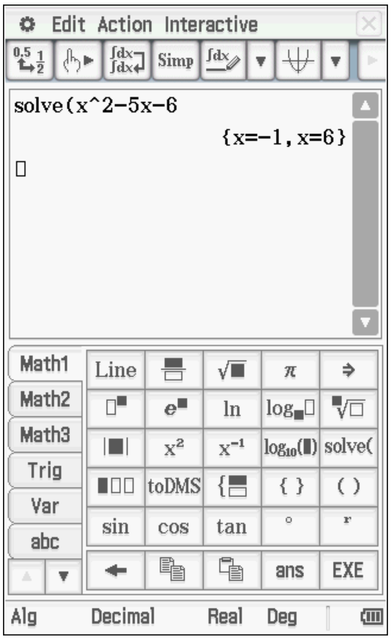


Oikea nuolinäppäin antaa seuraavan nollakohdan.





Tarkistus



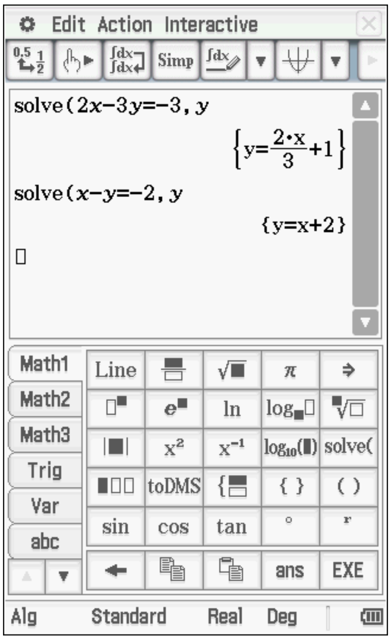
Toisen asteen yhtälön $x^2 - 5x - 6 = 0$ tulokset ovat $x = -1$ ja $x = 6$.


Ratkaise yhtälöryhmä graafisesti.

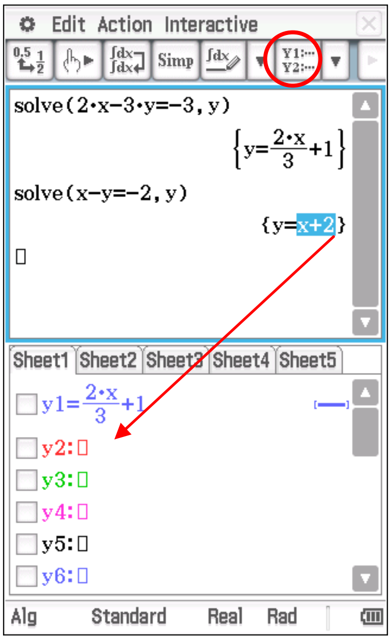
$$2x - 3y = -3$$
$$x - y = -2$$

Yhtälö on ensin muunnettava muotoon $y = ax + b$.

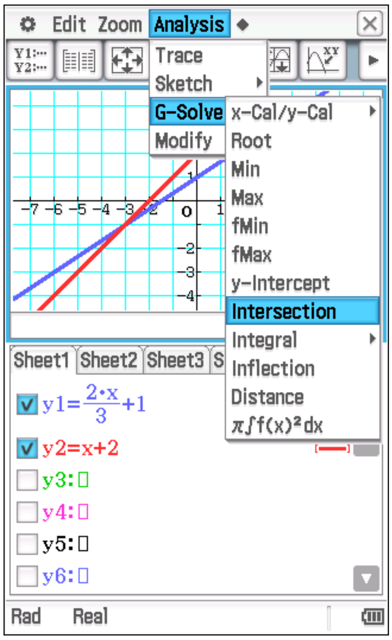
Ratkaistaan y ja avataan funktioluettelo



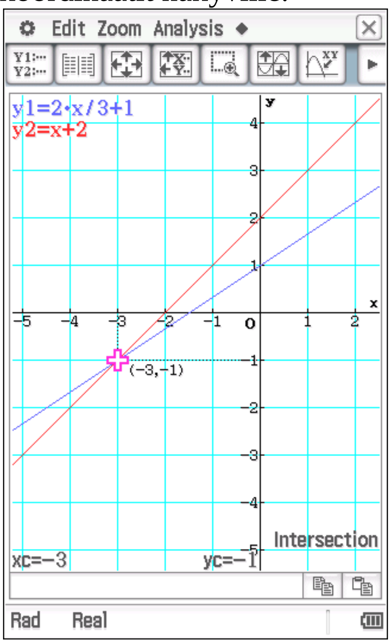
Raahataan ratkaisut *y:lle.*



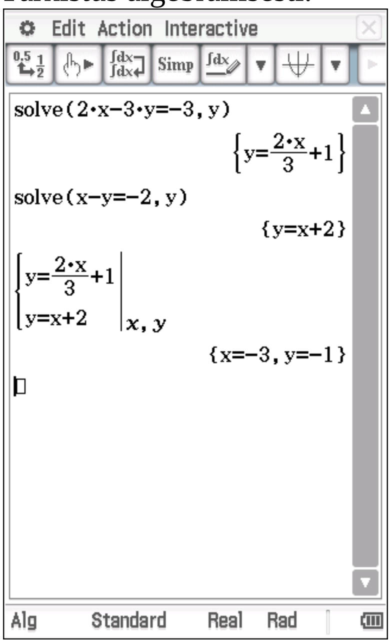
Leikkauspisteet graafisesti.



EXE:n painallus jättää pisteen koordinaatit näkyville.



Tarkistus algebrallisesti.

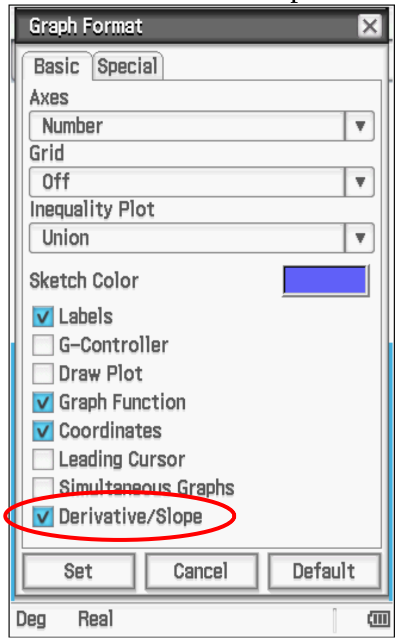


Yhtälöryhmän ratkaisu on $x = -3$ ja $y = -1$.
Harjoittele graafisia ratkaisuja yksinkertaisilla, toisen ja kolmannen asteen yhtälöillä, eksponentiaali- ja logaritmifunktioilla sekä yhtälöillä, joissa on kaksi tuntematonta.

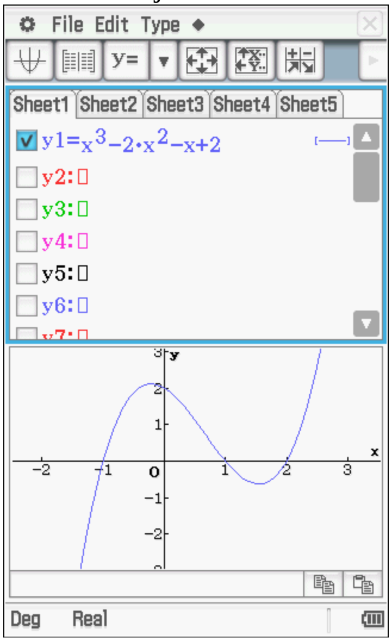
4.6 Derivaatta ja toinen derivaatta

Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Määritä $f'(2)$.

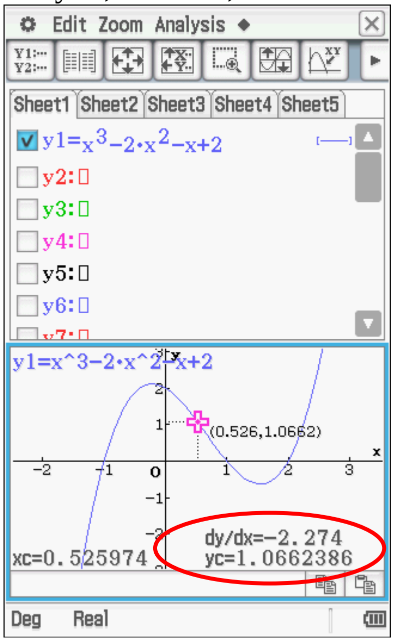
Siirry Graph-tilaan.
Valitse Derivative/Slope On.



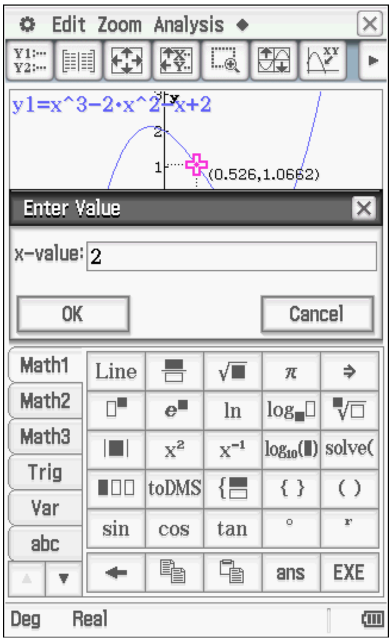
Piirrä kuvaaja.



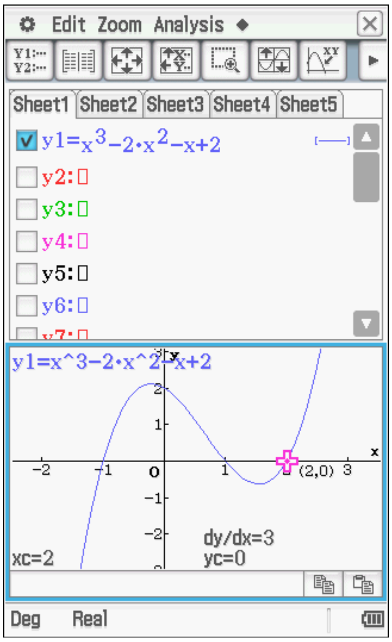
Analysis, G-Solve, Trace.



Paina näppäimistön lukua 2.
Tällöin tuloksena on



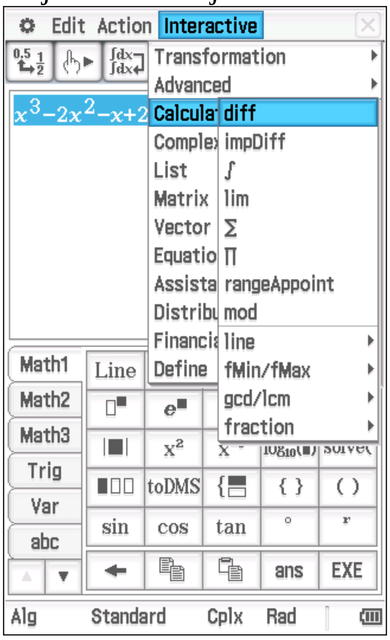
Paina OK.

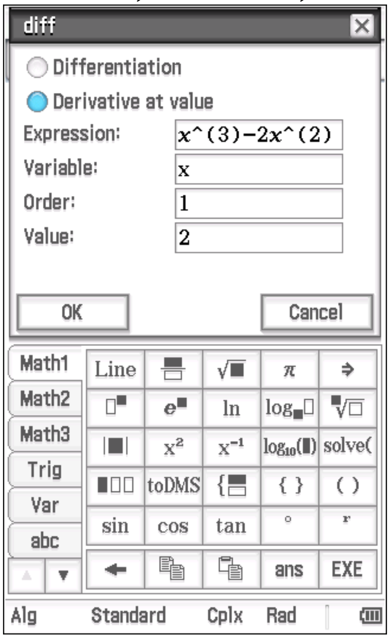


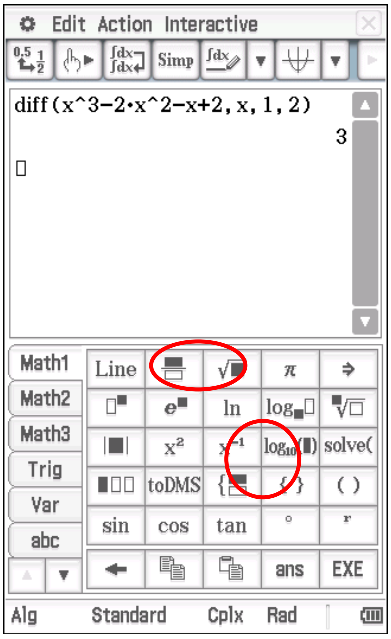
Vastaus: $f'(2) = 3$.

Tarkista:

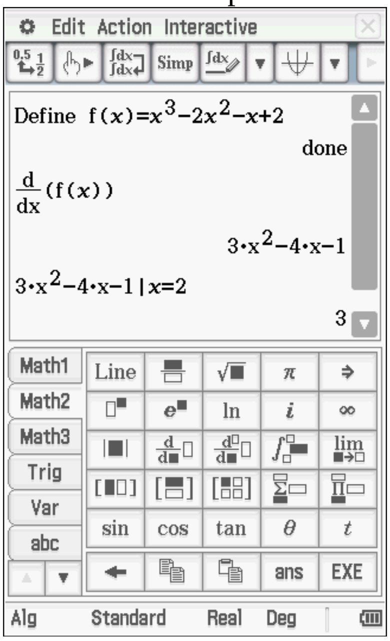
Kirjoita lauseke ja maalaa se. Interactive, Calculation, diff







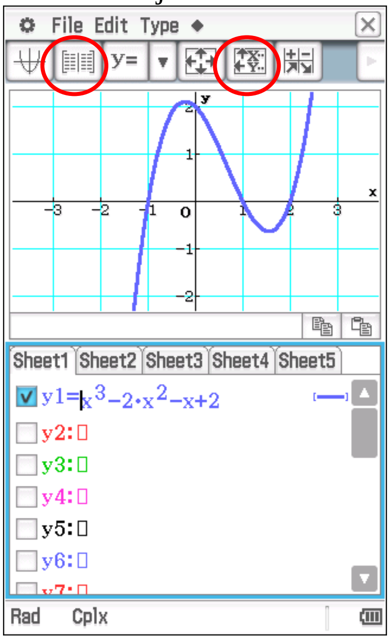
Vaihtoehtoinen tapa:

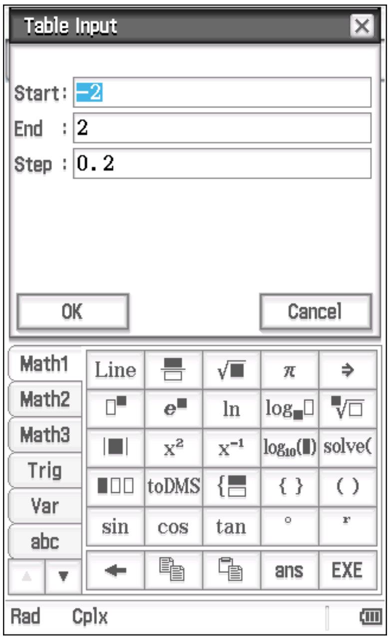


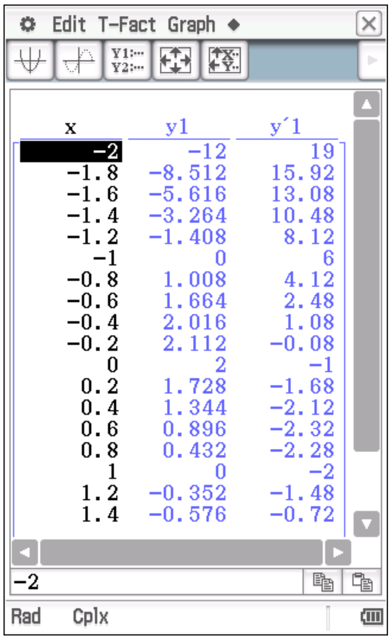
Tällöin on osoitettu, että $f'(2) = 3$.

Derivaatan arvot voidaan myös taulukoida Trace-komennolla. Tämä edellyttää, että Derivative on asetettu päälle (On) luvun 4.6 alun ohjeen mukaisesti. Seuraavasta taulukosta näemme esimerkiksi, että $f'(-1) = 6$ ja $f'(1) = 2$.

Taulukointi ja arvovälin asetus. Valitse haluamasi arvoväli. Taulukoi arvot.





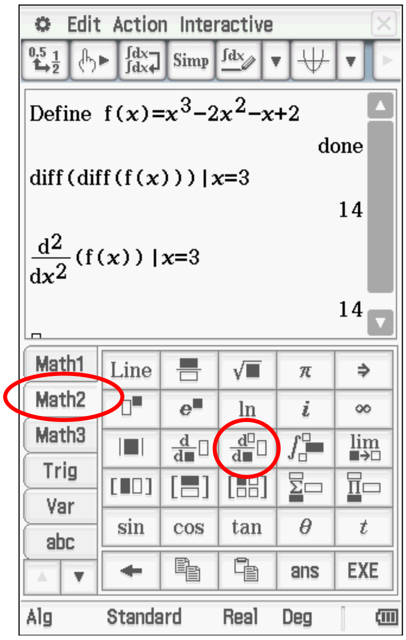


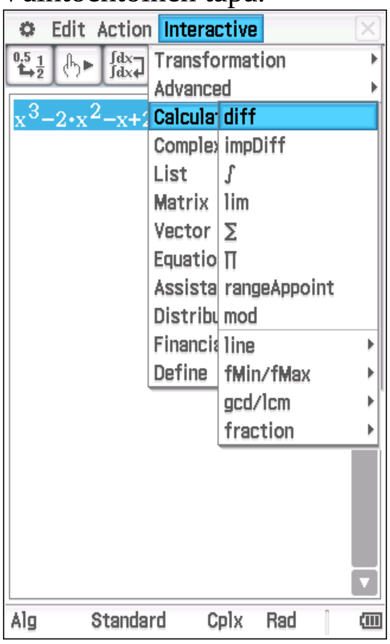
Valikosta Analysis, Sketch, Tangent voit piirtää tangentin haluamaasi paikkaan. Käytä apuna numeronäppäimistöä tarkan pisteen asettamiseksi.

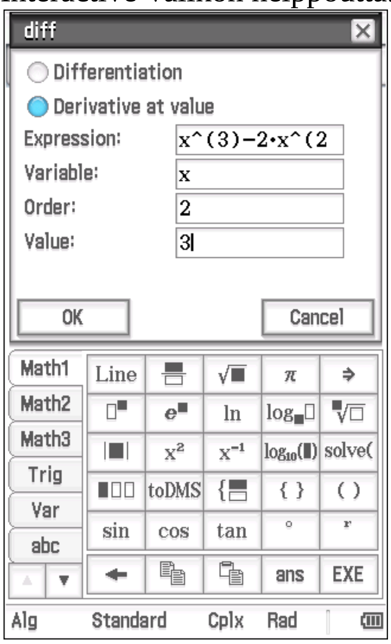
Mikä yhteys tangentin jyrkkyydellä tietyssä pisteessä on derivaatan arvoon samassa pisteessä?

 Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Määritä $f''(3)$.

Valitse Main-sovellus. Vaihtoehtoinen tapa. Interactive-valikon helppoutta.







Vastaus: $f''(3) = 14$

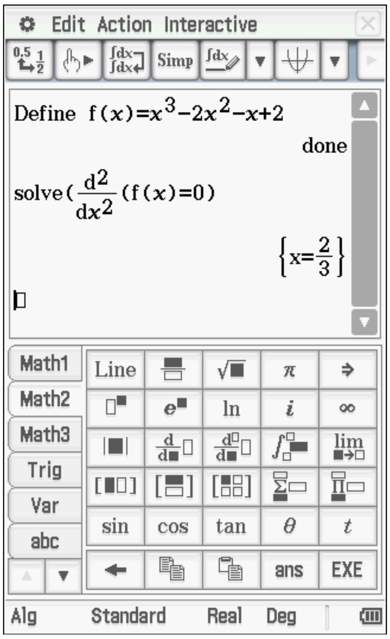
Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
Määritä kuvaajan mahdollisen käännepisteen x-koordinaatin arvo.

Tuloksena on
$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ ja $f''(x) = 6x - 4$

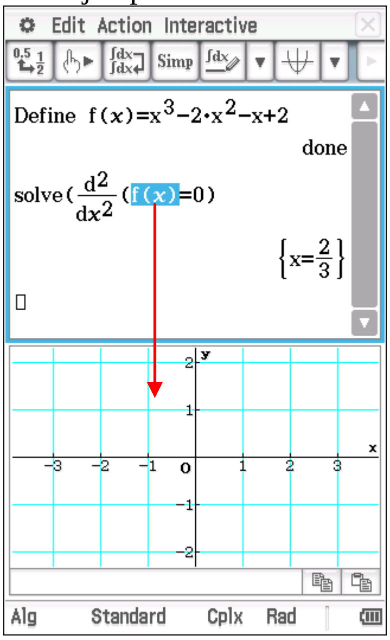
Tästä seuraa, että
$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}$$

Siirretään tämä CP400 –laitteeseen:

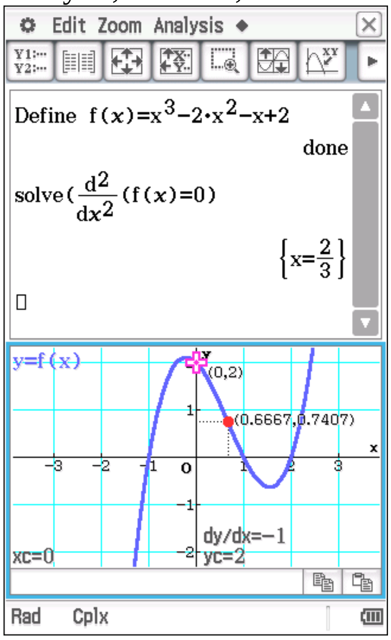
Toisen derivaatan nollakohta.



Kuvaajan piirto raahaamalla.



Analysis, G-Solve, Inflection

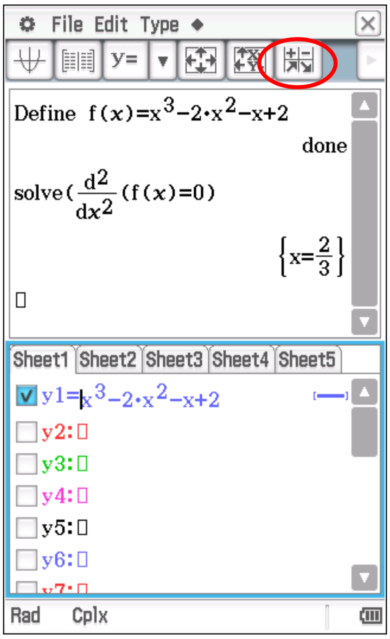


Vastaus: Kuvaajan f käännepisteen x-koordinaatti on $x = \frac{2}{3}$.
Käännepisteet sijaitsevat maksimi- och minimikohtien välissä. Kuvaajan kuperuussuunta muuttuu käännepisteissä.

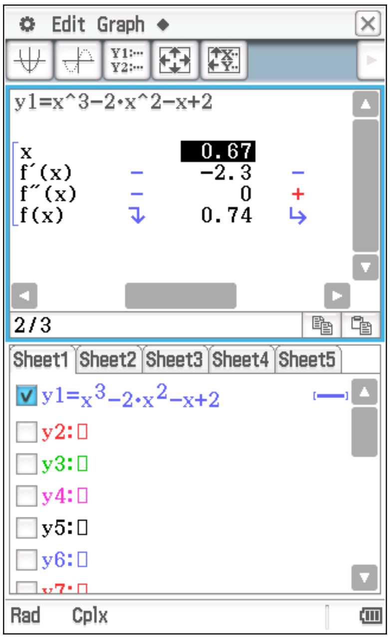
Viimeisessä näyttökuvassa on käännepiste hyväksytty painamalla EXE. Tällöin sen koordinaatit jäävät näkyville ja piste merkitään punaisella. Salmiakin kuvasta voi piirtää kuvaajan uudelleen ReDraw ja Trace toiminnolla voi kulkea pitkin käyrää tutkien sekä koordinaatteja että derivaatan arvoja käyrän pisteissä.

Kulkukaavion saa näkyville funktioluettelossa valitulle funktiolle. Edellinen käännepisteen hakeminen voidaan perustella myös kulkukaavion avulla.

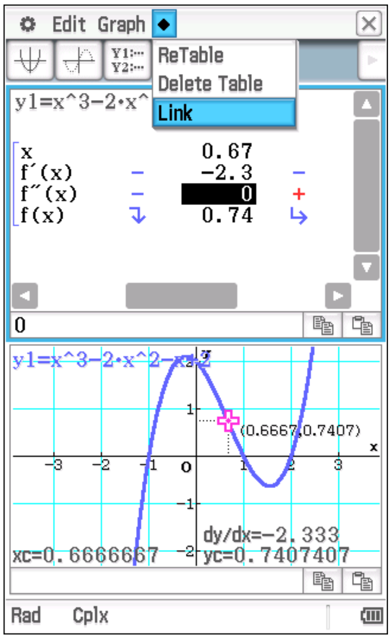
Paina kulkukaavion merkkiä.



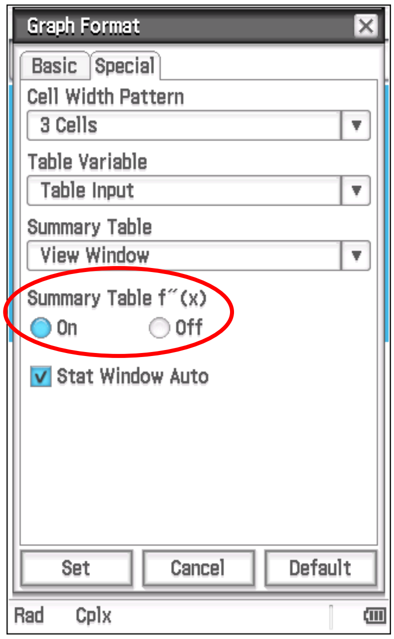
Tarkat arvot näet taulukon alta. Piirrä myös kuvaaja.



Linkittäminen yhdistää kulkukaavion ja kuvaajan.



Voit valita, näkyykö toinen derivaatta kulkukaaviossa Settings, Graph Format, Special.

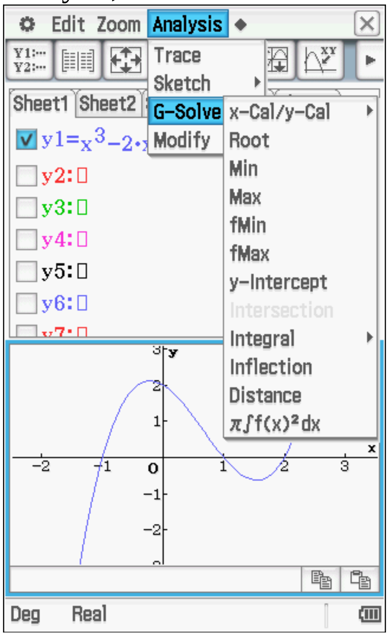


Koske kulkukaaviossa f’(x) ja f’’(x) kohtia. Mitä huomaat?

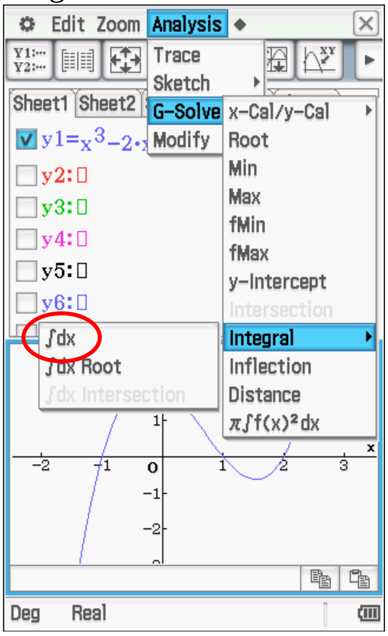
4.7 Integraali – pinta-ala

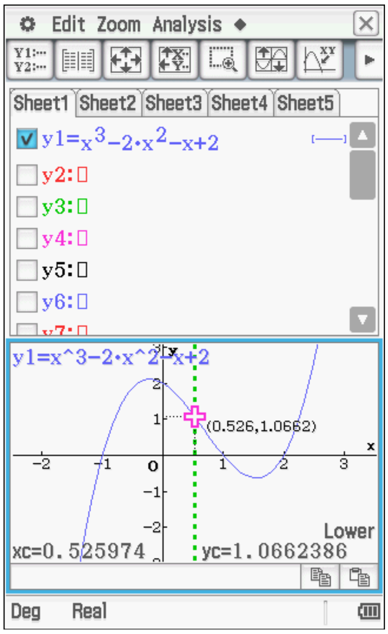
Syötä funktio *f*, joka määritellään $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
Määritä sen suljetun alueen pinta-ala, joka sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä ja jota rajoittavat funktion f kuvaaja sekä koordinaattiakselit.

Analysis, G-Solve.

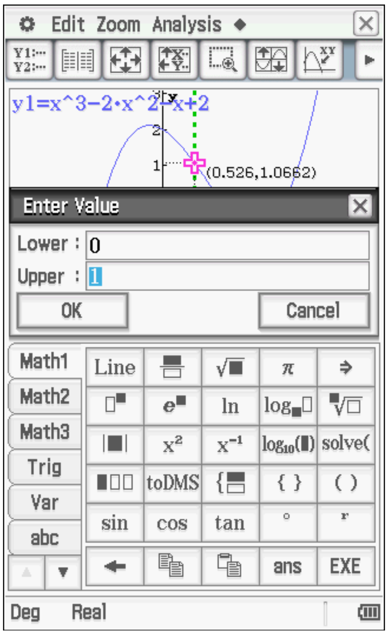


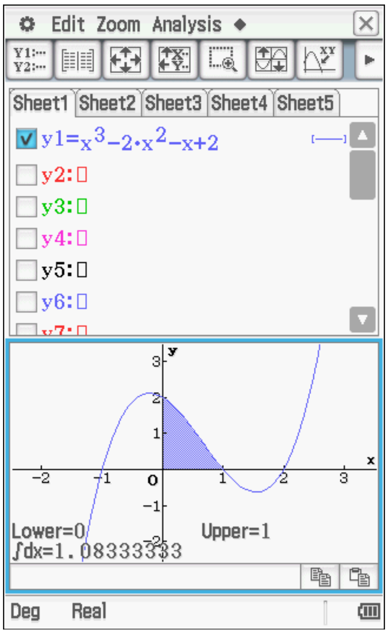
Integral.





Valitse integraalin alaraja painamalla näppäimistön numeropainiketta 0.

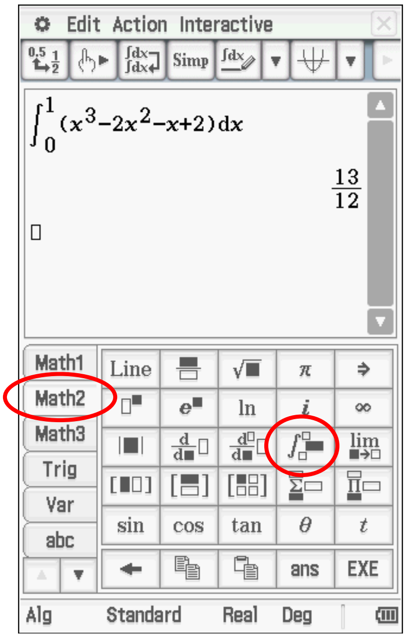




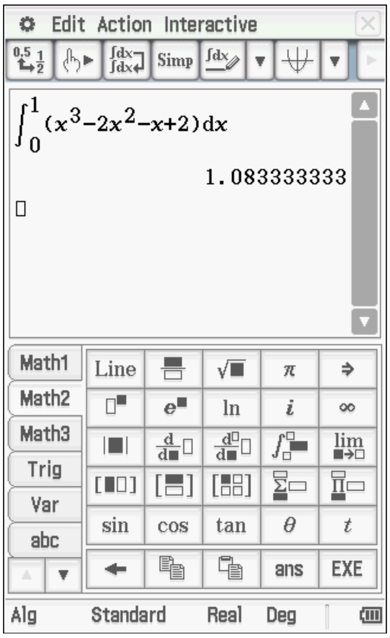
Näemme, että sen alueen pinta-ala, joka sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä ja jota rajoittavat funktion *f* kuvaaja sekä koordinaatiston akselit, on 1,0833.

Tarkistus: Valitse Main -sovellus. Syötä funktion lauseke integraalimerkin jälkeen ja anna integrointirajat. Paina EXE.

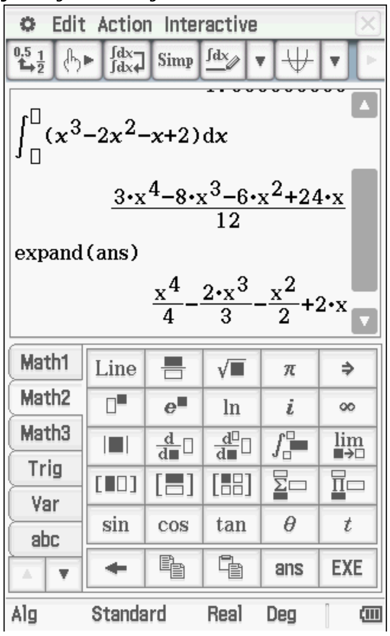
Tuloksena saamme $\frac{13}{12}$.



Vastaus desimaalilukuna.



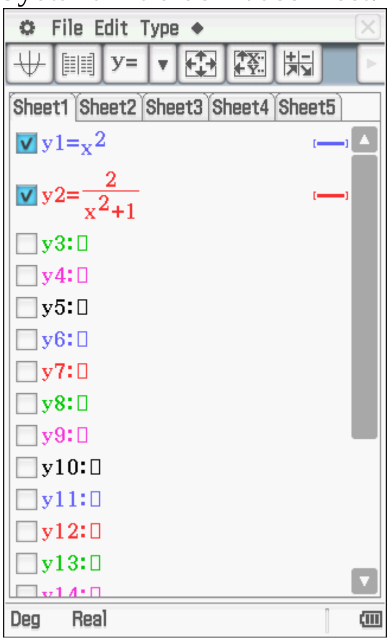
Integraalifunktio saadaan ilman ylä- ja alarajaa.



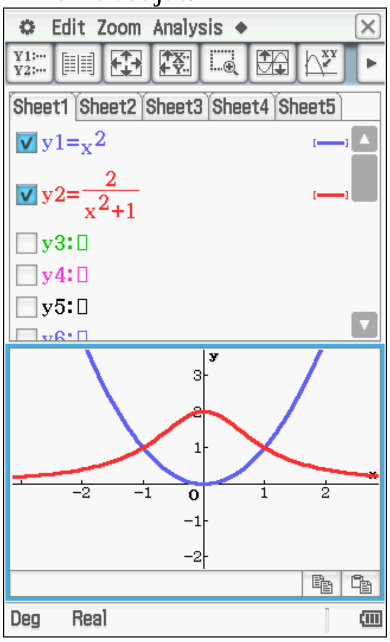
Saamaamme tulosta todistaa myös graafinen ratkaisu. Muista lisätä integroimisvakio!

Määritä pinta-ala, jota rajaavat kuvaajat $f(x)=x^2$ ja $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$.

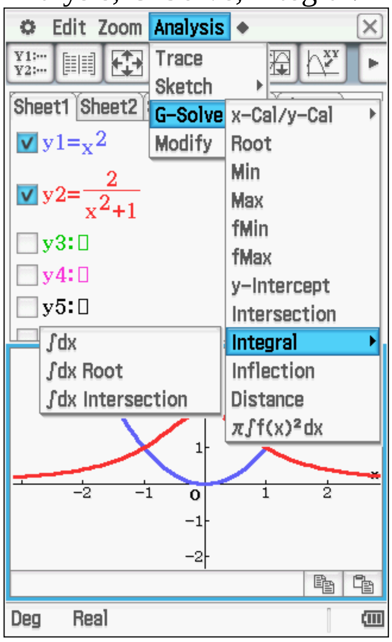
Syötä funktioiden lausekkeet.



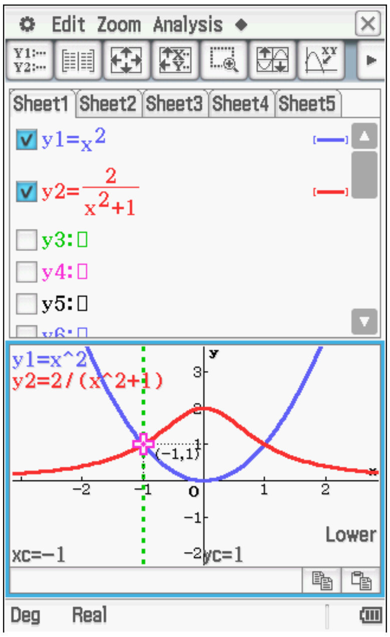
Piirrä kuvaajat.



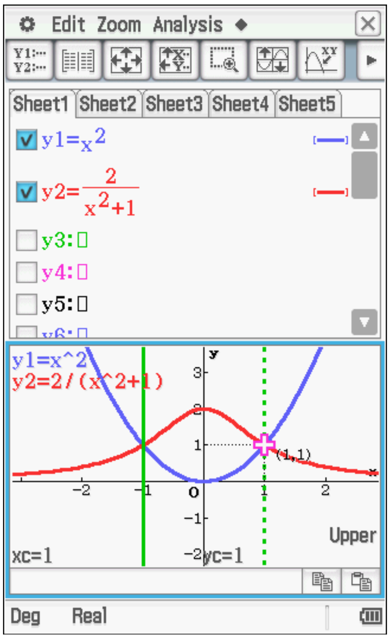
Analysis, G-Solve, Integral.



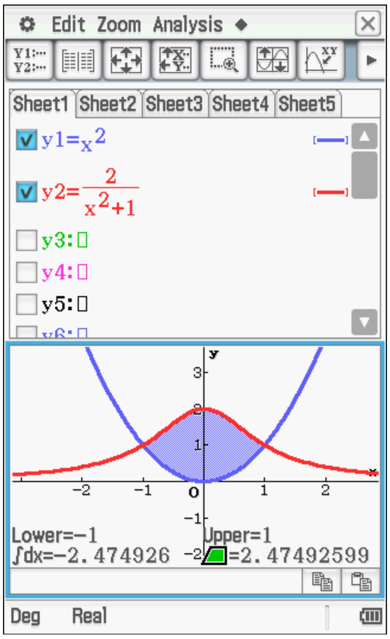
$\int dx$ Intersection. EXE.



Oikea nuolinäppäin. EXE.



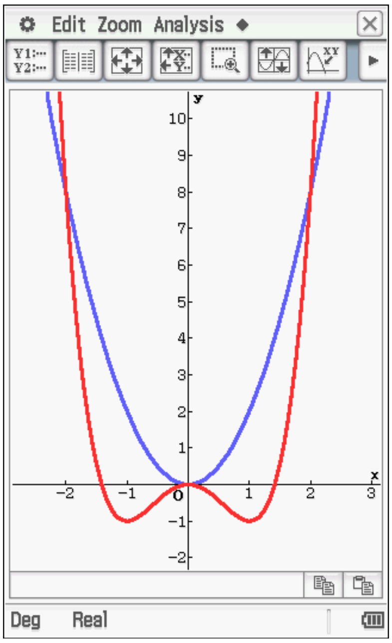
EXE.



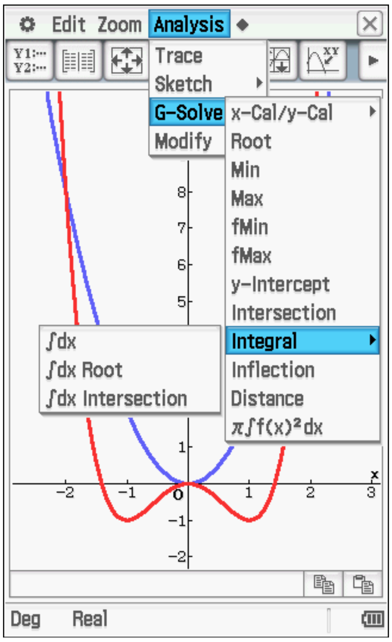
Kuvaajien määrittämän alueen pinta-ala on noin 2,47 pinta-alayksikköä.

 Määritä pinta-ala, jota rajaavat kuvaajat $f(x)=2x^2$ ja $g(x)=x^4-2x^2$.

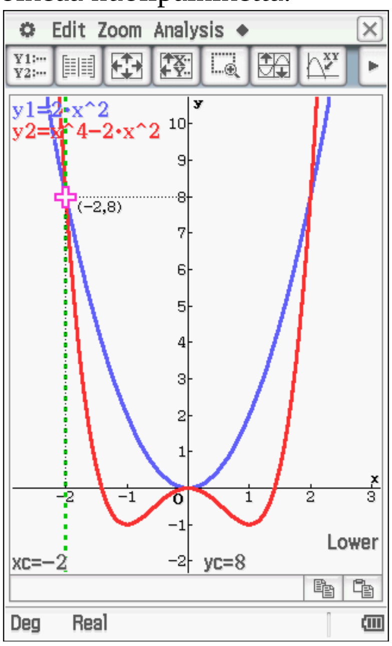
Piirrä kuvaajat.



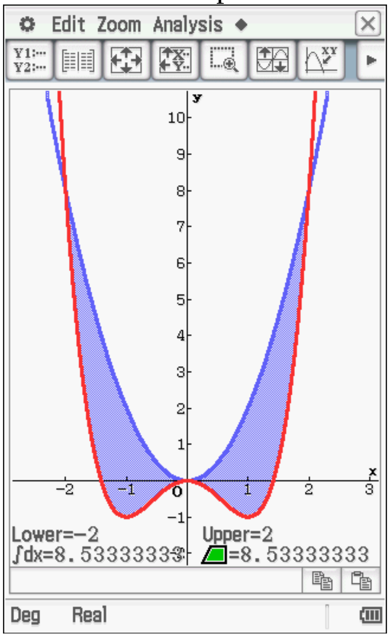
Valitse $\int dx$ Intersection. EXE.

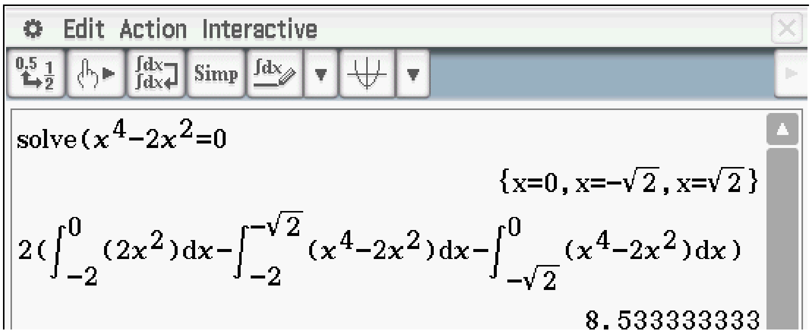


EXE ja paina kaksi kertaa oikeaa nuolipainiketta.



Vahvista valinta painamalla EXE.





Kuvaajien määrittämän alueen pinta-ala on noin 8,53 pinta-alayksikköä. Oikealla näkyvässä kuvassa näemme algebrallisen ratkaisun.

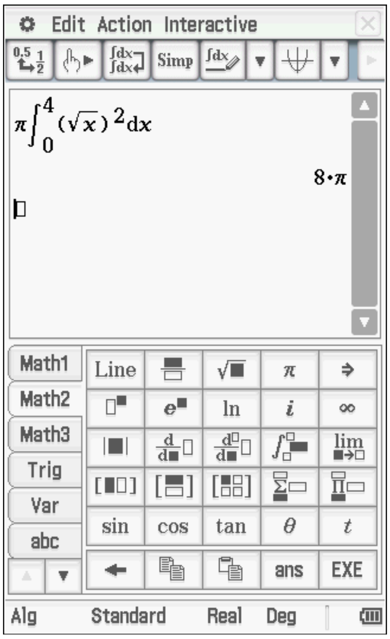
4.8 Integraali – pyörähdyskappaleen tilavuus

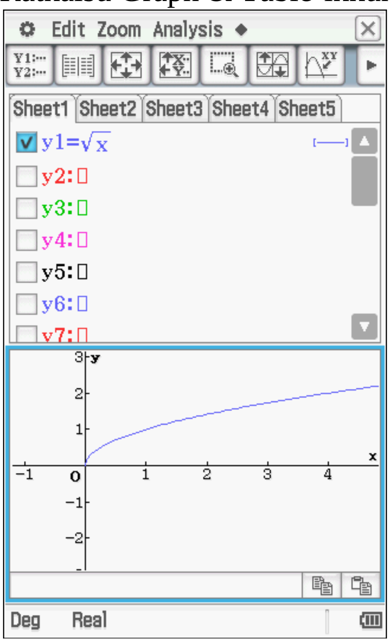

Aluetta rajoittaa x-akseli ja kuvaaja $y = \sqrt{x}$, jossa $0 \le x \le 4$. Tämä rajattu alue pyörähtää x-akselin ympäri. Tällöin tuloksena on pyörähdyskappale. Laske pyörähdyskappaleen tilavuus.

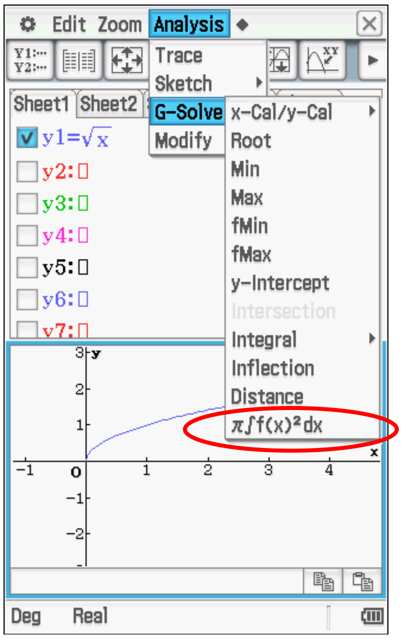
Pyörähdyskappaleen tilavuus voidaan laskea seuraavasti:

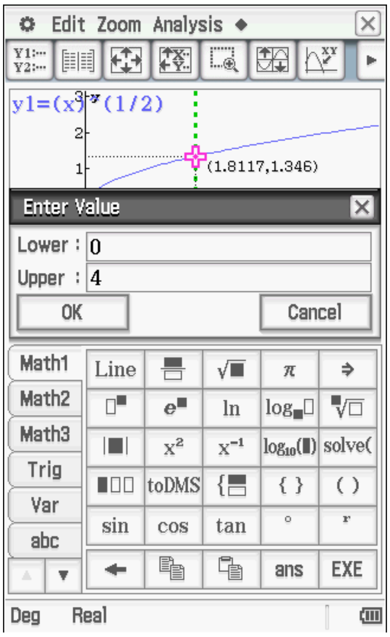
$$\text{Volume} = \int_a^b \pi (radius)^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

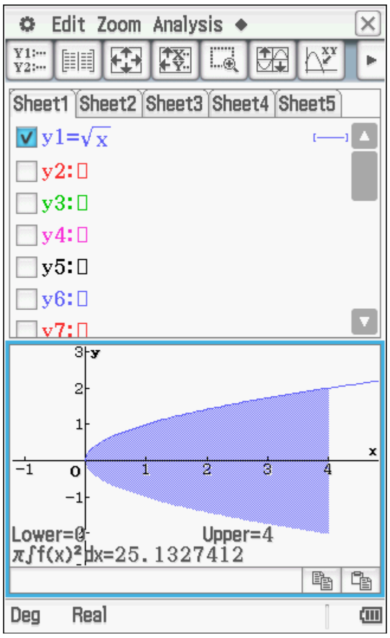
Ratkaisu Main-sovelluksessa. Ratkaisu Graph & Table-ikkunassa.









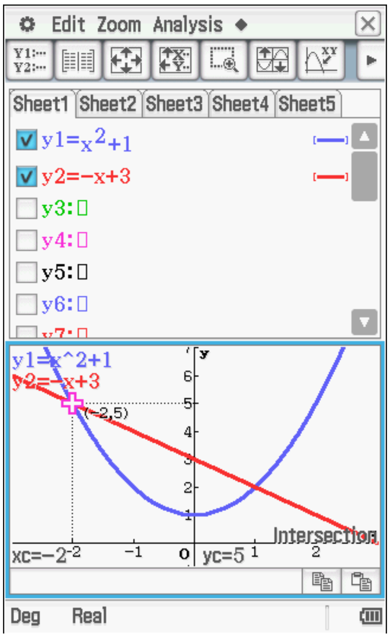


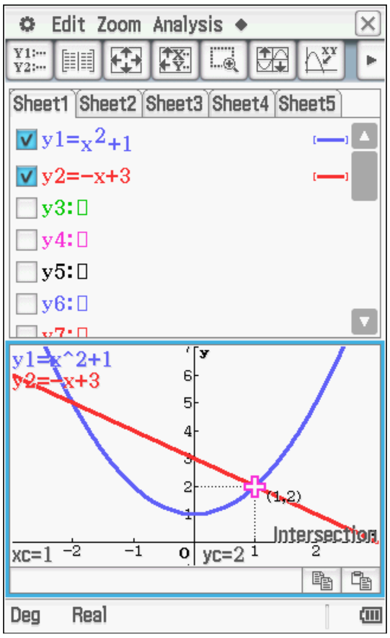
Pyörähdyskappaleen tilavuus on $8\pi \approx 25{,}13$ tilavuusyksikköä.

 Aluetta rajoittaa kuvaaja $y = x^2 + 1$ sekä suora $y = -x + 3$. Tämä alue pyörähtää *x*-akselin ympäri, jolloin tuloksena on pyörähdyskappale. Laske pyörähdyskappaleen tilavuus.

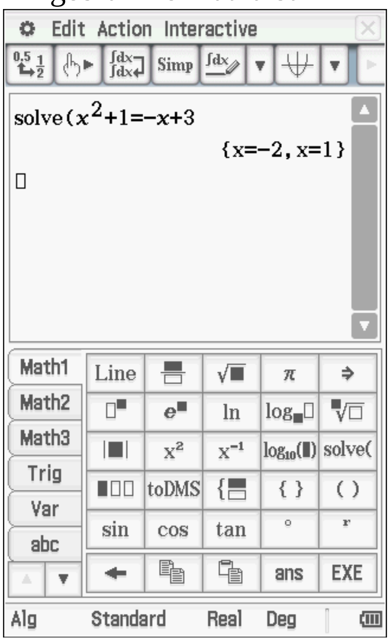
Rajat tälle määrätylle integraalille määrittyvät paraabelin ja suoran leikkauspisteiden *x*-koordinaattien kautta.

Graafinen ratkaisu



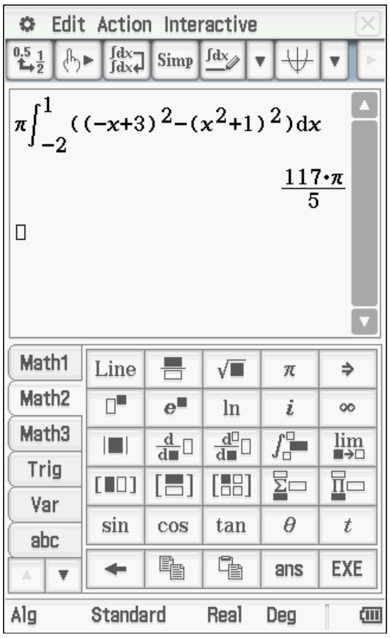


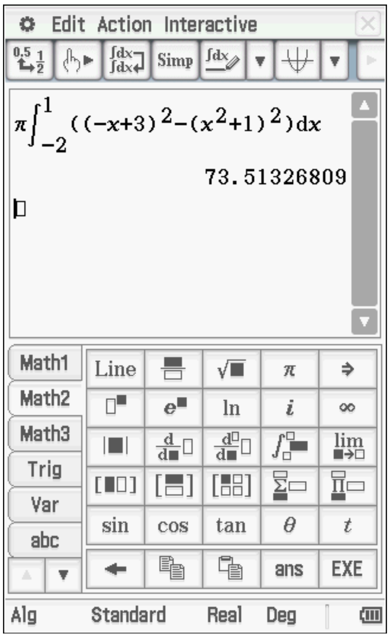
Algebrallinen ratkaisu



Huomaa, että integroitava on seuraavien lausekkeiden muodostama erotusfunktio: $y^2 = (-x+3)^2$ ja $y^2 = (x^2+1)^2$.

Ratkaisu.





Pyörähdyskappaleen tilavuus on $\frac{117\pi}{5} \approx 73{,}51$ tilavuusyksikköä.

4.9 Integraali – pyörähdyskappaleen pinta-ala

Jos funktio f on derivoituva koko välillä $a \le x \le b$, on sen kappaleen pinta-ala, joka muodostuu kuvaajan $y = f(x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri, seuraava:

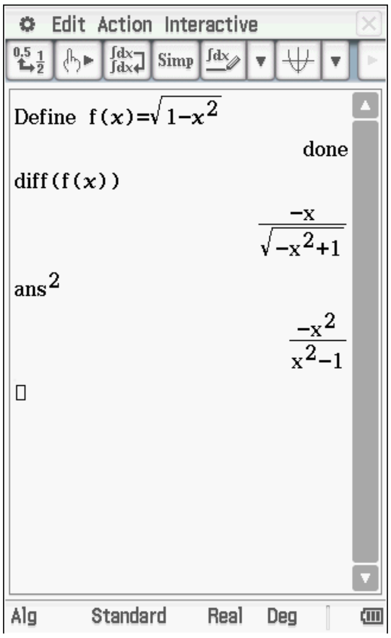
$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

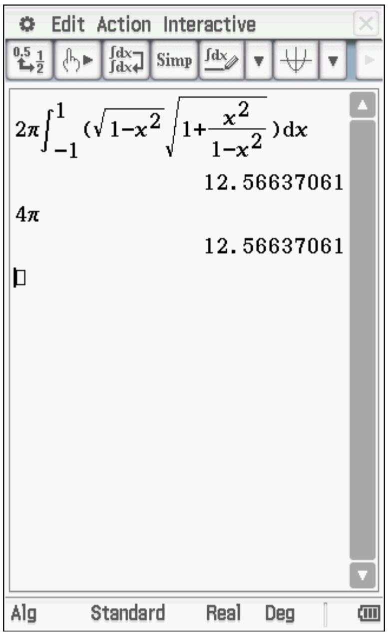
Aluetta rajoittavat puoliympyrä $y = \sqrt{1^2 - x^2}$ ja x-akseli. Alue pyörähtää x-akselin ympäri. Tuloksena saatava pyörähdyskappale on pallo, jonka säde on 1. Määritä tämän pallon pinta-ala.

Ensin näemme, että $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, josta on tuloksena $(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Katso seuraava näyttökuva.

Integroitava lauseke ja määrätyn integraalin arvo.





1-säteisen pallon pinta-ala: $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$.

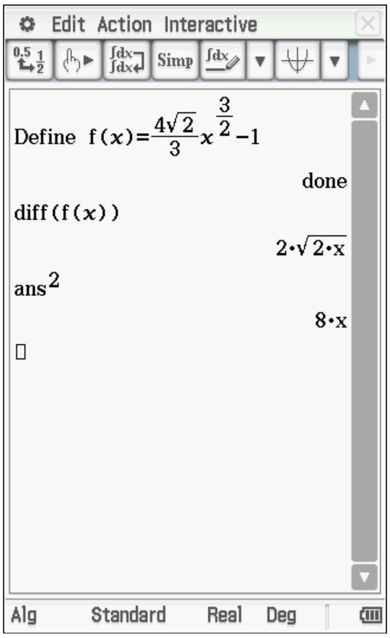
4.10 Integraali – kaarenpituus

Jos funktiolla $y = f(x)$ on jatkuva derivaatta koko välillä $a \le x \le b$, kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a,b]$ on $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

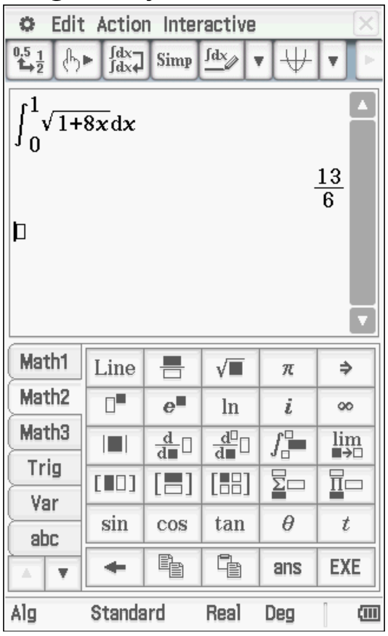
Määritä kaarenpituus kuvaajalle $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$, jossa $0 \le x \le 1$.

Ensin näemme, että $y' = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2x}$ jonka tuloksena on $(y')^2 = 8x$

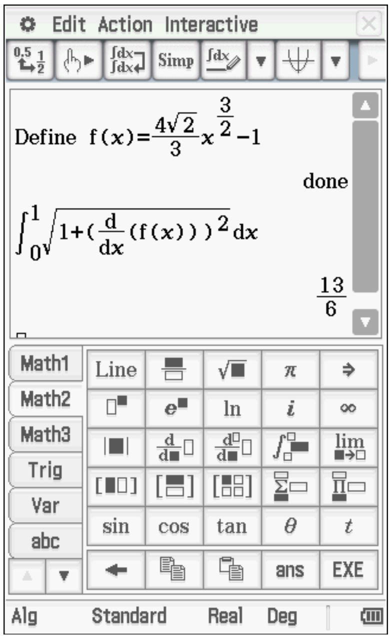
Katso seuraava näyttökuva.



Integraali kyseisellä välillä.



Tai suoraan näin:



Kaarenpituus on $L \approx 2{,}167$ tai $\frac{13}{6}$.

4.11 Parametrimuotoiset yhtälöt

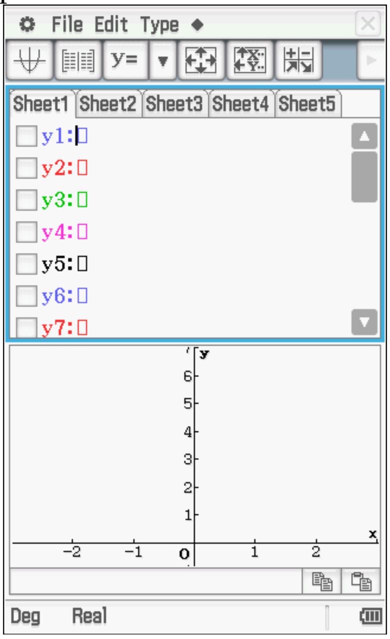
Monet mielenkiintoiset kuvaajat eivät ole muodossa $y = f(x)$, vaan ne voidaan määritellä siten, että sekä x että y ovat itsessään niin sanottujen parametrien funktioita. Ympyrä $x^2 + y^2 = 1$ voidaan esimerkiksi määritellä parametrien avulla lausekkeiden $x = \cos t$ ja $y = \sin t$ avulla. Näin ollen tässä t on niin kutsuttu parametri. Liikkuva piste, joka seuraa jotakin käyrää, voidaan määritellä parametrin avulla, jossa parametri t on aika.

Liikkuva piste, joka on kiinnitetty pyörivään renkaaseen on mielenkiintoinen esimerkki siitä, milloin parametrien muodostamista voidaan käyttää. Niin sanottu *sykloidi* voidaan määritellä kiinteänä pisteenä renkaassa, kun rengas pyörii vaakasuoralla pinnalla.

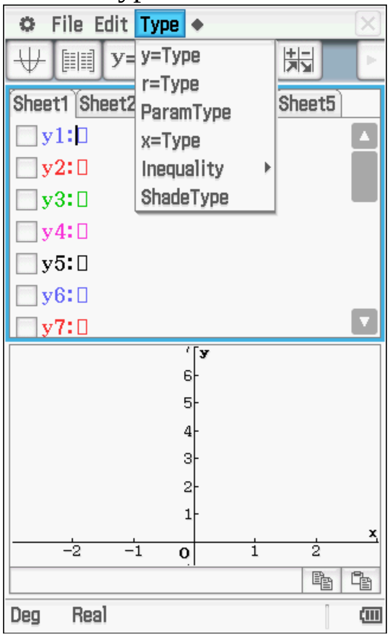
Kuvitelkaamme ympyrä, jonka säde on 2, pyörimässä liukumatta pitkin *x*-akselia. Kiinteä piste *P* tässä ympyrässä piirtää tällöin sykloidiksi kutsuttua viivaa. *Sykloidin* parametrimuodostus tapahtuu seuraavasti $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, jossa *a* on säde.

Piirrä kuvaaja laskimella.

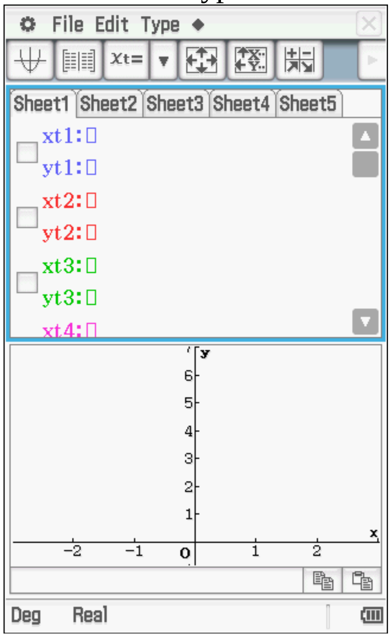
Valitse Graph & Table päävalikosta.



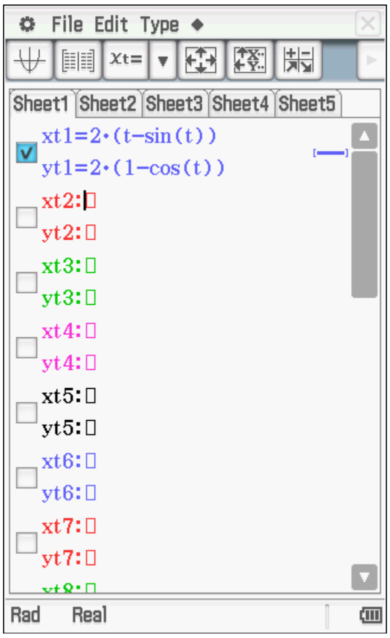
Valitse Type.



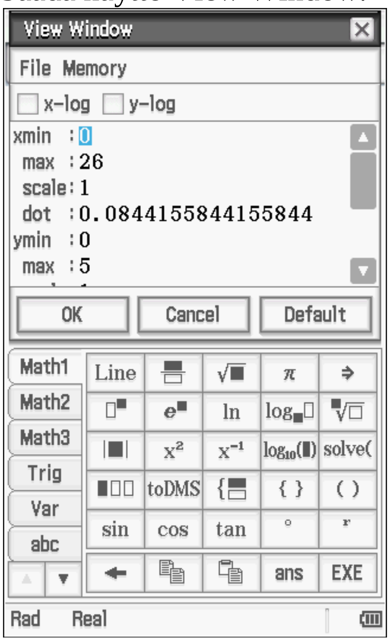
Valitse ParamType.

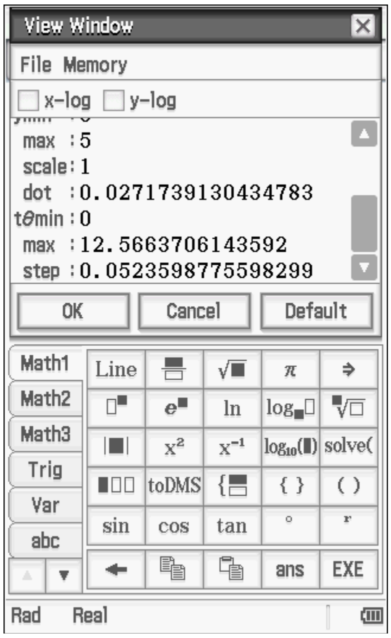


Syötä funktion lauseke.
Aseta $a = 2$.

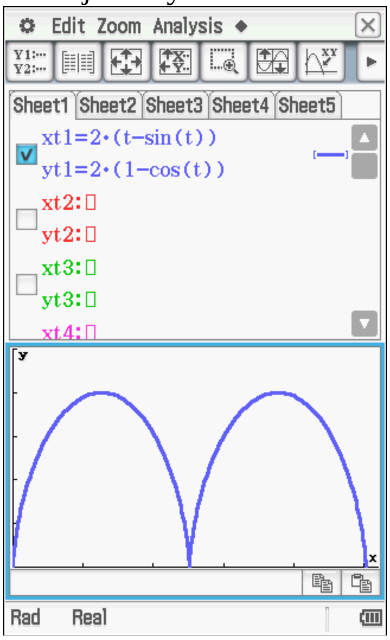


Säädä näyttö View Window.

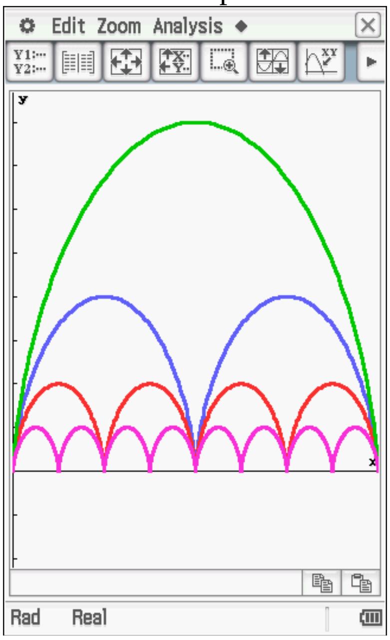




Kuvaaja on sykloidi.

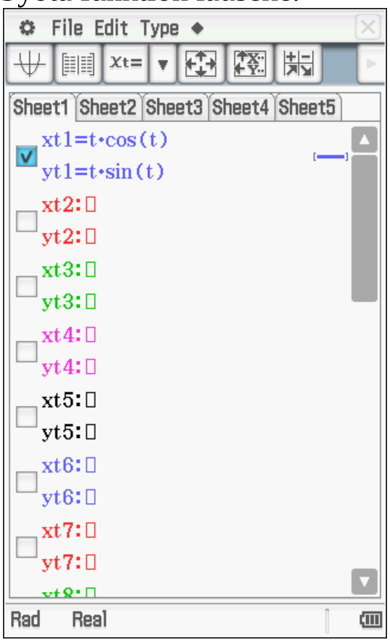


Kokeile muuttaa parametrin arvoa.

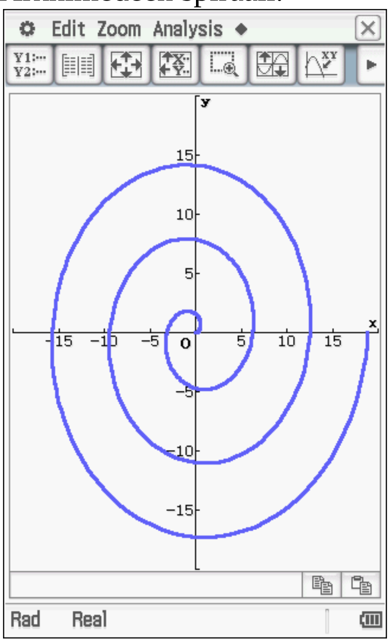


 Kuvaajaa, jonka parametrimuoto on $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, kutsutaan Arkhimedeen spiraaliksi. Piirrä Arkhimedeen spiraali, kun $t \in [0, 6\pi]$.

Syötä funktion lauseke.



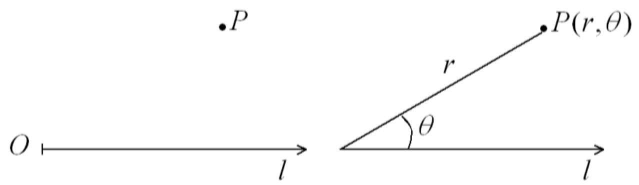
Arkhimedeen spiraali.



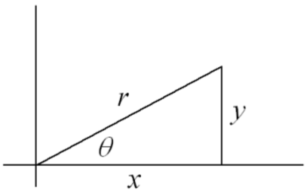
Harjoittele View Window-komennon käyttöä.

4.12 Napakoordinaatit

Oletetaan, että *l* on suoraviivainen akseli, joka alkaa origosta *O*, ja että *P* on tasossa sijaitseva piste. Voimme paikantaa pisteen *P* suhteessa *l-akseliin* ja origoon *O* olettamalla sekä etäisyyden r *origosta O* pisteeseen *P* sekä kulman θ, jonka *OP* muodostaa *l-akselin kanssa.*



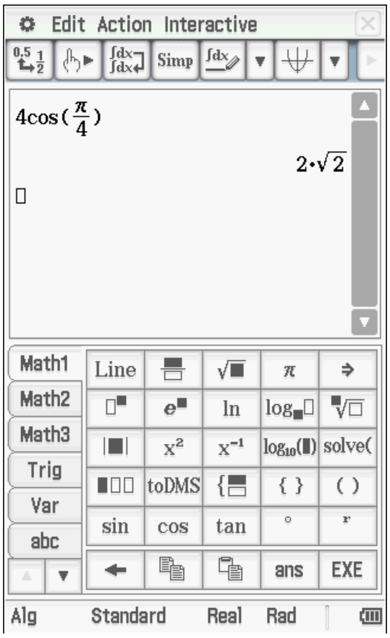
Järjestettyä lukuparia (r,θ) kutsutaan pisteen *P* napakoordinaateiksi. Pisteen *P* napakoordinaatit eivät ole yksikäsitteisiä. Koska kulma toistuu koskien jokaista 2π, on ilmeistä, että $(r,\theta)=(r,\theta+2\pi)$. Etäisyyden *r* vastaluku vastaa 180° siirtymää. Tästä seuraa, että $(-r,\theta)=(r,\theta+\pi)$. Jos akseli *l* on sama kuin positiivinen *x*-akseli, voi tasossa olevalla pisteellä *P* olla sekä karteesisia koordinaatteja (x,y) että napakoordinaatteja (r,θ). Katso alla oleva kuvio.



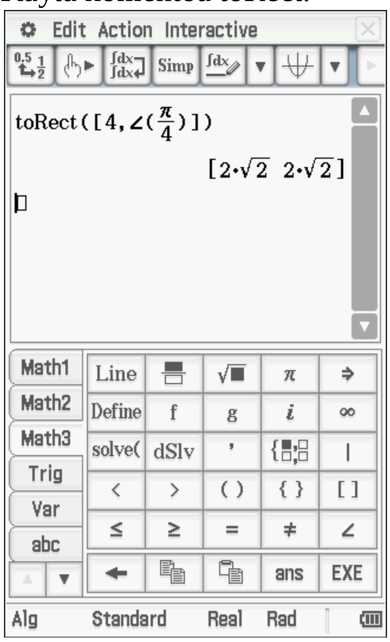
Käyttämällä sinin ja kosinin määritelmiä saamme tuloksena seuraavan yhteyden karteesisten koordinaattien (x,y) ja napakoordinaattien (r,θ) välille: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Voimme myös ilmaista *r*:n ja lausekkeen θ *x:n* ja *y:n avulla.* Näin ollen saamme $r^2=x^2+y^2$ ja $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$. Tästä seuraa, että $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ja $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Muunna koordinaatit $(4,\dfrac{\pi}{4})$ napakoordinaateista karteesisiksi koordinaateiksi.

Ratkaisu. Huomaa Rad-tila.



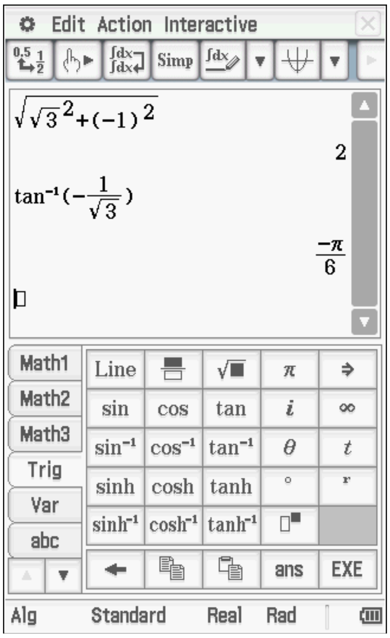
Käytä komentoa toRect.



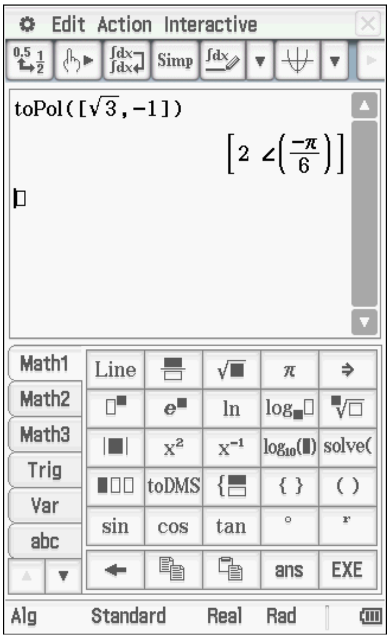
Vastaus: $x = 2\sqrt{2}$ ja $y = 2\sqrt{2}$. Huomaa, että $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Muunna koordinaatit pisteelle $(\sqrt{3}, -1)$ karteesisista koordinaateista napakoordinaateiksi.

Laskemalla



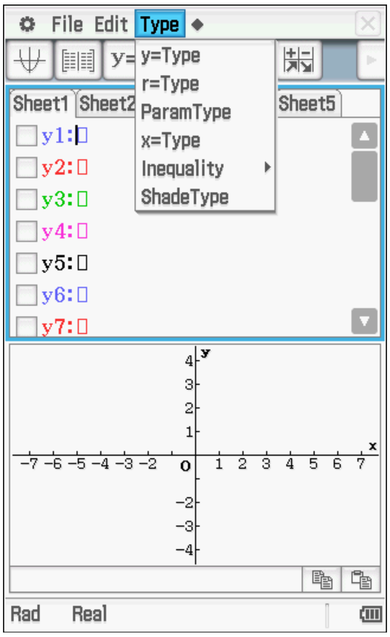
Käyttämällä komentoa toPol.



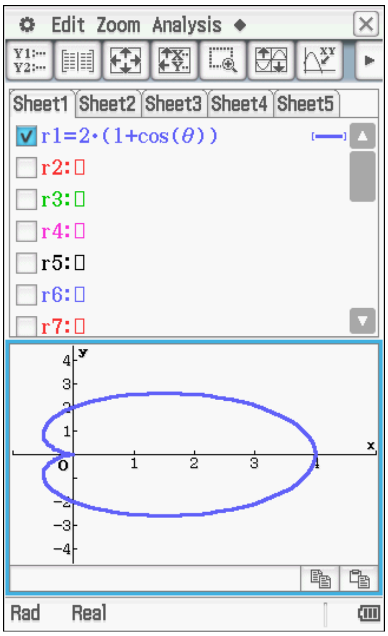
Vastaus: $r = 2$ ja $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Kuvaaja $r = 2(1 + \cos\theta)$ on sydämen muotoinen ja sitä kutsutaankin *kardioidiksi*. Piirrä kuvaaja.

Valitse napakoordinaatit
Paina r = Type .



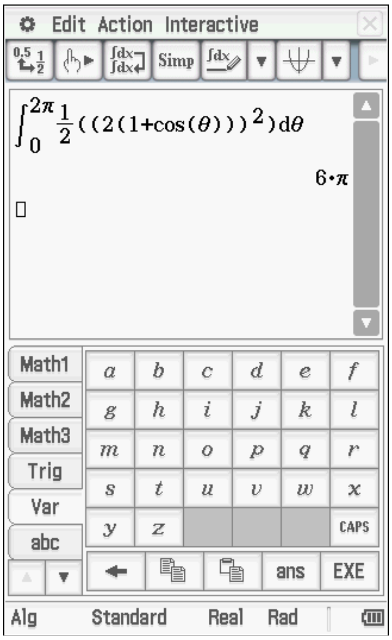
Kardioidi



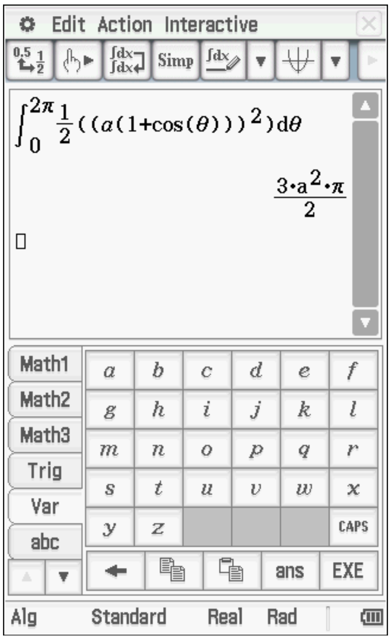
Laske pinta-ala alueesta, jota rajoittaa *kardioidi* jossa $r = 2(1+\cos\theta)$.

Alue A, jota rajoittaa kuvaaja $r = f(\theta)$ ja $r = r(\theta)$, jossa $\theta \in [\alpha, \beta]$ ja joka saadaan yhtälöstä $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta$.

Ratkaisu.



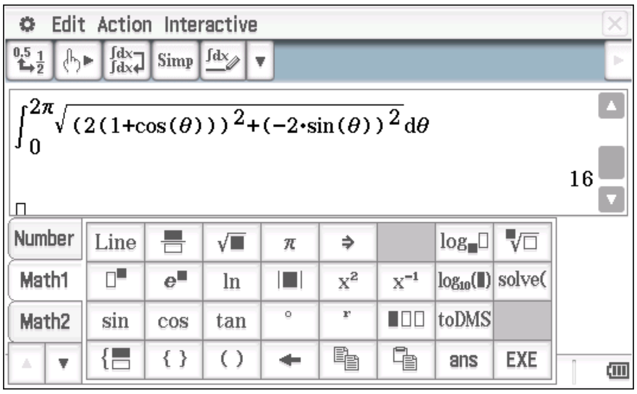
Mielenkiintoinen kaava.



Laske kaarenpituus *kardioidille*, jonka esitys napakoordinaattien avulla on $r = 2(1+\cos\theta)$.

Jos lausekkeella $r = f(\theta)$ on jatkuva derivaatta $\theta \in [\alpha, \beta]$ ja jos piste $P(r, \theta)$ sijaitsee kuvaajalla $r = f(\theta)$ ja jos θ on välillä α ja β, käyrän pituus voidaan laskea seuraavalla kaavalla: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \, \mathrm{d}\theta$. Edelleen $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2\sin\theta$.

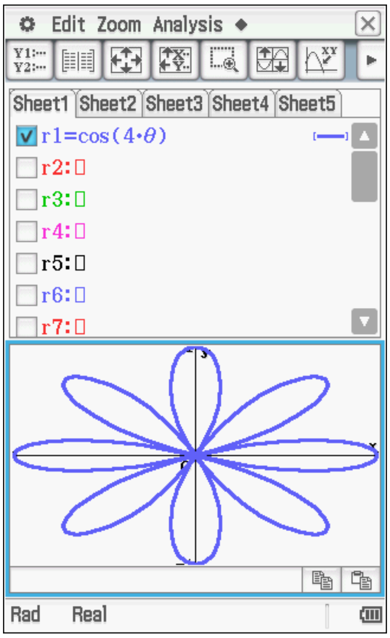
Ratkaisu. Kaarenpituus on 16.

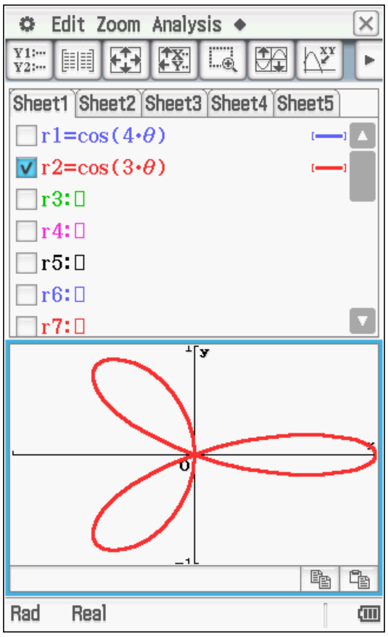


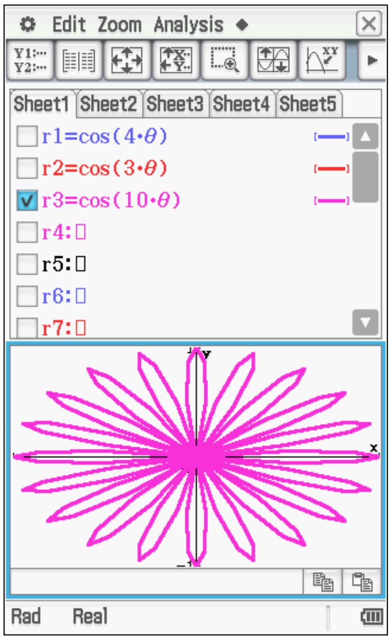
Yleisesti *kardioidin* yhtälö on $r = 2a(1+\cos\theta)$.

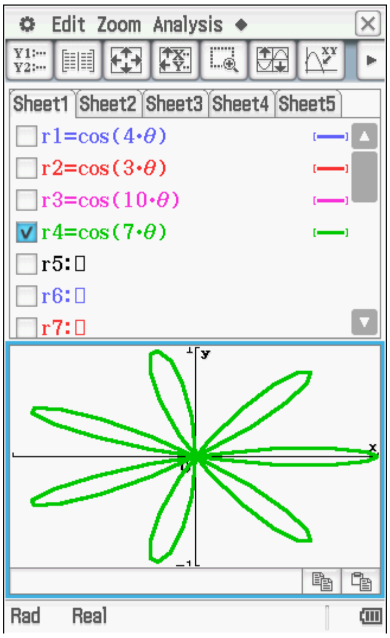
Tutki seuraavaa! Käytä laskinta sen todistamiseen, että *kardioidin* kaarenpituus saadaan yleisesti kaavalla $16a$ ja että *kardioidin* rajoittama alue on $6\pi a^2$.

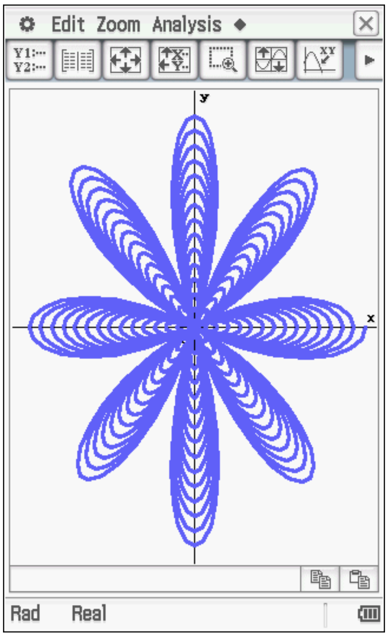
Kokeile seuraavia: $r = a\cos n\theta$ ja $r = a\sin n\theta$ ja tutki onko olemassa yhteyttä kierrosten lukumäärän ja sen välillä, onko n parillinen vai pariton. Katso alla olevat näyttökuvat.











4.13 Regressioanalyysi

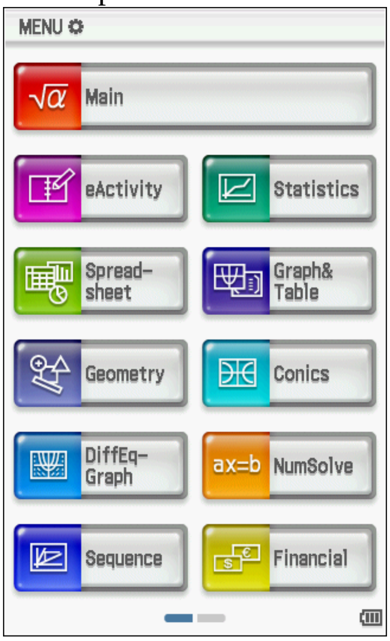
Tärkeä osa funktioiden käytöstä liittyy sellaisten matemaattisten mallien luomiseen, jotka pystyvät suunnilleen kuvaamaan havaitsemiamme yhteyksiä tai riippuvuuksia. Voimme siirtää havaintomme taulukkomuotoon. Taulukoiden avulla voimme yrittää luoda malleja, jotka pyrkivät kuvaamaan riippuvuuksia *y*- ja *x*-arvojen välillä. Tätä prosessia kutsutaan regressioanalyysiksi tai funktion muokkaamiseksi.

Uusi ostoskeskus avattiin muutama vuosi sitten. Alla oleva taulukko näyttää liikevaihdon koskien ensimmäisiä kuukausia avaamisen jälkeen. Tammikuu on kuukausi 1, helmikuu kuukausi 2 ja niin edelleen.

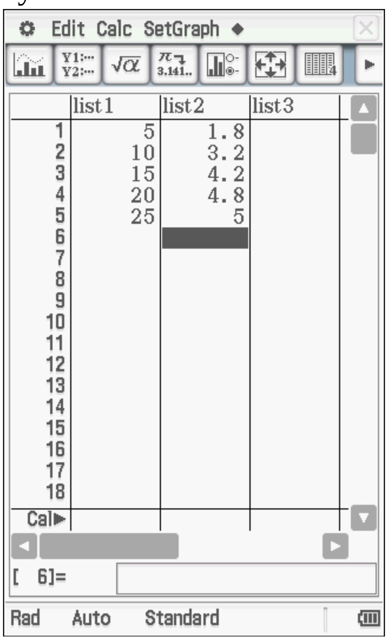
Kuukausi	5	10	15	20	25
Liikevaihto (miljoonaa kruunua kuukaudessa)	1,8	3,2	4,2	4,8	5,0

Luo malli liikevaihdolle (kruunua/kuukausi) 25 ensimmäisen kuukauden tietojen perusteella.

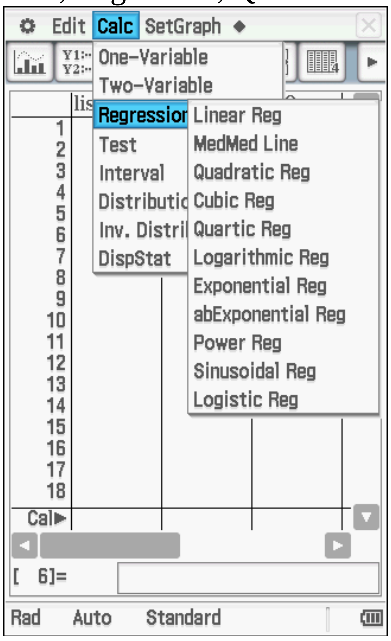
Valitse päävalikosta Statistics.

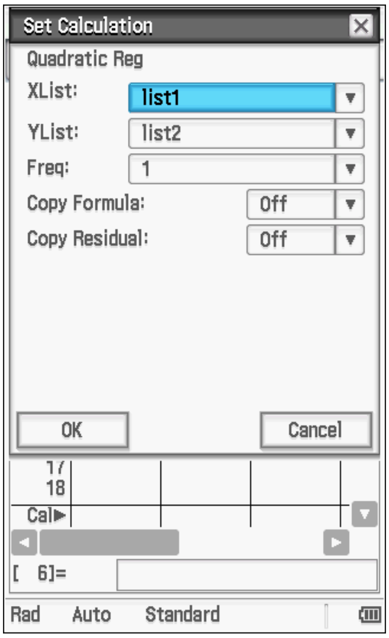


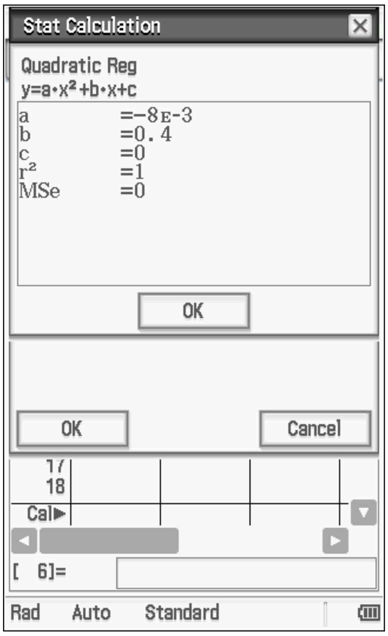
Syötä arvot taulukkoon.

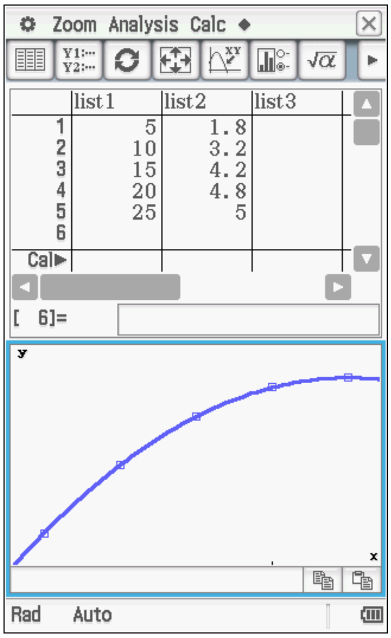


Calc, Regression, Quadratic Reg.



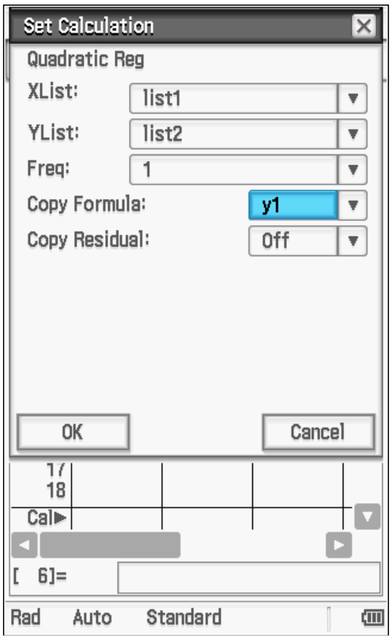


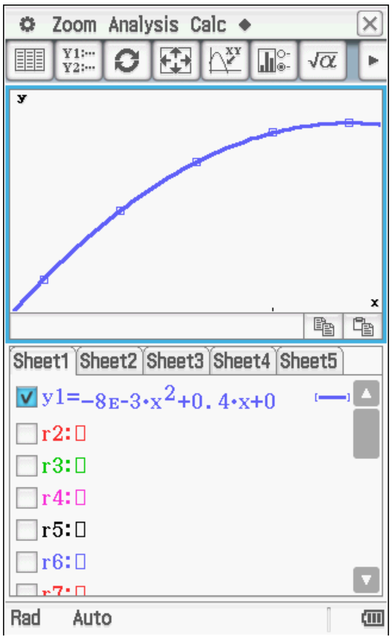


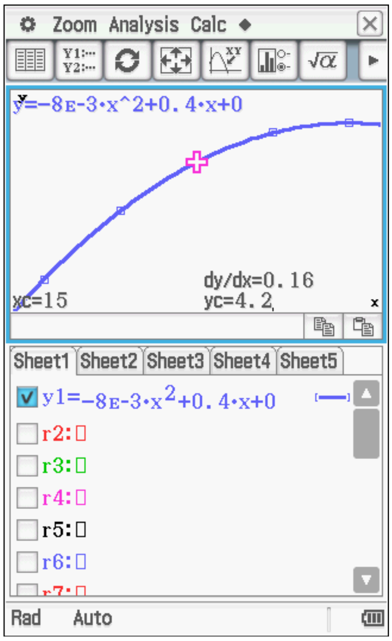


Quadratic Reg antaa toisen asteen funktion. Tästä seuraa, että $r^2 = 1$. Tämä osoittaa, että funktio kuvaa tilannetta aivan täydellisesti. Laskimella tehtävän regressiolaskennan avulla olemme johtaneet funktion f lausekkeeksi $f(x) = -0.008x^2 + 0,4x$. Tätä voidaan käyttää matemaattisena mallina liikevaihdon laskemiseen koskien 25 ensimmäistä kuukautta.

Voimme kopioida funktiolausekkeen Graph & Table -valikon y1-kohtaan, jossa voimme käyttää Analysis-toimintoa esimerkiksi suurimman kuukausikohtaisen myyntimäärän määrittämiseksi.





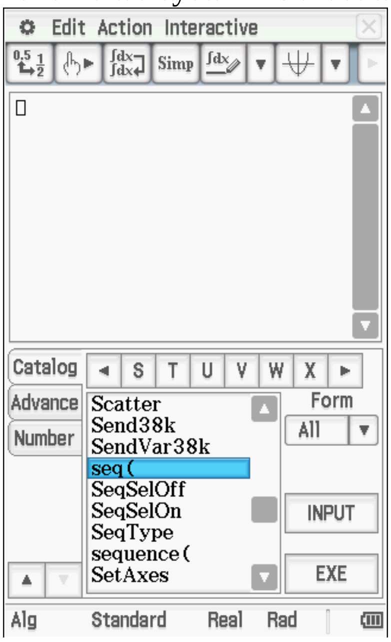


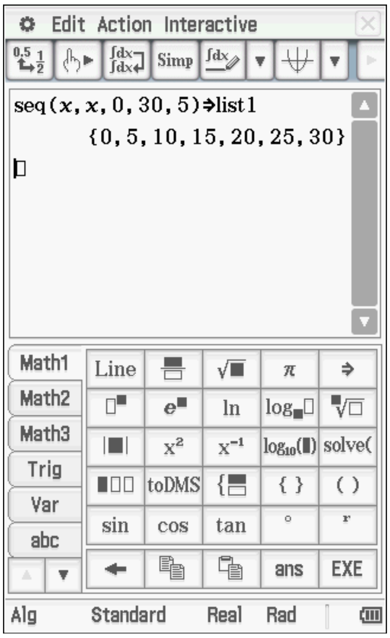
 Vuosien kuluessa metsänhoitajat ovat mitanneet erilaisten puiden pituuksia erilaisissa ympäristöissä. Tiettyjen puulajien pituuksia on mitattu 30 vuoden ajan.

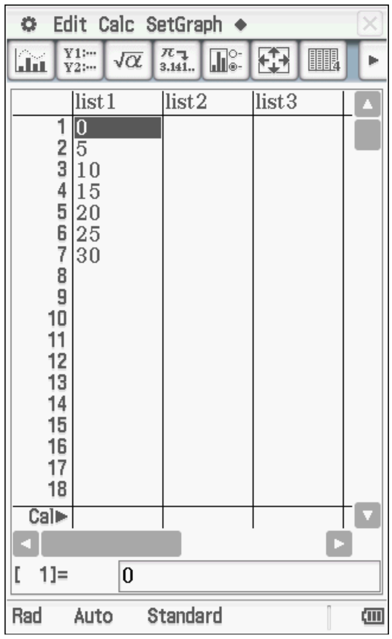
x – ikä [vuosia]	0	5	10	15	20	25	30
f(x) – pituus [m]	0	0,45	1,75	3,70	6,10	8,80	11,60

Kehitä matemaattinen malli, joka pystyy kuvaamaan tämän puulajin pituutta 30 vuoden mittausjakson aikana.

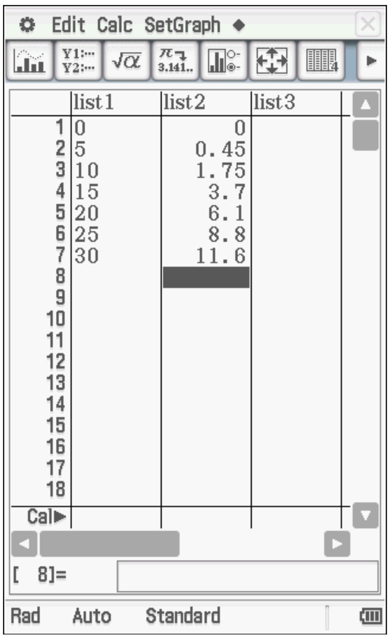
Tällä kertaa syötämme arvot taulukkoon List1 aikaa säästävällä tavalla.

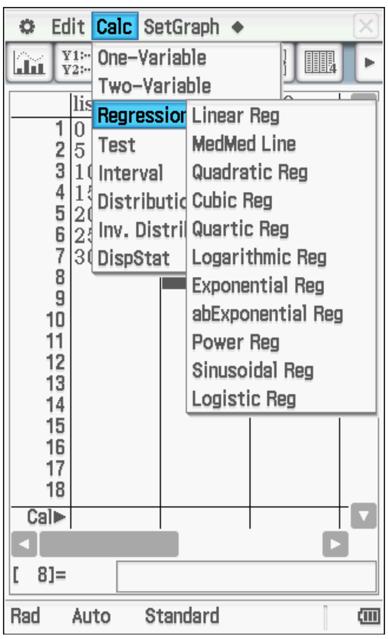


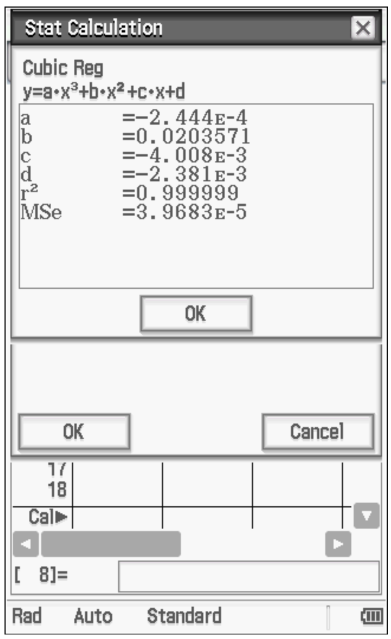




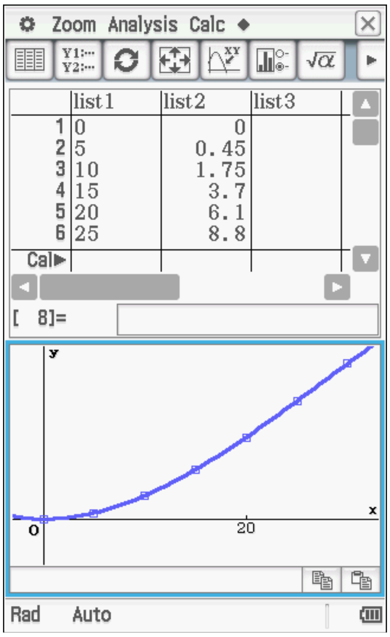
Voimme säästää paljon aikaa syöttämällä arvot luetteloihin tällä tavalla – erityisesti silloin, kun arvoja on paljon. Syötä funktion arvot luetteloksi list2. Yhtälö Calc, Regression, Cubic Reg.

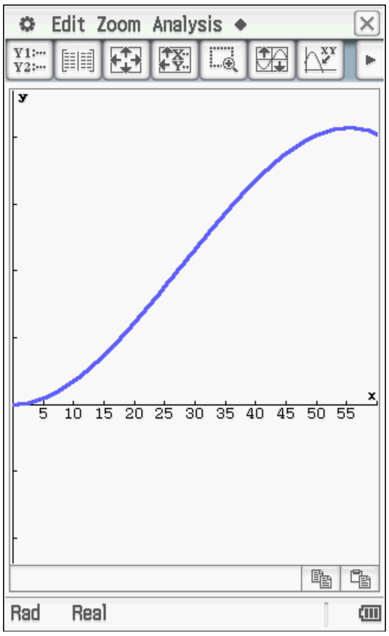






Nyt $r^2 \approx 1$, joka osoittaa kolmannen asteen funktion kuvaavan puiden kasvua lähes täydellisesti.





Laskimen regressiotoiminnon avulla voimme todeta funktion f lausekkeen olevan $f(x) = -0{,}00024x^3 + 0{,}02x^2$ ja että sitä voidaan käyttää matemaattisena mallina puiden pituuden kasvulle 30 vuoden mittausjakson aikana.

Voimme tässä yhteydessä poistaa lausekkeesta ensimmäisen asteen termin ja vakion. Nämä ovat merkityksettömiä verrattuna yhtälön kolmannen ja toisen asteen jäseniin.

Yllä oikealla näkyvässä näytössä näemme 60 vuoden määrittelyjoukon. Mallin perusteella puu saavuttaa maksimipituutensa 55 vuoden jälkeen. Tämä saa meidät ajattelemaan, ettei malli ehkä päde enää 55 vuoden jälkeen. Lisäkasvua ajatellen meidän täytyy löytää uusi matemaattinen malli.

Emme voi tietenkään käyttää mallia, jossa puun pituus alkaa pienentyä dramaattisesti saavutettuaan maksiminsa.

4.14 Epäyhtälöiden graafinen ratkaiseminen

Kun ratkaisemme yksinkertaisia epäyhtälöitä, niille pätevät samat laskentasäännöt kuin yhtälöille, yhtä **tärkeätä** poikkeusta lukuun ottamatta:

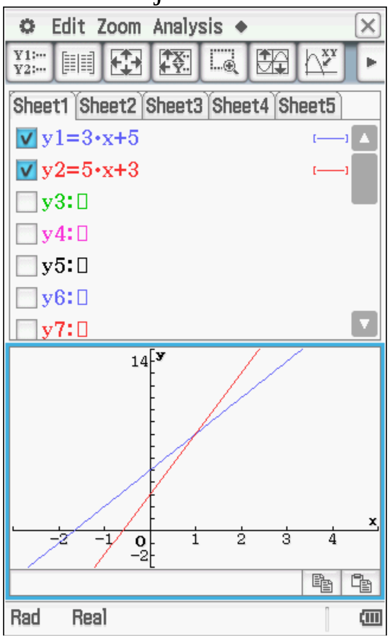
Jos jaamme tai kerromme negatiivisella luvulla, on epäyhtälön merkki käännettävä.

 Ratkaise epäyhtälö: $3x+5>5x+3$ Ilman laskinta.

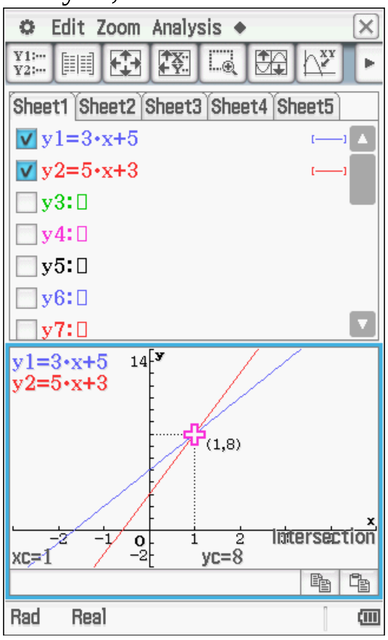
$$\begin{aligned}
&3x+5>5x+3\\
&3x-5x>3-5\\
&-2x>-2\\
&x<1
\end{aligned}$$

Ratkaise epäyhtälö: $3x+5>5x+3$ laskinta käyttäen.

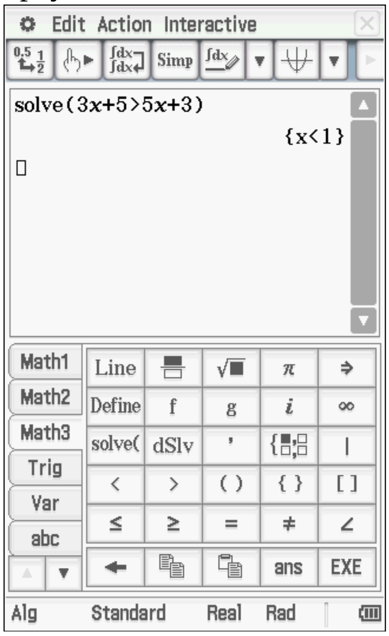
Piirrä kuvaajat.



Analysis, G-Solve.



Epäyhtälön merkki, Math3



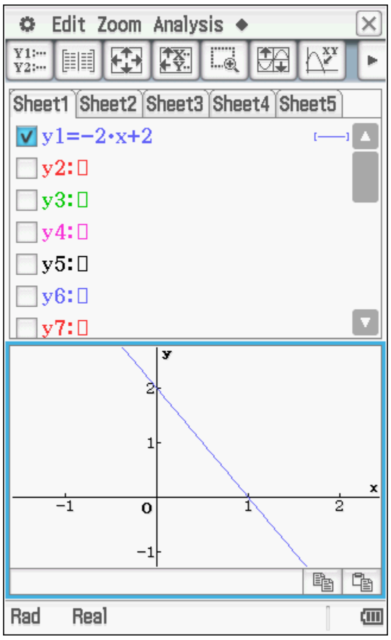
Huomaa, että $y=5x+3$ on jyrkempi suora. Miksi?

Koska $y1>y2$ on epäyhtälö, pitää $y1$ kuvaajan olla ylempänä kuin $y2$ kuvaajan.

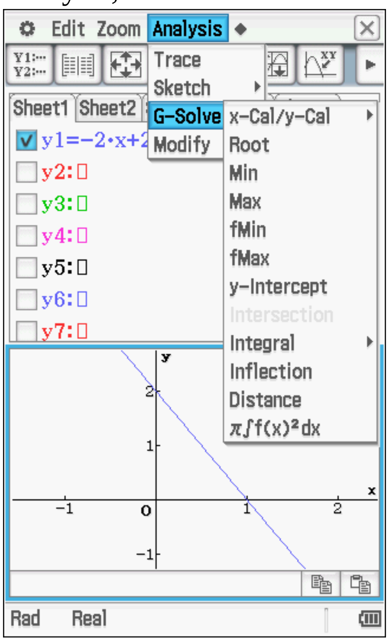
Ratkaisu: $x<1$

Tai näin.

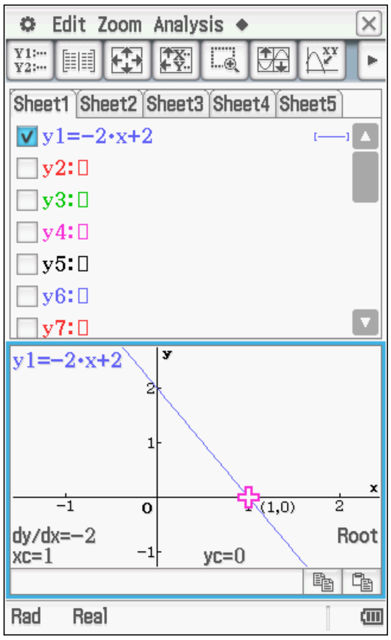
$$3x+5>5x+3$$
$$3x+5-5x-3>0$$
$$-2x+2>0$$



Analysis, G-Solve.



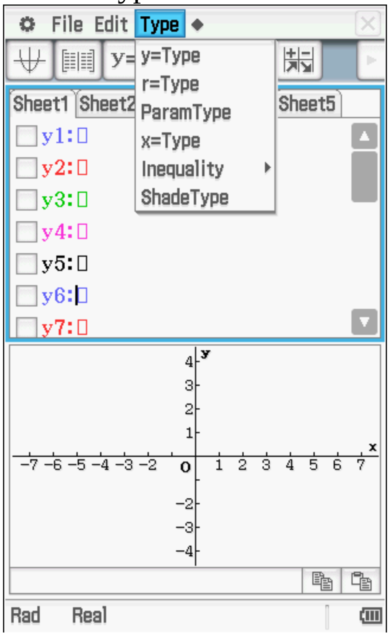
Root.



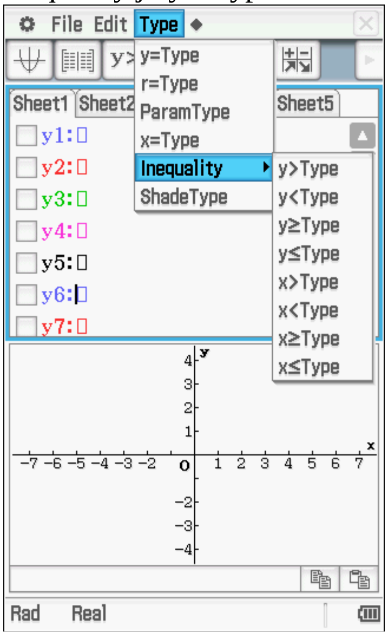
Koska $y1 > 0$ on epäyhtälö, johon x-arvot on syötetty, ja jossa $y1$ on x-akselin yläpuolella.

Ratkaisu: $x < 1$

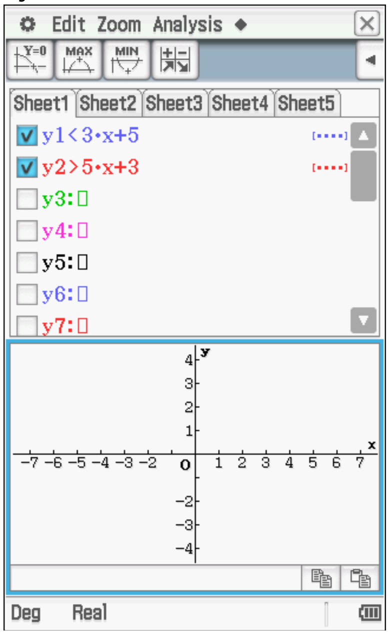
Valitse Type.



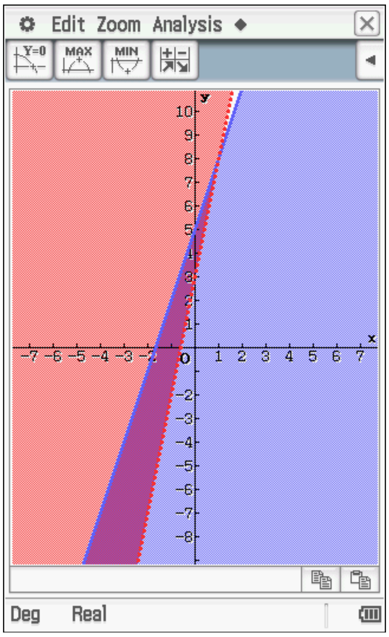
Inequality ja y >Type.

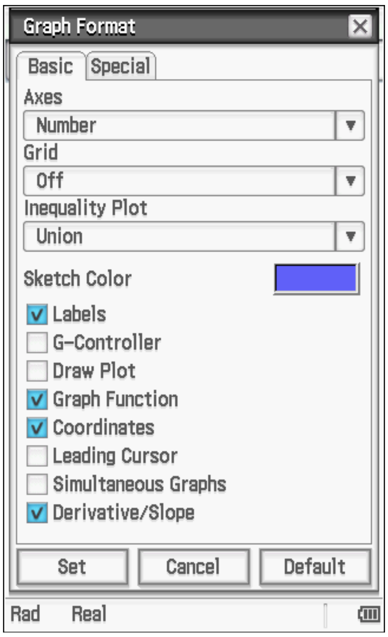


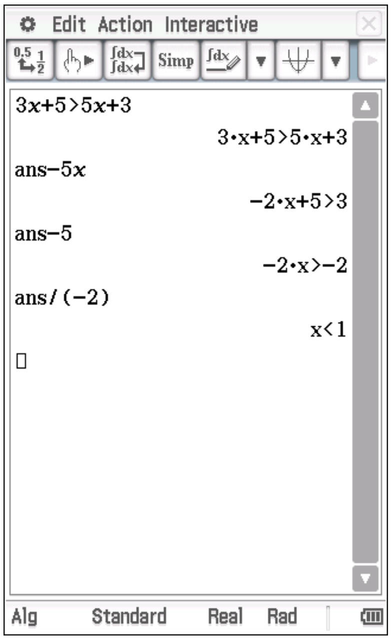
Syötä laskulauseke.



Ratkaisu.







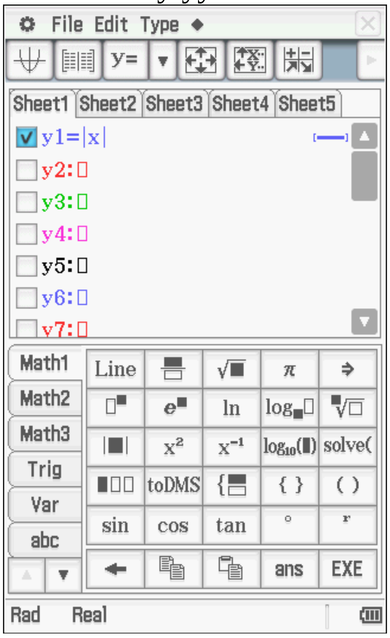
Huomaa, että Inequality Plot Type tilaksi on asetettu Union. Alue, jossa epäyhtälö täyttyy, näkyy kaksinkertaisesti varjostettuna.

Voit myös viedä laskua eteenpäin kuin tekisit sen paperilla (oikeanpuoleisin kuva).

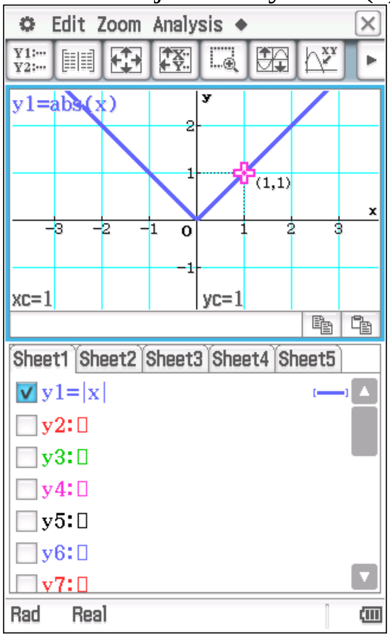
4.15 Itseisarvofunktio

Piirrä kuvaaja funktiolle *f*, joka määritellään $f(x)=|x|$.

Itseisarvo löytyy Math2-valikosta.

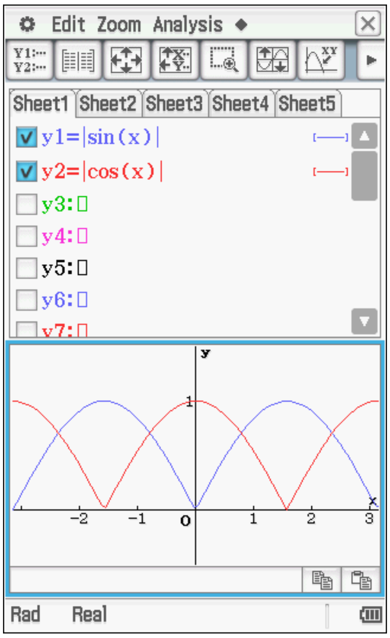


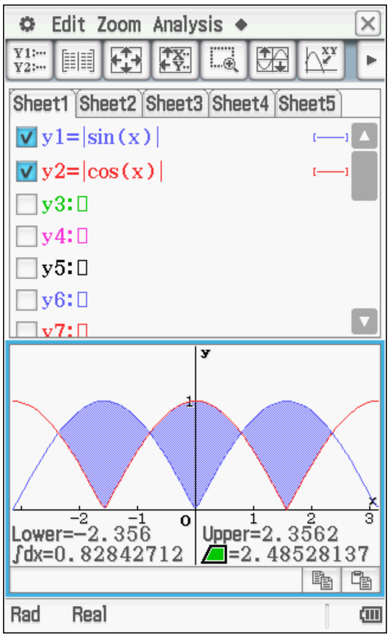
Voimme kirjoittaa myös abs(*x*).



Piirrä kuvaajat *f* ja g, jotka määritellään $f(x)=|\sin x|$ ja $g(x)=|\cos x|$ samaan koordinaatistoon, kun $x\in[-\pi,\pi]$.

Harjoittele alueiden rajaamista ja erilaisten alueiden laskemista. Voimme oppia lisää trigonometrisistä funktioista kappaleessa 5.

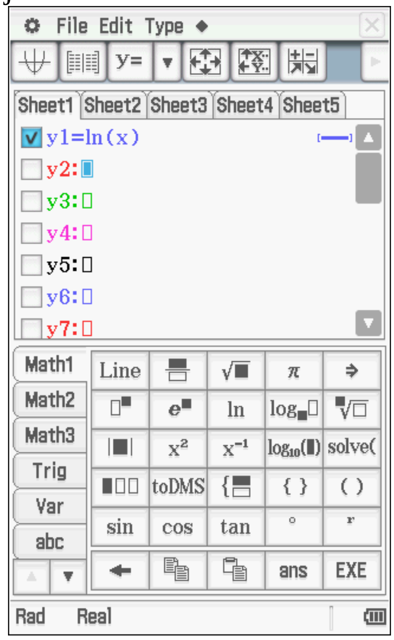




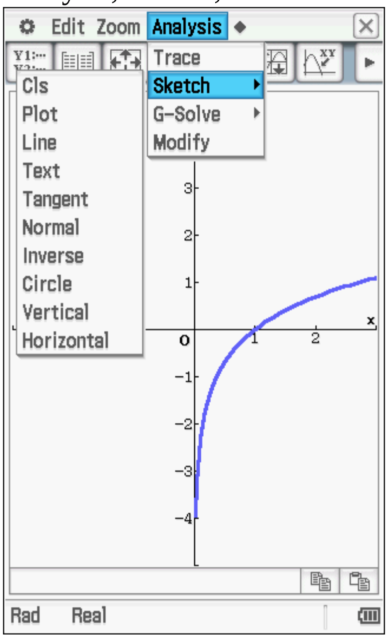
4.16 Käänteisfunktiot

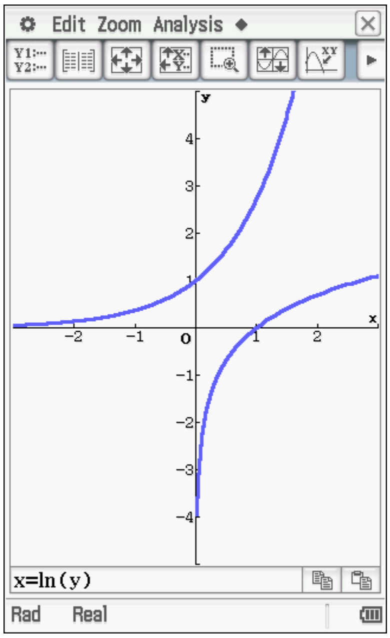
Piirrä kuvaaja funktiolle *f*, joka määritellään $f(x)=\ln(x)$. Piirrä kuvaaja käänteisfunktiolle *f*.

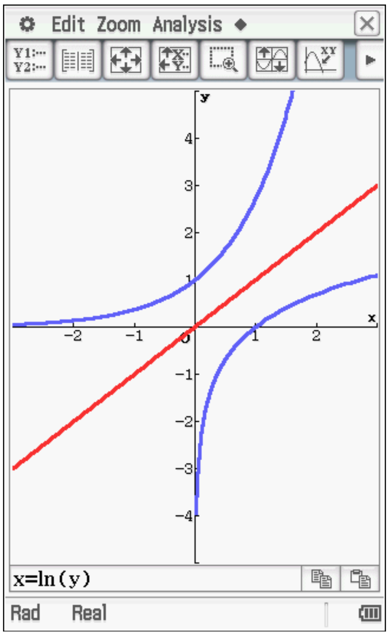
Löydät ln-symbolin Math1- ja Math3-valikoista.



Piirrä käänteisfunktionkuvaaja Analysis, Sketch, Inverse.







Tähän on piirretty myös $y=x$. Mitä näemme?

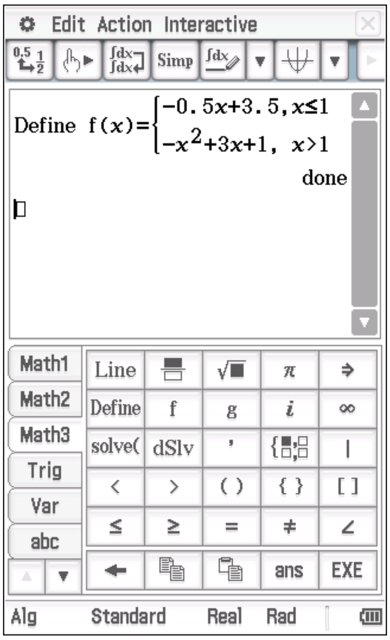
Funktion $f(x)=\ln(x)$ käänteisfunktio on $g(x)=\mathrm{e}^x$.

4.17 Paloittainmääritellyt funktiot

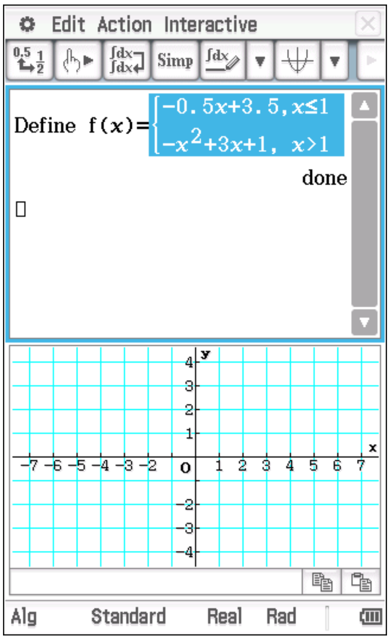
Piirrä kuvaaja funktiolle *f*, joka määritellään $\begin{cases} -0.5x + 3{,}5, kun\ x \leq 1 \\ -x^2 + 3x + 1, kun\ x < 1 \end{cases}$.

Tutki lisäksi, onko funktio jatkuva kohdassa x = 1.

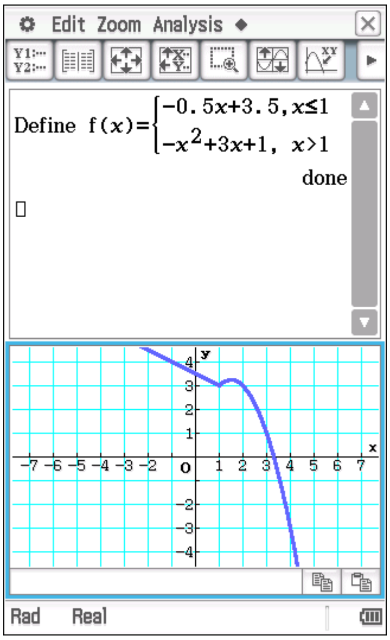
Määrittele funktio Define.



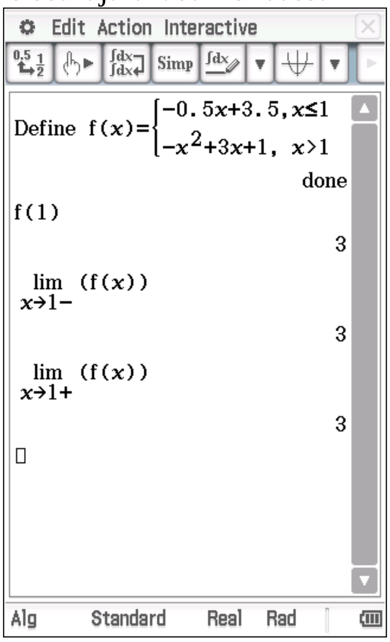
Avaa koordinaatisto.



Raahaa lauseke koordinaatistoon.



Laske funktion arvo ja toispuoleiset raja-arvot kohdassa x = 1.

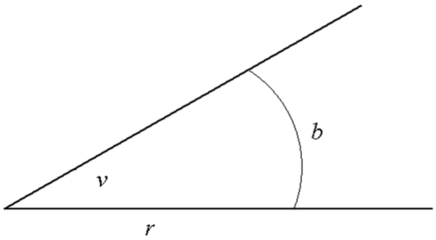


Funktio on siis jatkuva kohdassa x = 1.

5. Trigonometria

5.1 Asteet ja radiaanit

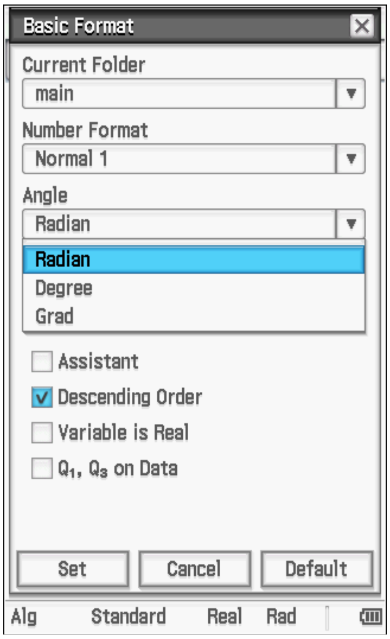
Radiaanit saadaan lausekkeesta $v = \dfrac{b}{r}$.



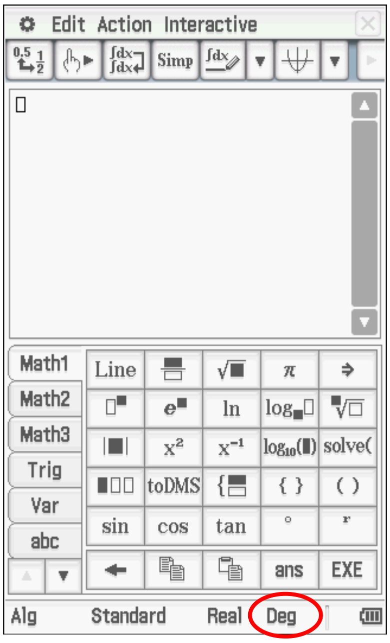
Kun kulma on v radiaania ja n astetta, tästä seuraa, että $\dfrac{v}{\pi} = \dfrac{n}{180^\circ}$.

Basic Format -tilaksi voimme valita Radian, Degree tai Grad. Käsittelemme tässä vaihtoehtoja Degree ja Radian.

Tässä on valittuna Radian.



Tässä on valittuna Degree. Napsauta Deg vaihtaaksesi tilaksi Rad tai Grad.

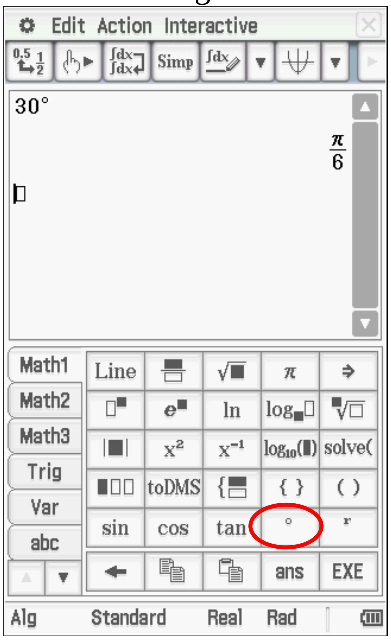


On tärkeätä tietää onko laskin asetettu Degree- vai Radian-tilaan.

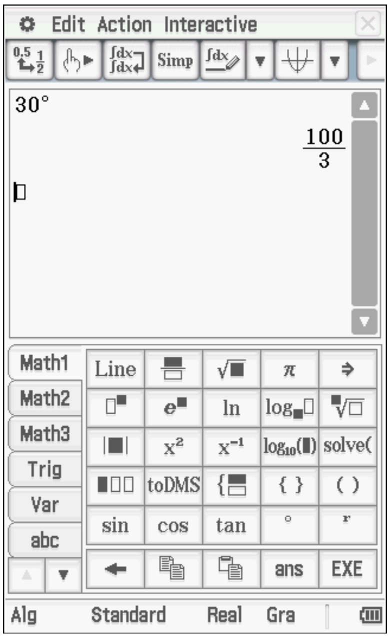
 Vaihda 30° radiaaneiksi.

Valitse Rad-tila. Valitse Main. Syötä asteet, valitse asteen symboli ja paina EXE.

Asteen symboli löytyy sekä
Math1- että Trig-valikosta.



Miksi?

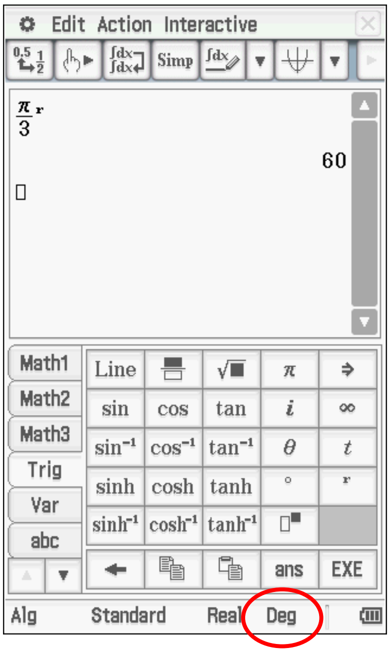


Huomaa, että $30^{\circ} = \dfrac{100}{3}$ grad . Muunna 400 graadia asteiksi.

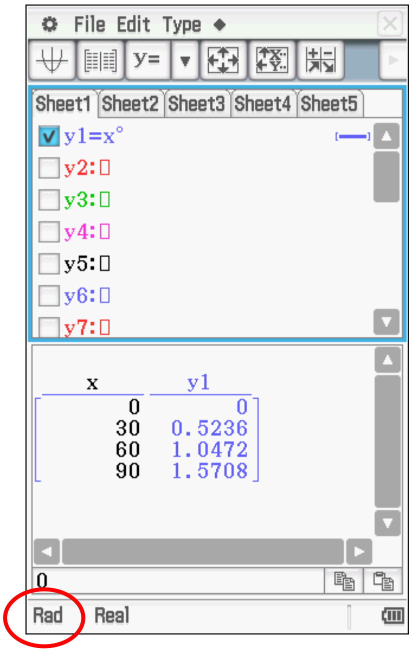
 Muunna $\dfrac{\pi}{3}$ asteiksi (degree).

Löydät rad-symbolin Math1- tai Trig-valikosta.

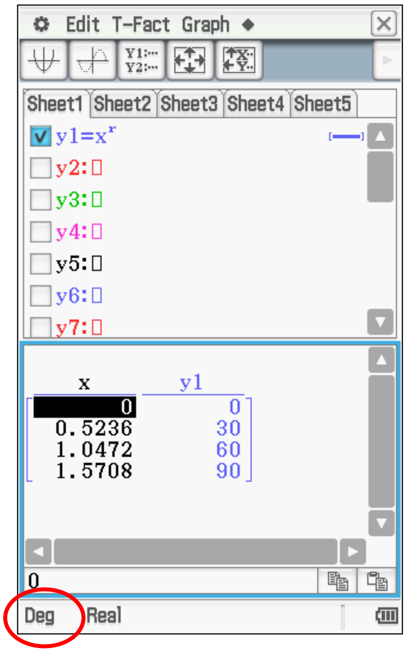
Yksittäinen kulman muunnos.

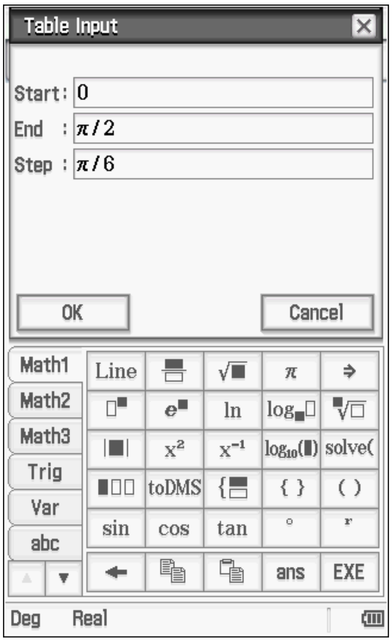


Valitse Rad-tila.
Taulukko asteista radiaaneiksi.



Valitse Deg-tila.
Radiaaneista asteiksi.



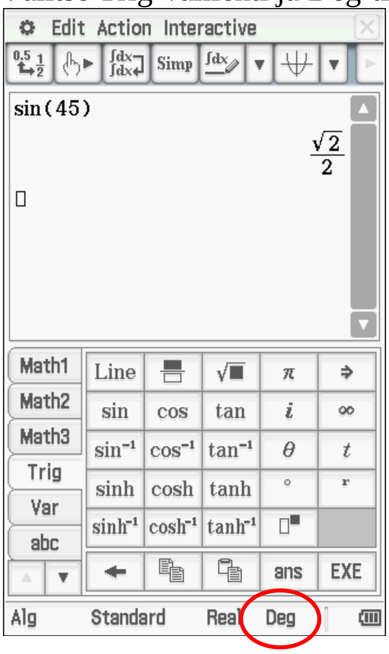


VaihdaTable Input -tilaan ja kokeile näyttää taulukkoja erilaisilla End- ja Step-asetuksilla.

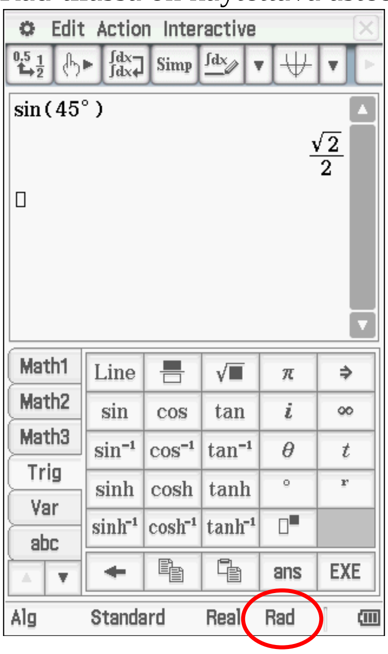
5.2 Sinin, kosinin ja tangentin laskeminen

 Laske sini kulmalle 45°?

Valitse Trig-välilehti ja Deg-tila.

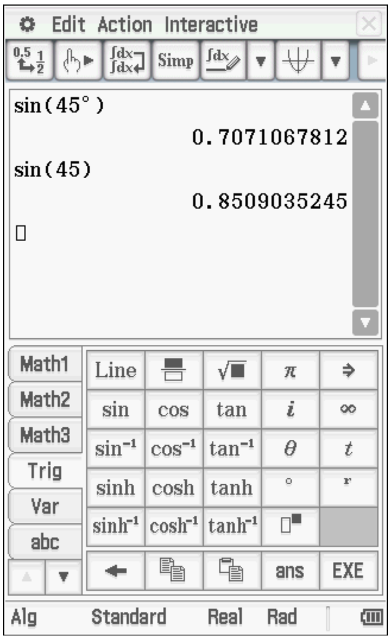


Rad-tilassa on käytettävä asteen merkkiä.



Jos laskin on Rad-tilassa, voimme myös laskea sinin kulmalle 45° syöttämällä astemerkin luvun 45 perään. Vaikka Rad-tila on valittuna, saamme oikean vastauksen, koska käytämme astemerkkiä.

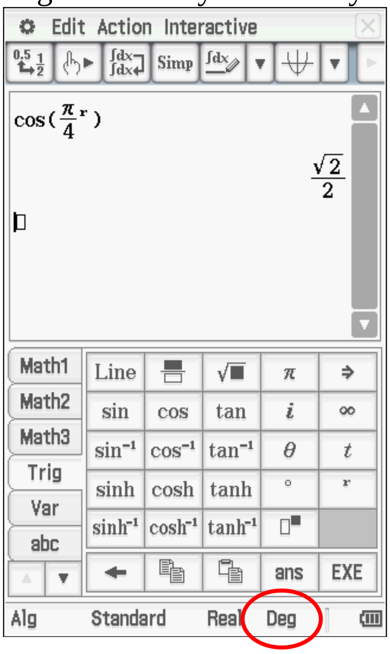
Jos tässä tapauksessa emme käyttäisi asteen merkkiä, laskin laskisi sinin 45 radiaanille.



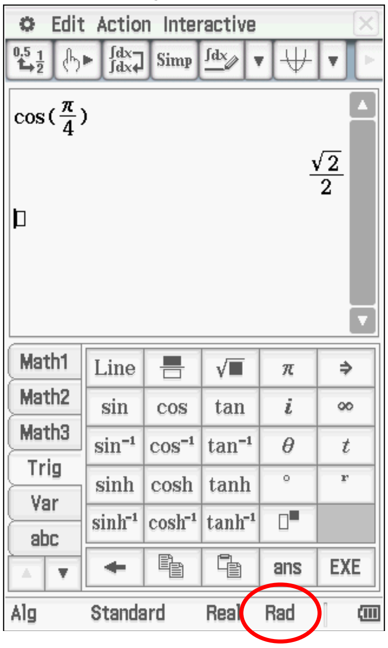
 Laske kosini kulmalle $\frac{\pi}{4}$.

Jos kulmalle (Angle) valittua *tilaa* ei ole tarkistettu, on syötettävä r-symboli lausekkeen $\frac{\pi}{4}$ jälkeen.

Deg-tila. On käytettävä r -symbolia.

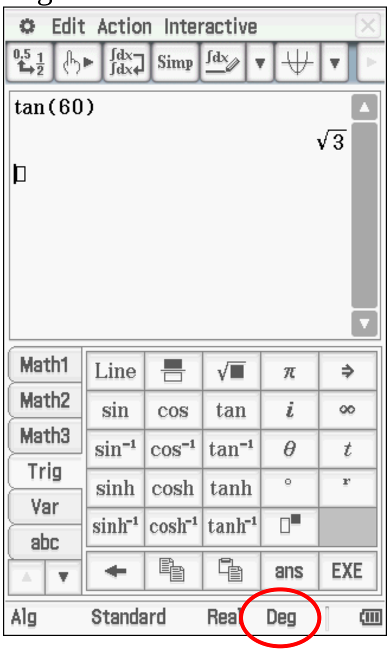


Rad-tila. r-symbolia ei tarvita.

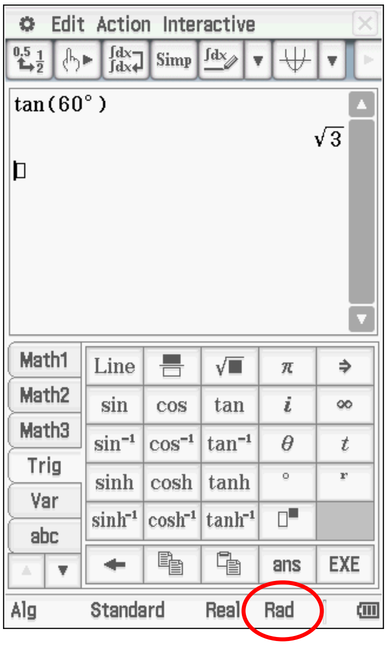


Laske tangentti kulmalle $60°$.

Deg-tila.



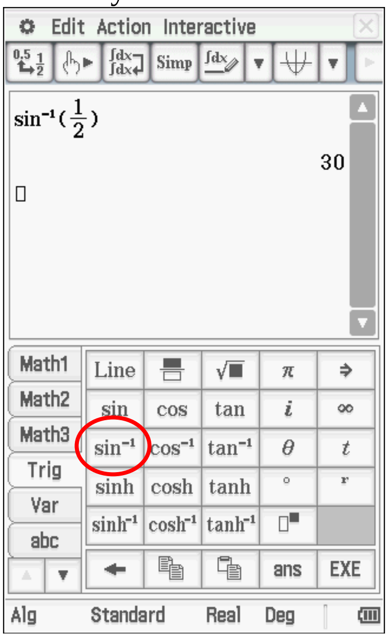
Rad-tila. Asteen merkki tarvitaan.



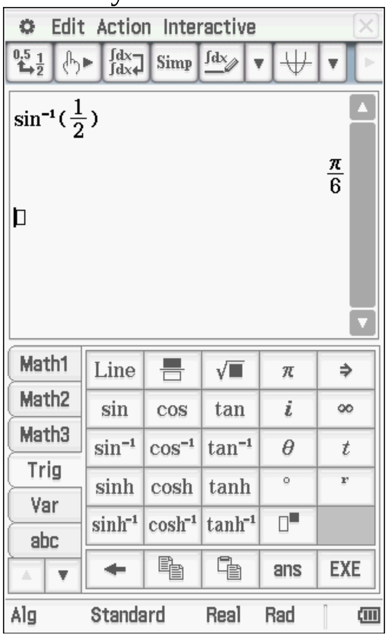
5.3 Kulman laskeminen

Määritä kulma *v*, kun $\sin v = \dfrac{1}{2}$

Kulman yksiköksi on valittu asteet.

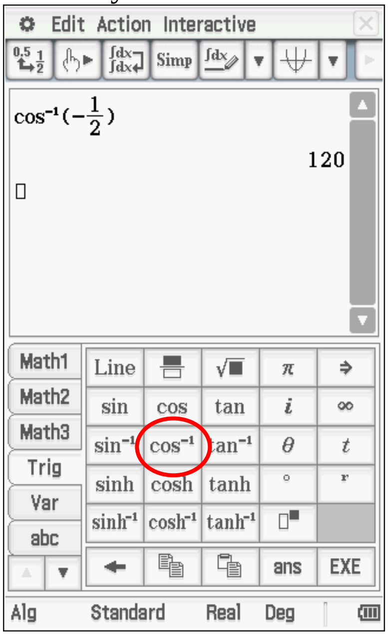


Kulman yksiköksi on valittu radiaanit.

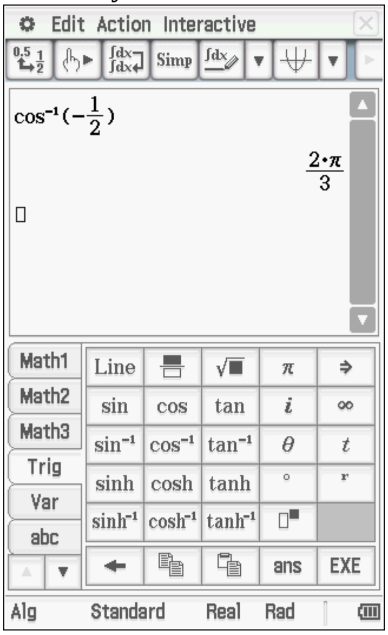


Määritä kulma v, kun $\cos v = -\frac{1}{2}$.

Kulman yksiköksi on valittu asteet.

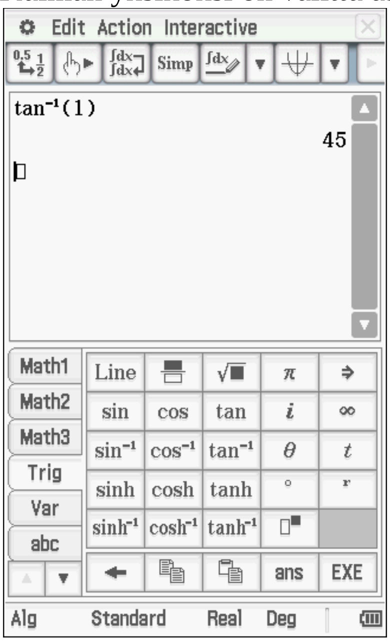


Kulman yksiköksi on valittu radiaanit.

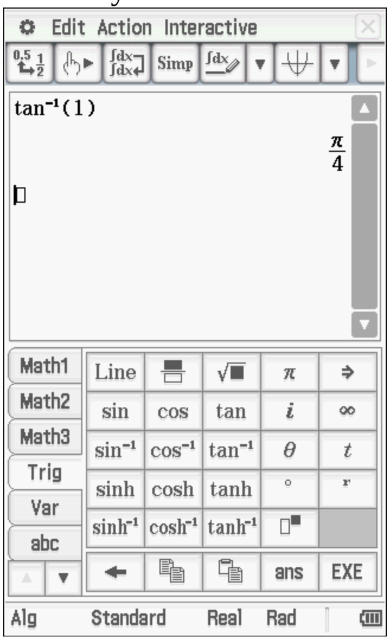


Määritä kulma v, kun $\tan v = 1$.

Kulman yksiköksi on valittu asteet.



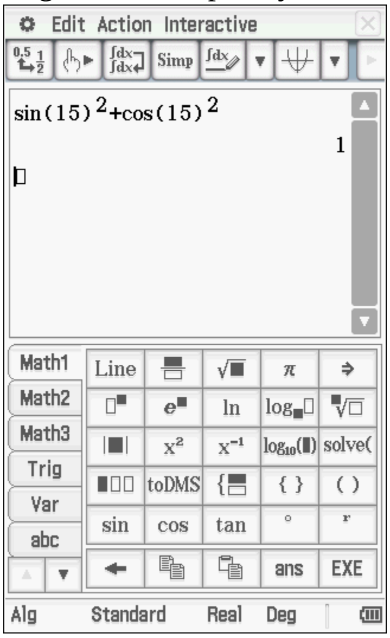
Kulman yksiköksi on valittu radiaanit.



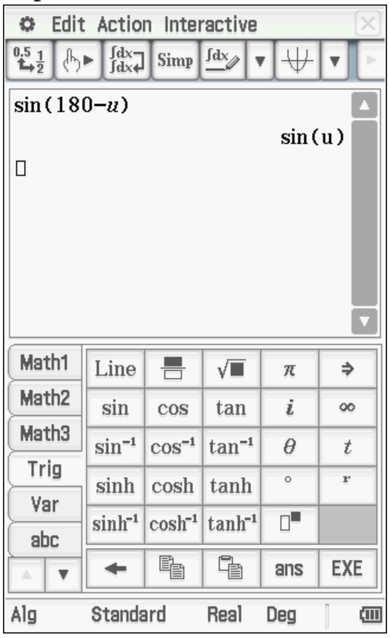
Voit tarkistaa alla olevat kaavat laskimella.

Trigonometrian perusyhtälö	$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	
Vastakulmat	$\sin(-u) = -\sin u$ $\cos(-u) = \cos u$ $\tan(-u) = -\tan u$	
Suplementtikulmat	$\sin(180^\circ - u) = \sin u$ $\cos(180^\circ - u) = -\cos u$ $\tan(180^\circ - u) = -\tan u$	
Komplementtikulmat	$\sin(90^\circ - u) = \cos u$ $\cos(90^\circ - u) = \sin u$	
Summa ja erotus	$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$ $\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$ $\tan(u \pm v) = \dfrac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$	Tästä seuraa, että: $\sin 2u = 2\sin u \cdot \cos u$ $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$ $= 2\cos^2 u - 1$ $= 1 - 2\sin^2 u$ $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

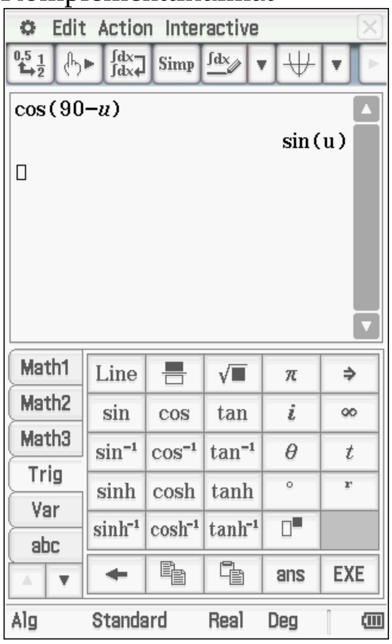
Trigonometrian perusyhtälö



Suplementtikulmat



Komplementtikulmat



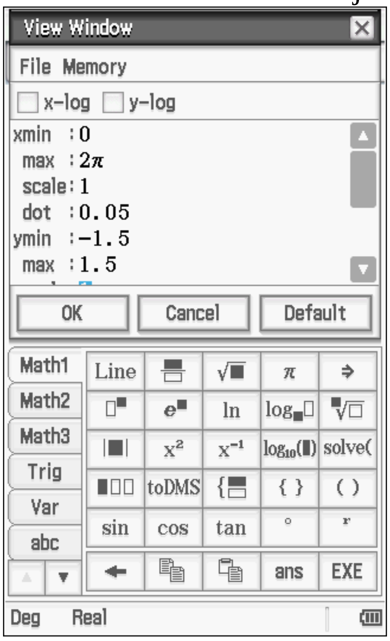
Voit tarkistaa muut kaavat itse.

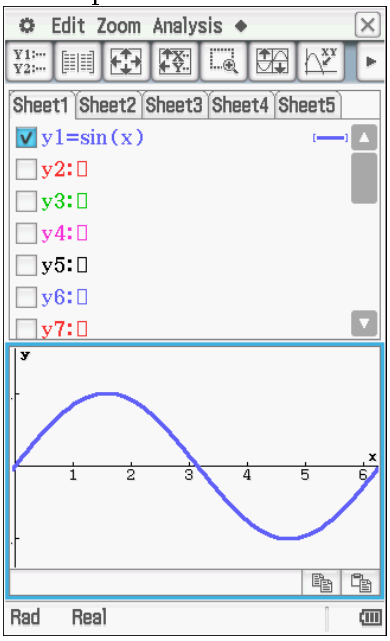
5.4 Trigonometriset funktiot ja kuvaajat

Piirrä kuvaaja funktiolle *f*, joka määritellään $f(x) = \sin x$, kun $x \in [0, 2\pi]$

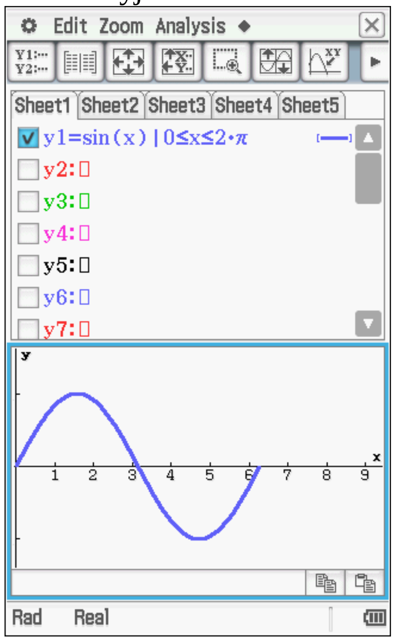
Valitse kulman yksiköksi radiaanit. Valitse päävalikosta sovellus Graph & Table.

Säädä View Window arvot ja ikkuna sopiviksi.





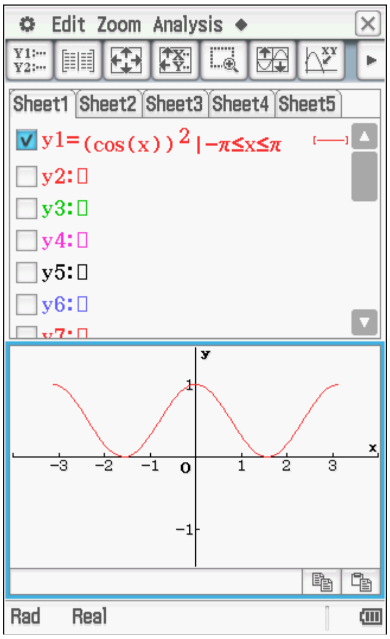
Määrittelyjoukko on annettu.



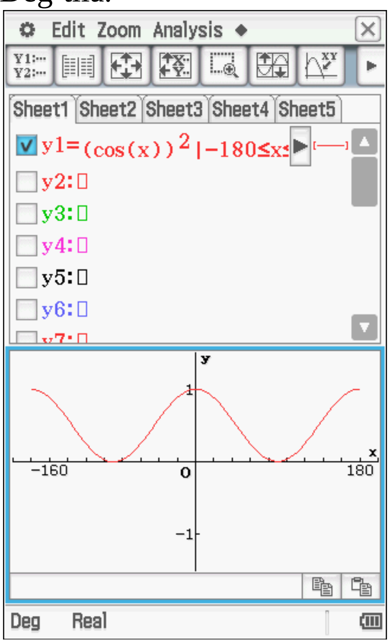
Harjoittele omatoimisesti ääriarvojen ja nollakohtien laskemista. Valitse Analysis -> G-Solve.

Piirrä *g*:n kuvaaja, joka määritellään $g(x) = \cos^2(x)$, kun $x \in [-\pi, \pi]$.

Rad-tila.



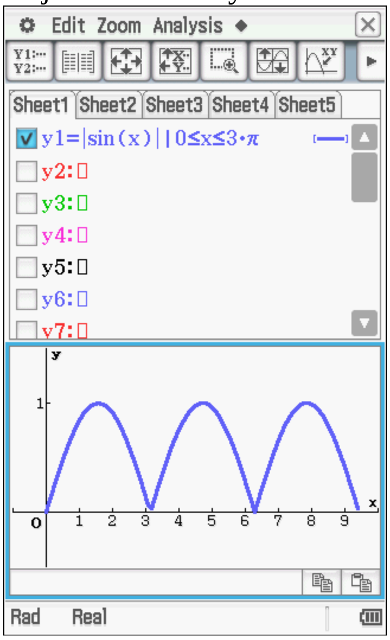
Deg-tila.

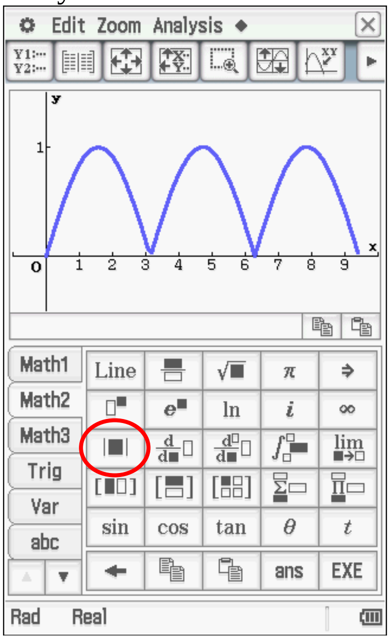


Koska määrittelyalue on valittu, voimme nähdä kuvaajan vain tällä alueella $x \in [-\pi, \pi]$.

Piirrä *h*:n kuvaaja, joka määritellään $h(x)=|\sin x|$, kun $x\in[0,3\pi]$

Kirjoita abs tai käytä Math2-valikosta löytyvää symbolia.

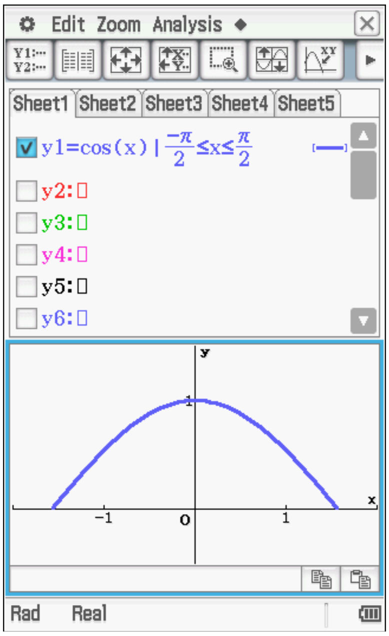


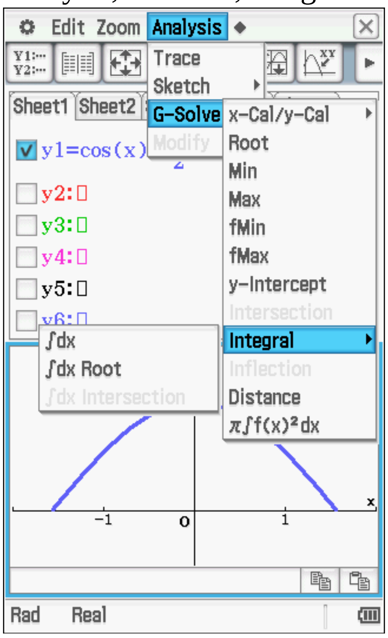


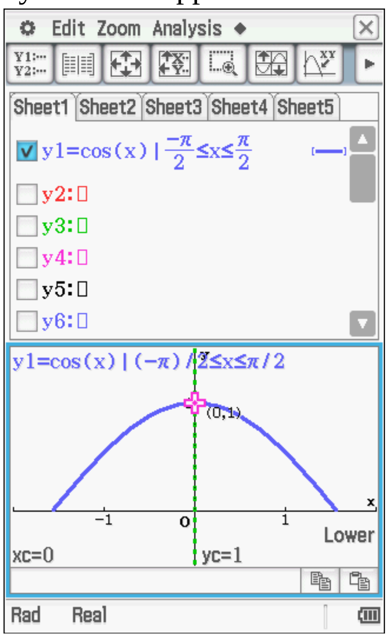
Laske pinta-ala alueelle, jota rajoittavat *x*-akseli ja funktion f kuvaaja, kun määritellään

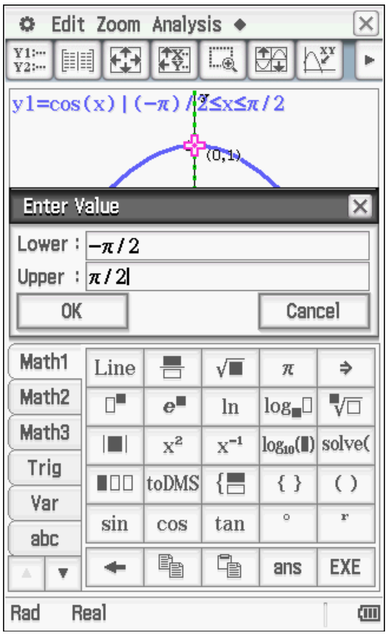
$f(x)=\cos x$ ja $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

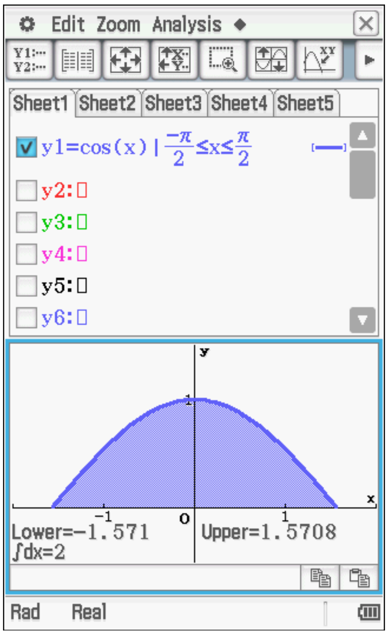
Analysis, G-Solve, Integral. Syötä –π/2 näppäimistöltä.



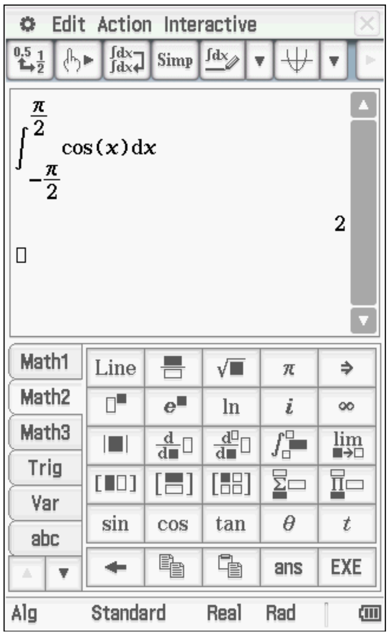








Tarkistus



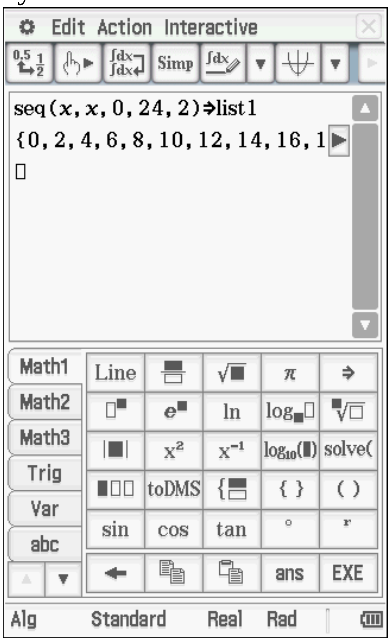
Rajatun alueen pinta-ala on 2.

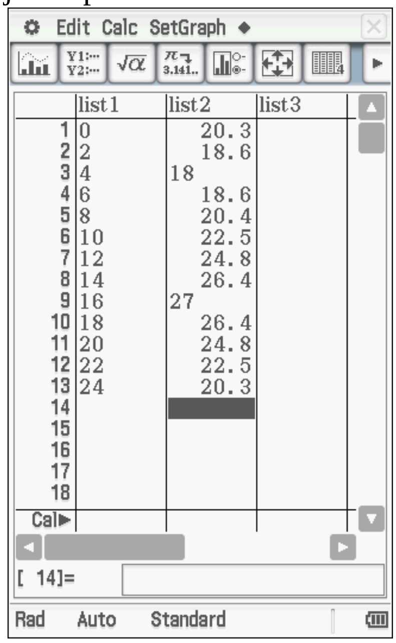
Eräänä heinäkuisena kesäpäivänä mitattiin ulkolämpötilaa. Mittaus tehtiin joka toinen tunti. Lämpötila mitattiin asteissa (^{o}C) ja x on tuntien lukumäärä keskiyön jälkeen

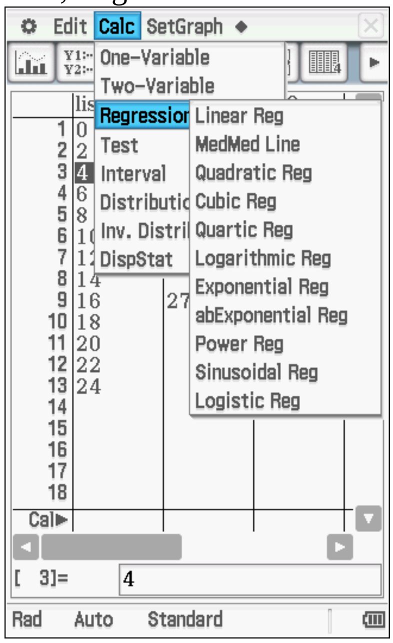
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Ulkolämpötila	20,3	18,6	18,0	18,6	20,4	22,5	24,8	26,4	27,0	26,4	24,8	22,5	20,3

Kehitä funktiolauseke, joka sopii mitattuihin lämpötiloihin. Piirrä kuvaaja.

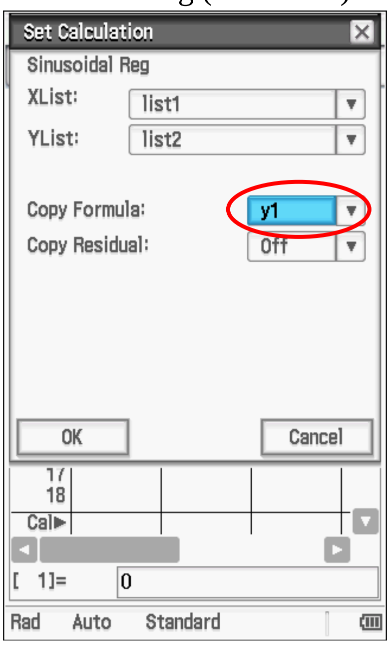
Syötä tunnit luetteloon list1 ja lämpötilat luetteloon list2 . Calc, Regression.

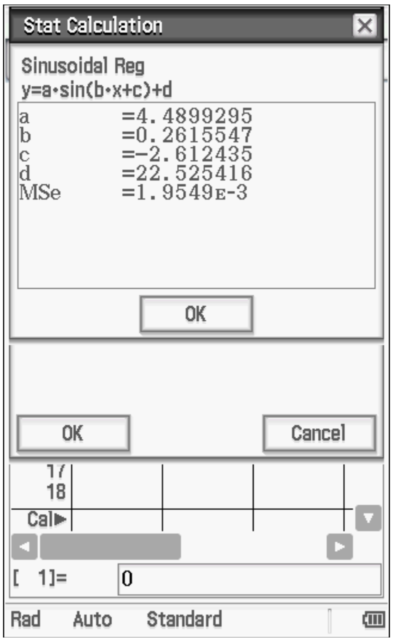


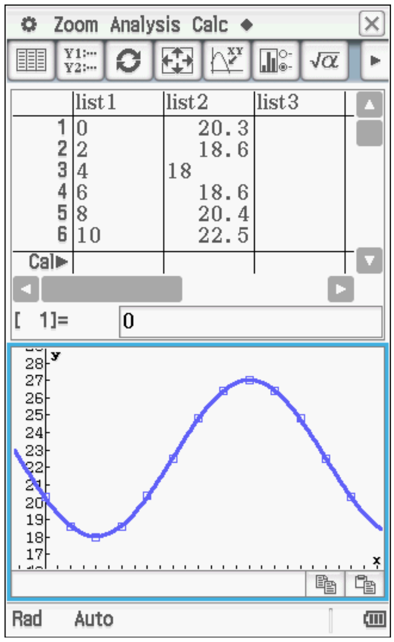




Sinusoidal Reg (sinimuoto).

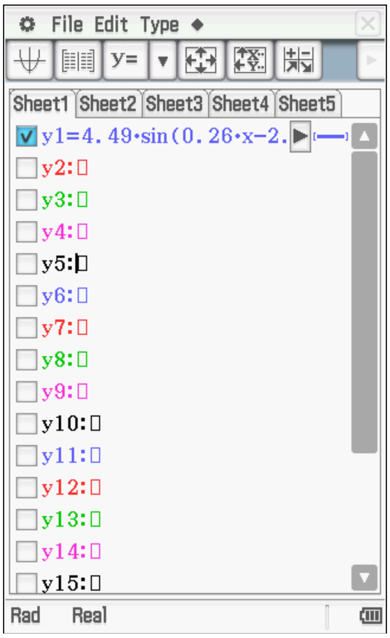


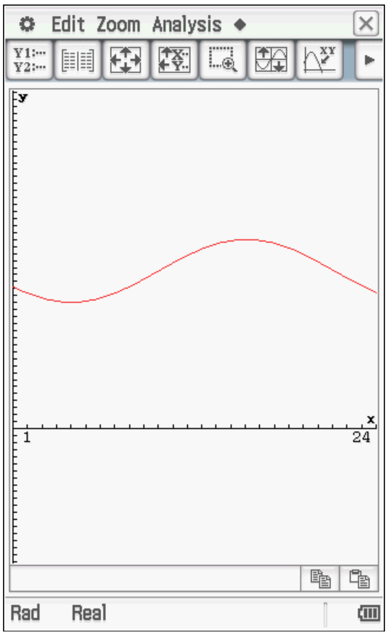


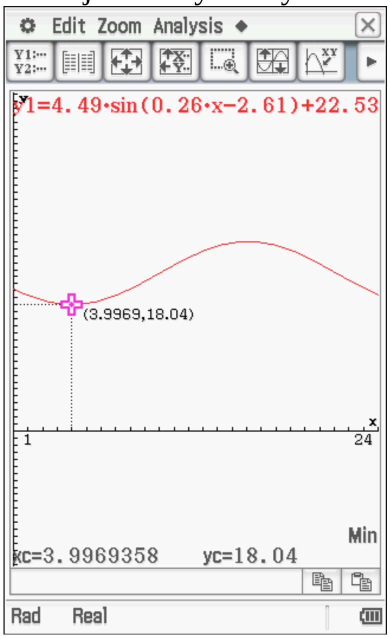


Funktio Y = 4,49sin(0.26x – 2.61) + 22.53 kuvaa lämpötilan kehitystä tämän vuorokauden aikana. Olemme kopioineet samalla funktion y1:een Graph & Table -sovellukseen.

Kuvaajaa voi nyt analysoida.







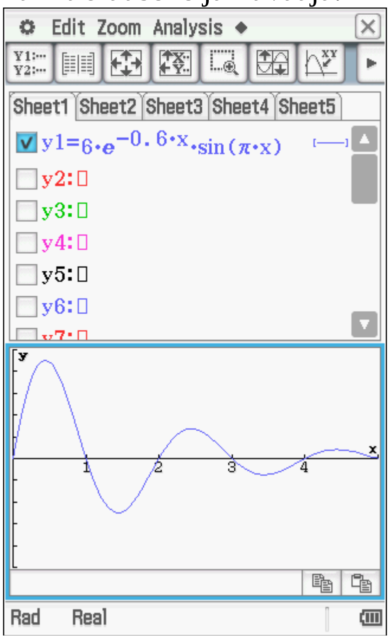
Kun lentokone putoaa ilmakuoppaan, siipien kärjet alkavat väristä. Siivenkärkien etäisyys normaalisijainnista t sekunnin kuluttua lasketaan seuraavasti:

$f(t) = 6e^{-0,6t} \cdot \sin(\pi t)$, jossa $f(t)$ mitataan senttimetreinä.

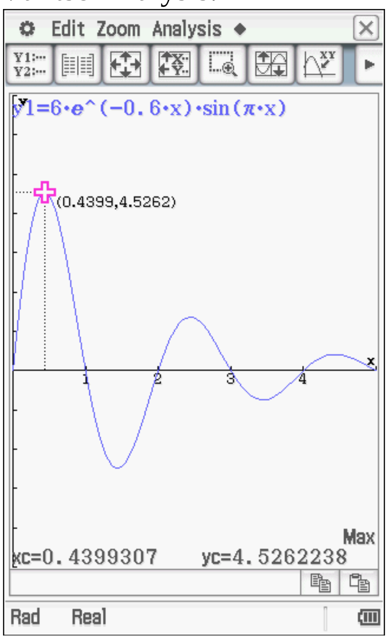
Piirrä funktion f kuvaaja ja määritä siivenkärkien maksimietäisyys niiden normaalisijainnista.

Valitse Rad-tila. Valitse ikkuna xmin: 0, xmax: 5, ymin: -5 ja ymax: 5.
Vaaka-akseli näyttää ajan sekunteina. Pystyakseli näyttää siivenkärkien paikan muutoksen senttimetreinä.

Funktiolauseke ja kuvaaja.



Valitse Analysis.



Suurin poikkeama tapahtuu 0,44 sekunnin kohdalla ja on noin 4,5 cm.

5.5 Trigonometriset yhtälöt

Sinillä, kosinilla ja tangentilla on yleiset ratkaisut radiaaneissa:

$$\cos u = a \text{ antaa } \begin{cases} u = u_0 + n \cdot 2\pi \\ u = -u_0 + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

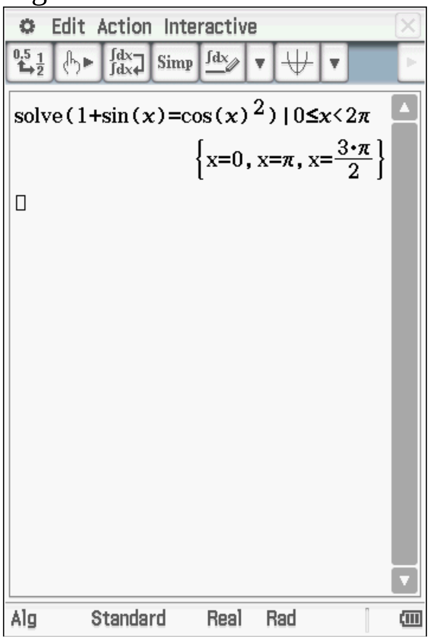
$$\sin u = b \text{ antaa } \begin{cases} u = u_0 + n \cdot 2\pi \\ u = (\pi - u_0) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan u = c \text{ antaa } u = u_0 + n \cdot \pi$$

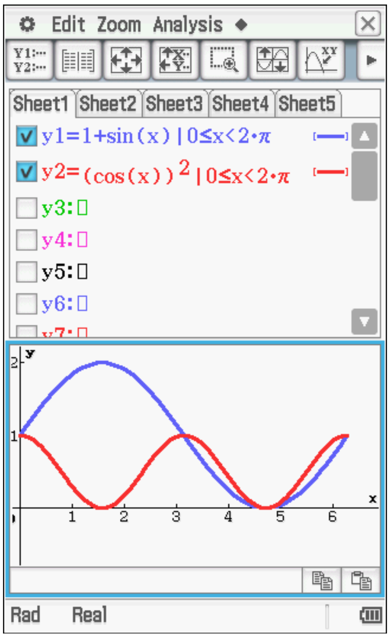
jossa u_0 on ratkaisu, jonka saat laskimesta.

Ratkaise yhtälö: $1 + sinx = cos^2x$, kun $x \in [0, 2\pi[$

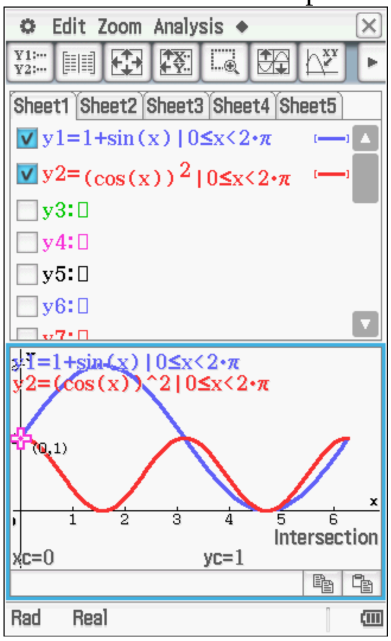
Algebrallinen ratkaisu



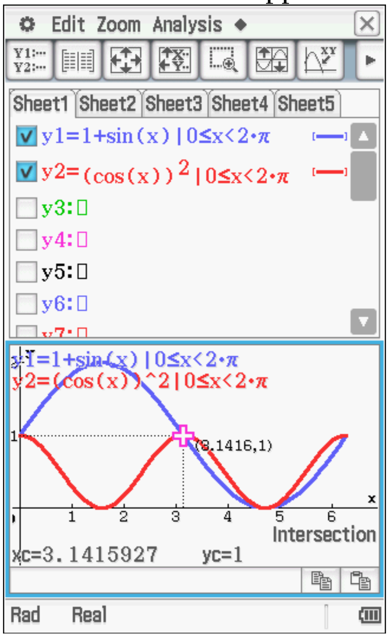
Graafinen ratkaisu



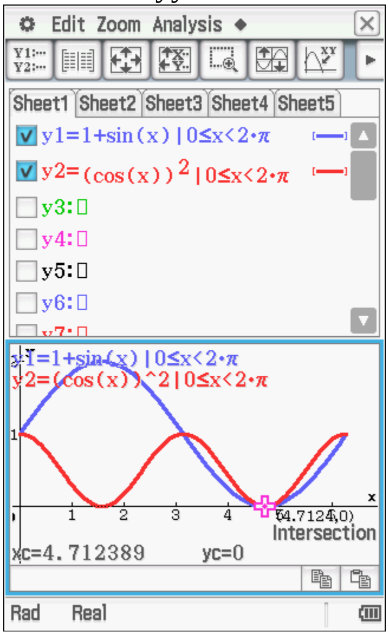
Intersection eli leikkauspiste.



Paina oikeaa nuolinäppäintä.



Kursori siirtyy seuraavaan leikkauspisteeseen.



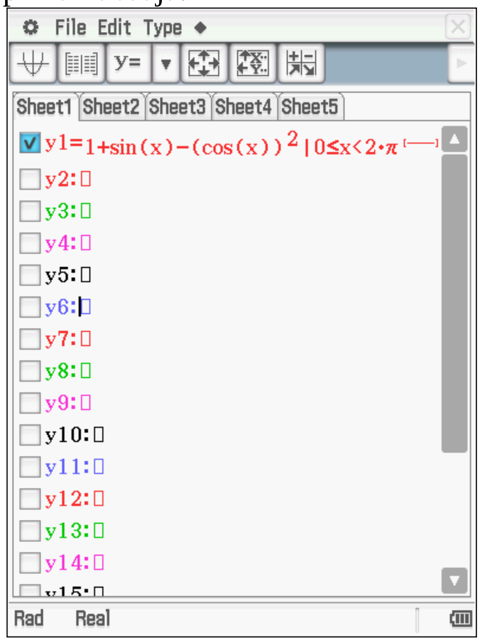
Ratkaisu: $x = 0$, $x = \pi$ ja $x = \dfrac{3\pi}{2}$. Huomaa, että $x = 2\pi$ ei ole oikea vastaus, koska $x \in [0, 2\pi[$.

Graafinen ratkaisu vahvistaa algebrallisen ratkaisun.

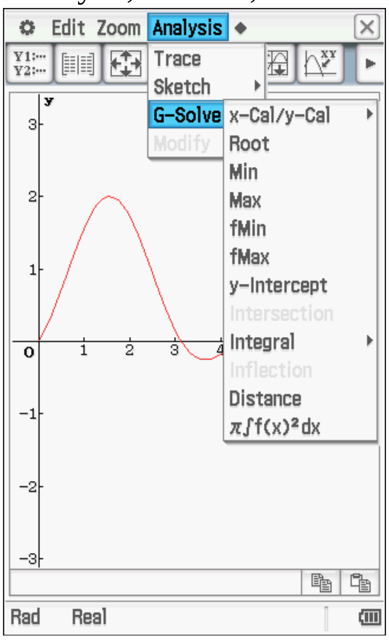
Graafinen ratkaisu – vaihtoehto II:

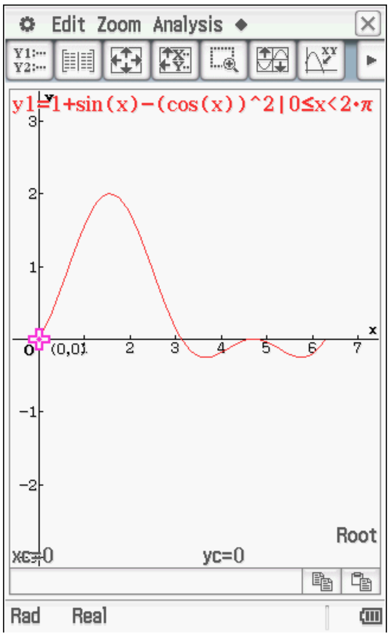
Yhtälö muunnetaan muotoon $1 + sinx - cos^2x = 0$ jossa $x \in [0, 2\pi[$.

Syötä vasemmalle puolelle y1 ja piirrä kuvaaja.



Analysis, G-Solve, Root.





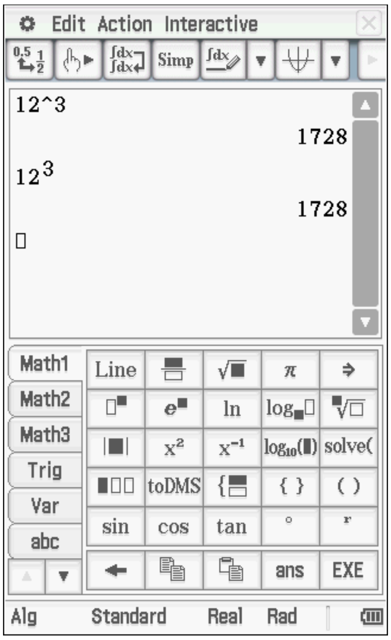
Huomaa, että $x = 2\pi$ ei ole oikea vastaus, koska $x \in [0, 2\pi[$.

6. Kombinaatio-oppi, todennäköisyys ja tilastot

6.1 Satunnaisotanta takaisinpanolla

Poimimme 3 alkiota takaisinpanolla 12 alkion perusjoukosta.
Kuinka monta erilaista kolmen alkion osajoukkoa voimme saada?

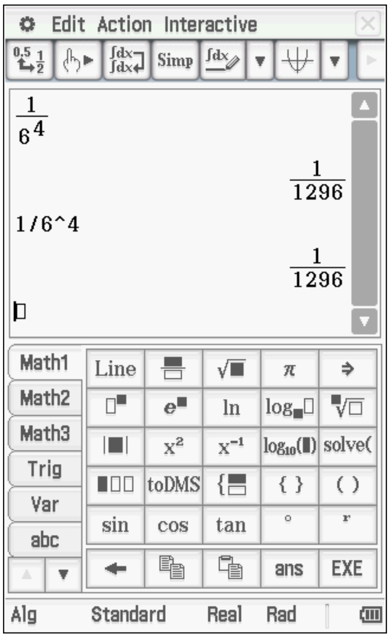
Ratkaisu.

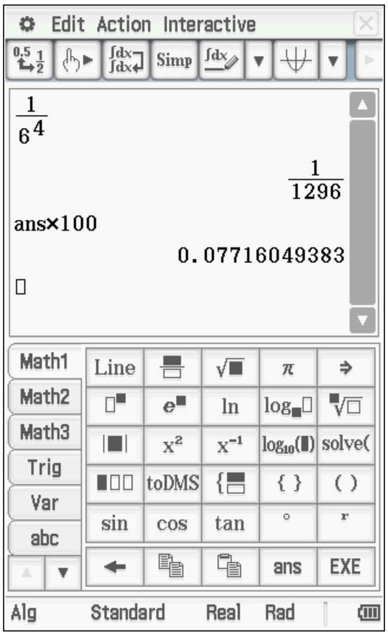


Vastaus: 1728 osajoukkoa.

Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme neljän arpakuution heitossa kaikkiin saman silmäluvun?

Ratkaisu.





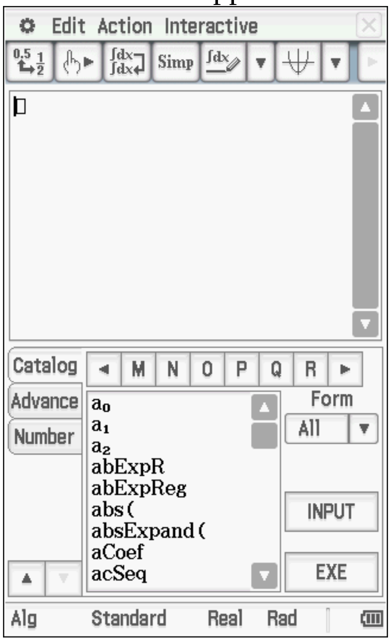
Todennäköisyys on 0,077 %.

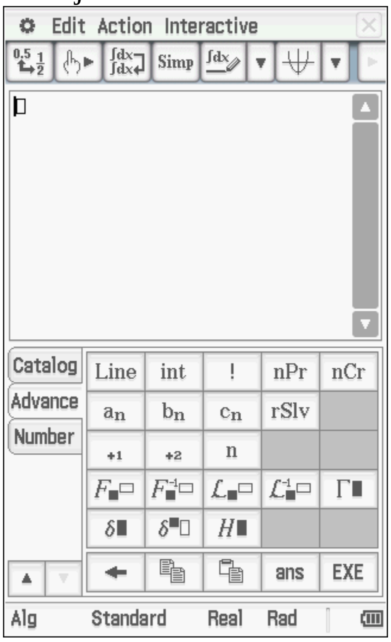
6.2 Palauttamaton satunnaisotanta (järjestetty osajoukko)

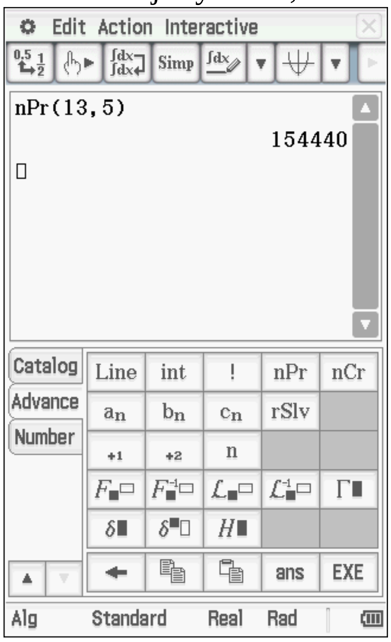
Otanta ilman takaisinpanoa	$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$	Poimimme r alkiota n alkion perusjoukosta palauttamatta. Järjestyksellä on tässä merkitystä..

 Laske, kuinka monta eri mahdollisuutta meillä on ottaa 5 korttia 13 kortin joukosta, kun otetaan huomioon se järjestys, jossa otamme nämä 5 korttia.

Selaa virtuaalinäppäimistön välilehtiä ja valitse Advance. Valitse nPr ja syötä 13,5

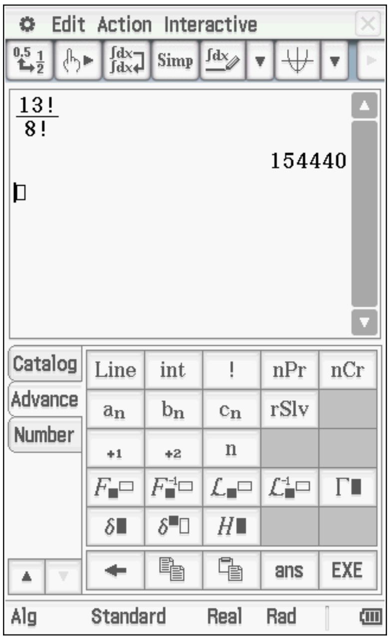






Vastaus: Erilaisia 5 kortin järjestettyjen osajoukkojen määrä on 154 440.

Tarkistus:



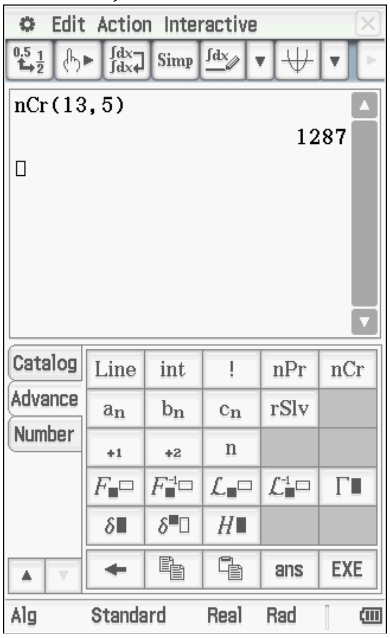
Kertoman symboli löytyy nPr-symbolin vasemmalta puolelta.

6.3 Palauttamaton satunnaisotanta (järjestämätön osajoukko)

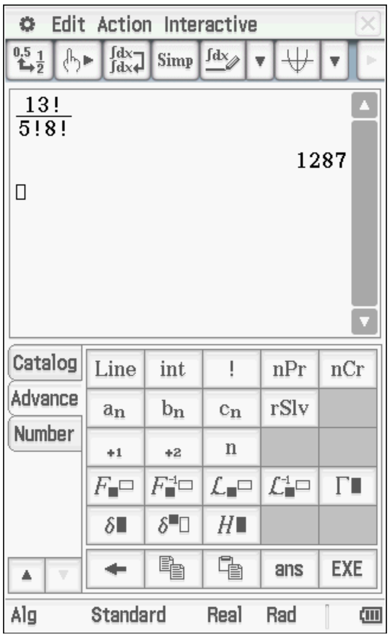
Satunnaisotanta palauttamatta.	$nCr = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	Poimimme *r* alkiota *n* alkion perusjoukosta palauttamatta. Järjestyksellä ei ole tässä merkitystä..

Laske montako eri mahdollisuutta sinulla on ottaa 5 korttia 13 kortin joukosta, kun emme ota huomioon järjestystä, jossa otamme nuo 5 korttia.

Advance, nCr.



Tarkistus:



Vastaus: Erilaisten 5 kortin järjestämättömien osajoukkojen määrä on 1287.

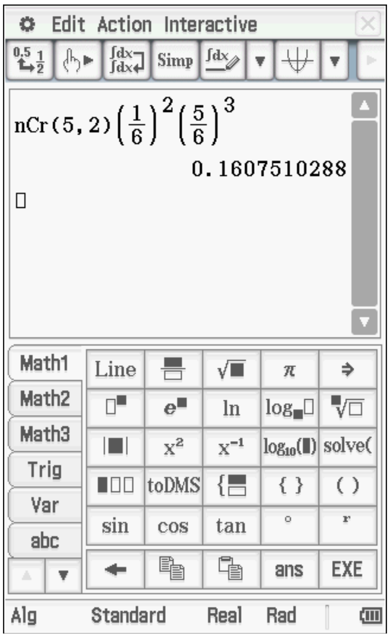
6.4 Binomitodennäköisyys

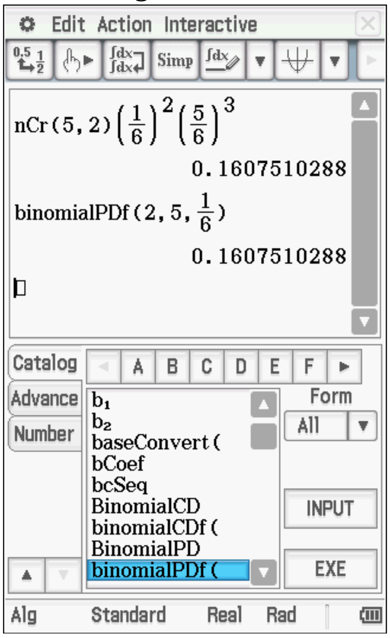
Tarkastelkaamme kokeilua, joka toistuu *n* kertaa. Jokaisella kokeilulla on vain kaksi mahdollista lopputulosta: onnistuminen tai epäonnistuminen. Onnistumisen mahdollisuus on täten sama jokaisessa yrityksessä. Yritysten onnistuminen ei riipu toisista yrityksistä. Tätä kutsutaan toistokokeeksi ja satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa.

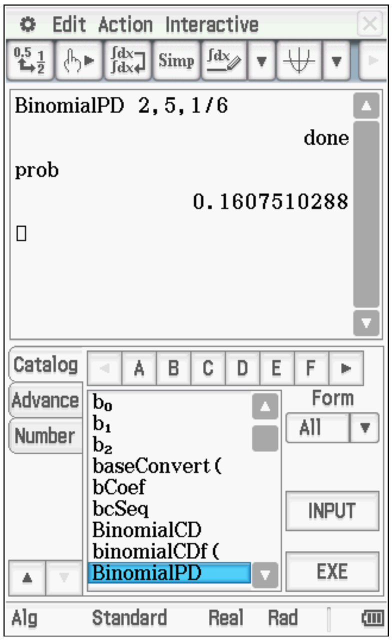
Binomitodennäköisyys	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Riippumattomien toistojen määrä on *n*. *p* on todennäköisyys onnistumiselle. Onnistuneiden toistojen määrä on k.

Heitämme tavallista arpakuutiota 5 kertaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme kaksi kuutosta? Todennäköisyys yhden kuutosen saamiseen on $\frac{1}{6}$. Tämä tarkoittaa sitä, että todennäköisyys sille, ettemme saa kuutosta, on $\frac{5}{6}$.

Ratkaisu. Tai Catalog, binomialPDf. Tai vielä vaihtoehtoisesti näin.



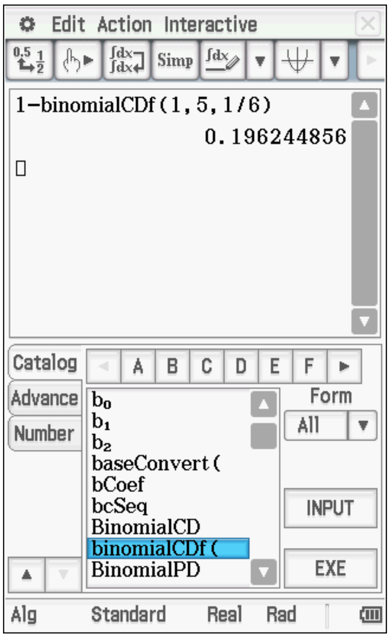


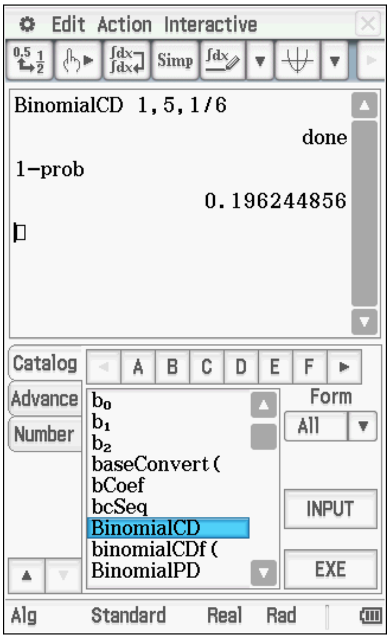


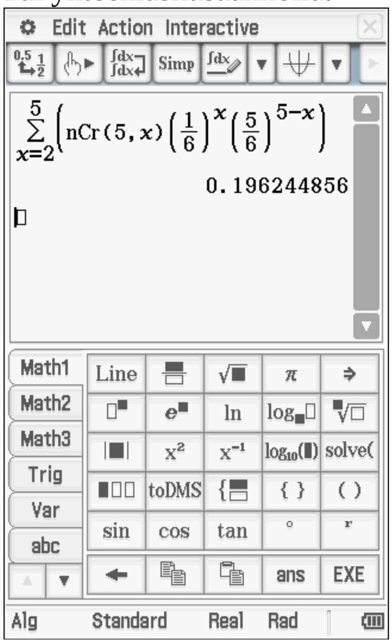
Todennäköisyys kahden kuutosen saamiseen on 0,16.

 Heitämme arpakuutiota 5 kertaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme vähintään kaksi kuutosta?

Ratkaisu. Vaihtoehtoisesti näin Tai yhteenlaskusäännöllä.







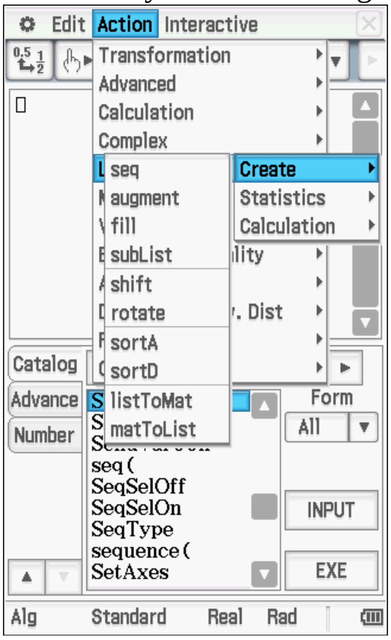
$\mathrm{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6})$ antaa todennäköisyyden sille, että saamme 0 tai 1 kuutosta 5 heitolla.

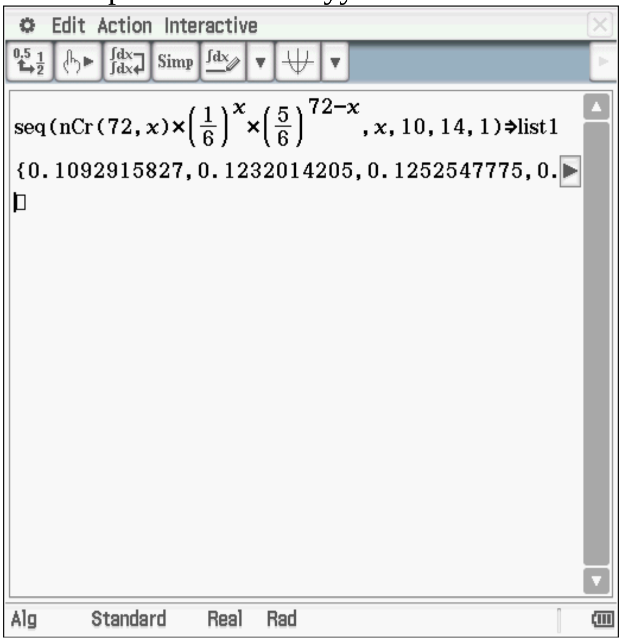
Todennäköisyys kahden kuutosen saamiseen on siten $1-\mathrm{BinomialCD}(1,5,\frac{1}{6})$.

Heitämme tavallista arpakuutiota 72 kertaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme 10-14 kuutosta?

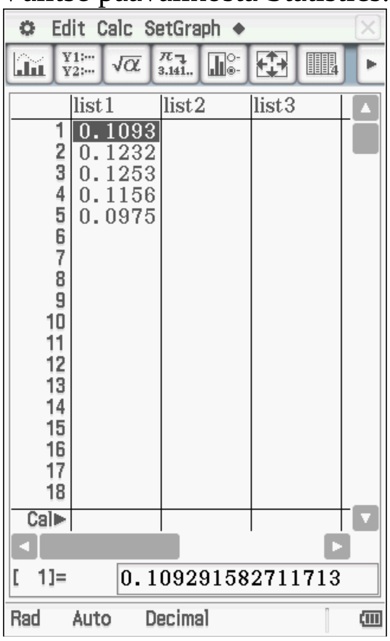
Meidän on siis määriteltävä $P(10 \le X \le 14)$, jossa X on kuutosten määrä.

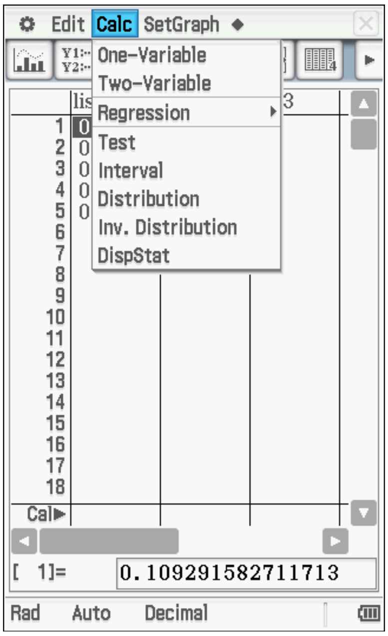
Voimme myös esim. Catalog-valikon seq-komentoa pistetodennäköisyyksien laskemiseksi.

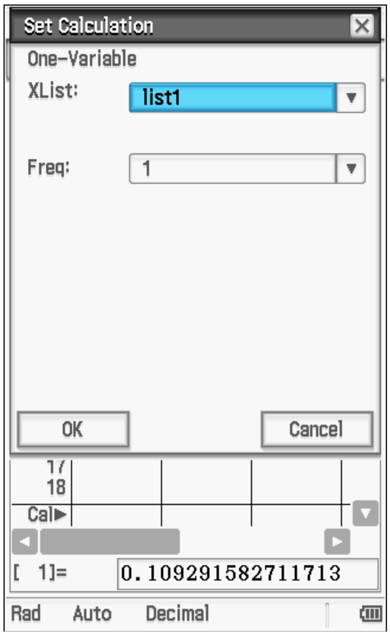




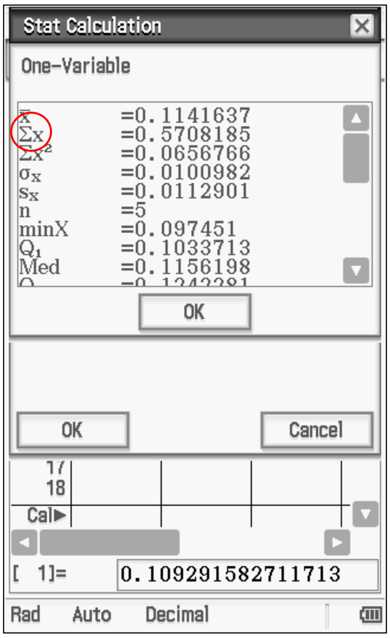
Valitse päävalikosta Statistics. Valitse Calc. Valitse One-Variable.

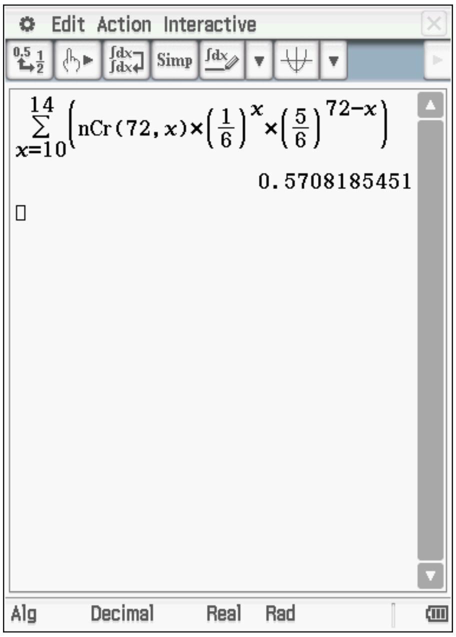






Pistetodennäköisyyksien summa on toisena tilastolaskuissa. Voit vaihtoehtoisesti käyttää myös summafunktiota. Todennäköisyys on $P(10 \leq X \leq 14) = 0{,}57$.



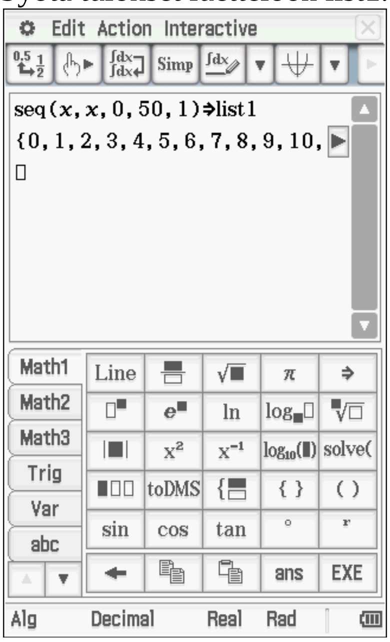


6.5 Binomijakauma

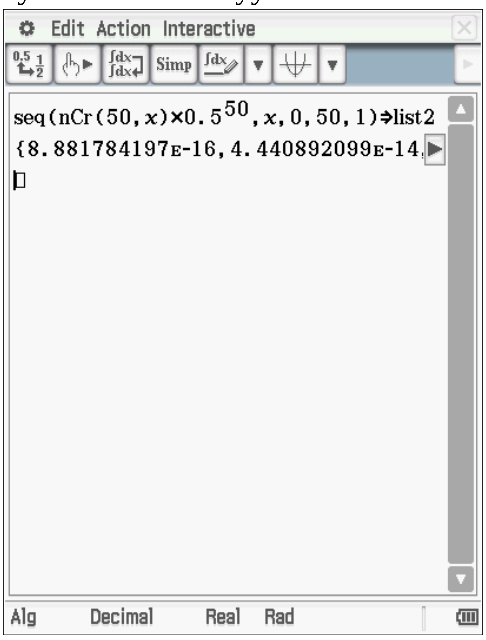
Heitämme kolikkoa 50 kertaa. Olkoon X saatujen kruunien määrä. Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa, sillä toistot ovat toisistaan riippumattomia. Onnistumisen todennäköisyys on tasan $p = 0{,}5$. Saamme heitettäessä joko kruunan tai klaavan.

Tee ja piirrä todennäköisyysjakauma yllä mainittuun kokeeseen.

Syötä tulokset luetteloon list1.

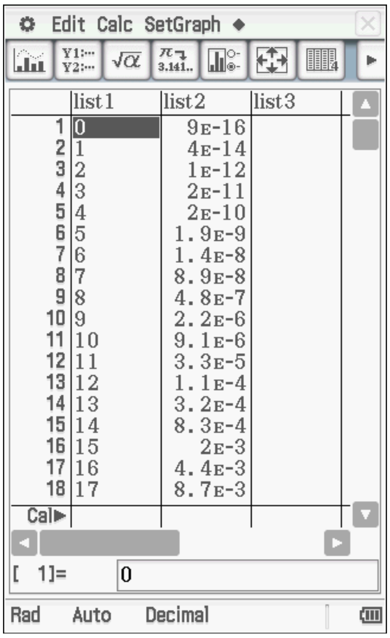


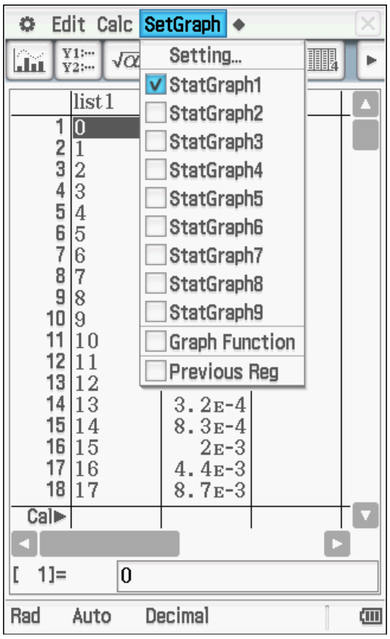
Syötä todennäköisyys saada klaava 0 - 50 kertaa luetteloon list2.

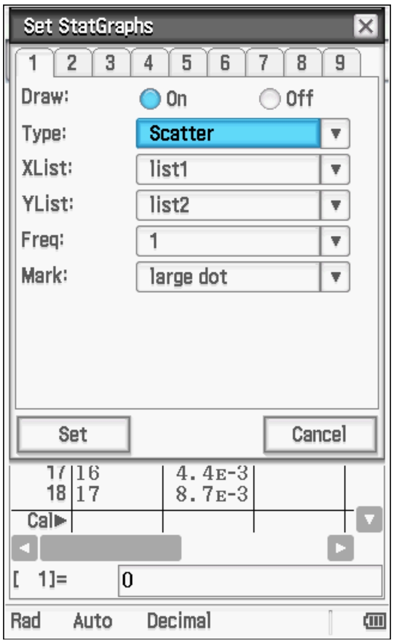


Huomaamme, että $P(X=x)=\binom{50}{x}\cdot 0{,}5^{x}\cdot 0{,}5^{50-x}=\binom{50}{x}\cdot 0{,}5^{50}$, jolloin list2 on helpompi laatia.

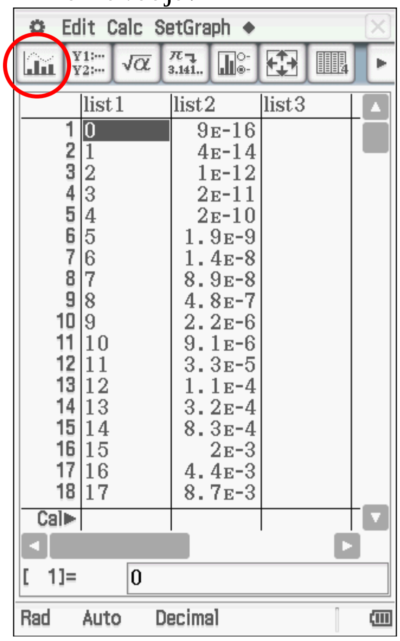
Valitse päävalikosta Statistics. Valitse SetGraph. Asetukset.

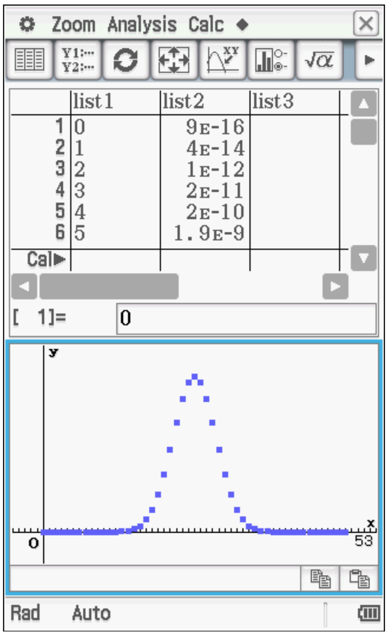






Piirrä kuvaaja.



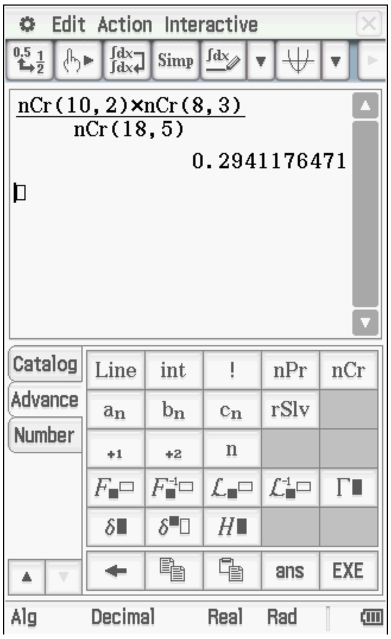


6.6 Hypergeometrinen jakauma (palauttamaton otanta)

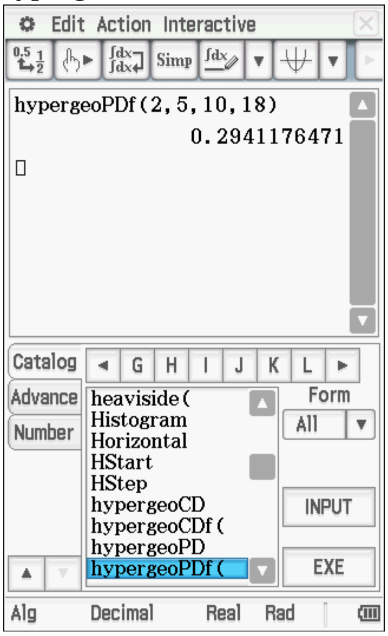
Hypergeometrinen jakauma, jota satunnaismuuttuja X noudattaa.	$P(X=x)=\dfrac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	N on perusjoukon alkioiden lkm, M määrätyn osajoukon alkioiden lkm, n on ottojen kokonaislukumäärä.

Meillä on 10 valkoista ja 8 punaista kuulaa laatikossa ja me otamme satunnaisesti laatikosta 5 kuulaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme 2 valkoista ja 3 punaista kuulaa?

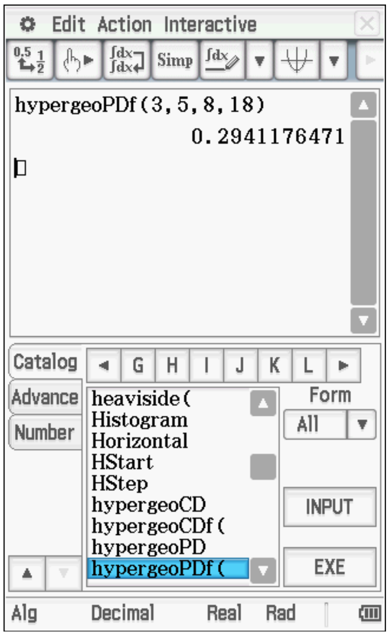
Kaava sovellettuna.



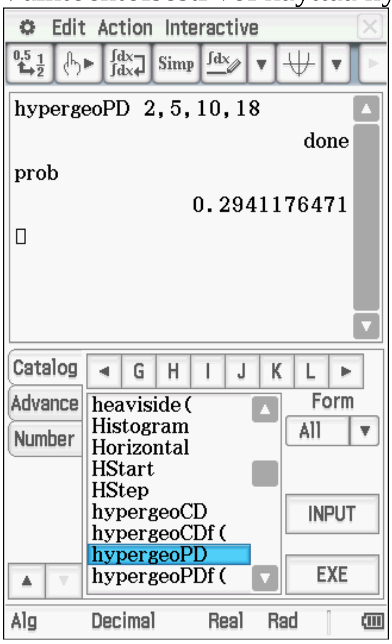
hypergeoPDf antaa.

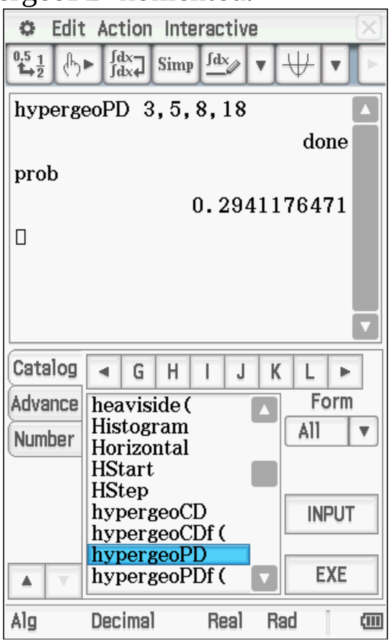


Miksi vastaus on sama?

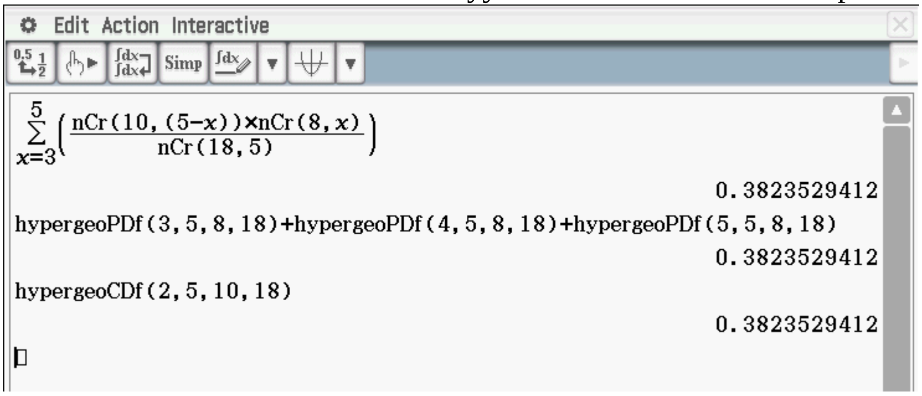


Vaihtoehtoisesti voi käyttää hypergeoPD-komentoa.





Meillä on 10 valkoista ja 8 punaista kuulaa laatikossa ja me otamme satunnaisesti laatikosta 5 kuulaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä saamme vähintään 3 punaista kuulaa?



Joko näin: $\sum_{x=3}^{5}\frac{10C(5-x)\cdot 8Cx}{18C5}$

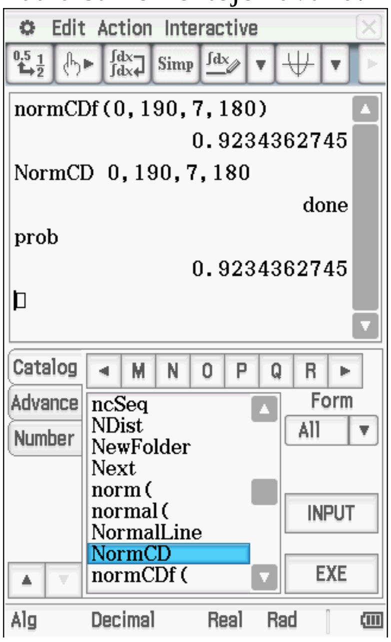
tai: hypergeoPDf(3,5,8,18)+hypergeoPDf(4,5,8,18)+hypergeoPDf(5,5,8,18)

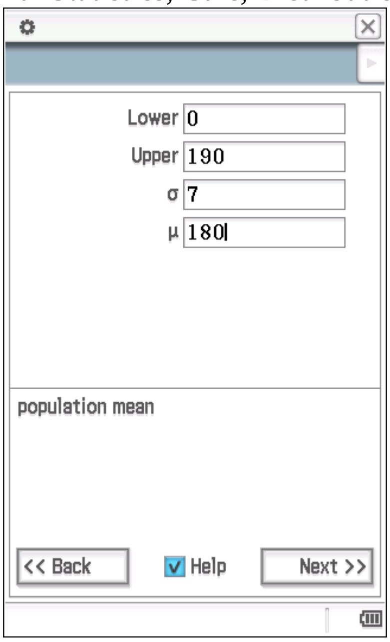
taikka yksinkertaisimmin: hypergeoCDf

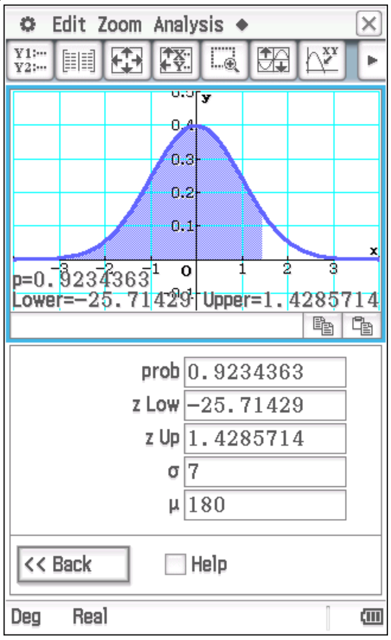
6.7 Normaalijakauma

Tyypillinen esimerkki normaalijakaumasta löytyy asevelvollisten pituudesta. Asevelvollisten keskiarvo on $\mu = 180\,\text{cm}$ ja keskihajonta $\sigma = 7\,\text{cm}$. Kuinka suuri osa asevelvollisista on lyhyempiä kuin 190 cm?

Ratkaisu komentojen avulla. Tai Statistics, Calc, Distribution, Normal CD.





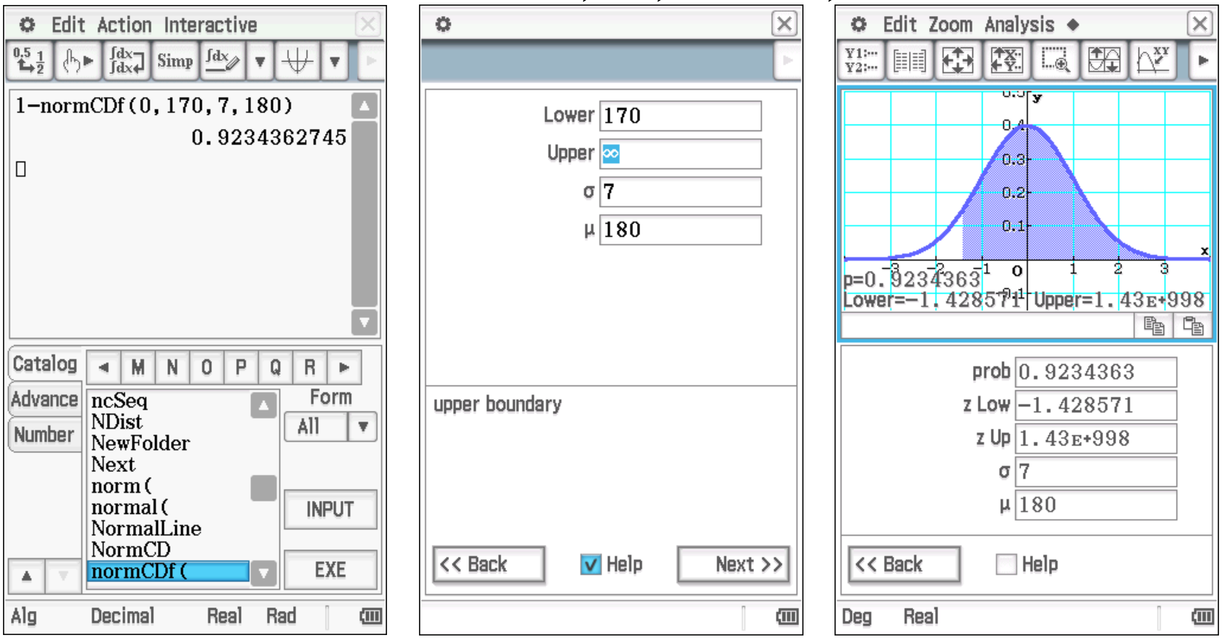


Noin 92,3 % asevelvollisista on lyhyempiä kuin 190 cm.

Kuinka suuri osa asevelvollisista ovat pitempiä kuin 170 cm?

Kun olemme NormCDf-toiminnon avulla laskeneet kuinka monta asevelvollista on lyhyempiä kuin 170 cm, voimme ottaa selvää siitä, kuinka suuri osa asevelvollisista on pitempiä kuin 170 cm seuraavasti $1-P(X<170)$.

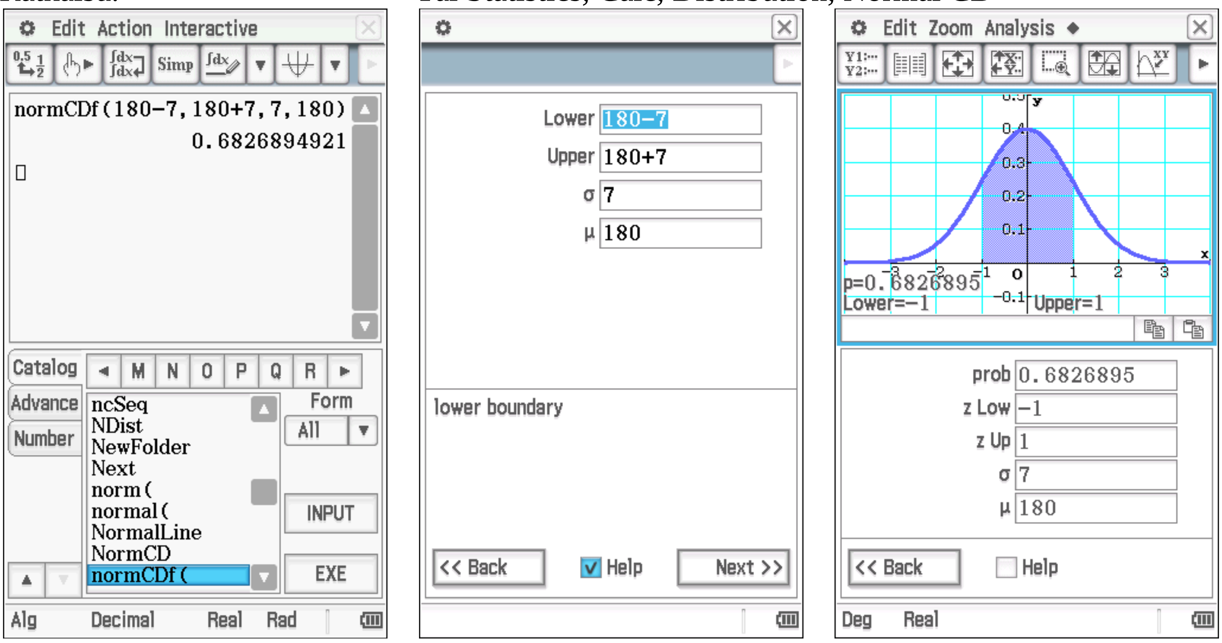
Ratkaisu. Tai Statistics, Calc, Distribution, Normal CD



Huomaamme, että on yhtä monta yli 170 cm:n pituista asevelvollista kuin on alle 190 cm pituisia. Miksi?

Kuinka suuri osa asevelvollisista asettuu väliin $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$, eli keskihajonnan sisään keskiarvon 180 cm molemmin puolin?

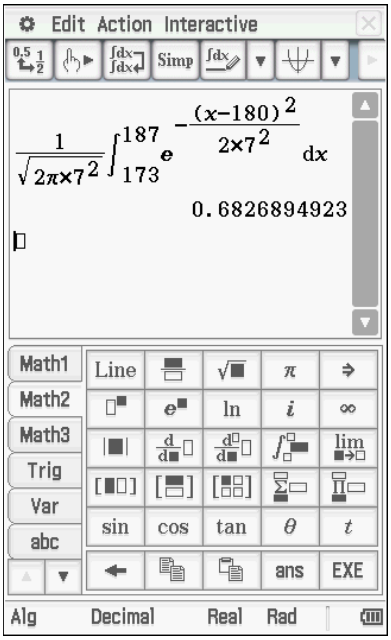
Ratkaisu. Tai Statistics, Calc, Distribution, Normal CD

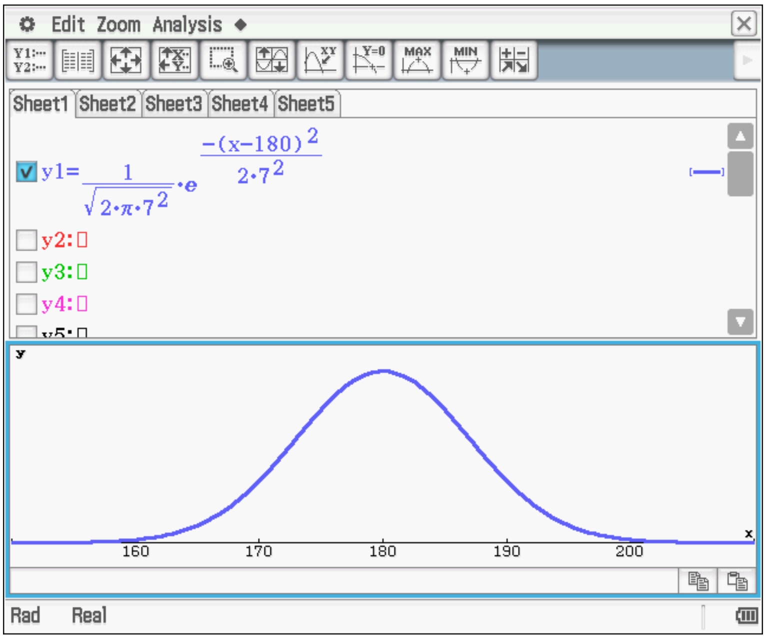


Huomaamme, että n. 68,3 % asevelvollisista sijoittuu keskihajonnan sisään keskiarvon molemmin puolin. Tämä tarkoittaa sitä, että 68,3 % asevelvollisista sijoittuu välille 173 cm - 187 cm.

Vaihtoehtoisesti näin:
Voimme myös todennäköisyyden laskemiseen keskihajonnan funktiota *f*, joka saadaan lausekkeesta $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$. Katsotaanpa, kuinka voimme laskea todennäköisyyden sille, että satunnaisesti valitun asevelvollisen pituus on keskiarvosta symmetrisesti yhden hajonta-askeleen sisällä.

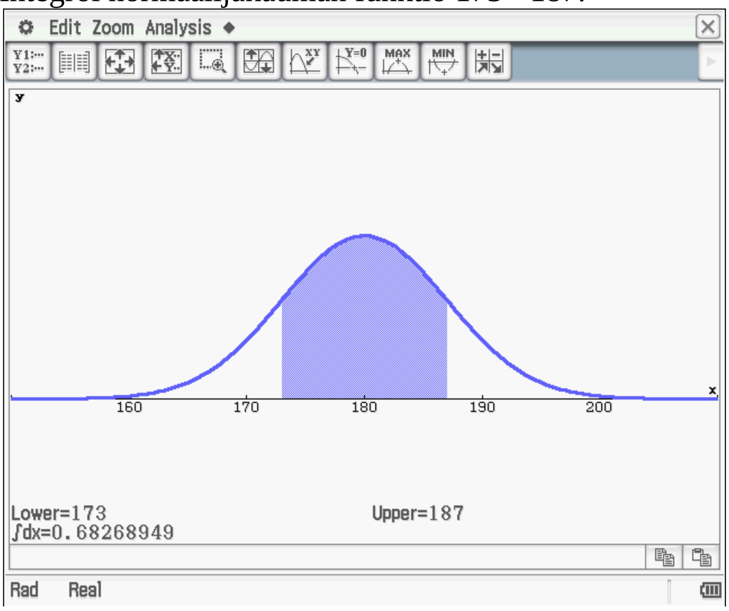
Ratkaisu. Graafinen ratkaisu





Syötä normaalijakauman funktio *f*, joka saadaan lausekkeesta $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

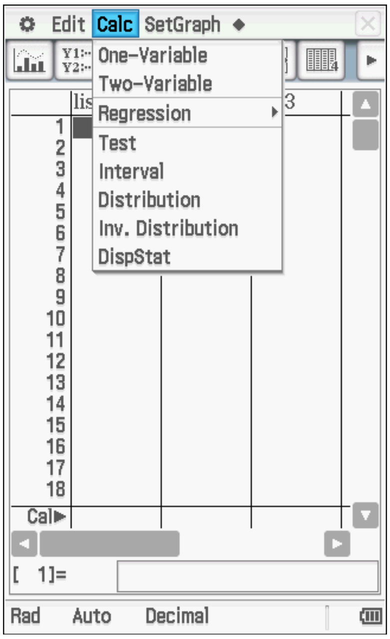
Integroi normaalijakauman funktio 173 - 187.

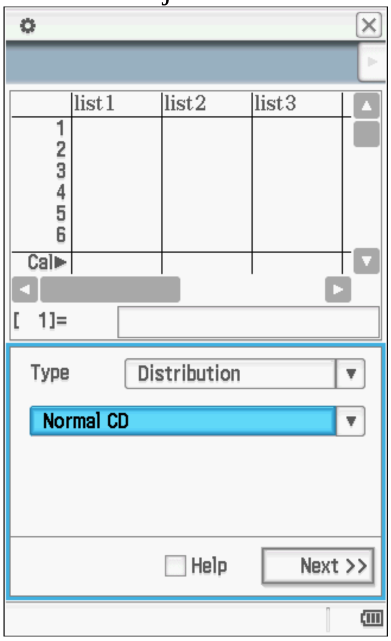


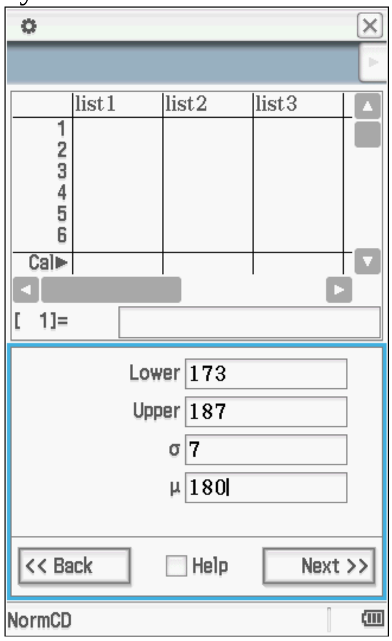
Näin voimme todistaa, että n. 68,3% asevelvollisista osuu keskihajonnan sisään keskiarvon molemmin puolin.

Tässä vielä pikaohje Statistics (tai SpreadSheet) –sovelluksen käyttämiseen hajontalaskuissa.

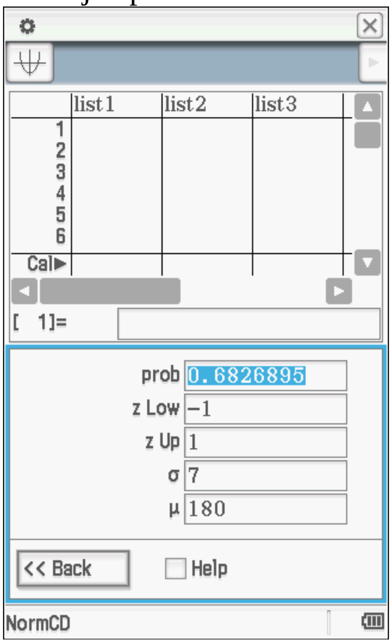
Valitse Statistics-valikosta Calc.Distribution ja Normal CD. Syötä arvot.

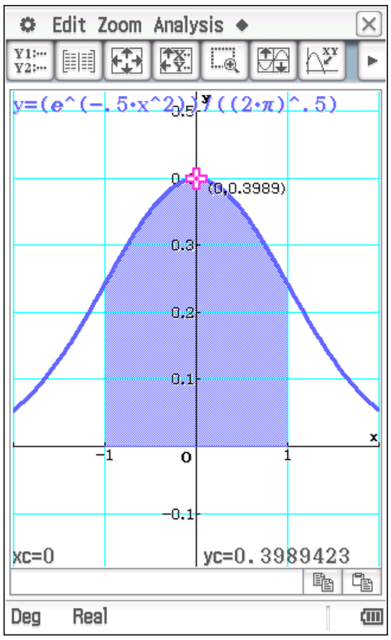






Kuvaajan piirtäminen onnistuu piirtokuvaketta koskemalla. Resize suurentaa aktiivisen ikkunan.





Näin voimme todistaa, että n. 68,3 % asevelvollisista osuu keskihajonnan sisään keskiarvon molemmin puolin.

Trace –toiminto kuvaajan yhteydessä näyttää tiheysfunktiolla olevan pisteen koordinaatit ja funktion lausekkeen.

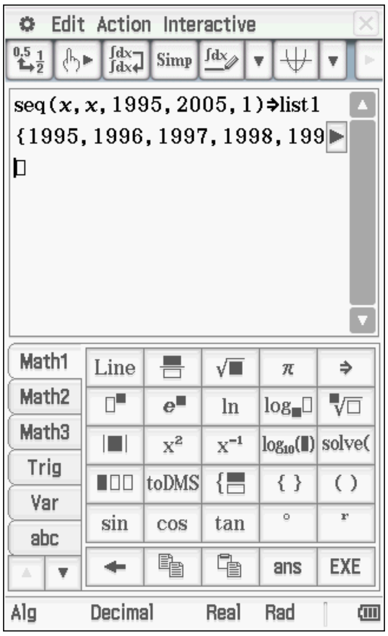
6.8 Murtoviiva

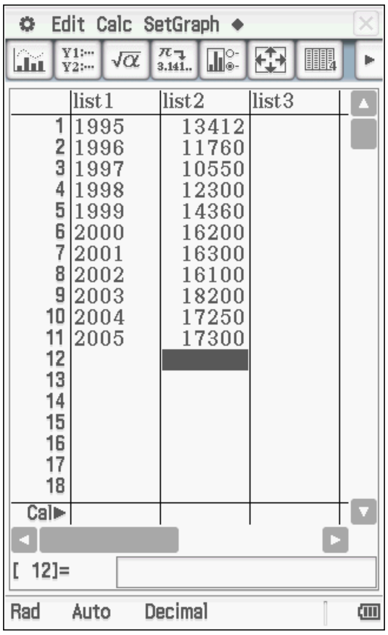
Alla oleva taulukko osoittaa öljyntuotannon määrää eräässä OPEC-maassa vuosien 1990 ja 2005 välillä. Tuotanto on annettu 1000 tonneina.

Vuosiluku	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
	13412	11760	10550	12300	14360	16200	16300	16100	18200	17250	17300

Esitä öljyntuotannon kehitys tänä aikana murtoviivan avulla.

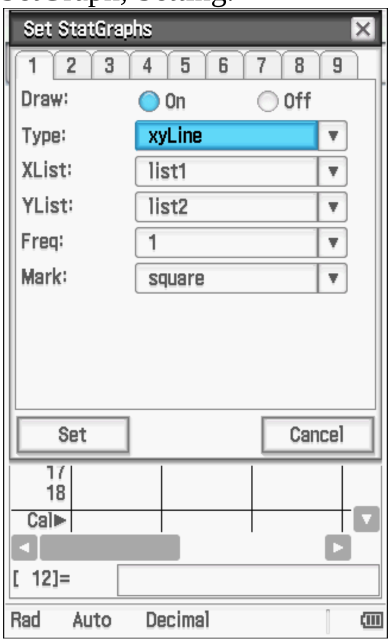
Syötämme vuosiluvut vuodesta 1995 vuoteen 2005 luetteloon list1 seq-valinnan avulla.

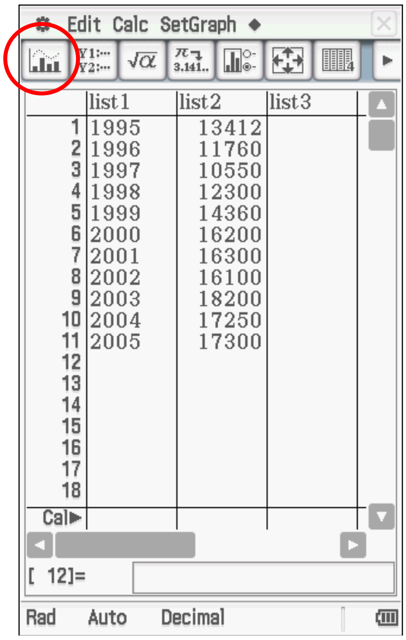


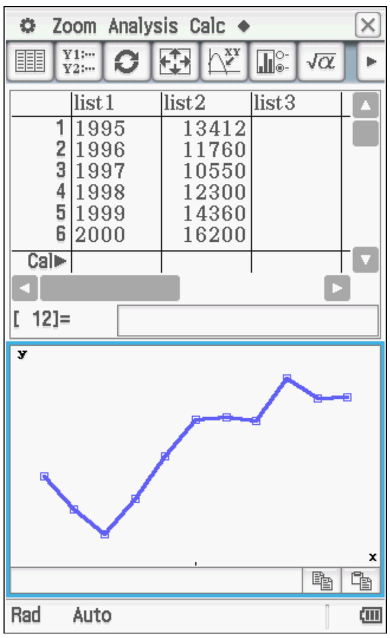


Kun siirrymme Statistics-tilaan, näemme vuosiluvut list1-luettelossa. Tuotantoluvut syötetään luetteloon list2.

SetGraph, Setting.





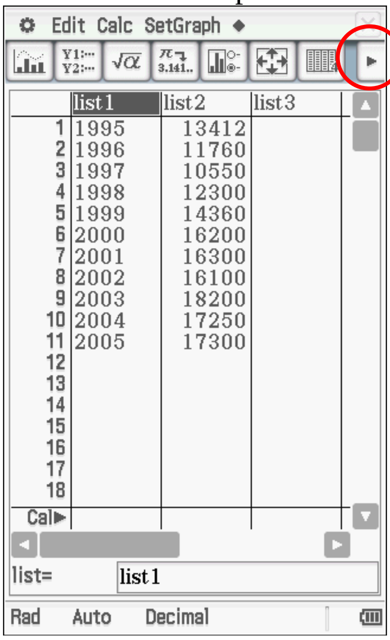


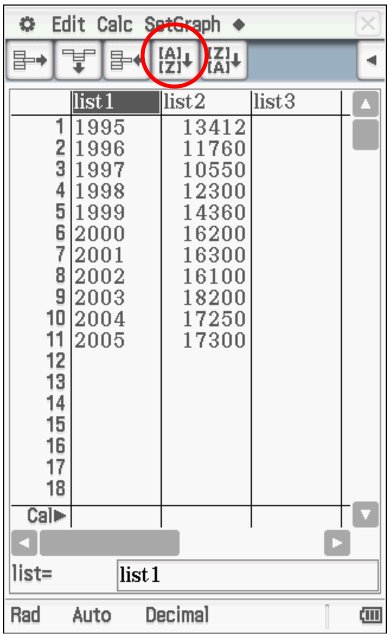
6.9 Tilastollisen aineiston luokittelu

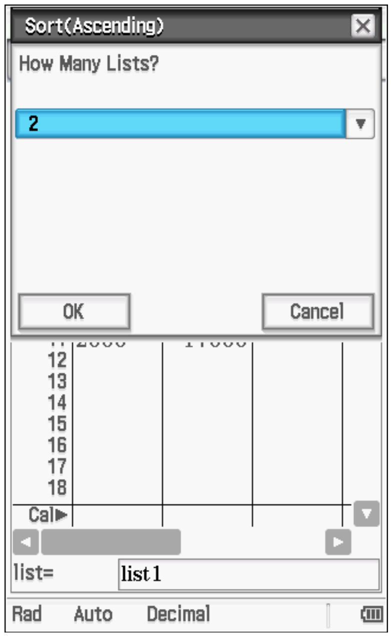
 Minä vuonna öljyntuotanto on ollut vähäisintä ja minä vuonna tuotanto oli suurinta?

Näin rajoitetusta aineistosta on mahdollista löytää nämä vuodet ilman laskinta. Mutta jos aineistoa olisi paljon enemmän, olisi tämä menetelmä suureksi avuksi.

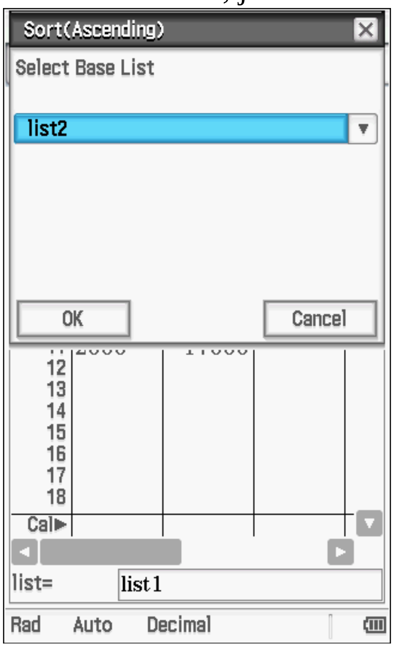
Paina oikeaa nuolipainiketta.

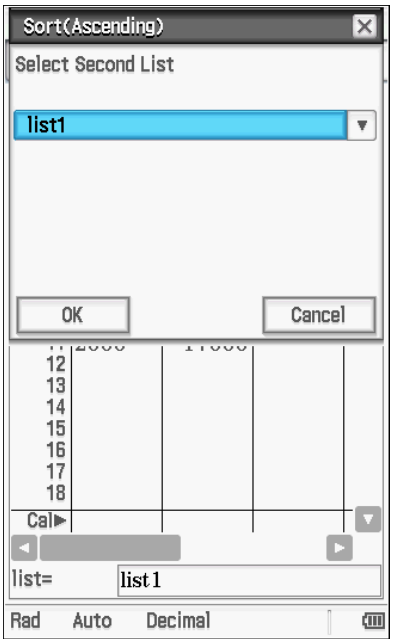


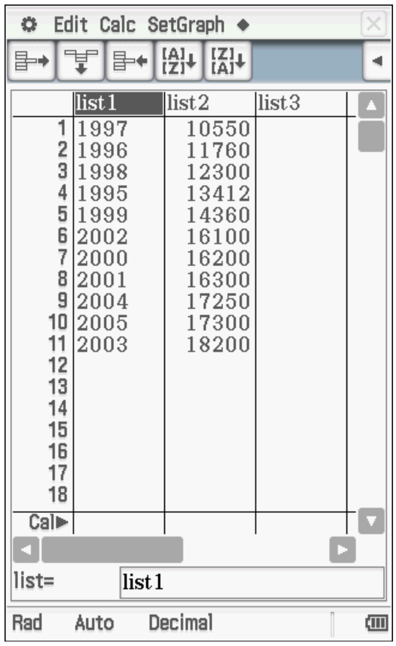




list2 on Base List, jonka mukaan luokittelu tehdään. List1 vain seuraa mukana.







Vuosilukua ja tuotantoa ei tule erottaa toisistaan aineistoa luokiteltaessa vaan pitää tiedot yhdessä. Öljyntuotanto oli pienintä vuonna 1997 ja suurinta vuonna 2003.

6.10 Keskiarvo, mediaani, kvartiilit, tyyppiarvo ja vaihteluväli

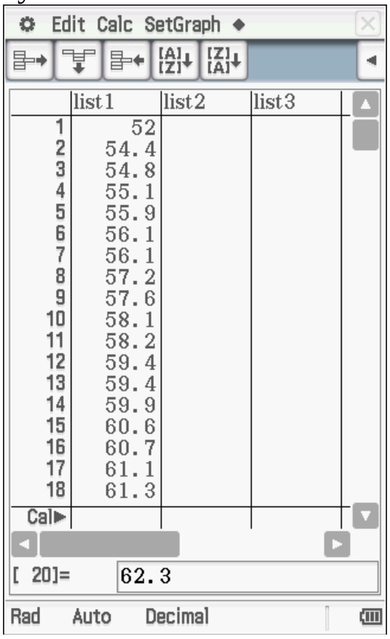
Keskiarvo. Kaikkien arvojen summa jaetaan arvojen lukumäärällä.	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ $\bar{x} = \dfrac{h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + \ldots + h_p x_p}{n}$	tässä $x_1, x_2 \ldots$ ovat arvoja. Kun arvo x_i esiintyy h_i kertaa n havainnoissa.
Frekvenssijakaumien keskiarvo	$\bar{x} = \dfrac{m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + \ldots + m_k \cdot f_k}{n}$	k lukuväliä, joiden keskipisteet $m_1, m_2, \ldots m_k$ ja vastaavat frekvenssit $f_1, f_2, \ldots f_k$
Mediaani	Keskimmäinen arvo, kun aineisto lajitellaan kasvavaan järjestykseen.	Huomaa! Jos havaintojen lukumäärä on parillinen luku, mediaanin muodostavat kaksi keskimmäistä arvoa tai niiden keskiarvo.
Tyyppiarvo	Se aineiston arvo, joka esiintyy useimmin.	Toinen nimitys on moodi.
Vaihteluväli	Vaihteluväli= suurin arvo − pienin arvo	
Yläkvartiili	Korkeimmat 25 % kerätyistä arvoista.	
Alakvartiili	Pienimmät 25 % kerätyistä arvoista.	
Kvartiiliväli	Kvartiiliväli= yläkvartiili – alakvartiili	Kvartiiliväliin eivät vaikuta suurimmat tai pienimmät 25 % kerätyistä arvoista. Kvartiilivälillä on tämän takia hyvä hajonta, silloinkin kun materiaalin arvot ovat jakautuneet epätasaisesti.
Kvartiilipoikkeama	Kvartiilipoikkeama = Kvartiiliväli / 2	

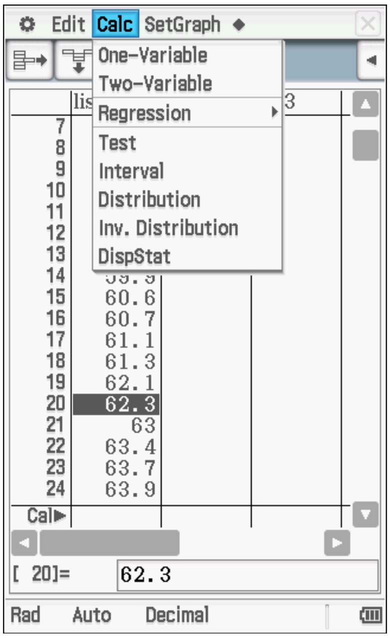
Eräässä kaupungissa tehtiin liikenteen melumittauksia. Tässä yhteydessä kerättiin seuraava data (dB) :

52,0	54,4	54,8	55,1	55,9	56,1	56,1	57,2	57,6	58,1	58,2	59,4
59,4	59,9	60,6	60,7	61,1	61,3	62,1	62,3	63,0	63,4	63,7	63,9
63,9	64,5	64,8	65,1	65,9	66,5	66,7	67,1	68,9	69,1	70,4	72,8

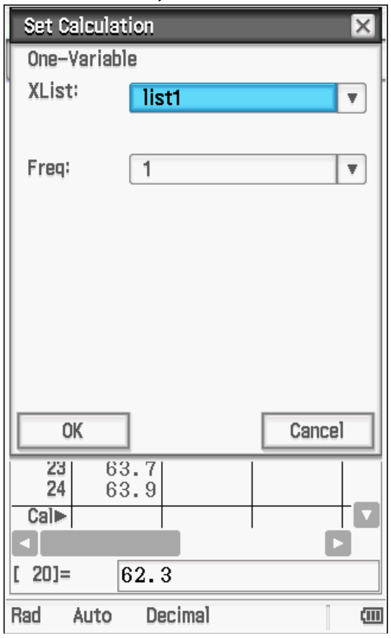
Laske keskiarvo, mediaani, ylä- ja alakvartiili, tyyppiarvo ja vaihteluväli.

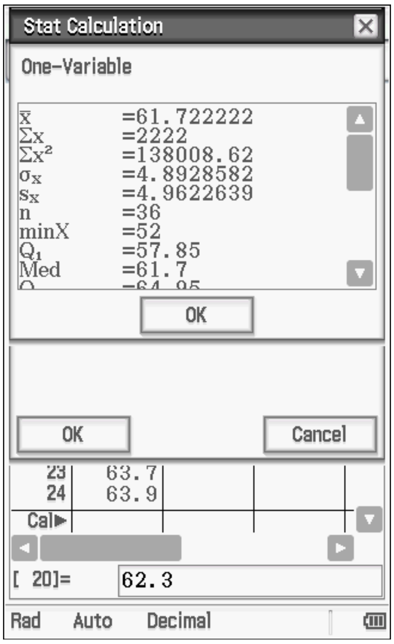
Syötä mittaustulokset luetteloon list1.



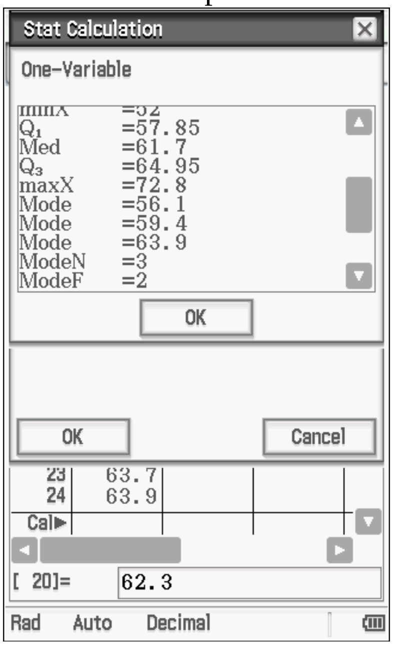


Valitse Calc, One-Variable.





Paina alas-nuolipainiketta.



Tässä näemme, että keskiarvo on 61,72 dB ja mediaani 61,7 dB. Alakvartiili on 57,85 dB ja yläkvartiili 64,95 dB. Tyyppiarvot ovat 56,1 dB, 59,4 dB ja 63,9 dB. Näitä kolmea arvoa esiintyy eniten aineistossa.

Vaihteluväli on aineiston suurimman ja pienimmän arvon välinen alue.
$\text{maxX} - \text{minX} = 72{,}8 - 52 = 20{,}8$ dvs. 20,8 dB

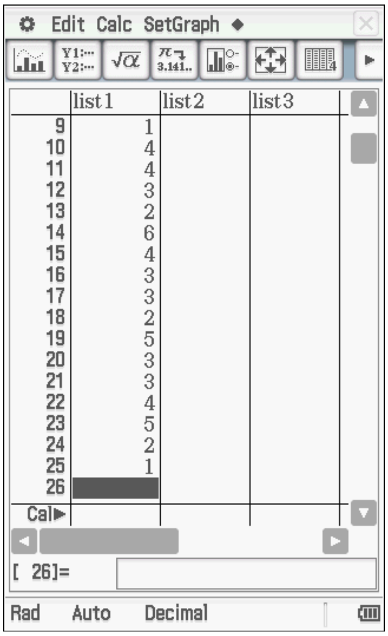
Oppilaat saivat matematiikan kokeessa tietyllä luokalla seuraavat numerot:

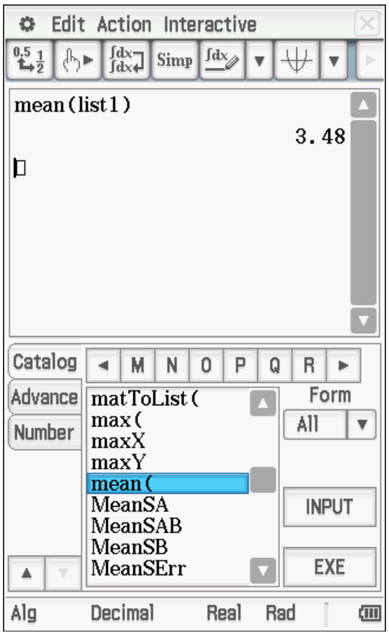
4 3 4 5 2 6 2 6 1 4 4 3 2 6 4 3 3 2 5 3 3 4 5 2 1

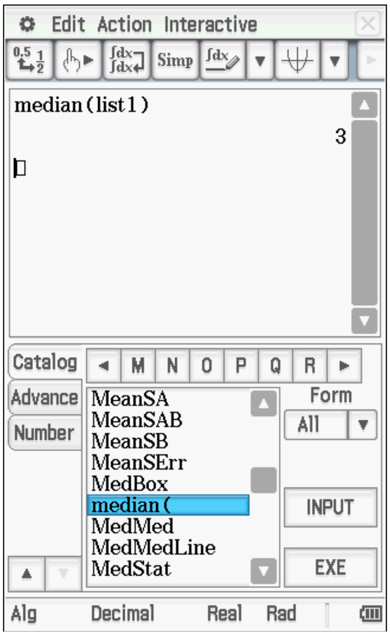
Laske keskiarvo, mediaani ja vaihteluväli.

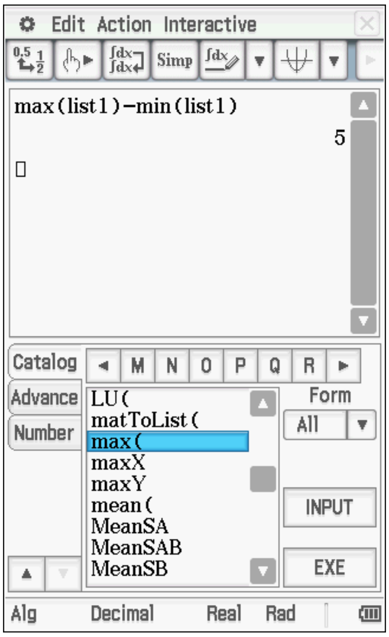
Syötä koenumerot luetteloon list1 Statistics-tilassa.

Selvitetään tässä tehtävässä vaihteeksi keskiarvo, mediaani ja vaihteluväli Main -sovelluksessa.









Tämä ero antaa vaihteluvälin.

6.11 Varianssi ja keskihajonta

Varianssi	$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$ $\overline{x}$ on keskiarvo	Satunnaismuuttujan hajonnan mitta.
Keskihajonta	$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$	Varianssin neliöjuuri.

Keskihajonta kuvaa sitä, miten suurta vaihtelua käsittelemässämme tilastollisessa materiaalissa esiintyy. Voimme kutsua tätä mitattavaa muuttujaa nimellä *X*, sillä keskihajonnasta käytetään usein nimityksiä σ_X, SD(x) tai s_x. Olettakaamme, että meillä on joukko mittauksia arvolle *X*. Näihin voidaan viitata seuraavasti: x_1, x_2,..., x_n. Laskeaksemme keskihajonnan on ensin laskettava keskiarvo $\overline{x}$ tai $\hat{\mu}_x$.

Kaava, jolla keskihajonta lasketaan, on seuraava: $SD(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

Keskihajonta on neliöjuuri varianssista, joka saadaan seuraavasta: $VAR(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

Keskihajonnan kaavassa jakajana on *n*. Joskus jaetaan
poikkeamien neliöiden summa tekijällä n - 1. Kun poikkeamien neliöiden summa jaetaan *n:llä*, tuloksena on perusjoukon keskihajonta. Otoskeskihajonta saadaan jakamalla tekijällä $n-1$. Jos otos on suuri, eli *n* on suuri, sillä ei ole merkitystä jaetaanko *n:llä* vai tekijällä $n-1$.

Laskin tekee eron perusjoukon keskihajonnan ja otoksen keskihajonnan välillä. Perusjoukon keskihajonta on $x\sigma_n$, ja otoksen keskihajonta $x\sigma_{n-1}$.

Voimme tehdä ensin laskelmia käsin.

 Hunajantuotanto

Eräällä hunajantuottajalla on 53 mehiläispesää. Tehdäkseen taulukoinnin käytännölliseksi mehiläisfarmari on luokitellut materiaalin. Käsittelemme täten luokiteltua materiaalia. Alla oleva taulukko näyttää mm. hunajantuotannon kilogrammoissa mehiläispesää kohti yhden tuotantokauden aikana.

Vaikka taulukosta ei ole mahdollista löytää tarkkaa keskipainoa, voimme arvioida likimääräisen keskiarvon luokkien luokkakeskusten mukaan. Luokkakeskus saadaan aikavälin todellisen alarajan ja todellisen ylärajan keskiarvona.

Saamme seuraavan taulukon:

Paino [kg]	Frekvenssi f	Luokkakeskus x_m	Luokkasumma $f \cdot x_m$	Poikkeamien neliöt kerrottuina frekvensseillä $f \cdot (x_m - \bar{x})^2$
[10,20>	15	15	225	6615
[20,30>	7	25	175	847
[30,40>	10	35	350	10
[40,50>	8	45	360	648
[50,60>	7	55	385	2527
[60,70>	4	65	260	3364
[70,100>	2	85	170	4802
Summa	53		1925	18813

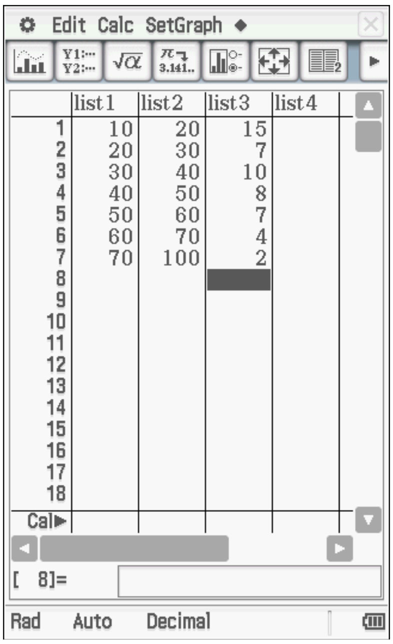
Jotta voisimme täyttää arvot viimeiseen palstaan on laskettava keskiarvo. Keskiarvo saadaan lausekkeesta $\bar{x} = \dfrac{f \cdot x_m}{n} = \dfrac{1925}{53} \approx 36$, ja on siis noin 36 kg.

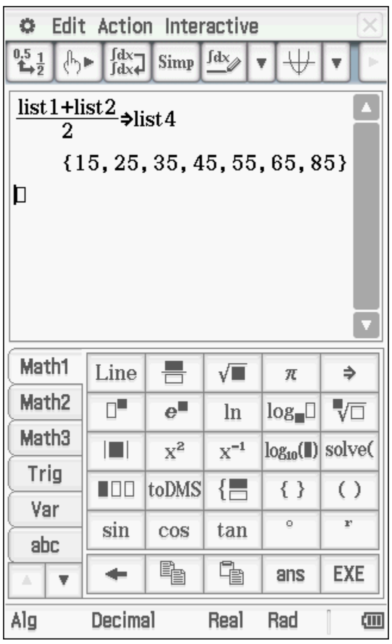
Keskihajonta: $x\sigma_n = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{18813}{53}} = 18{,}84$, eli 18,84 kg.

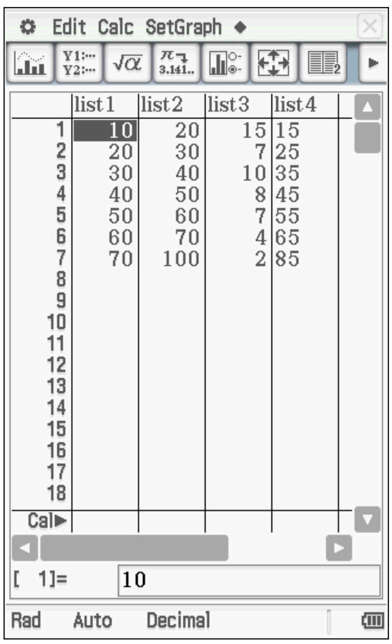
Miten voimme käyttää laskinta apuna ratkaistaessa tätä tehtävää?
Voimme tietysti syöttää laskimeen painoluokat ja frekvenssit – ja antaa tämän jälkeen laskimen käsitellä aikaa vievät laskutoimitukset.

Miten sitten laskin löytää luokkakeskuksen arvon?

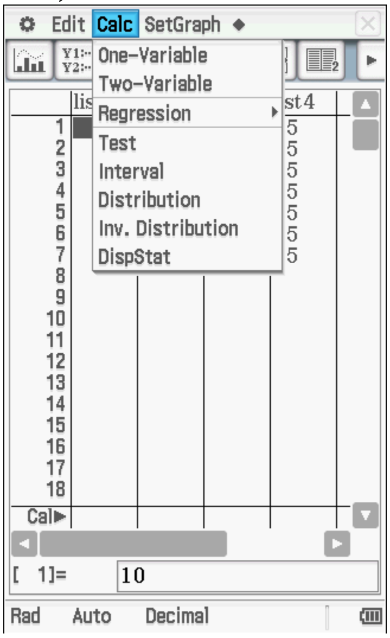
Asetamme alimman rajan luokille luetteloon list1 ja ylimmän rajan luetteloon list2. Frekvenssit syötetään luetteloon list3. Sitten syötetään kaava $\dfrac{\text{list1+list2}}{2}$ luetteloon list4. Tämä tarkoittaa sitä, että list4 sisältää luokkien luokkakeskukset

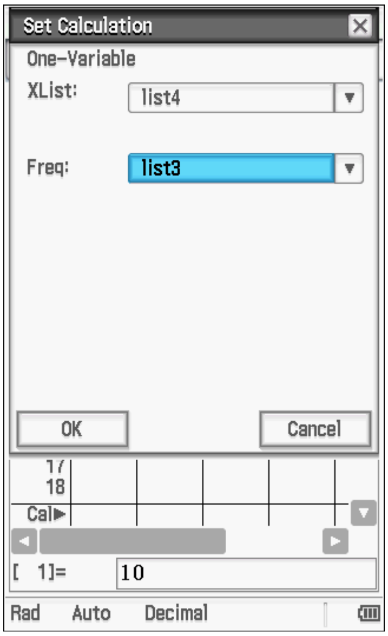


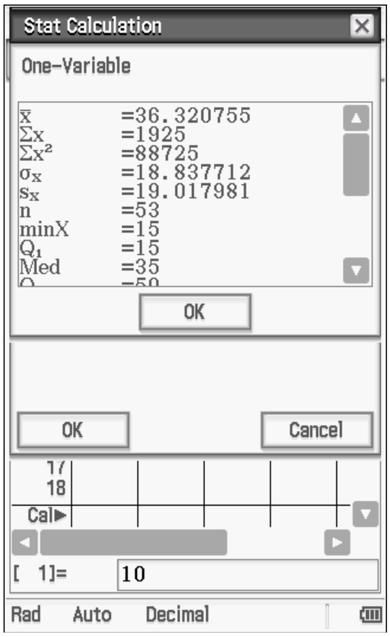




Calc, One-Variable.   Tulos







Laskelmien mukaan keskiarvo on $\overline{x} = 36{,}32$ ja että keskihajonta on $x\sigma_n = 18{,}84$.

6.12 Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta satunnaismuuttujalle X

Odotusarvo: $\mu = E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$

Varianssi: $VAR(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$

Keskihajonta: $\sigma = \sqrt{VAR(X)}$

Binomijakaumassa $E(X) = np$ ja $VAR(X) = np(1-p)$

Laskusäännöt odotusarvolle ja varianssille:

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$VAR(a + bX) = b^2 \cdot VAR(X)$$

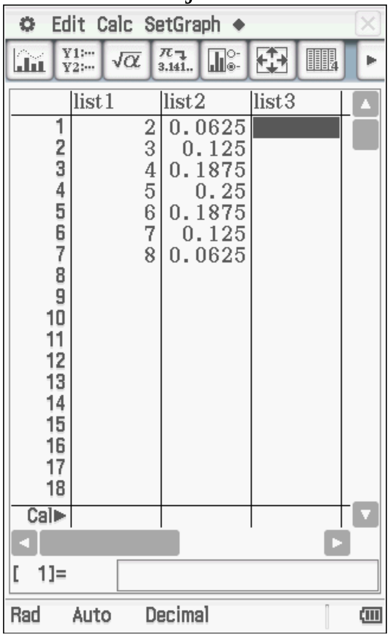
Jos X ja Y ovat toisistaan riippumattomia, seuraava pätee: $VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y)$

 Taulukko osoittaa *X*:n todennäköisyysjakauman.

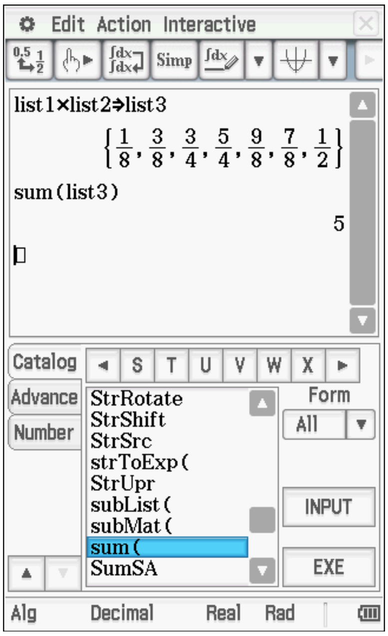
x	2	3	4	5	6	7	8
P(*X*=*x*)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Laske $E(X)$ ja $VAR(X)$.

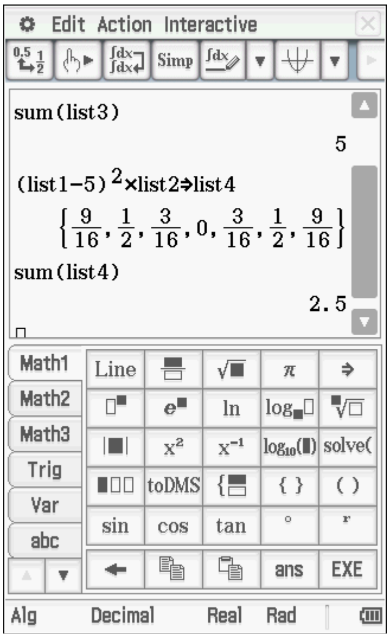
Taulukot list1 ja list2.



Laskutoimitukset luetteloilla.



Luetteloiden list1 ja list2 tulos on luettelossa list3. Näemme, että sum(list3) antaa odotusarvon $E(X)$.

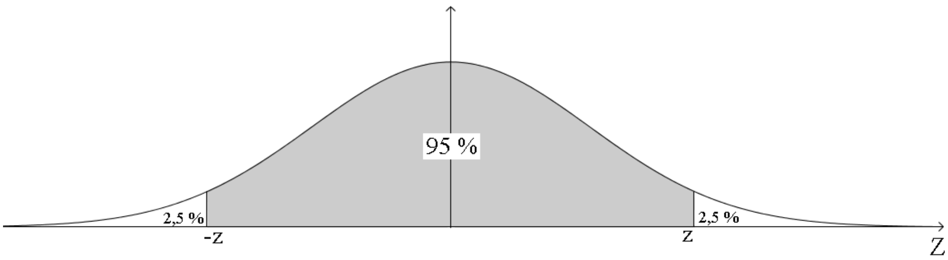


Varianssi $VAR(X) = 2{,}5$.

Säästämme paljon aikaa käyttäessämme luetteloita tällä tavalla.

6.13 Luottamusväli

Luottamus tekijälle k % välillä $-z$ ja z: $P(-z < Z < z) = k$ %

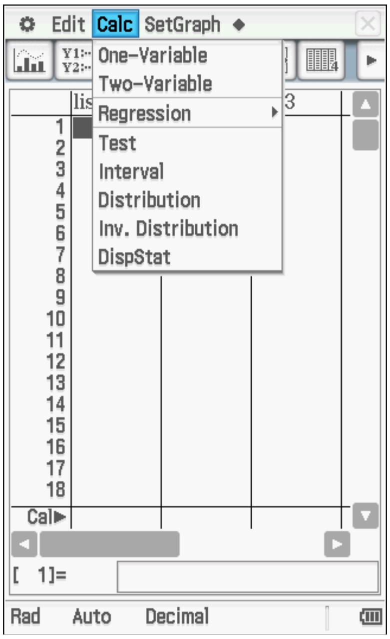


95 %:n luottamusvälillä on $z = 1{,}96$. Tämä selviää tutkimalla $P(Z < z) = 0{,}975$ keskihajontataulukossa.

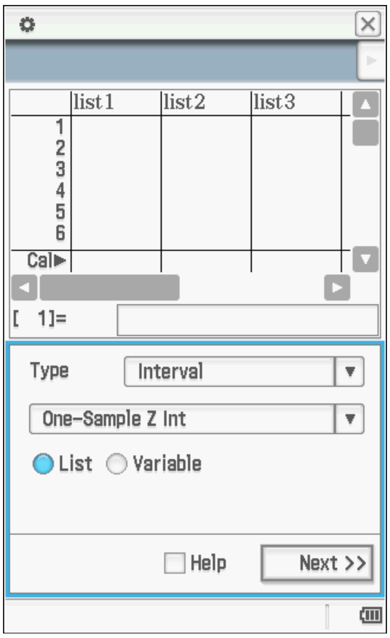
luottamusväli	Luottamus- tai varmuusväli μ $\left[\bar{X} - z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	Todennäköisyys p % sille, että odotusarvo μ osuu tälle alueelle.
Luottamusväli tekijälle p	$\left[\hat{p} - z\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$ Tämä pätee, kun $n\hat{p} \geq 5$ ja $n(1-\hat{p}) \geq 5$	p lasketaan lausekkeesta $\hat{p} = \frac{X}{n}$

Mittaustulos noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 24 keskihajonnalla 6. Määritä 80 % luottamusväli arvolle, kun otoskoko on yksi.

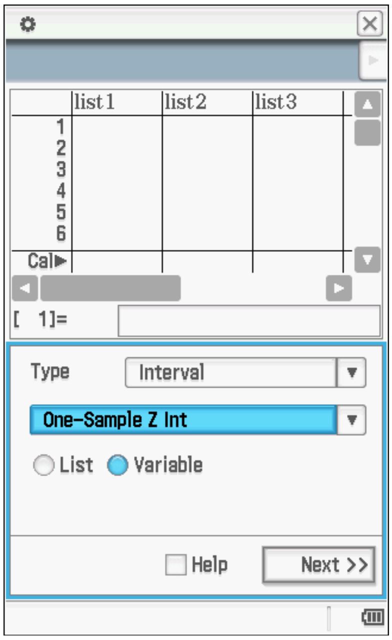
Valitse päävalikosta Statistics. Calc.



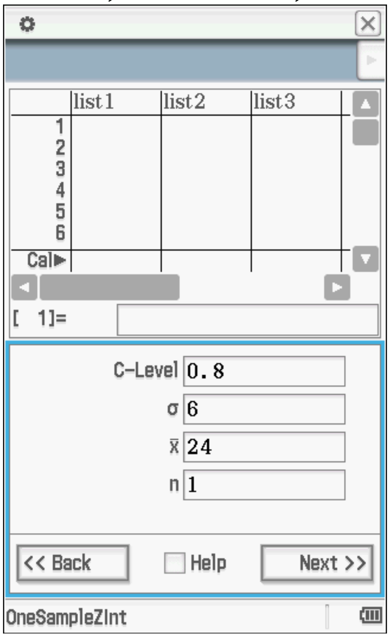
Interval.



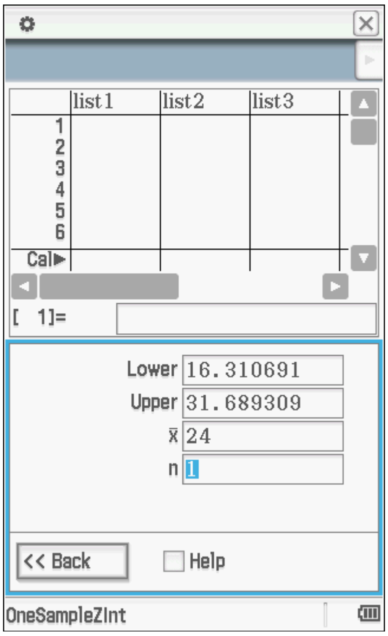
Tee nämä valinnat. Paina Next.



Syötä arvot.
Huomaa, että 80 % = 0,8.



Tulos



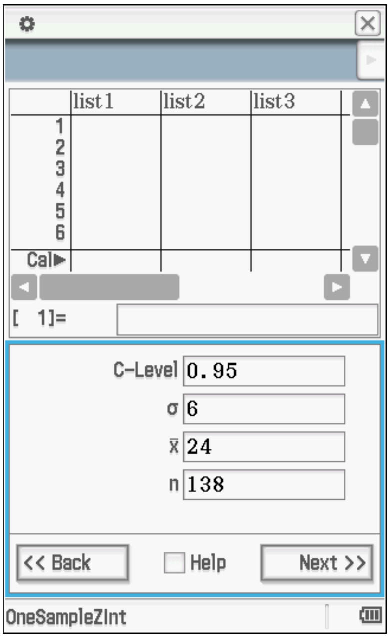
Luottamusväli on 16,3 - 31,7.

Mitä tapahtuu välin ylä- ja alarajalle, jos C-taso nostetaan 95 %:iin? Kokeile itse.

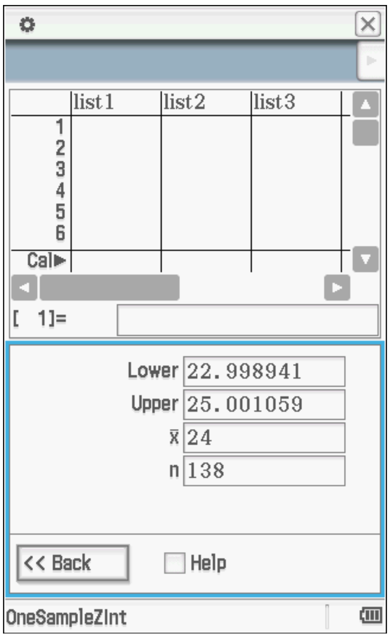
Tutki myös mitä tapahtuu luottamusvälille, jos otoskoko *n* kasvaa.

Mikä tulee otoskoon olla, jotta otannan keskiarvo 24 olisi 95% todennäköisyydellä välillä $[23,25]$?

Voimme kokeilla tätä
erilaisilla *n*:n arvoilla.



Kun $n = 138$ saamme seuraavan välin.



Tämä on hyvin lähellä haluttua väliä $[23,25]$.

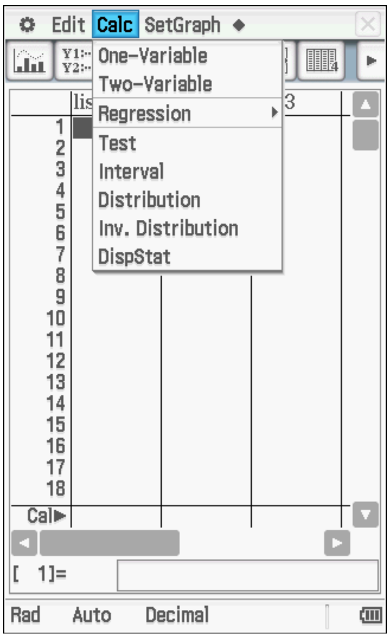
6.14 Hypoteesin testaus

Hypoteesin testaus Tutkii, onko todennäköisyydellä p binomijakaumassa tai odotusarvolla μ normaalijakaumassa on jokin tietty arvo.		
	Binomijakauma	**Normaalijakauma**
Vasemmanpuoleinen testi	Nollahypoteesi H_0: $p = p_0$ Vastahypoteesi H: $p < p_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $P(X \leq x)$	Nollahypoteesi H_0: $\mu = \mu_0$ Vastahypoteesi H: $\mu < \mu_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $P(\bar{X} \leq \bar{x})$
Oikeanpuoleinen testi	Nollahypoteesi H_0: $p = p_0$ Vastahypoteesi H: $p > p_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $P(X \geq x)$	Nollahypoteesi H_0: $\mu = \mu_0$ Vastahypoteesi H: $\mu > \mu_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $P(\bar{X} \geq \bar{x})$
Kaksitahoinen testi	Nollahypoteesi H_0: $p = p_0$ Vastahypoteesi H: $p \neq p_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $2 \cdot P(X \leq x)$ tai $2 \cdot P(X \geq x)$	Nollahypoteesi H_0: $\mu = \mu_0$ Vastahypoteesi H: $\mu \neq \mu_0$ Laske tästä H_0 P-arvo: $2 \cdot P(\bar{X} \leq \bar{x})$ tai $2 \cdot P(\bar{X} \geq \bar{x})$

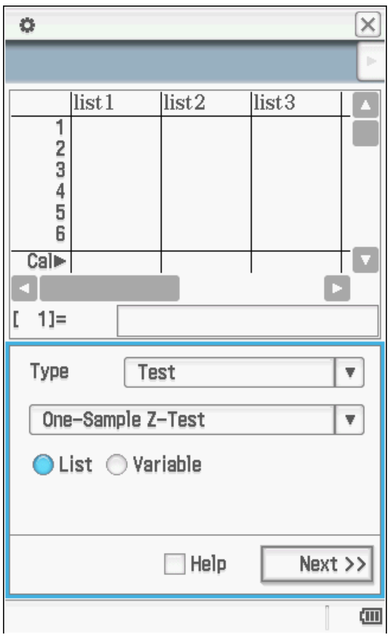

Tietyn aineen määrän tabletissa tulisi olla 260 mg ja tämän keskihajonnan 40 mg. Viidentoista tabletin pistokoe osoittaa niiden sisältävän tätä ainetta keskimäärin 242 mg. Onko tämä liian vähän, jos merkitsevyystasoksi on asetettu 10 %?

Valitse päävalikosta Statistics.

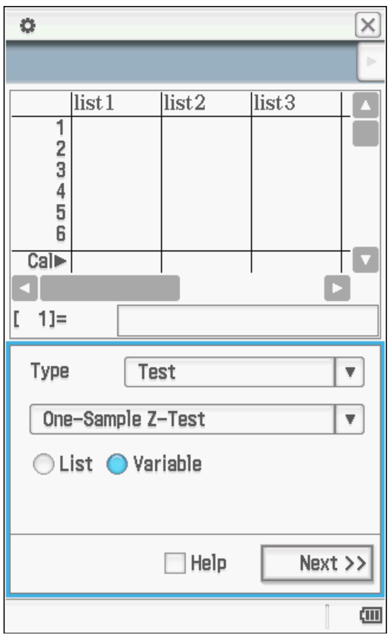
Calc.



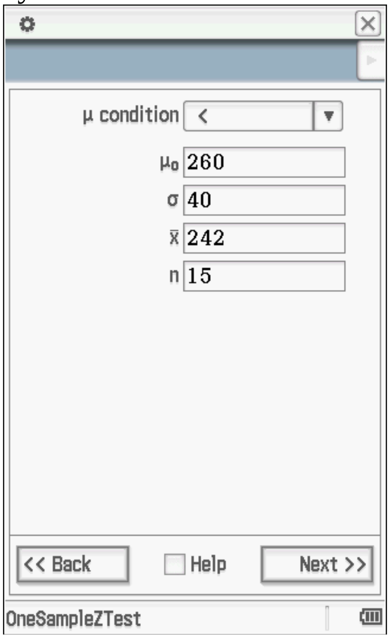
Test.



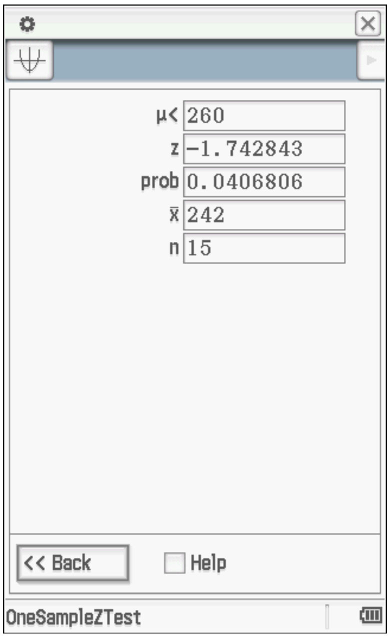
Tee nämä valinnat. Paina Next.



Syötä tiedot. Next.



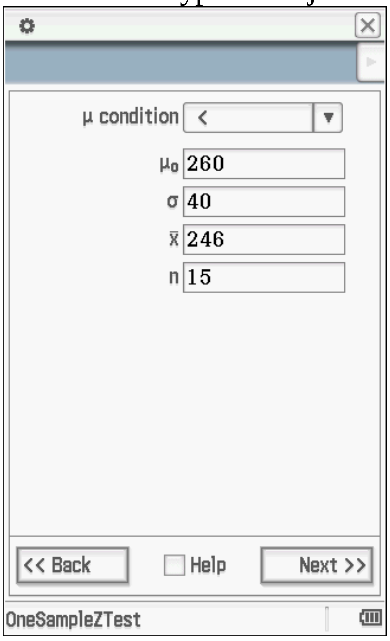
Tulos

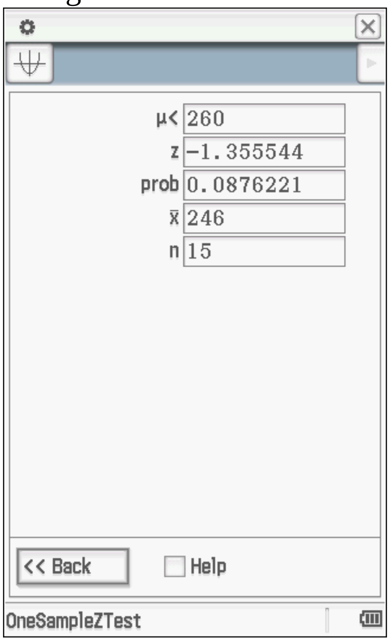


Nollahypoteesi: Keskiarvo on kuten yllä esitettiin $\mu_0 = 260$ mg.
Vaihtoehtoinen hypoteesi: Keskiarvo $\mu < 260$ mg.
Ylimmällä rivillä olemme valinneet $\mu < \mu_0$.

Voimme nähdä z-arvon n. 1,7428. Todennäköisyys löytää 15 näytteen otannassa niinkin matala aineen määrä kuin 242 mg on vain 4 %, mikäli nollahypoteesi pitää paikkansa. Hylkäämme nollahypoteesin, sillä ainemäärän arvo on liian alhainen 10% merkitsevyystasolla.

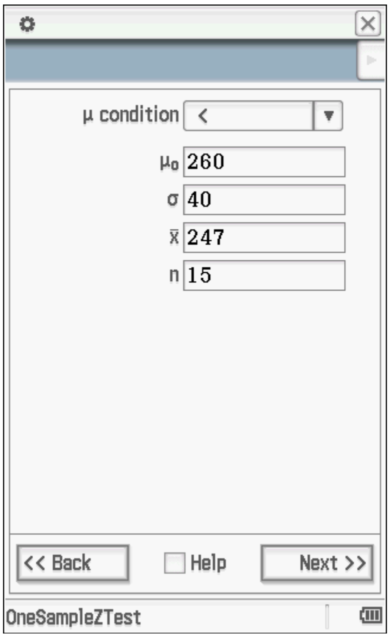
Vaihdamme hypoteesia ja asetamme keskiarvoksi 246 mg.

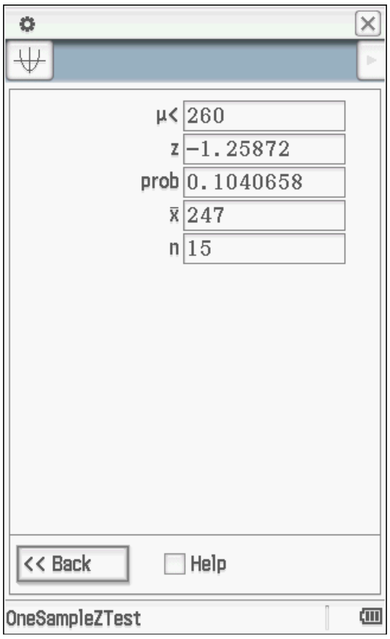




Koska todennäköisyys $p = 0{,}0876$ on edelleen alle 10%, hylkäämme hypoteesin.

Vaihdamme keskiarvoksi 247 mg. Tulos





Koska $p = 0{,}1041$ toteuttaa 10% merkitsevyystason, hyväksymme hypoteesin.

7. Lukujonot ja sarjat

7.1 Rekursiiviset lukujonot ja sarjat

Lukujono koostuu peräkkäisistä numeroista: $a_1,\ a_2,\ a_3,........a_n,.....$
Yleinen termi lukujonossa olkoon a_n. Jos meillä on kaava termille a_n edellisten lukujonon jäsenten a_n ja a_{n-1} avulla, jonoa kutsutaan rekursiiviseksi lukujonoksi.
Kun lukujonon jäsenet lasketaan yhteen, saadaan lukujonon summa. Ensimmäisten n jäsenen summa voidaan merkitä s_n , jossa $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

7.2 Aritmeettiset lukujonot ja sarjat

Aritmeettisessa lukujonossa jäsenten välinen ero pysyy vakiona
$a_n - a_{n-1} = \mathrm{d}$, toisin sanoen. $a_n = a_{n-1} + \mathrm{d}$

Suureen arvoa d kutsutaan lukujonossa erotukseksi. Lukujonon yleinen termi eli n:s jäsen voidaan ilmoittaa ensimmäisen jäsenen ja erotuksen avulla: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot \mathrm{d}$.

Kun aritmeettisen lukujonon jäsenet lasketaan yhteen, saadaan aritmeettinen summa.
Ensimmäisten n jäsenen summa s_n aritmeettisessa sarjassa on:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

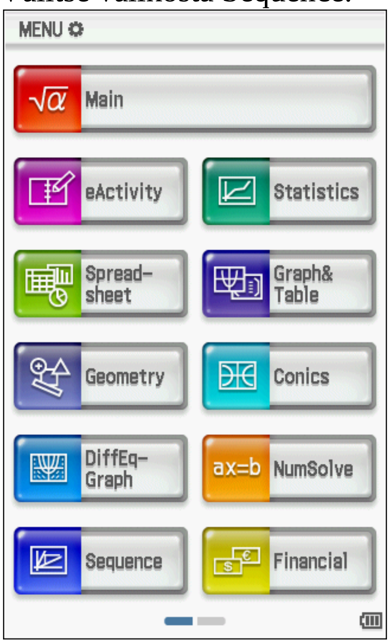

Aritmeettisen sarjan ensimmäinen jäsen on 7 ja erotus 3.

a) Määritä a_5 .

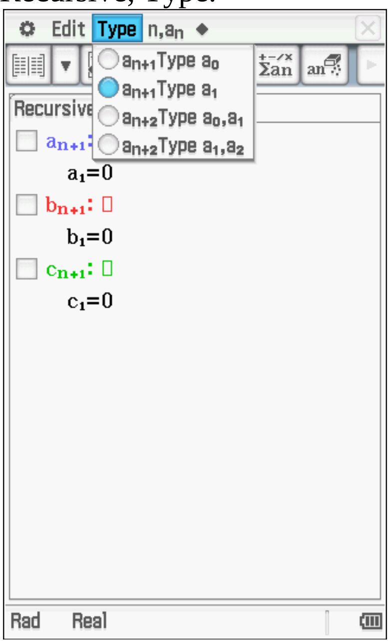
b) Laske s_{10} .

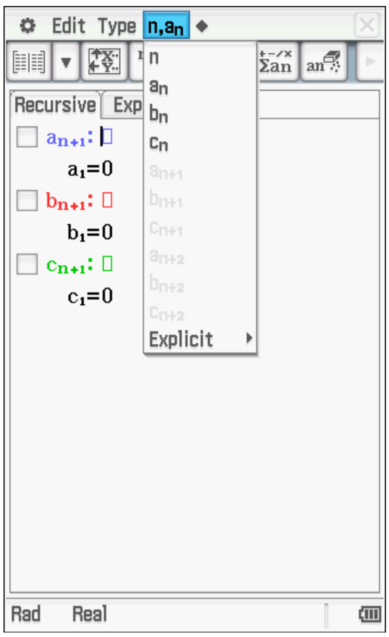
a)

Valitse valikosta Sequence.

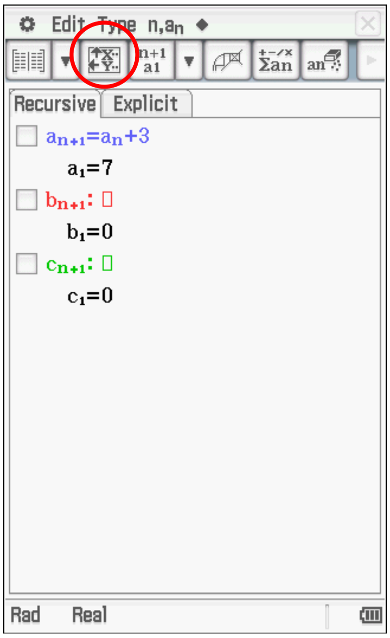


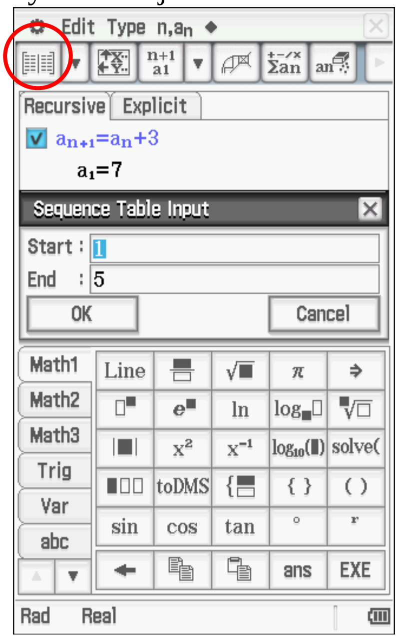
Recursive, Type.

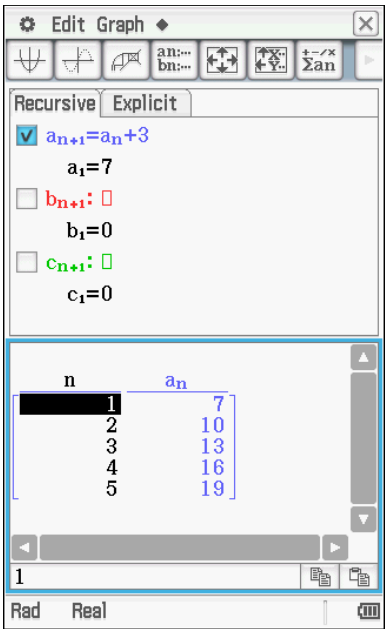




Katso tehtävä. Syötä Start ja End.



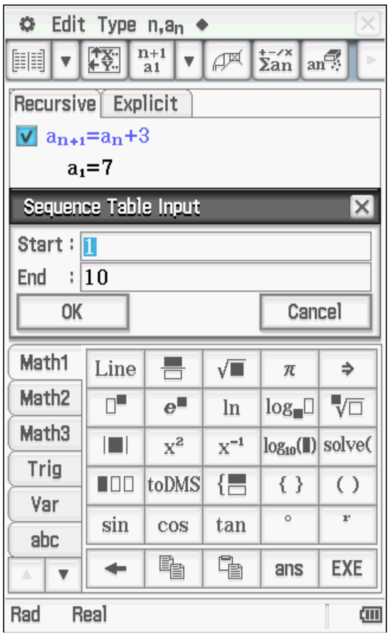


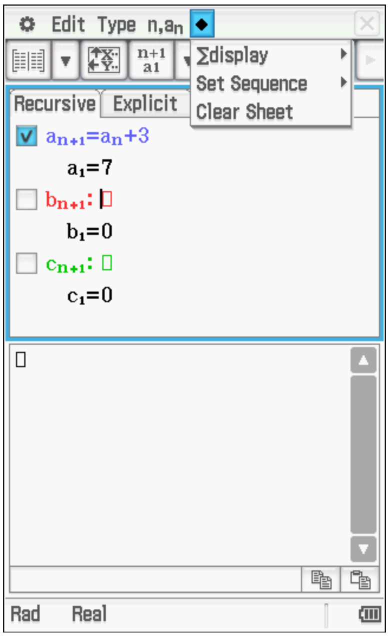


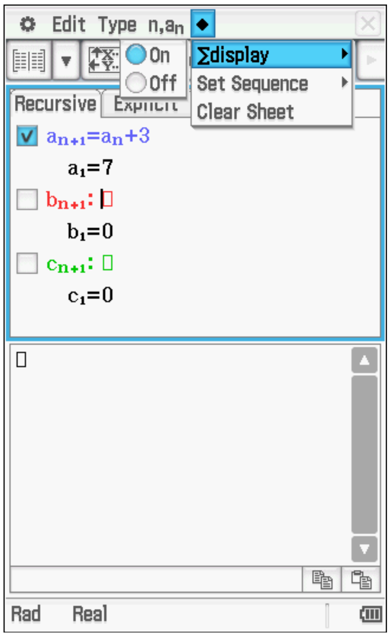
Vastaus: $a_5 = 19$

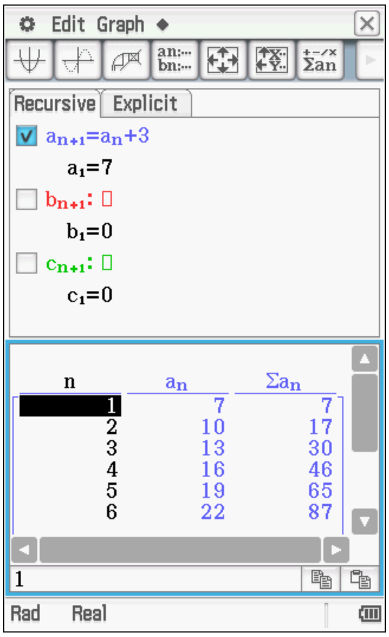
b)

Avaa Table Input ja aseta ylärajaksi 10. Aseta $\sum$Display On.

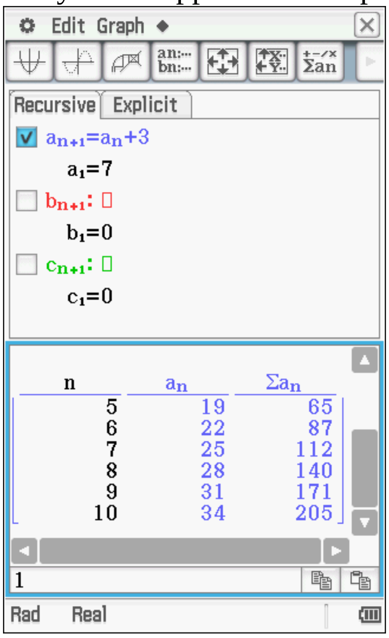






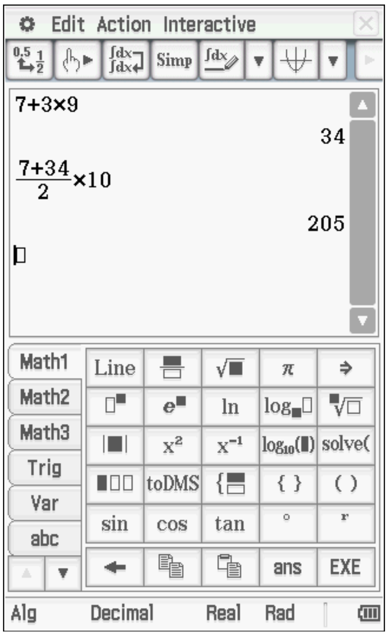


Siirry nuolinäppäimellä alaspäin $n=10$.

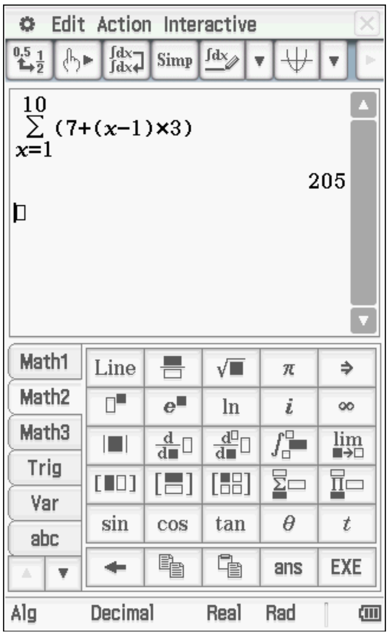


Vastaus: $s_{10}=205$

Tarkistus 1 Main -sovelluksessa.



Tarkistus 2 Main -sovelluksessa.



7.3 Geometriset lukujonot ja sarjat

Geometrisessä lukujonossa kahden peräkkäisen jäsenen suhde pysyy vakiona. Tätä kutsutaan suhdeluvuksi $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla saamme yleisen termin eli n. jäsenen seuraavasti:

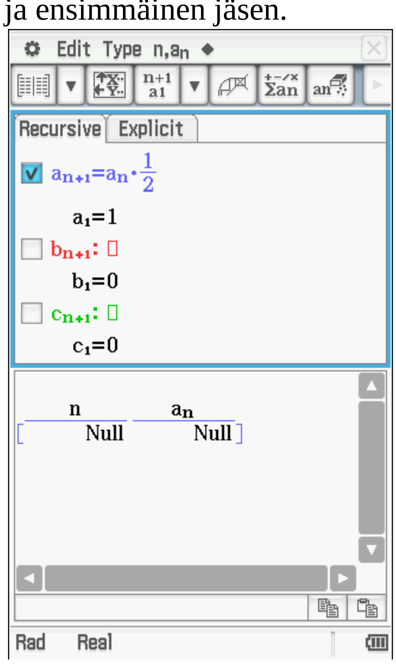
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Kun geometrisen lukujonon jäsenet lasketaan yhteen, saadaan geometrinen summa. Ensimmäisten n jäsenen summa s_n geometrisessä lukujonossa on

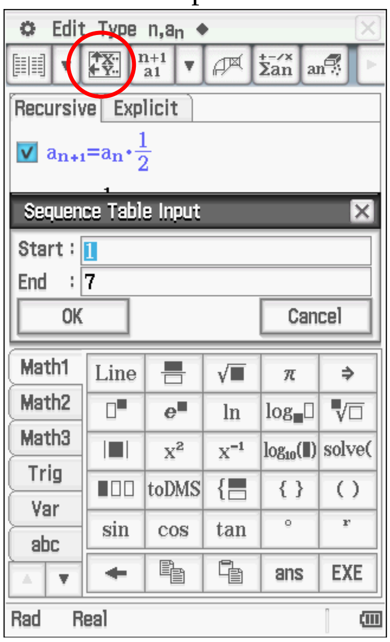
$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

 Laske geometrinen summa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

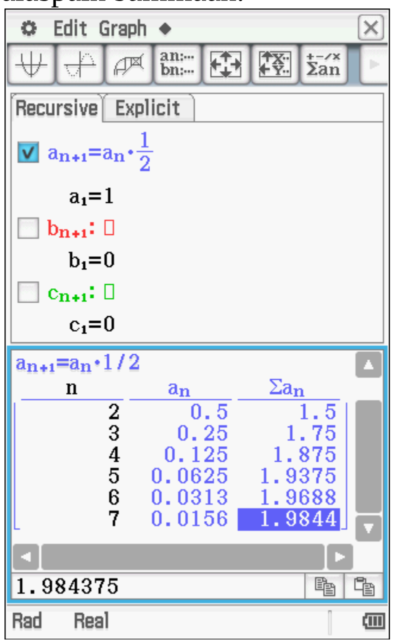
Syötä rekursiokaava ja ensimmäinen jäsen.



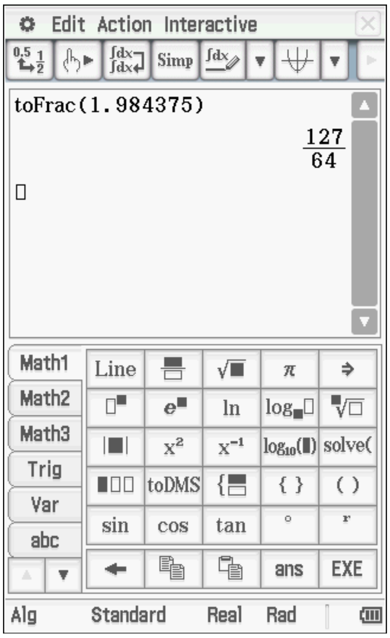
Säädä Table Input.



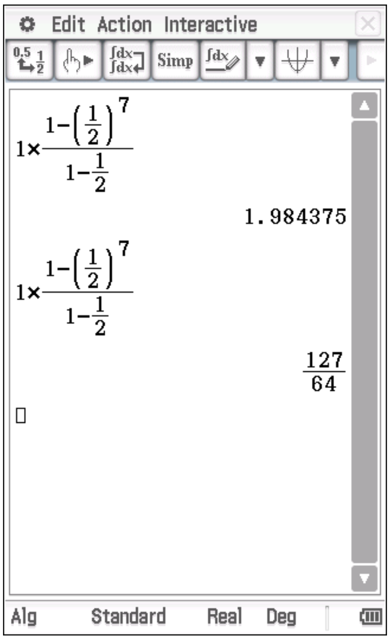
Siirry nuolinäppäimellä alaspäin summaan.



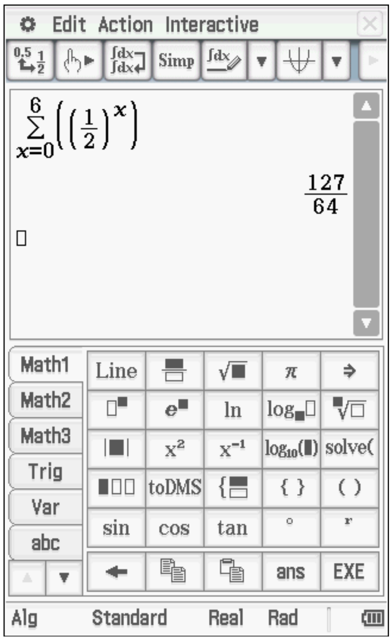
Muunna vastaus murtoluvuksi.



Tarkistus 1 Main -sovelluksessa



Tarkistus 2 Main -sovelluksessa



Vastaus: Summa on $\dfrac{127}{64}$.

7.4 Suppenevat geometriset sarjat

Geometrinen sarja $(a_1 \neq 0)$ $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ \ldots$
suppenee, jos ja vain jos suhdeluku on itseisarvoltaan alle yksi eli -1 < q < 1.

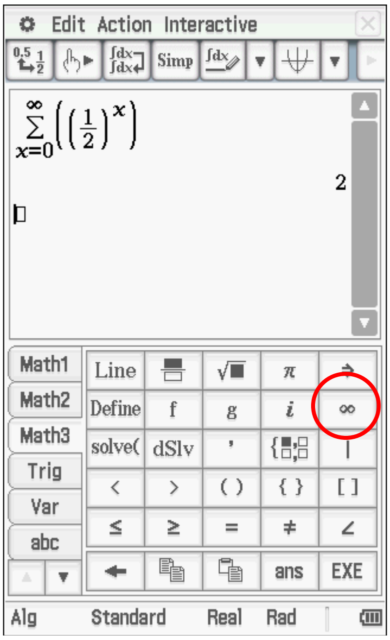
Suppenevan geometrisen sarjan summa on $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Jos sarja ei ole suppeneva, se on hajaantuva. Hajaantuvan sarjan summaa ei ole olemassa.

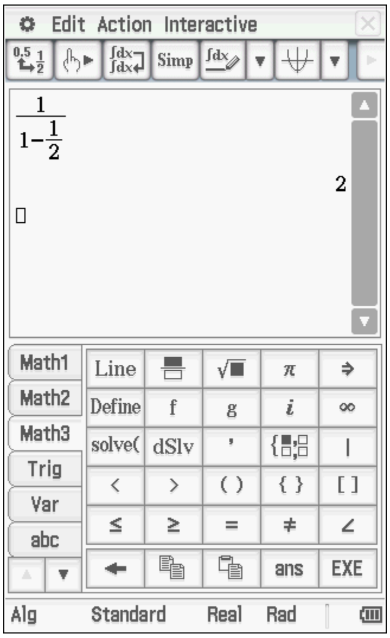
Laske geometrisen sarjan $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\ldots$ summa.

Laskelmat osoittavat, että ääretön summa suppenee kohti lukua 2.

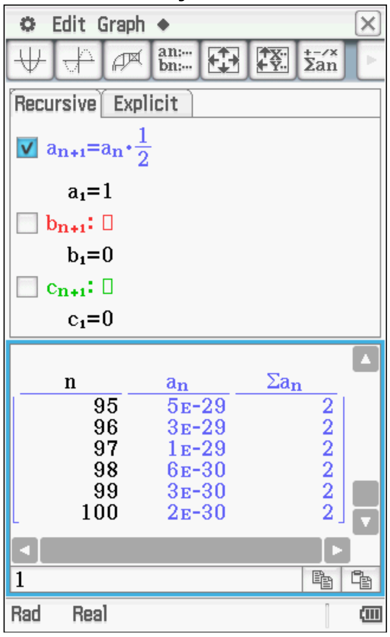
ClassPad käsittelee ääretöntä



Tarkistus.



Rekursio 100 jäsenellä.



Sarjan summa suppenee kohti lukua 2.

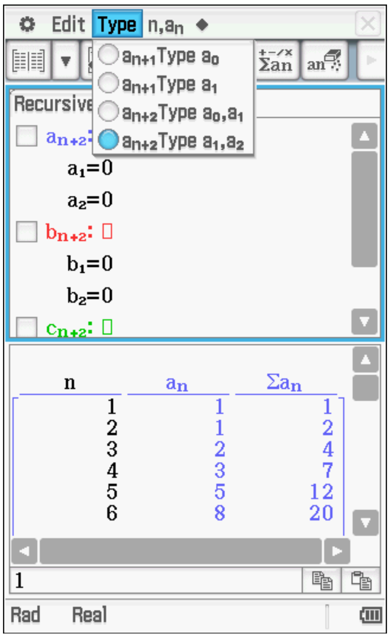
7.5 Muunlaiset lukujonot ja sarjat

Lukujonossa 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … jokainen jonon jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. Tätä lukujonoa kutsutaan Fibonaccin lukujonoksi.

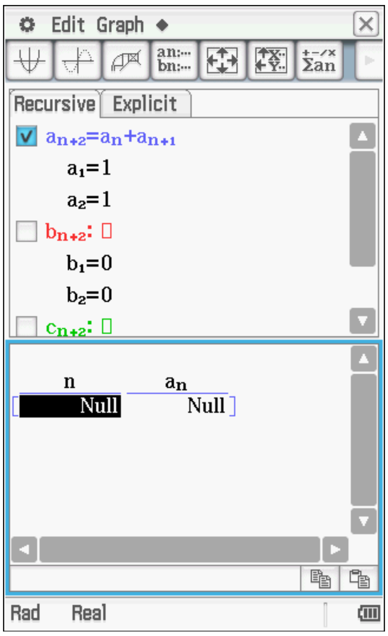
Ensimmäiset arvot ovat $a_1 = 1$ ja $a_2 = 1$.

Laske laskimella a_{20} Fibonaccin lukujonossa.

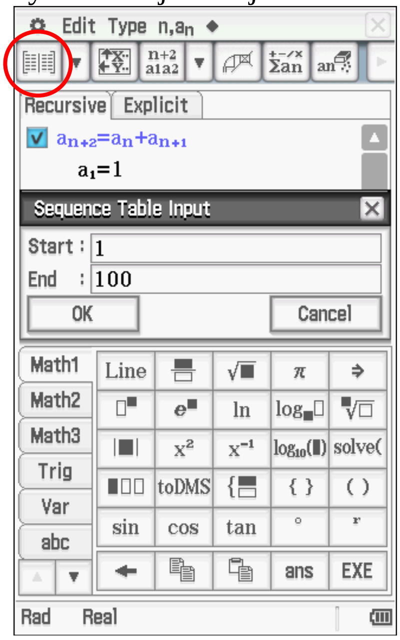
Valitse Type.



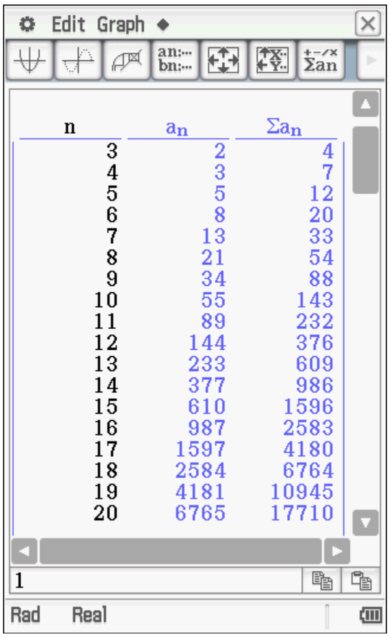
Syötä $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_1 = 1$ ja $a_2 = 1$.



Syötä Start ja End ja taulukoi.



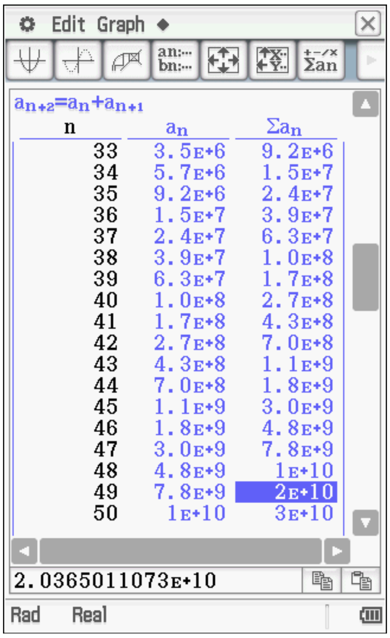
Taulukko.



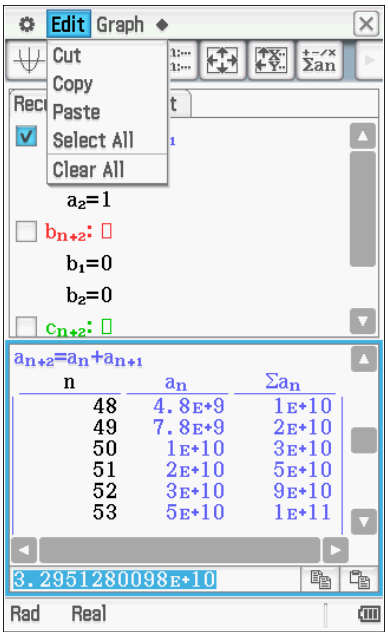
Fibonaccin lukujonossa on $a_{20} = 6765$.

 Laske laskimella jäsenten s_{50} ja s_{49} välinen suhde Fibonaccin sarjassa.

Aseta Sett $\sum$Display ”On”.

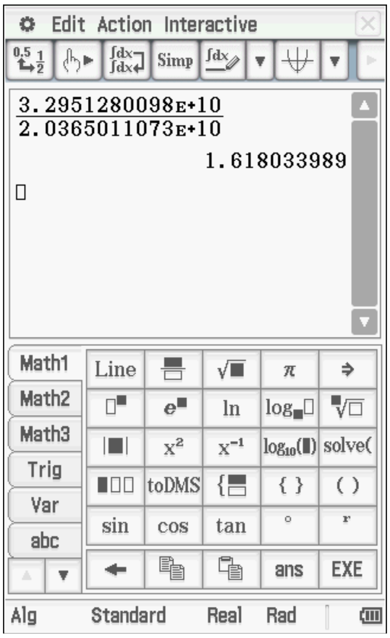


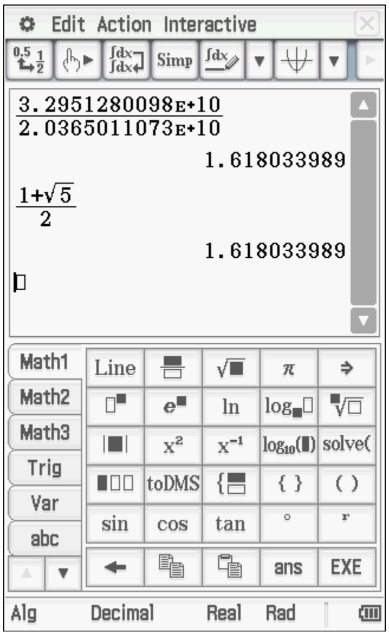
Kopioi s_{50} ja s_{49} Main -sovellukseen.



Siirrymme Main-tilaan ja laskemme $\frac{s_{50}}{s_{49}}$.

Kultainen leikkaus?





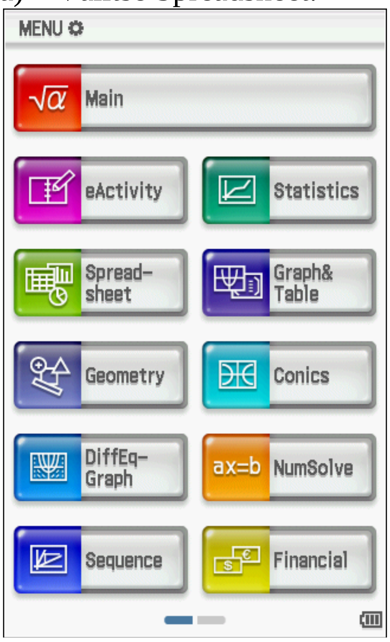
Voimme nähdä, että suhde lähestyy kultaista leikkausta.

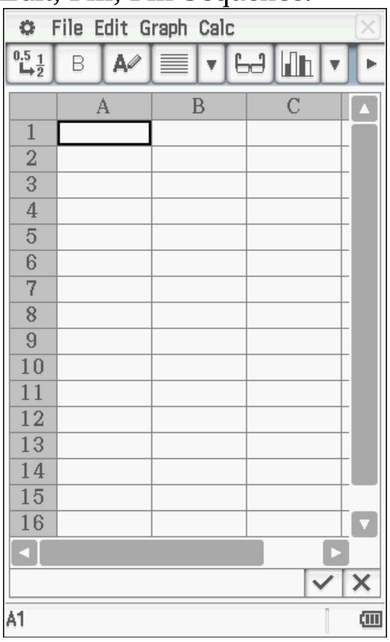
7.6 Fibonaccin lukujono taulukkolaskennassa

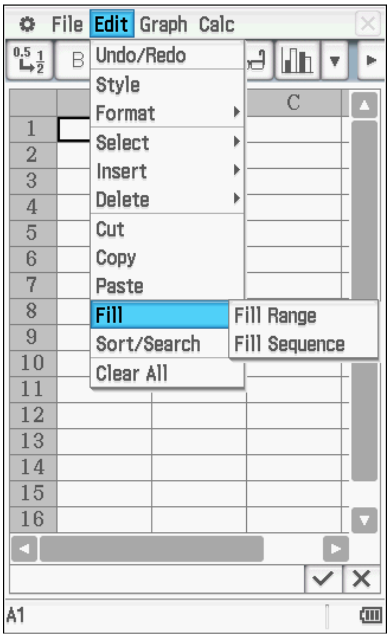
Laskin on varustettu kehittyneellä taulukkolaskentaohjelmalla. Tässä kappaleessa tarkastellaan sen tärkeimpiä toimintoja.

a) Syötä 50 ensimmäistä Fibonaccin lukua laskimen taulukkolaskentaohjelmaan.
b) Laske s_{50} Fibonaccin lukujonolle. Käytä laskimen taulukkolaskentaohjelmaa.
c) Laske kahden peräkkäisen Fibonacciluvun välinen suhde.

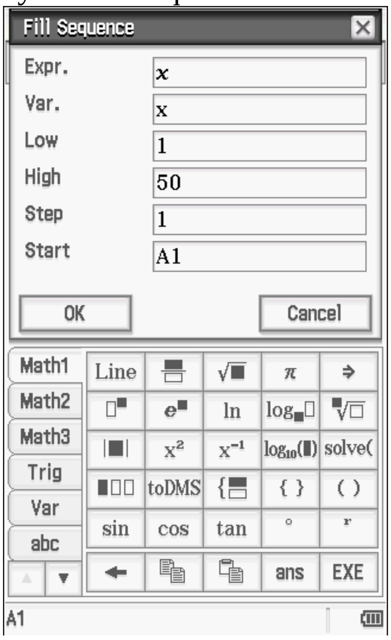
a) Valitse Spreadsheet. Edit, Fill, Fill Sequence.

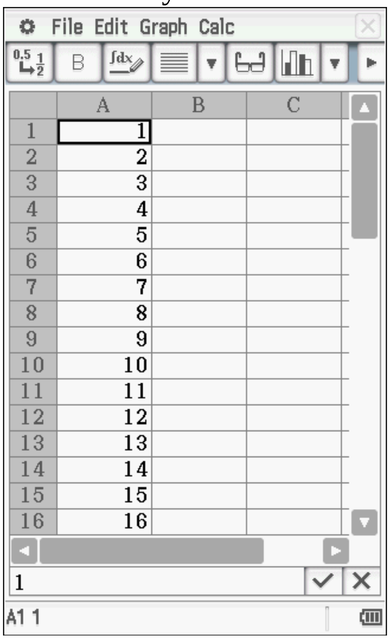


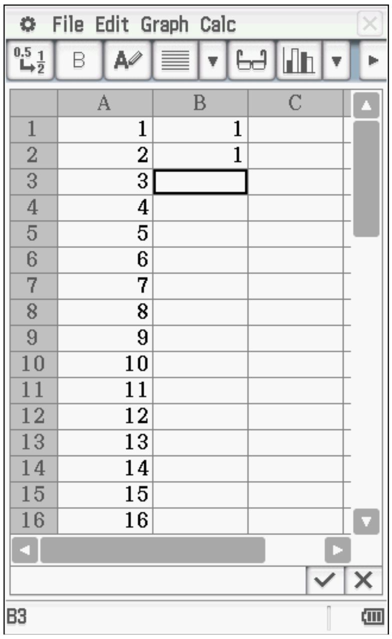




Syötä Fill Sequence. 1 - 50 ovat nyt sarakkeessa A

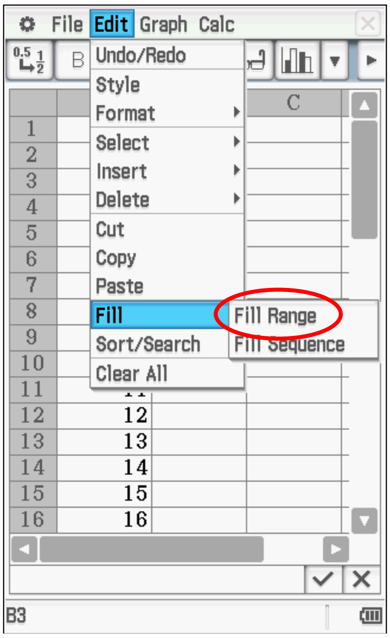


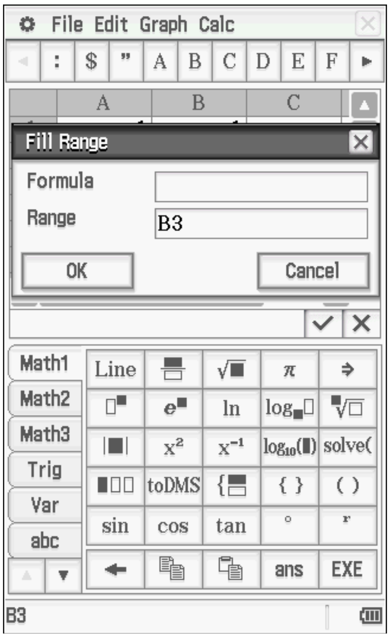


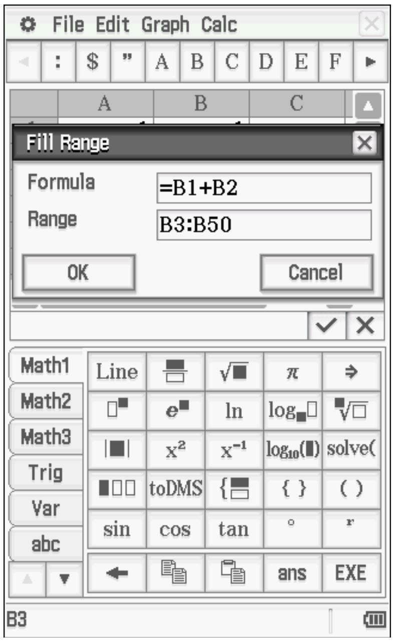


Kirjoitamme nyt ensimmäiset Fibonacciluvut sarakkeeseen B .

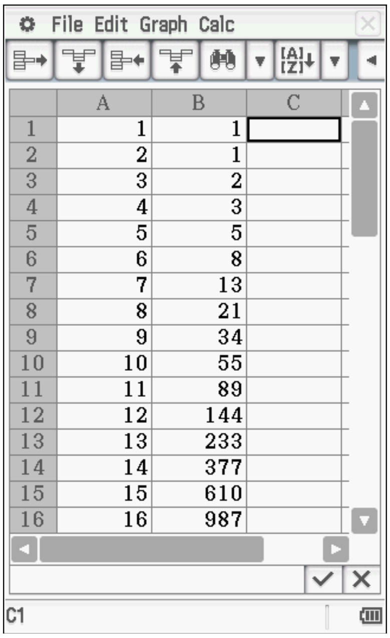
Edit, Fill, Fill Range. Syötä kaava ja solualue



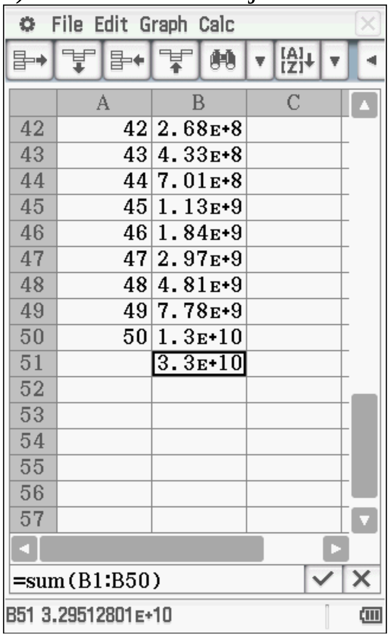




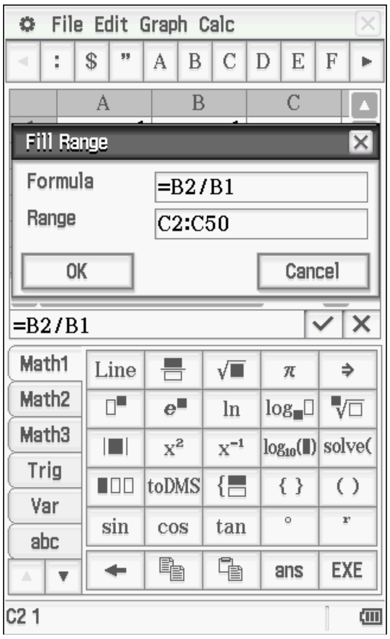
Tulos

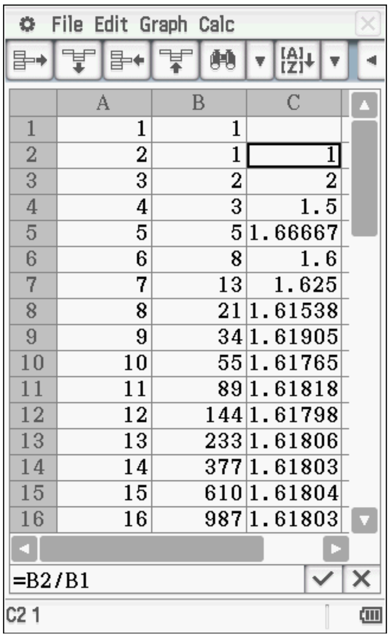


b) 50 ensimmäisen jäsenen summa on solussa B51.



c) Sarakkeeseen C syötetään Fibonacciluvun ja edellisen luvun suhde.





Voimme nähdä, että kahden peräkkäisen Fibonacciluvun suhde lähestyy kultaista leikkausta.

8. Luvut

8.1 Suuret luvut, summa ja kertoma

Aloittakaamme shakkipelin keksimiseen liittyvällä tunnetulla tarinalla. Intian hallitsija innostui kovasti shakkipelistä, jonka yksi palatsin viisaista miehistä keksinyt. Hallitsija sanoi, että tämä viisas mies sai itse päättää palkkionsa tästä keksinnöstä. Shakkipelin keksijä oli taitava matemaatikko. Hän ehdotti hallitsijalle, että hän haluaisi saada riisinjyvän shakkipelin ensimmäiseen ruutuun, kaksinkertaisen määrän seuraavaan ruutuun ja niin edelleen, niin että riisinjyvien määrä kaksinkertaistuisi shakkilaudan jokaisessa jäljelle jääneessä 62 ruudussa.

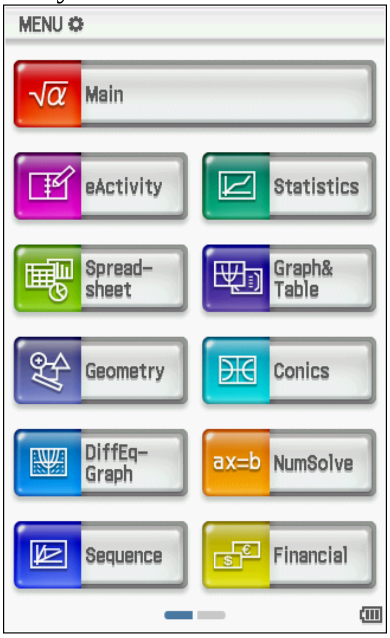
Hallitsijan mielestä tämä oli vaatimaton palkkio. Tämä pyysi palvelijoitaan hankkia riisinjyviä ja täyttämään viisaan miehen toive. Hallitsija hämmästyi kovasti siitä kuinka nopeasti shakkilauta täyttyi riisinjyvistä ja kuinka nopeasti koko palatsi täyttyi. Riisinjyvien määrä shakkilaudan viimeisessä ruudussa voidaan kirjoittaa ”2 korotettuna 63. potenssiin” tai muodossa 2^{63}

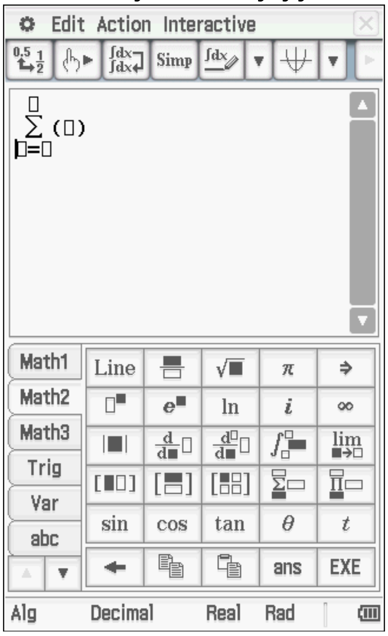
 Paljonko riisinjyviä oli yhteensä?

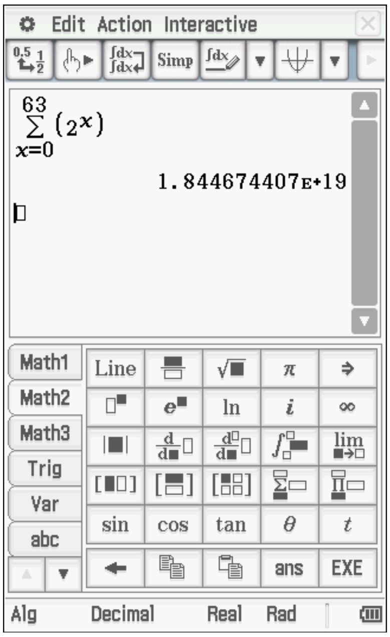
Tässä riisinjyvien määrät jokaisessa ruudussa on laskettava yhteen. Tällöin tuloksena on

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}=\sum_{n=0}^{63}2^n$$

Siirry Main -sovellukseen. Summan symboli löytyy Math2-valikosta. Laske summa.

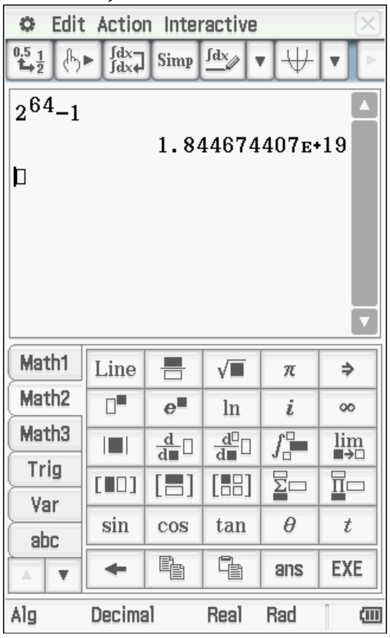


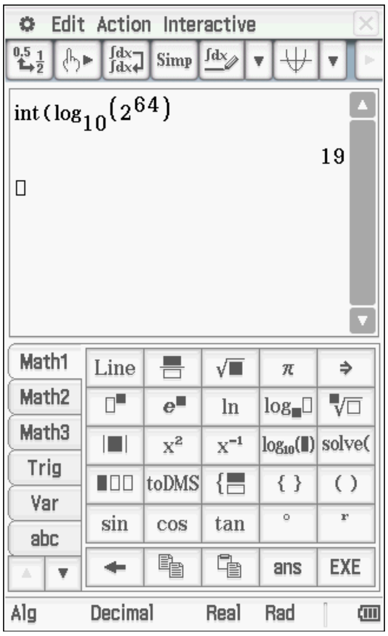




Vastauksessa on 20 numeroa.

Huomaa, että sama vastaus saadaan myös tällä tavalla:





Miksi?

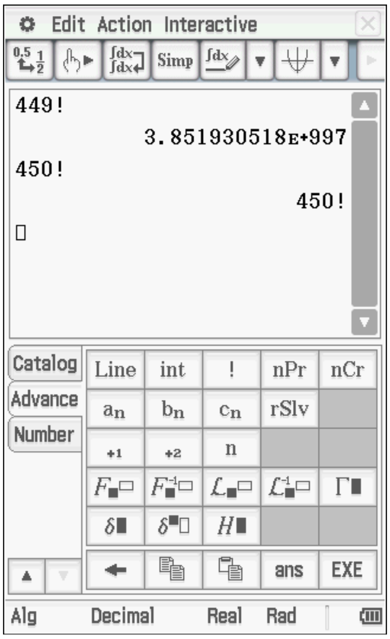
Jos halutaan saada selville kuinka monta numeroa lausekkeen $2^{64}-1$ vastaus sisältää, voimme suorittaa yllä oikealla näkyvät laskelmat.

Int antaa kokonaislukuarvot. Kaikki funktiot ja komennot löytyvät virtuaalinäppäimistön Catalog -välilehdeltä. Sillä ei ole merkitystä kirjoitetaanko Int vai int qwerty-näppäimistöltä vai valitaanko komento luettelosta (Catalog).

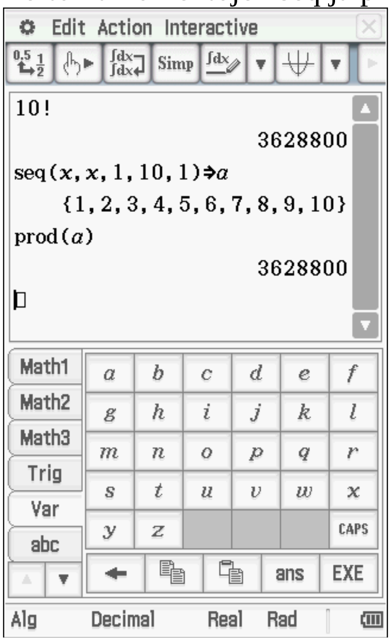
Huomaamme, että vastaus on 1 vähemmän kuin numerojen lukumäärä.

Voimme myös esittää suuria lukuja kertoman avulla. Muistamme, että $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Advance -välilehti.



Kertoma komentojen seq ja prod avulla.

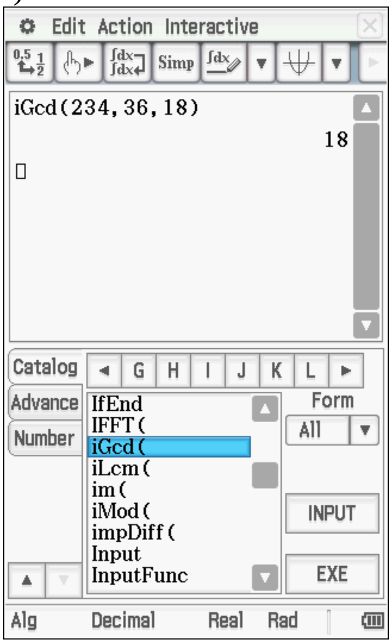


8.2 Funktiot iGcd, gcd, iLcm, lcm, iMod ja mod

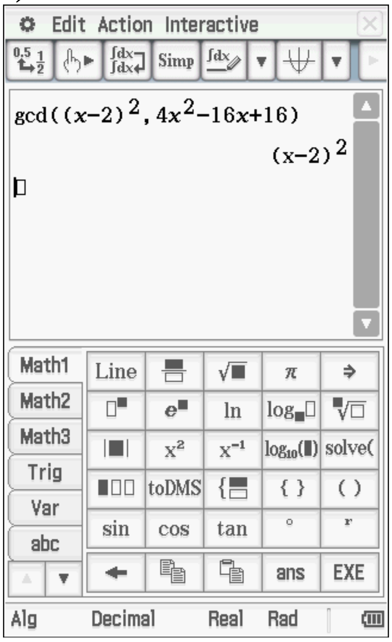
Laskin on varustettu erilaisilla funktioilla kuten iGcd, gcd, iLcm, lcm, iMod ja mod. Selitykset näille lyhenteille löytyvät *käyttäjän oppaasta*. Mainittakoon tässä esimerkiksi, että gcd on lyhenne funktiolle ”greatest common divisor” (suurin yhteinen tekijä). Kirjain “i” näissä lyhenteissä kokonaislukuihin (integer).

a) Etsi suurin yhteinen tekijä (syt) luvuille 234, 36 ja 18.
b) Etsi suurin yhteinen tekijä lausekkeille $(x-2)^2$ ja $4x^2-16x+16$

a) ratkaisu.

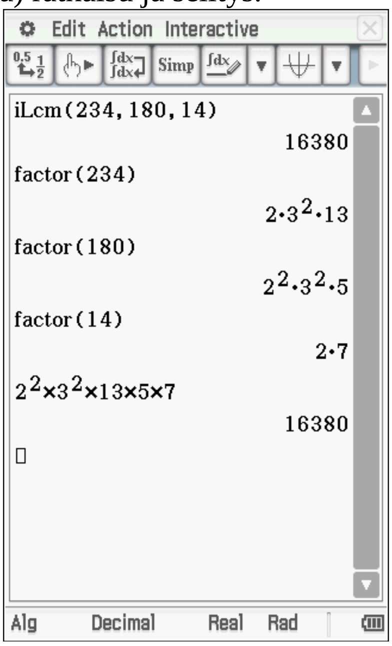


b) ratkaisu.

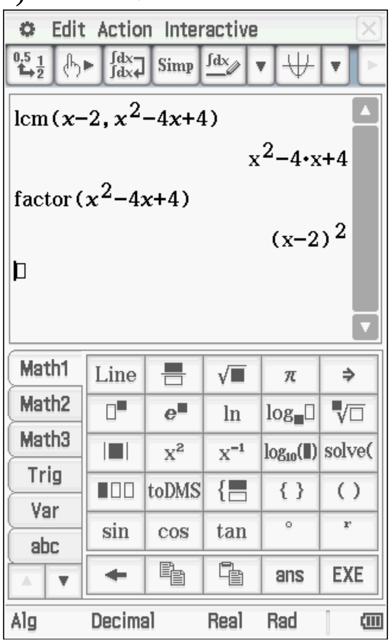


a) Etsi pienin yhteinen jaettava (pyj) luvuille 234,180 ja 14.
b) Etsi pienin yhteinen jaettava lausekkeille $(x-2)$ ja x^2-4x+4

a) ratkaisu ja selitys.

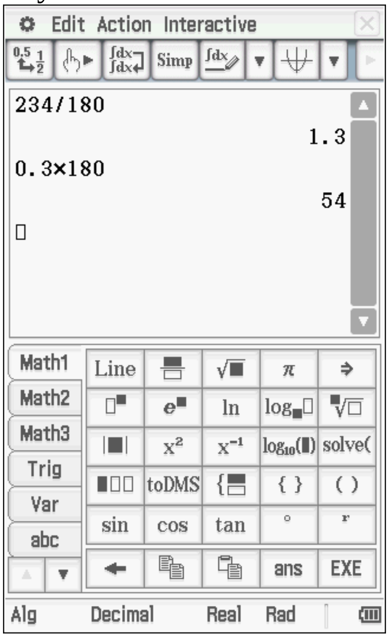


b) ratkaisu.

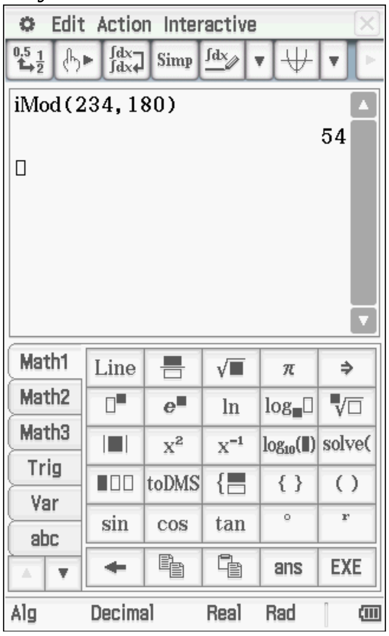


Määritä jakojäännös, kun 234 jaetaan 180:lla.

Käyttämättä iMod-komentoa.



Käyttämällä iMod-komentoa.

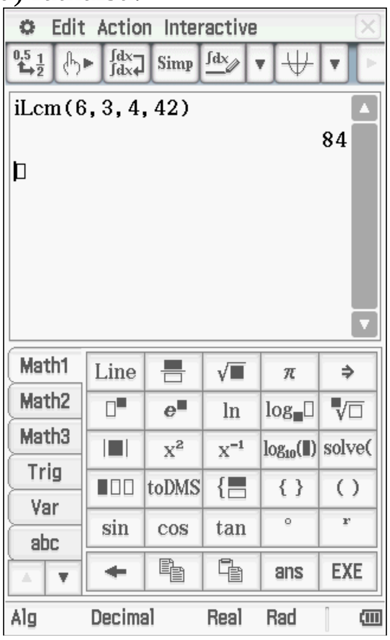


Jakojäännös on siis 54.

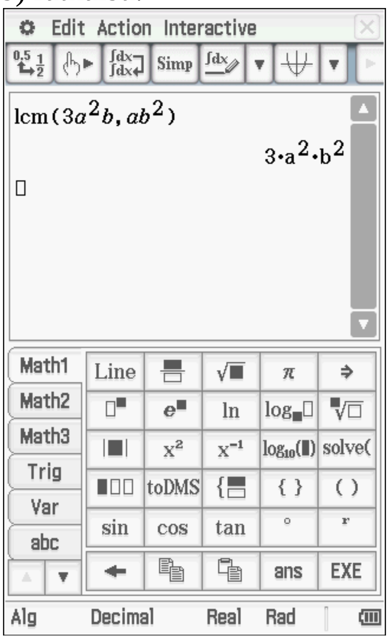
a) Etsi yhteiset nimittäjät murtoluvuille $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ja $\frac{37}{42}$.

b) Etsi yhteiset nimittäjät murtoluvuille $\frac{2}{3a^2b}$ ja $\frac{2}{ab^2}$.

a) ratkaisu.

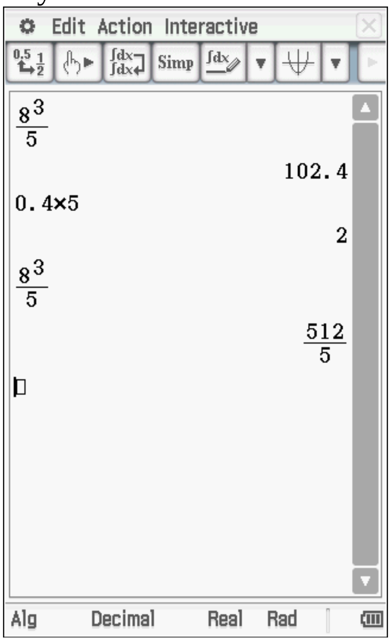


b) ratkaisu.

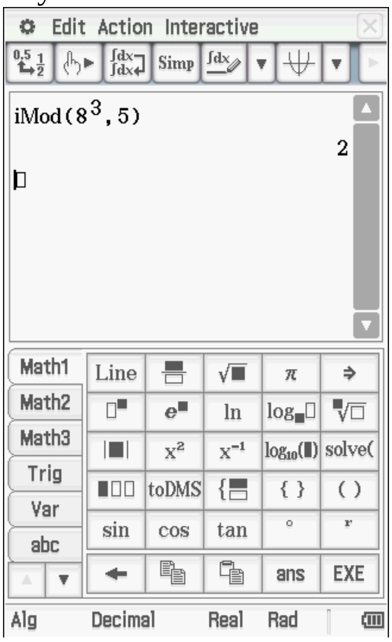


Laske jakojäännös $8^3 : 5 =$

Käyttämättä iMod-komentoa.



Käyttämällä iMod-komentoa.



Murtoluvusta $\frac{512}{5}$ pitäisi olla mahdollista nähdä ilman laskelmien suorittamista, että jakojäännös on 2.

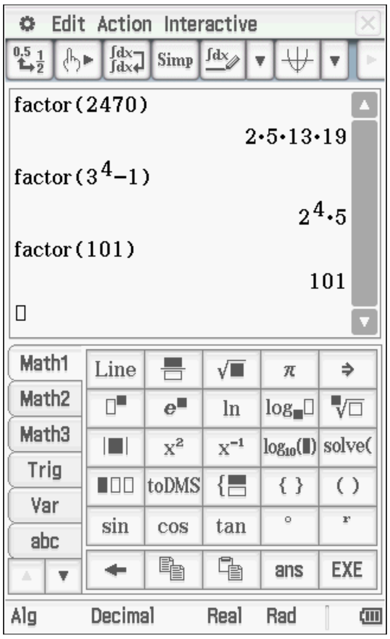
8.3 Alkuluvut

Alkuluku on luonnollinen luku, joka on suurempi kuin 1 ja joka on jaollinen (jakojäännös = 0) vain luvulla 1 ja itsellään. Näin ollen 2, 3, 5, 7, 11, 13, … ovat alkulukuja. Ottaaksemme selvää onko joku luku alkuluku, voimme jakaa luvun kaikilla sitä pienemmillä luvuilla ja tutkia sitten jakojäännöstä. Voimme osoittaa, että jakojäännöksen tarkistus riittää, kun jako on suoritettu alkuluvulla, joka on pienempi kuin neliöjuuri luvusta itsestään. Ratkaistaksemme esimerkiksi onko luku 200 alkuluku, riittää, että tutkimme jakojäännökset, jotka saamme luvuilla 2, 3, 5, 7, 11 ja 13.

Olemme aikaisemmin huomanneet, että voimme jakaa lukuja tekijöihin CP400-laskimella.

Jaa tekijöihin luvut 2470, $3^4 - 1$ ja 101.

Ratkaisu.

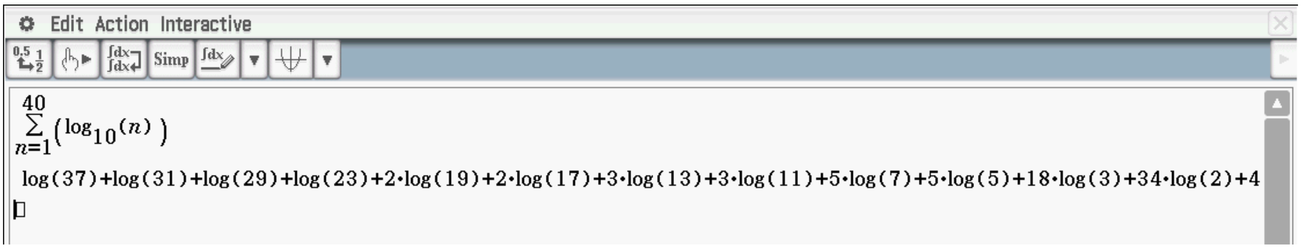


Viimeisessä esimerkissä CP400-laskin palauttaa luvun, jota yritämme jakaa tekijöihin. Tämä tarkoittaa sitä, että luku on alkuluku.

CP400-laskimessa on myös oikotie alkulukujen löytämiseen. Tästä lisää seuraavassa esimerkissä.

Komento rFactor hakee tekijöihin myös ei-rationaaliset juuret, kuten π.

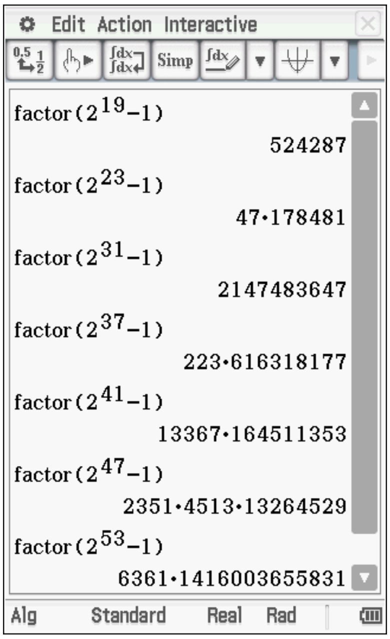
Laske $\sum_{n=1}^{40} \log_{10}(n)$ CP400-laskimella.

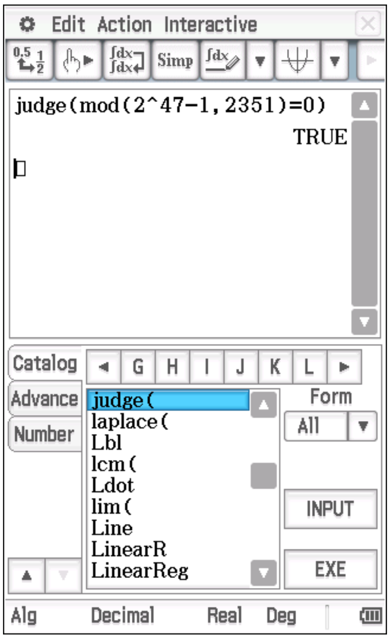


Huomaamme, että logaritmien summa muunnetaan alkulukujen logaritmien kerrannaisiksi.

Yhä suurempien alkulukujen etsiminen on kauan ollut eräänlainen "urheilulaji" matematiikassa. Aina silloin tällöin saamme kuulla uusista alkulukuennätyksistä. Tällöin joku on onnistunut löytämään uuden alkuluvun, joka on suurempi kuin yksikään aiemmin tunnettu alkuluku. Suurten alkulukujen etsintä jatkuu edelleen.

Mahdollisia uusia alkulukuja ovat luvut, jotka seuraavat kaavaa $2^n - 1$. Tällaisia lukuja kutsutaan Mersenne-luvuiksi Marin Mersennen (1588 – 1648) mukaan. Tämän tapaisia lukuja, jotka osoittautuvat alkuluvuiksi, kutsutaan Mersenne-alkuluvuiksi. Mersenne tiesi, että jos n on yhdistetty luku, täytyy myös $2^n - 1$ olla yhdistetty luku. Tarkastellaanpa tätä lähemmin





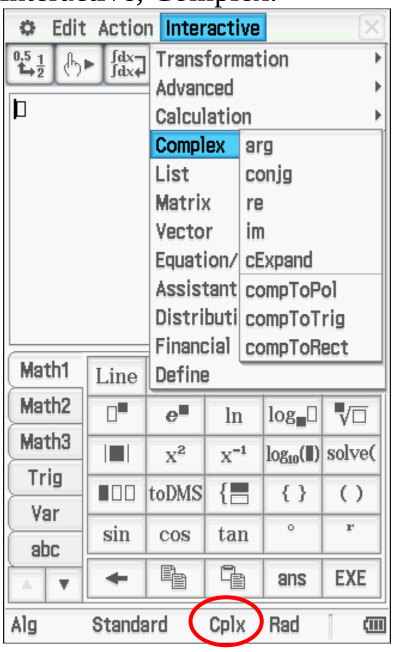
Ensimmäisessä ja kolmannessa laskussa CP400-laskin antaa luvun eikä tuloa. Tämän täytyy tarkoittaa sitä, että luku on alkuluku. Vasta vuonna 1883 keksittiin, että $2^{61}–1$ on alkuluku.

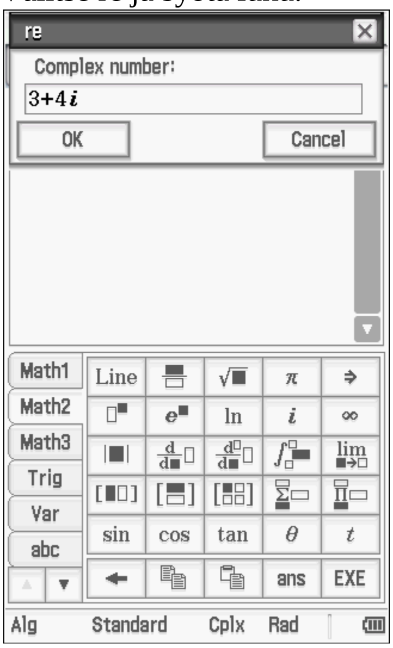
CP400-laskimessa on muitakin toimintoja, joita voidaan käyttää sen selvittämiseen mihin luokkaan jokin luku kuuluu. Voimme saada tietynlaista tietoa luvuista testaamalla lukujen jaollisuutta, kuten on esitetty esimerkissä ylhäällä oikealla.

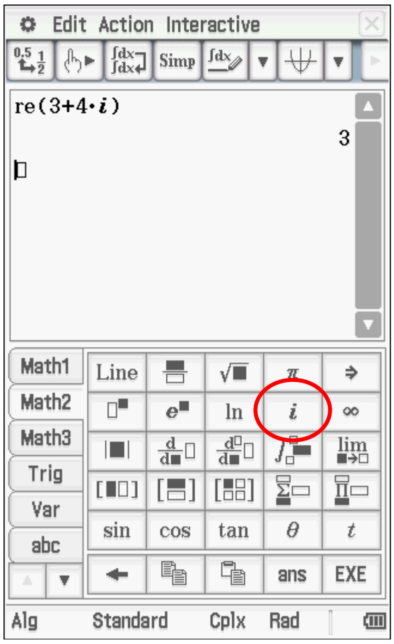
8.4 Kompleksiluvut

 Määritä reaaliosa ja imaginaariosa kompleksiluvusta $3+4i$.

Interactive, Complex. Valitse re ja syötä luku.

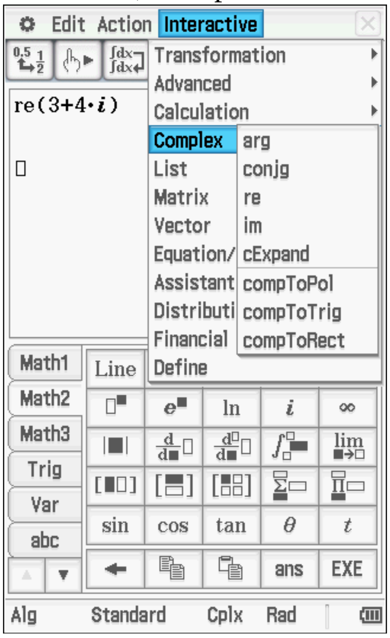




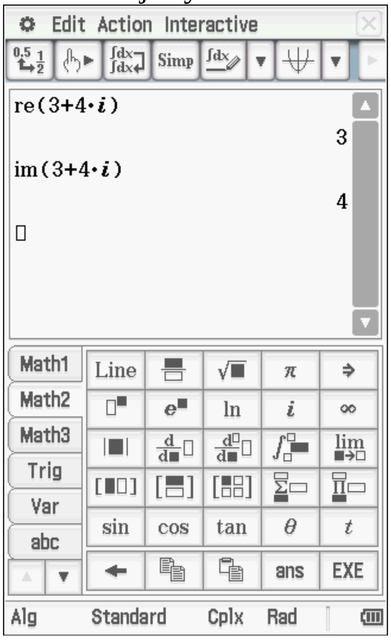


Reaaliosa on 3.

Interactive, Complex.



Valitse im ja syötä luku.

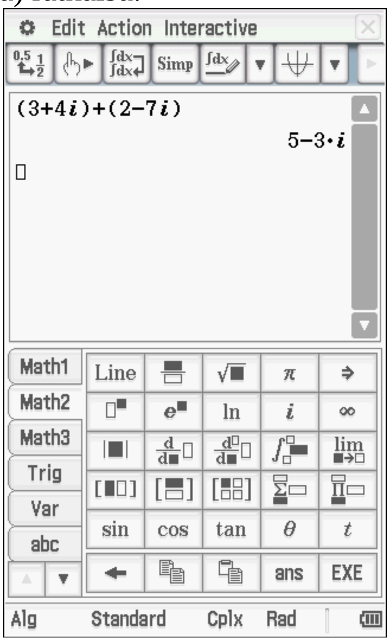


Imaginaariosa on 4.

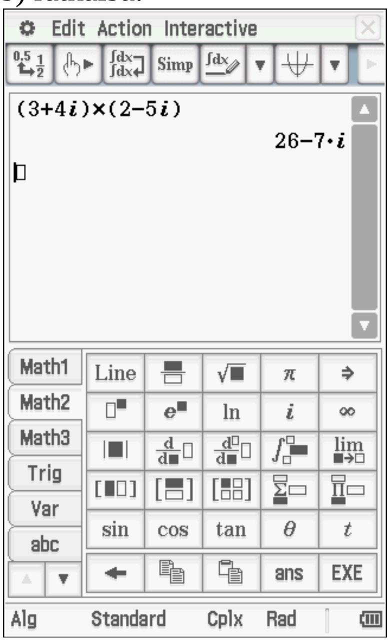
a) Laske: $(3+4\mathrm{i})+(2-7\mathrm{i})$.

b) Laske: $(3+4\mathrm{i})\cdot(2-5\mathrm{i})$.

a) ratkaisu.



b) ratkaisu.

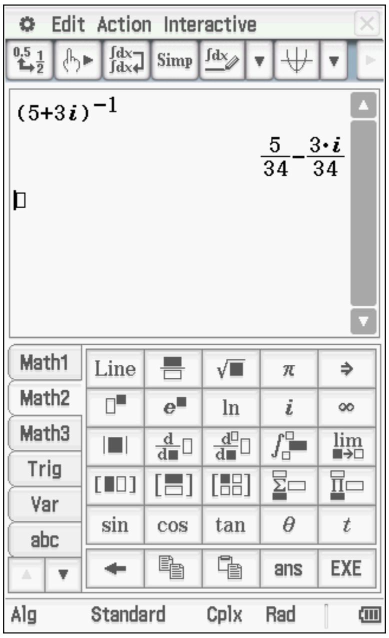


Kompleksiluvun $(a+b\mathrm{i})$ käänteisluku on sen liittoluku $(a+b\mathrm{i})^{-1}$, joka määritellään

$$(a+b\mathrm{i})^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}.$$

Tarkista yllä oleva laskusääntö laskemalla laskimella $(5+3i)^{-1}$.

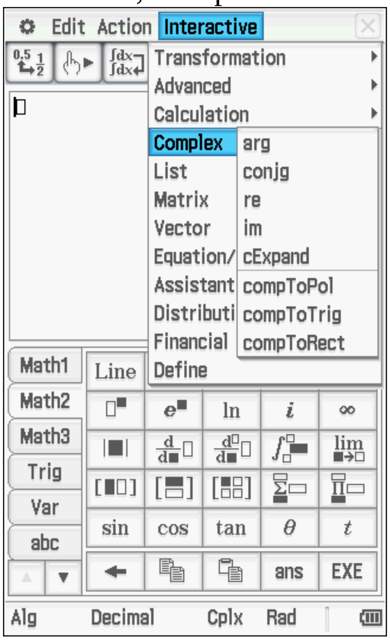
Ratkaisu.



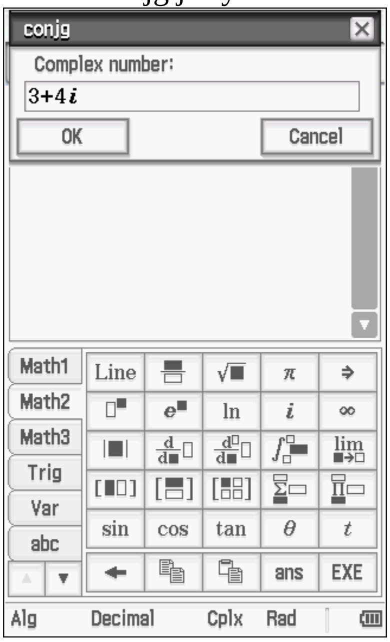
Aseta $a=5$ ja $b=3$ tarkasta itse.

Etsi konjugaatti luvulle $3+4i$.

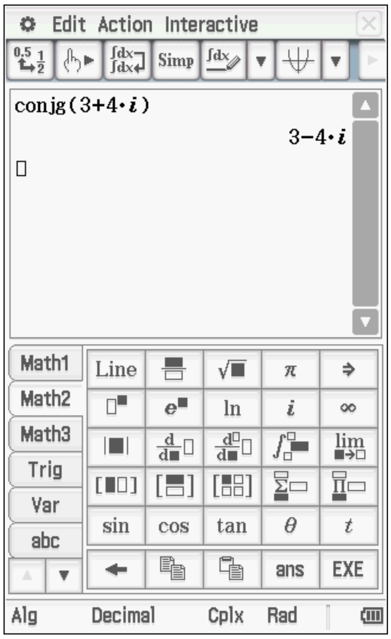
Interactive, Complex.



Valitse conjg ja syötä luku.

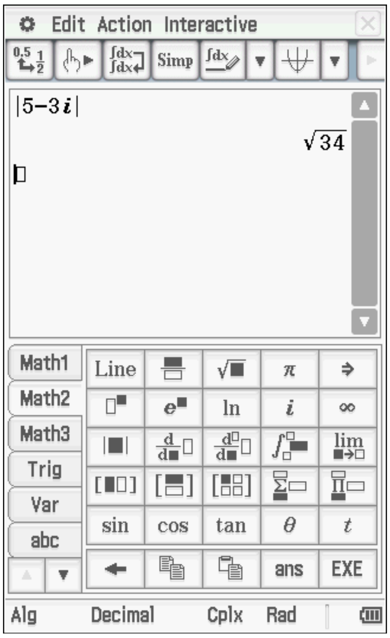


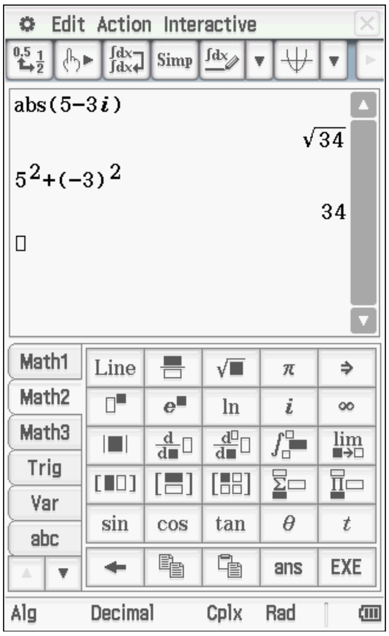
Ratkaisu.



Tee kokeiluja kompleksiluvuilla ja niiden konjugaateilla. Mitä laskentasääntöjä summalle, erotukselle, kertolaskulle ja jakolaskulle voit tarkistaa laskimen avulla?

Etsi itseisarvo (moduuli) lausekkeelle $5-3i$.

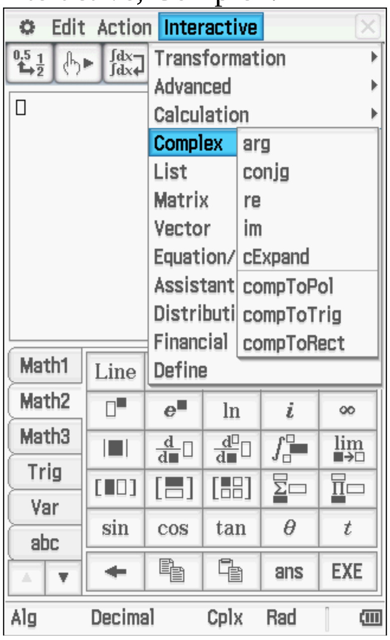


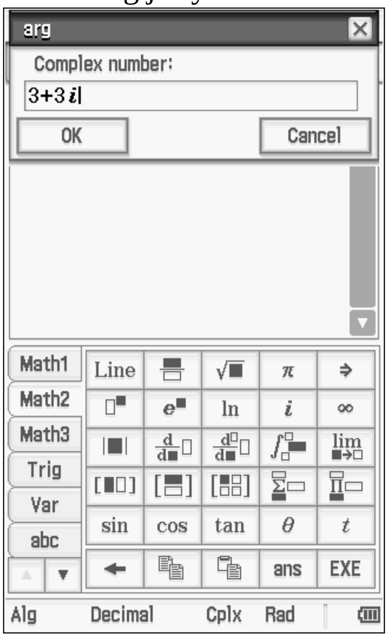


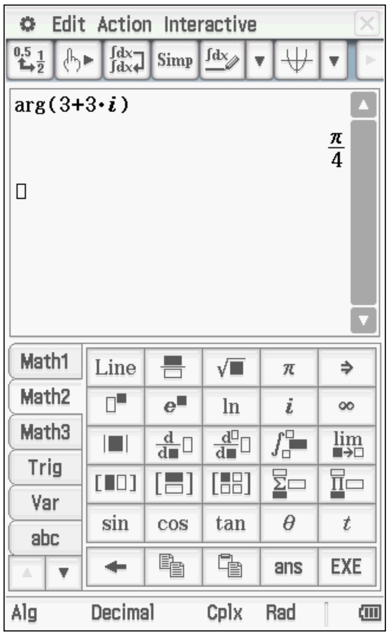
Mikä laskentasääntö tuntuisi sopivan tähän?

Etsi argumentti lausekkeelle $3+3i$.

Interactive, Complex. Valitse arg ja syötä luku.



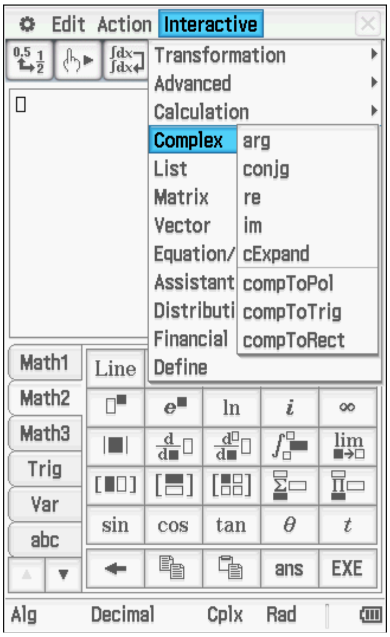


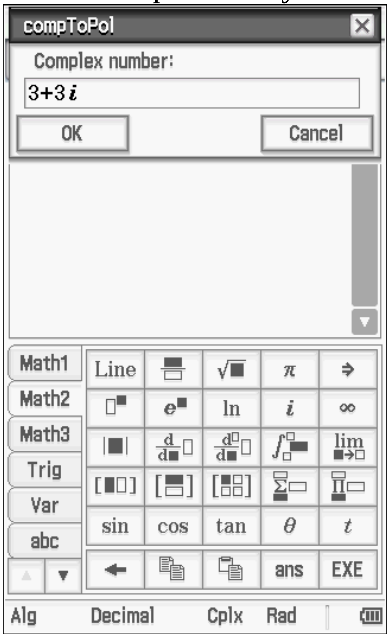


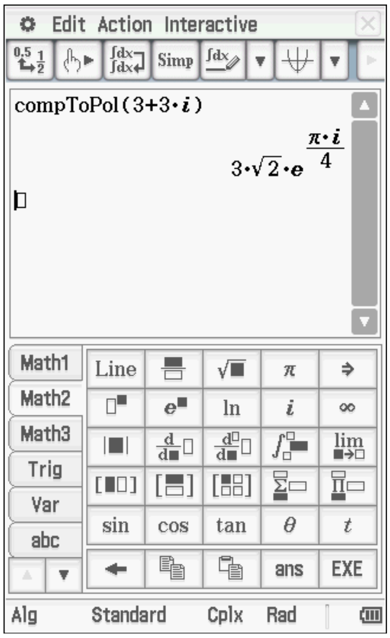
Laskin on Rad-tilassa. Miksi argumentiksi saadaan $\frac{\pi}{4}$ tässä tapauksessa?

Muunna kompleksiluku $3+3i$ polaariseen muotoon.

Valitse compToPol. Syötä luku. Vastaus:



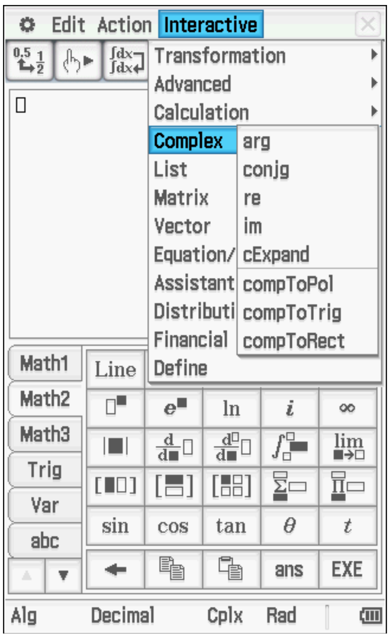


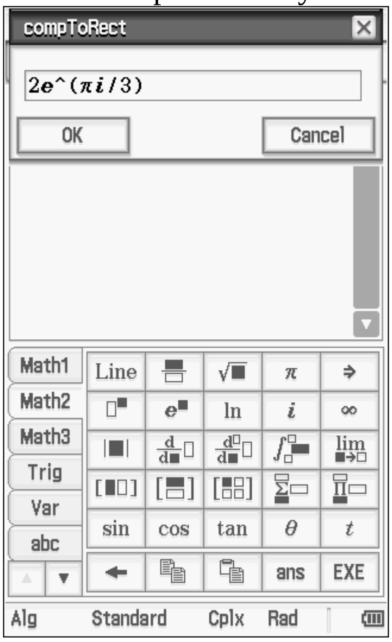


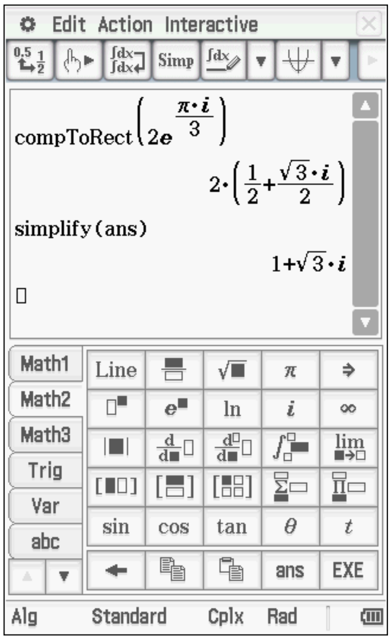
Polaarisessa muodossa: $3\sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\cdot\pi}{4}}$.

Muunna kompleksiluku $2\cdot e^{\frac{\pi\cdot i}{3}}$ kompleksitasomuotoon $a+bi$.

Valitse compToRect. Syötä luku. Vastaus:



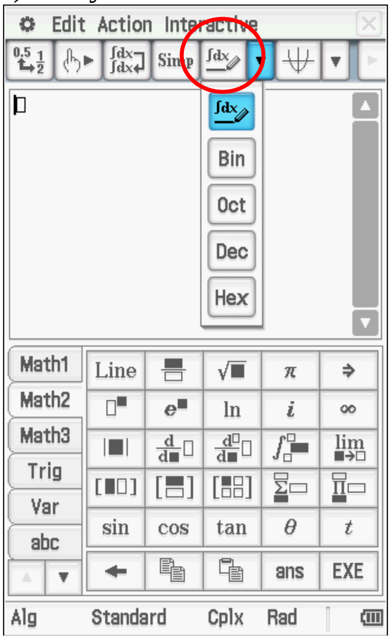




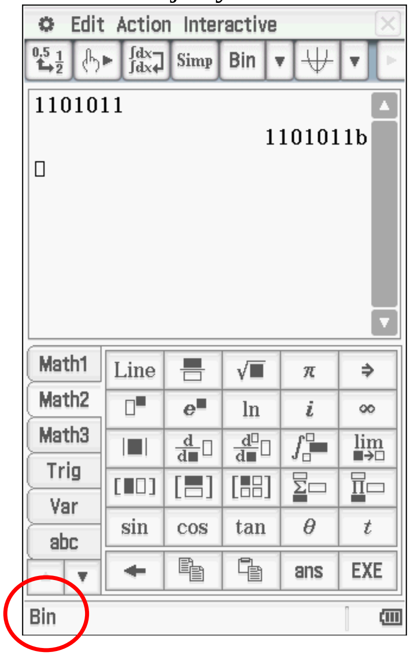
8.5 Binääriluvut ja heksadesimaaliluvut

a) Muunna binääriluku 1101011 desimaaliluvuksi.
b) Muunna desimaaliluku 107 binääriluvuksi.

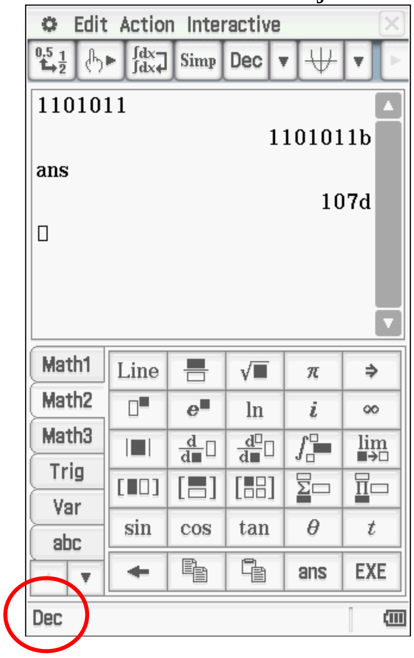
a) Siirry Main-tilaan.



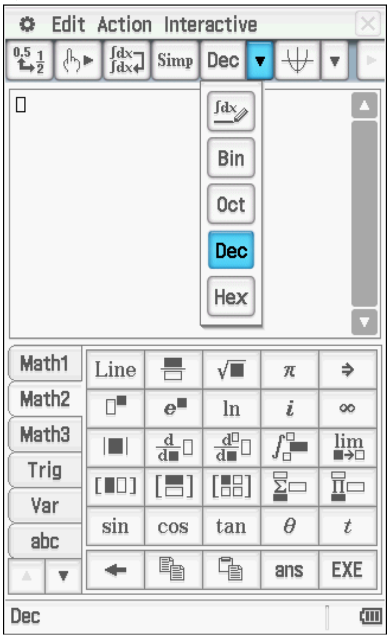
Valitse Bin ja syötä luku.



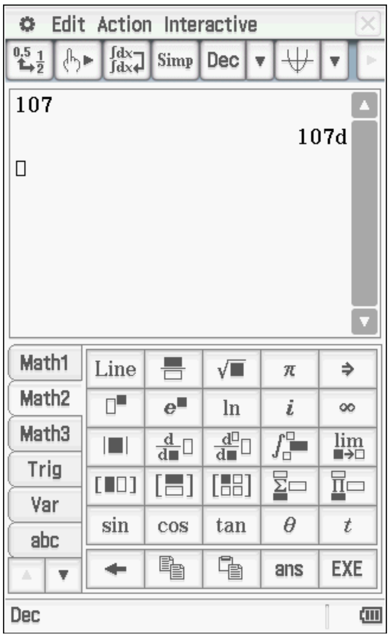
Valitse Dec. Paina ans ja EXE.



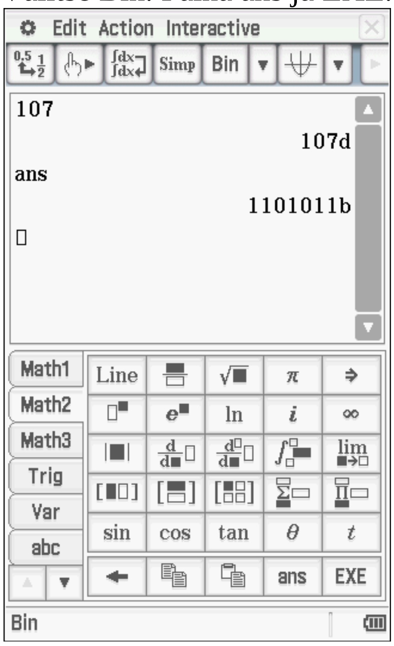
b) Valitse Dec.



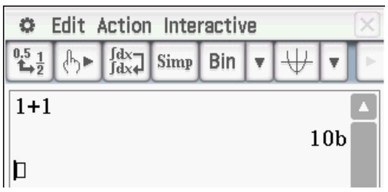
Syötä luku.



Valitse Bin. Paina ans ja EXE.



Tässä näemme, että 107_{10} on muunnettu muotoon 1101011_2

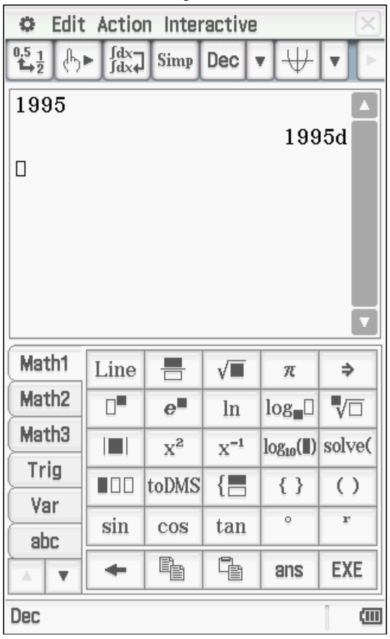


Harjoittele laskemista eri kantaluvuilla.

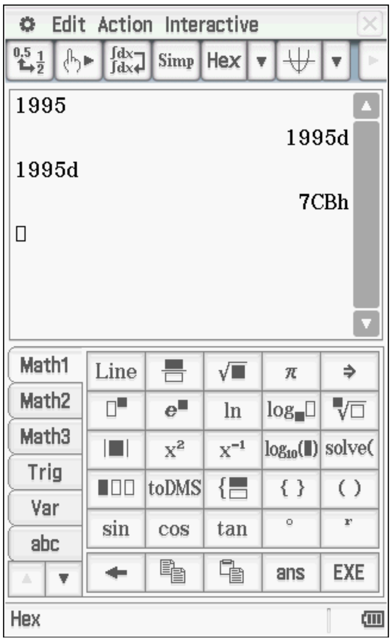
 Osoita laskinta käyttäen, että heksadesimaaliluku $7CB_{16}$ on yhtä kuin 1995_{10}

Muunnamme desimaaliluvun 1995 heksadesimaalimuotoon.

Valitse Dec. Syötä luku.



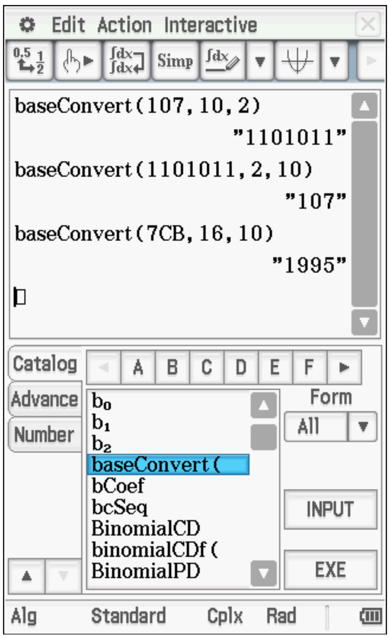
Valitse Hex. Paina EXE.



Voit käyttää yhteenlaskua, vähennyslaskua, kerto- ja jakolaskua eri lukujärjestelmissä. Kokeile itse.

Kommentti:

Voimme myös muuntaa jossakin lukujärjestelmässä olevan luvun toiseen lukujärjestelmään baseConvert-komennon avulla. Katso alla oleva näyttökuva.



9. Vektorit

9.1 Skalaarit ja vektorit

Skalaari on koon tai määrän mitta. Tyypillinen esimerkki skalaarista on massa. Lukumäärä on toinen hyvä esimerkki skalaarista.

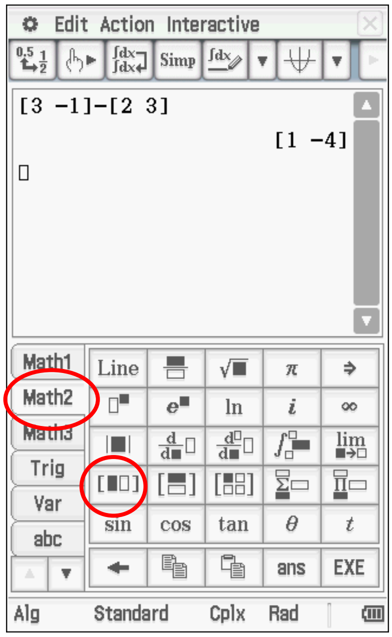
Vektorilla on taas suuruus ja suunta. Esimerkkejä vektoreista ovat voima nopeus, kiihtyvyys, sähkökentän voimakkuus jne. Vektori ilmaisee täten sekä jotakin skalaaria että suuntaa. Vektoria kuvataan usein suoralla nuolella, jolla on tietty pituus ja suunta. Matemaattisessa tekstissä vektori erotetaan skalaarista paksumman kirjasimen, kirjaimen yläpuolelle on merkityn nuolen tai suoran viivan avulla: $\boldsymbol{A}$, $\vec{\mathrm{A}}$ tai $\overline{\mathrm{A}}$.

Vektorin $\vec{\mathrm{A}}$ pituutta merkitään $|\vec{A}|$.

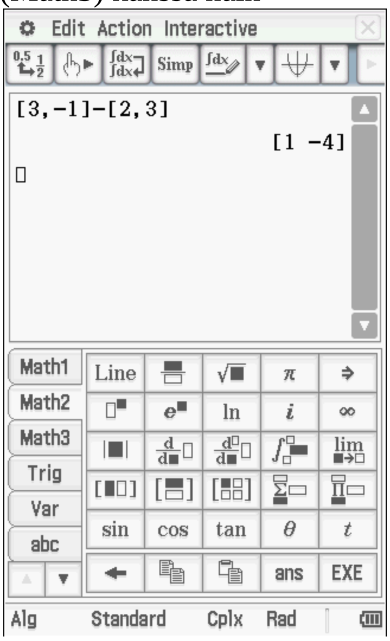
9.2 Vektorit tasossa

Vektori $\bar{u}$, jonka lähtöpiste on $P(x_1, y_1)$ ja loppupiste $Q(x_2, y_2)$, piirretään nuolena, joka alkaa pisteestä P ja loppuu pisteeseen Q ja johon on merkitty nuolen suunta pisteestä P pisteeseen Q. Niinpä vektori $\bar{u}$ merkitään muodossa $\bar{u} = [u_1, u_2]$, missä $u_1 = x_2 - x_1$ ja $u_2 = y_2 - y_1$. Vektoria, joka alkaa origosta $(0,0)$, kutsutaan paikkavektoriksi. Muistamme, että tasossa oleva vektori koostuu sekä suuruudesta että suunnasta. Komponentteja u_1 ja u_2 kutsutaan ensimmäiseksi ja toiseksi komponentiksi.

Vektorilla on lähtöpiste $P(2,3)$ ja loppupiste $Q(3,-1)$. Määritä vektori $\overline{PQ}$ xy-tasossa.

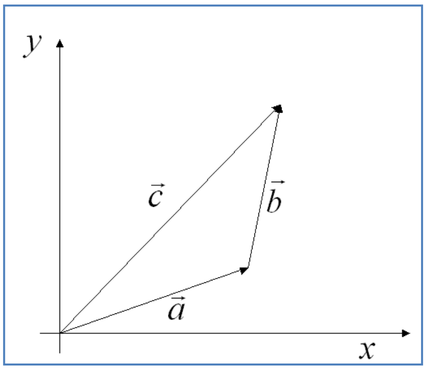


Vaihtoehtoisesti hakasulkujen (Math3) kanssa näin



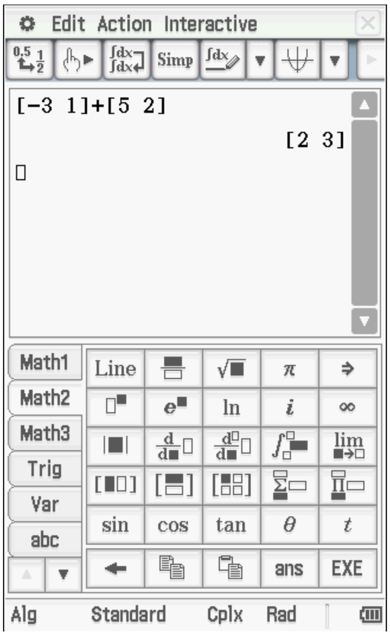
9.3 Vektorien yhteenlasku

Kahden *xy*-tasossa olevan vektorin yhteenlasku voidaan suorittaa graafisesti piirtämällä vektorit, mikä on esitetty kuvana alla. Piirrämme vektorin $\bar{a}$ alkamaan origosta. Sitten siirrämme vektorin $\bar{b}$ siten, että sen alkupiste on sama kuin vektorin $\bar{a}$ päätepiste. Summa $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ on vektori, jonka lähtöpiste on origo ja jolla on sama päätepiste kuin vektorilla $\bar{b}$. Nämä kolme vektoria muodostavat täten kolmion.



Vektorien yhteenlasku voidaan suorittaa myös algebrallisesti.

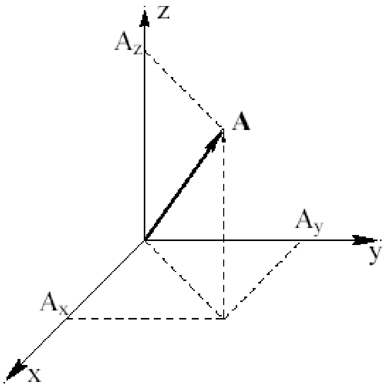
 Laske yhteen vektorit $\bar{a} = [-3,1]$ ja $\bar{b} = [5,2]$.



Laskemme yhteen molempien vektorien *x*- komponentit ja y-komponentit, ja saamme summaksi niin sanotun resultantin $\bar{c} = [2,3]$.

 Käytä laskinta kahden tai useamman koordinaatistossa olevan vektorin yhteenlaskuun.

9.4 Vektorit kolmiulotteisessa koordinaatistossa



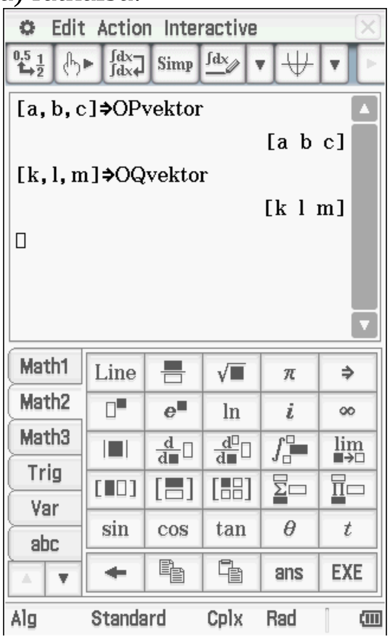
Tilassa oleva vektori voidaan ilmaista vektorin komponentteina kolmiulotteisessa koordinaatistossa.

Esimerkiksi näin $\bar{A} = [A_x, A_y, A_z]$.

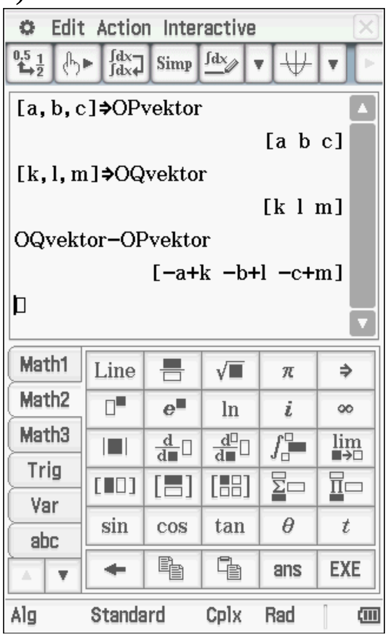
Vektori pisteestä $P(x_1, y_1, z_1)$ pisteeseen $Q(x_2, y_2, z_2)$ on $\overline{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$.
Niin kutsuttu *nollavektori* on vektori, jonka pituus on 0. Tämä tarkoittaa sitä, että nollavektorin jokainen komponentti on nolla. Nollavektori merkitään $\bar{0}$. Vektoreille voi myös antaa nimiä laskimessa. Tämä helpottaa monesti vektoritehtävien hahmottamista (ks. esim. luku 9.11).

a) Anna vektorille $[a, b, c]$ nimi OPvektor ja vektorille $[k, l, m]$ nimi OQvektor.
b) Määritä PQvektor.

a) ratkaisu.



b) ratkaisu.



9.5 Vektorin pituus

Tutkitaanpa ensin erään skalaarin suuruutta. Määrittelemme *skalaarin suuruus* sen absoluuttisena arvona eli itseisarvona. Sekä skalaarin 7 että skalaarin -7 suuruus on 7.

Kaksiulotteisessa tilassa voimme löytää vektorin pituuden käyttämällä Pythagoraan lausetta. Vektorin $\bar{v} = [v_x, v_y]$ pituuden voimme laskea $|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

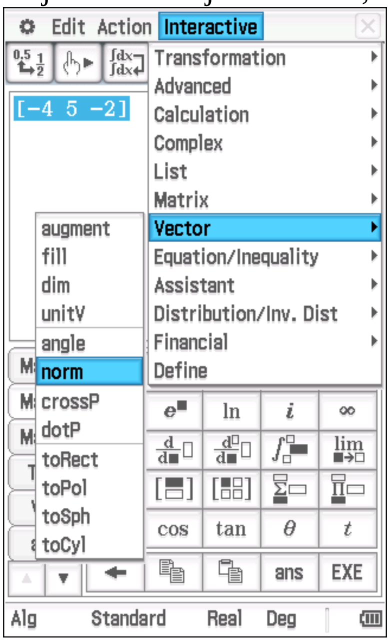
Vektorin tarkasteluun kolmiulotteisessa tilassa voimme käyttää lauseketta $\bar{v} = [v_x, v_y, v_z]$. Vektorin pituus voidaan laskea määrittämällä ensin pituus vektorille $\bar{v} = [v_x, v_y, 0]$. Tämä vektori muodostaa yhdessä vektorin $[0,0,v_z]$ kanssa uuden suorakulmaisen kolmion. Vektorin $\bar{v} = [v_x, v_y, 0]$ pituus on $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ja vektorin $[0,0,v_z]$ pituus on $|v_z|$. Käytämme Pythagoraan lausetta kerran ja huomaamme, että

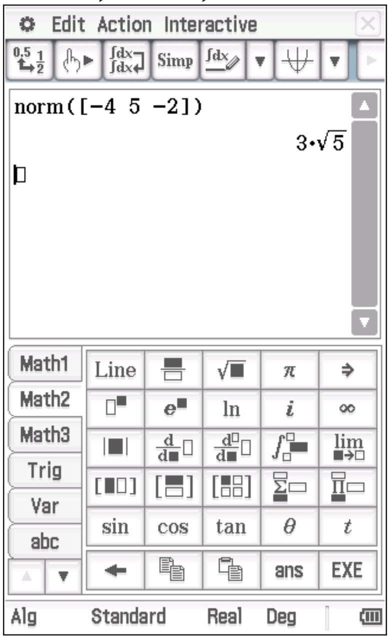
$$|\bar{v}| = \sqrt{\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)^2 + |v_z|^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

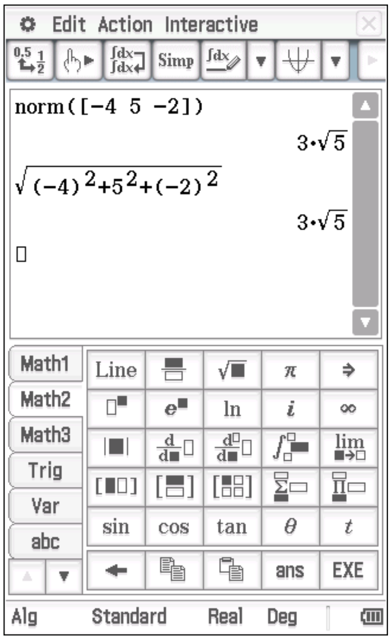
 Määritä pituus vektorille $\bar{v} = [-4, 5, -2]$.

Yllä olevasta kaavasta voimme johtaa $|\bar{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-2)^2} = 3\sqrt{5}$.

Kirjoita vektori ja maalaa se, Interactive, Vector, norm. Sama soveltamalla normin kaavaa.



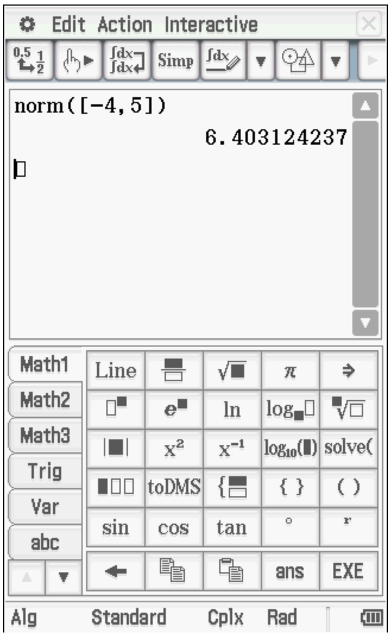




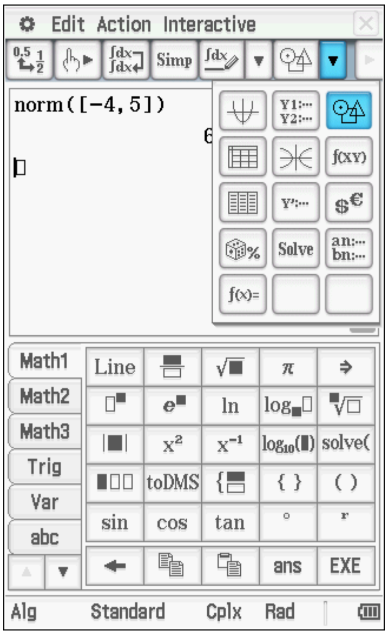
CP400-laskimen norm-toiminnon avulla voimme helposti määrittää vektorin pituuden.

 Laske likiarvo vektorin [–4,5] pituudelle ja piirrä vektori koordinaatistoon.

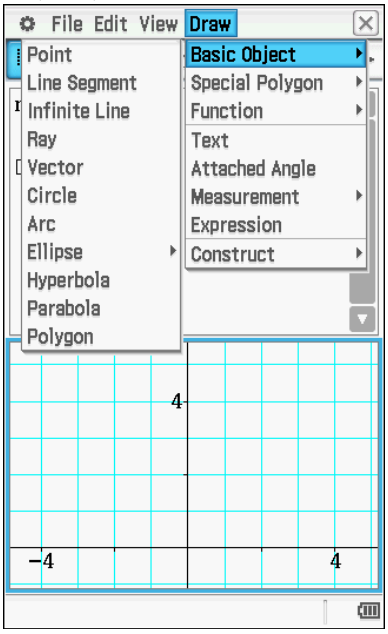
Pituus kuten edellä.



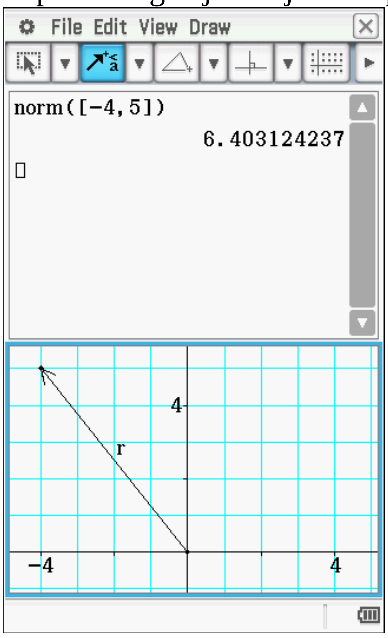
Avaa Geometria –sovellus.

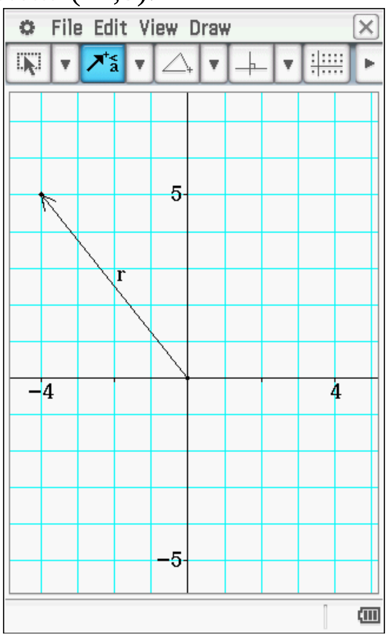


Valitse Draw-valikosta Basic Object ja Vector.

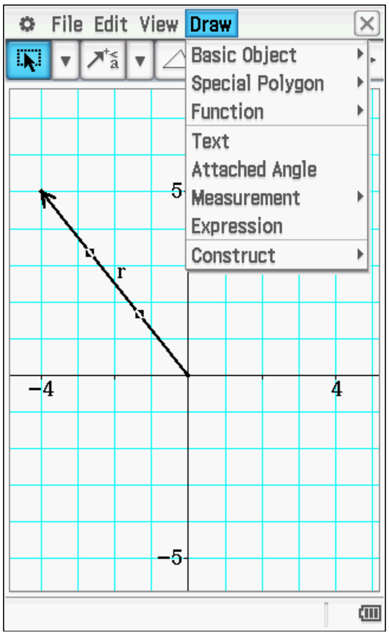


Napauta origoa ja sen jälkeen pistettä (–4,5).

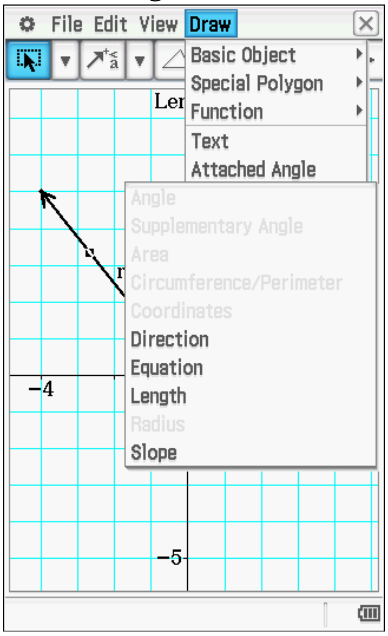




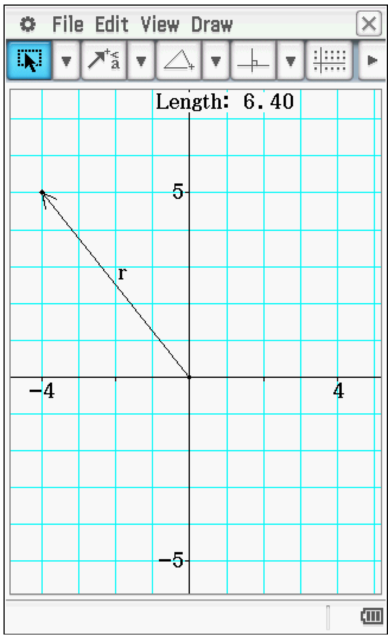
Valitse Measurement.



Valitse Length.



Vastaus:



Tässä olemme käyttäneet CP400-laskinta vektorin [–4,5] pituuden laskemiseen sekä Main- että Geometria –sovelluksissa.

9.6 Yksikkövektori

Niin kutsuttu yksikkövektori merkitään tavallisesti muodossa $\bar{e}$ tai $\bar{e}^0$. Yksikkövektorin pituus on $|\bar{e}| = 1$.

Vektori voidaan muuntaa yksikkövektoriksi jakamalla vektori sen omalla pituudella. Tästä johtuu se, että vektori voidaan ilmaista muodossa ”pituus kertaa samansuuntainen yksikkövektori”.

Vektorialgebrassa on normaalia, että vektoreita kuvataan akselien avulla. Yksikkövektori, joka sijaitsee *x*-akselin positiivisella alueella on $\bar{\imath} = [1,0,0]$. Positiivisella alueella y-akselilla yksikkövektori on $\bar{\jmath} = [0,1,0]$. Yksikkövektori, joka sijaitsee *z*-akselin positiivisella alueella on $\bar{k} = [0,0,1]$.

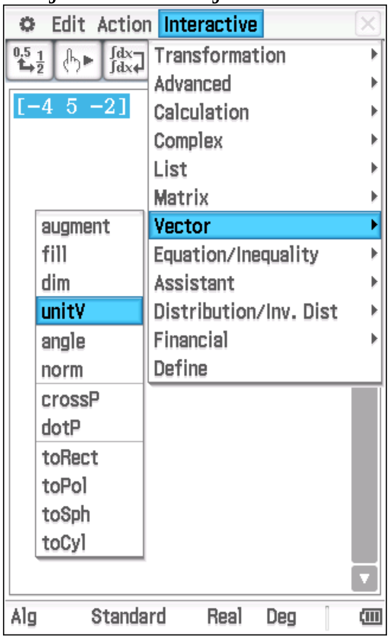
Tästä seuraa, että $[x, y, z] = x[1,0,0] + y[0,1,0] + z[0,0,1] = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$.

Aikaisemmin tässä kappaleessa kerrottiin, että vektorin $\bar{v} = [-4, 5, -2]$ pituus on $3 \cdot \sqrt{5}$. Tästä johtuu, että $\bar{v} = [-4, 5, -2]$ voidaan muuntaa yksikkövektoriksi seuraavasti

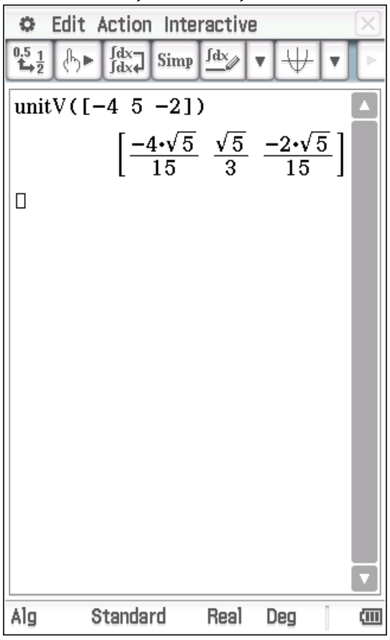
$$\bar{v}^0 = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{[-4, 5, -2]}{3\sqrt{5}} = \left[\frac{-4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}\right] = \left[\frac{-4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{-2\sqrt{5}}{15}\right]$$

Muunna $\bar{v} = [-4, 5, -2]$ yksikkövektoriksi.

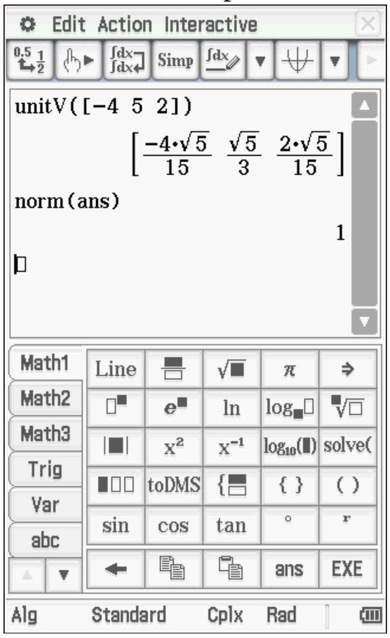
Kirjoita vektori ja maalaa se.



Interactive, Vector, UnitV.



Yksikkövektorin pituus on 1.



Tässä näemme, että CP400-laskimella $\bar{v} = [-4, 5, -2]$ voidaan muuntaa yksikkövektoriksi. Samalla voimme tarkkailla että yksikkövektorin pituudeksi saadaan todellakin 1

Muunna erilaisia vektoreita yksikkövektoreiksi. Tarkista tulos sekä laskimella että käsin laskemalla.

9.7 Pistetulo

Kahden vektorin $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo lasketaan kaavalla $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|cos\theta$, missä θ on näiden kahden vektorin välinen kulma. Jos $cos\theta = 0$, niin $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Täten vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos ja vain jos niiden pistetulo on 0 (eikä kumpikaan vektoreista ole itsessään nollavektori). Pistetulo ei ole kertolasku eikä sen symbolia voi jättää merkitsemättä.

Geometrian näkökulmasta tarkasteltuna kahden vektorin $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo on sama kuin vektorin $\bar{a}$ projektion pituus vektorilla $\bar{b}$ kerrottuna vektorin $\bar{b}$ pituudella. Pisteen englanninkielinen nimitys on 'dot' ja pistetulon komento ClassPadissa dotP. Pistetulo on reaaliluku.

Kun tarkastelemme vektoreita suorakulmaisessa kaksi- tai kolmiulotteisessa koordinaatistossa, voidaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo ilmaista $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ eli saman akselin komponenttien kertoimien tuloista koostuvaksi summalausekkeeksi. Tutki tätä CP400-laskimen avulla tai muulla tavalla.

Laske vektorien $\bar{a} = [-3,2,5]$ ja $\bar{b} = [3,-2,1]$ pistetulo. Laske myös näiden kahden vektorin välinen kulma.

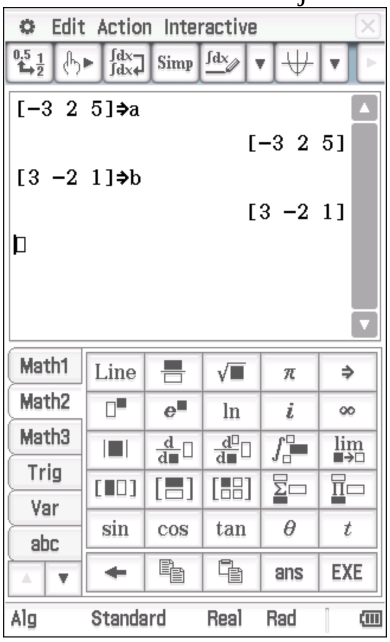
Pistetulo lasketaan seuraavasti $\bar{a} \cdot \bar{b} = [-3,2,5] \cdot [3,-2,1] = -3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = -8$

Vektorien välisen kulman kosini on tällöin

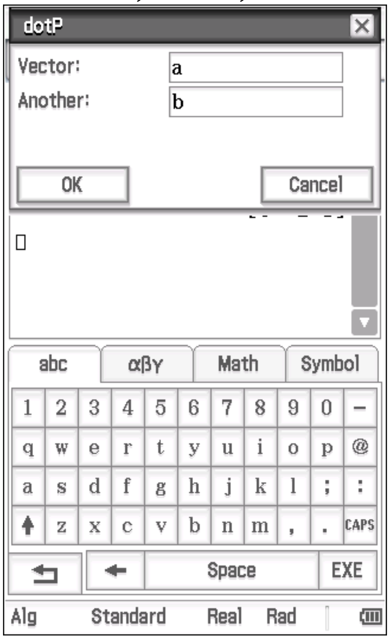
$$cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-8}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2}\sqrt{3^2 + (-2) + 1}} = \frac{-8}{\sqrt{38}\sqrt{14}} = \frac{-4\sqrt{133}}{133}$$

Täten, että $\theta = 110,3^{\circ}$. Vastaus voidaan tarkistaa käyttämällä CP400-laskimen toimintoja dotP ja angle. Koskemalla kahdesti vektorin (matriisin) symbolia, saat lisättyä paikkoja.

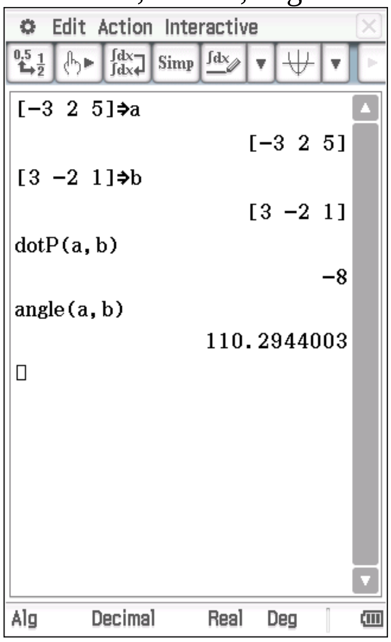
Määritellään vektorit a ja b



Interactive, Vector, dotP



Interactive, Vector, angle



Näemme, että laskimen avulla vastaus voidaan todistaa oikeaksi. Voit kokeilla laskea muita esimerkkejä itse.

Tarkista CP400-laskimella, onko pistetulo vaihdannainen, eli $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

Tarkista CP400-laskimella myös, että pistetulo distributiivinen, eli $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

Kolmion *ABC* kulmat ovat $A(2,1,-1)$, $B(-1,0,2)$ ja $C(1,-2,2)$. Laske CP400-laskimella kolmion kulmat.

Tutki seuraavaa väittämää: Vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{a}$ pistetulo on $|\bar{a}|^2$.

9.8 Ristitulo

CP400-laskimessa ristitulolle on komento ”crossP”. Ristitulo tunnetaan myös vektoritulona.

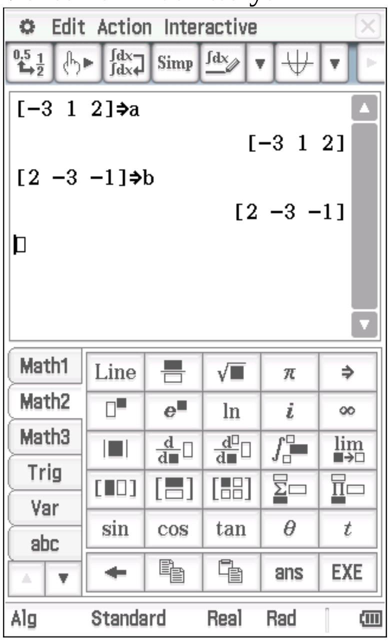
Ristituloa käytetään usein matematiikassa – erityisesti mekaniikan ja sähkömagneettisuuden alueilla. Mekaniikassa ristituloa käytetään muun muassa erilaisten vääntövoimien yhteydessä. Sähkömagneettisuuden alueella ristitulolla on erityisen suuri merkitys esimerkiksi tutkittaessa liikkuvien virittyneiden hiukkasten välisiä voimia. Ristitulo on vektori.

Määritelmä: Olkoot $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ja $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$.
Ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$ määritellään vektorina $[a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$

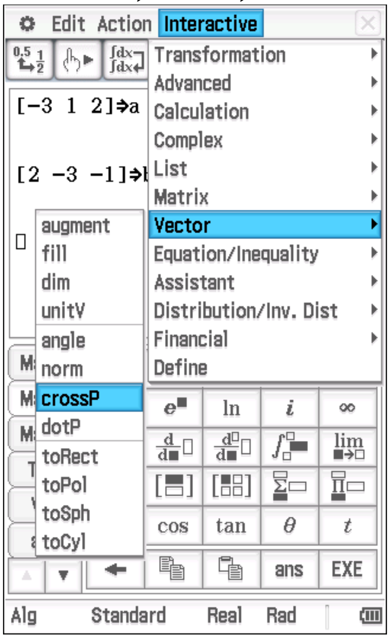
Voimme myös laskea ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ determinanttina matriisille, jonka ylin vaakarivi koostuu komponenteista $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$ ja $\bar{k}$, toinen vaakarivi vektorin $\bar{a}$ komponenttien kertoimista ja kolmas vaakarivi vektorin $\bar{b}$ komponenttien kertoimista.

Meillä on kaksi vektoria $\bar{a} = [-3,1,2]$ ja $\bar{b} = [2,-3,-1]$. Laske laskimella ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$ sekä suoraan että 3×3 determinantin avulla.

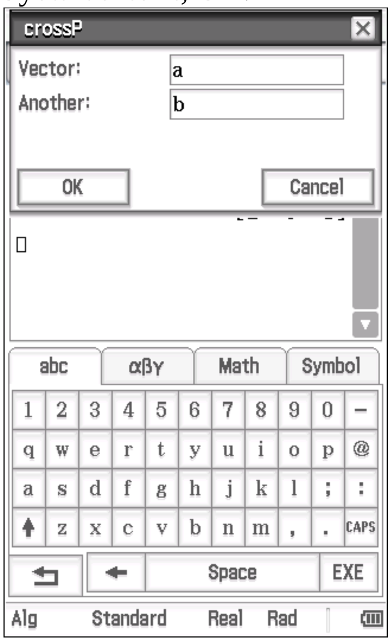
Vektorien määrittelyt



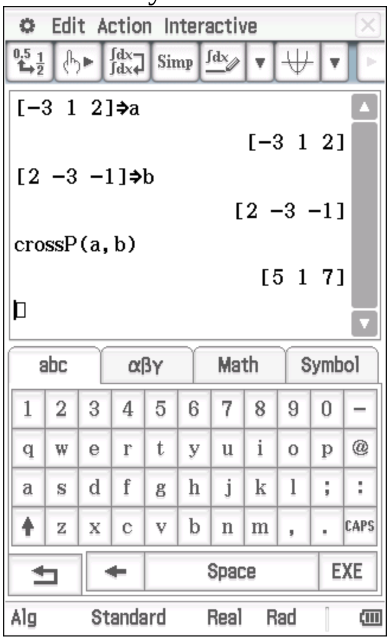
Interactive, Vector, crossP

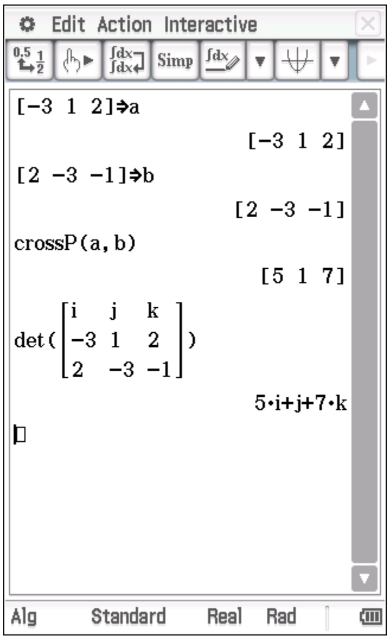


Syötä vektorit, OK.

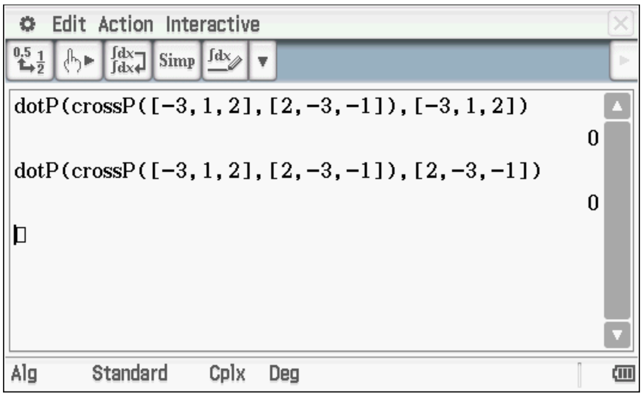


ClassPad täydentää komennot. Ristitulo determinanttina.





Meillä on kaksi vektoria $\bar{a} = [-3,1,2]$ ja $\bar{b} = [2,-3,-1]$. Tarkista CP400-laskimella, että ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vastaan.

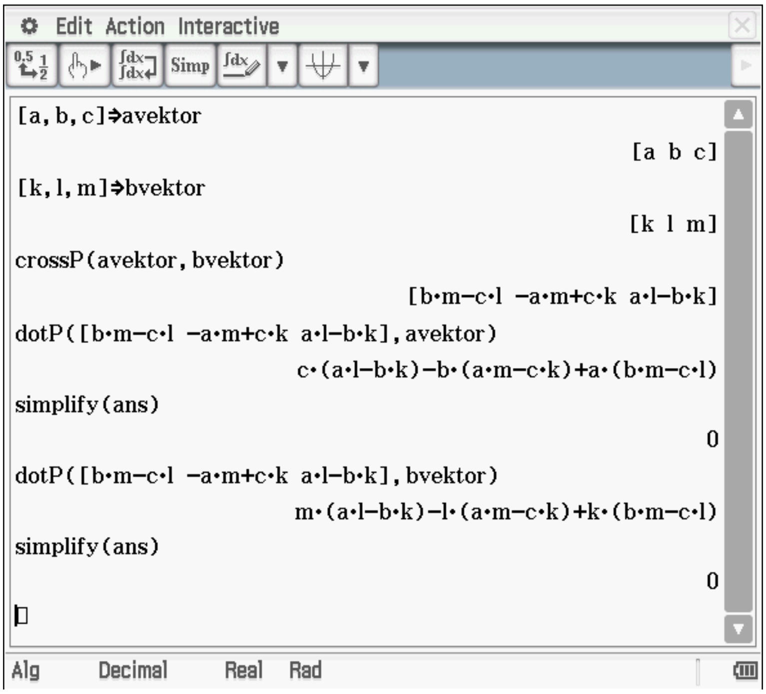


Yllä olevasta näytöstä voimme nähdä, että ensimmäisen rivin tulos on $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$. Tästä seuraa, että $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{a}$.

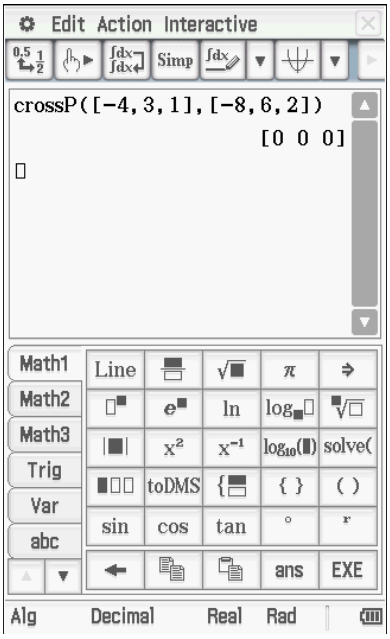
Kokeillaanpa edetä yksittäisestä tapauksesta kohti yleisiä periaatteita.

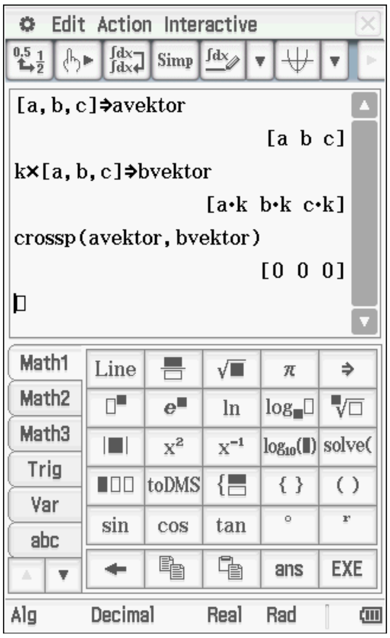
Osoita, että ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$ on aina kohtisuorassa vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vastaan.

Ratkaisu.



Tutki vasemmassa näyttökuvassa näkyvää tapausta. Tutki, voimmeko väittää, että $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset.



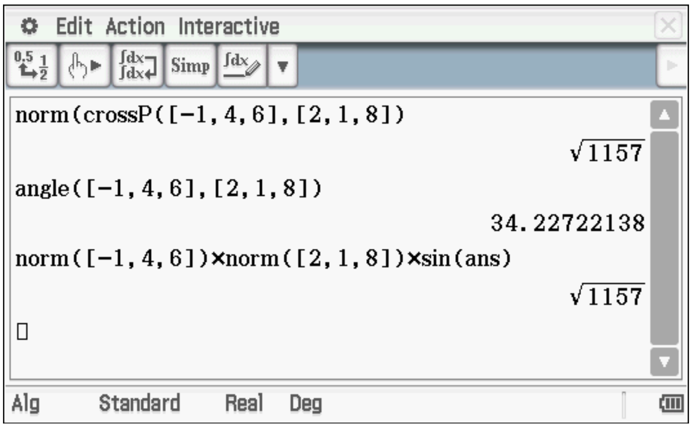


9.9 Suunnikas

Suunnikkaan pinta-ala A rajoittuu vektoreihin $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ja se saadaan lausekkeesta $A = |\bar{a}||\bar{b}|sin\theta$, missä θ on vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma ($0 \le \theta \le \pi$). Ristitulon määritelmän mukaisesti voimme myös laskea suunnikkaan alan $A = |\bar{a} \times \bar{b}|$.

Suunnikkaan kulmat ovat P(1, 0,–1), Q (0, 4, 5) ja R(3, 1, 7). Laske alue.

Merkitään $\bar{a} = \overline{PQ} = [-1,4,6]$ ja $\bar{a} = \overline{PR} = [2,1,8]$. Alan laskeminen ClassPadilla:



Näemme, että laskusääntö $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|sin\theta$ voidaan vahvistaa. Ala on $\sqrt{1157}$ alan yksikköä.

Miten voimme laskea kolmion PQR pinta-alan, jonka kulmat ovat P(1, 0,-1), Q (0, 4, 5) ja R(3, 1, 7)? Kokeile itse.

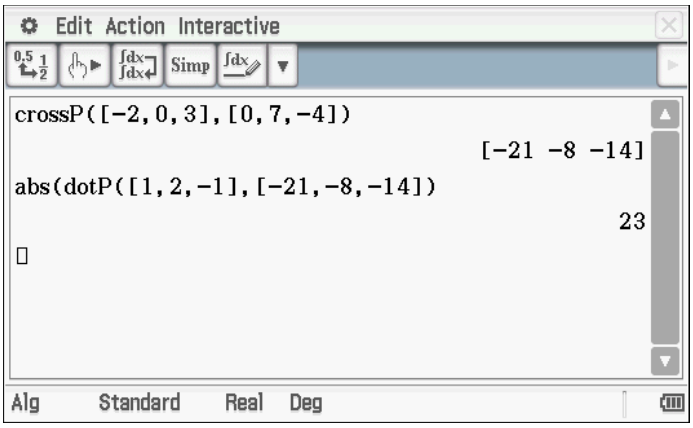
9.10 Suuntaissärmiö

Tuloa $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ kutsutaan vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ skalaarikolmituloksi (tässä järjestyksessä). Pistetulon kaavasta $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}||\bar{c}|cos\theta$ seuraa, että skalaarikolmitulo kuvaa sen suuntaissärmiön tilavuutta, jonka virittävät $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$.

Lausekkeen $|\bar{a} \times \bar{b}|$ arvo kuvaa tässä tapauksessa suuntaissärmiön pohjan pinta-alaa. Lauseke $|\bar{c}|cos\theta$ ilmaisee kuinka korkealla vektorin $\bar{c}$ nuolenkärki on siitä tasosta, jonka muodostavat $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Jos θ on suurempi kuin 90^{o}, niin $\cos\theta$ on negatiivinen. Tällöin on tarpeen käyttää lausekkeen $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ itseisarvoa suuntaissärmiön tilavuuden laskemiseen. Tilavuuden arvo on positiivinen.

Laske tilavuus suuntaissärmiölle, jonka virittävät vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{\imath} + 3\bar{k}$ ja $\bar{c} = 7\bar{\jmath} - 4\bar{k}$.

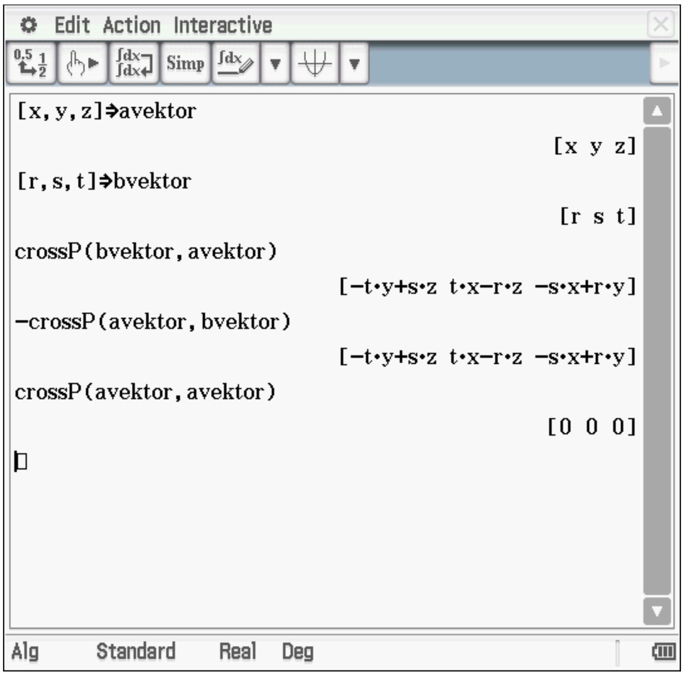
Ratkaisu.



Tilavuus on 23 tilavuusyksikköä.

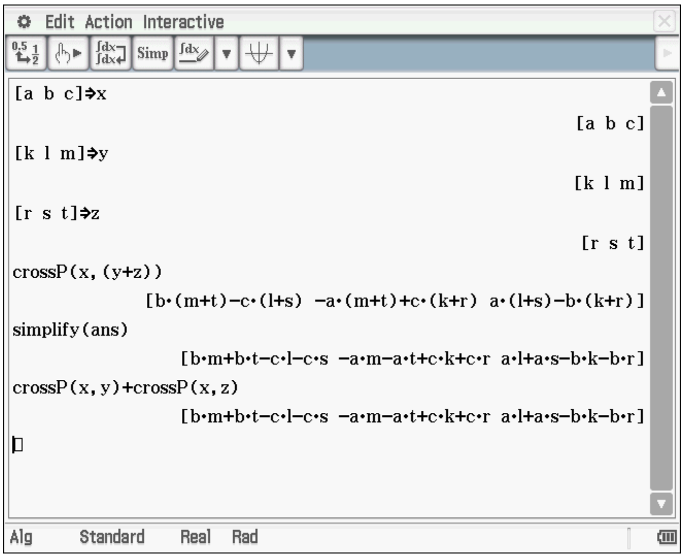
9.11 Ristitulon ominaisuudet

Alla olevasta kuvasta näkyy kuinka voimme CP400-laskimen avulla osoittaa, että ristitulo ei ole vaihdannainen laskutoimitus: $(\bar{a} \times \bar{b}) = -(\bar{b} \times \bar{a})$. Olemme myös osoittaneet CP400-laskimella, että vektorin ristitulo itsensä kanssa on nollavektori: $(\bar{a} \times \bar{a}) = [0,0,0] = \bar{0}$.



Todista, että $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$. Tämä tarkoittaa sitä, että ristitulo on distributiivinen.

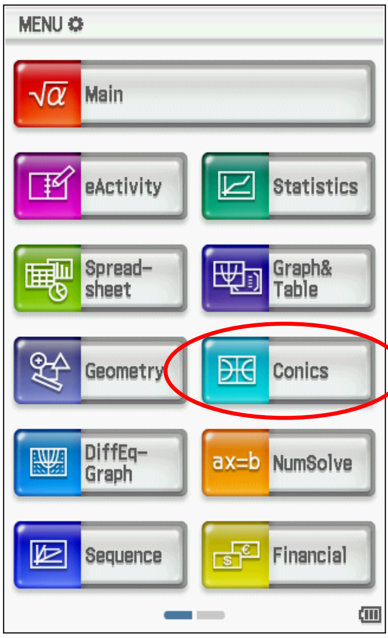
Ratkaisu.



Osoita sitten, että $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|^2 = |\bar{a}|^2\left|\bar{b}\right|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})$.

10. Kartioleikkaus

10.1 Ympyrä



Kartioleikkaus on yleisnimitys leikkauskäyrälle, joka saadaan, kun taso leikkaa kartiomaisen pinnan. Erilaisia kartioleikkauksia syntyy erilaisista leikkauskulmista tason ja kartiopinnan välillä.

Matemaattisesti ajatellen kartioleikkaus on käyrä, jota kuvaa kahden muuttujan toisen asteen yhtälö.

Jos oletamme ympyrän olevan eräs ellipsin esiintymismuodoista, siitä voidaan saada neljä erilaista kartioleikkausta: ympyrä, paraabeli, ellipsi ja hyperbeli.

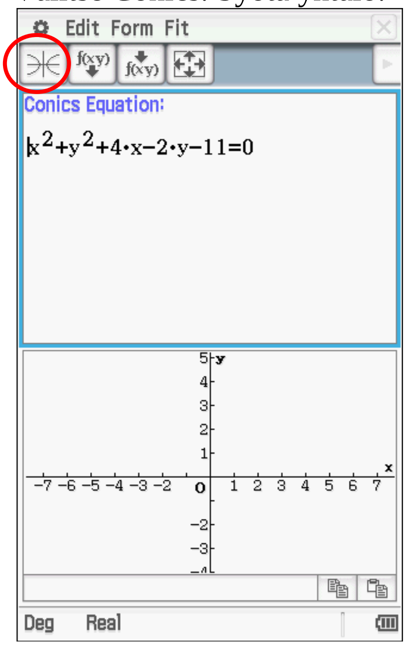
Päävalikossa kartioleikkauksille on sovellus Conics.

a) Piirrä yhtälöä $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ vastaava ympyrä.

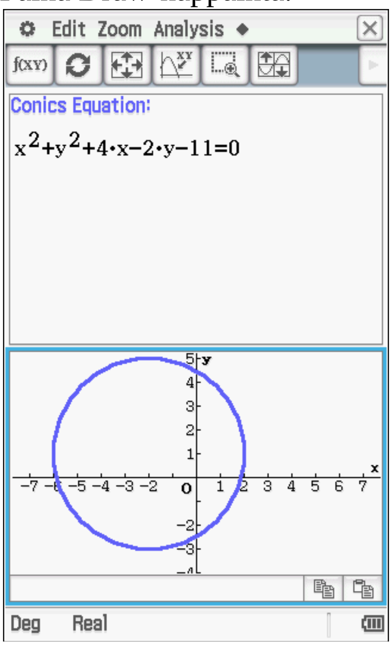
b) Määritä keskipiste ja säde.

a)

Valitse Conics. Syötä yhtälö.



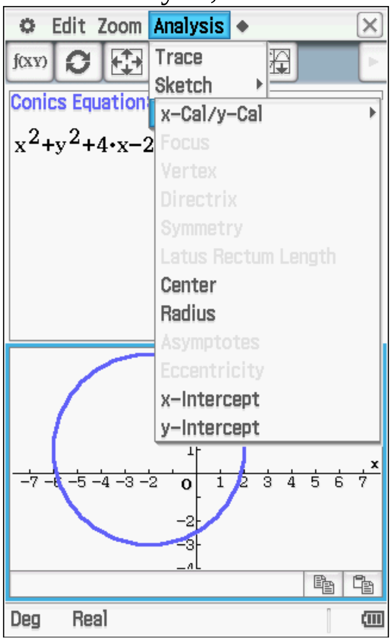
Paina Draw-näppäintä.



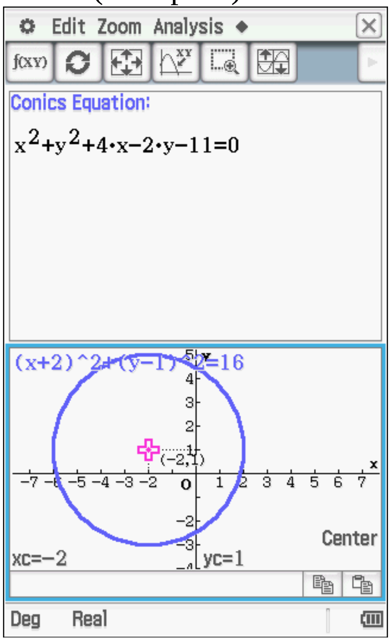
Voi olla, että ikkunaa pitää säätää.

b)

Valitse Analysis, G-Solve.

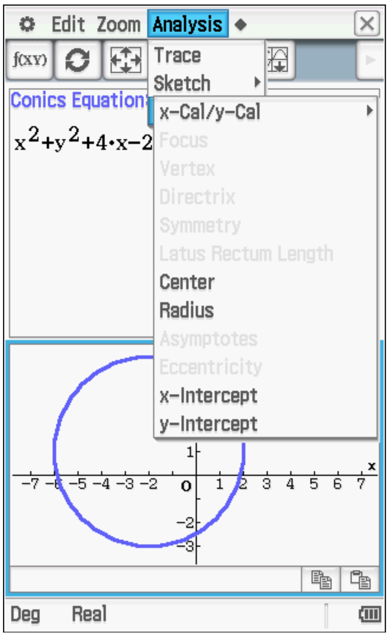


Center (keskipiste).

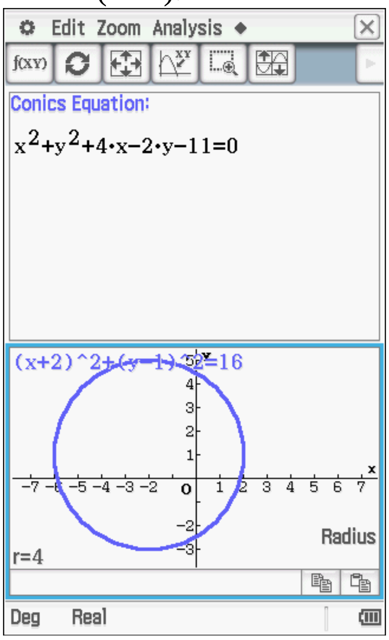


Ympyrän keskipisteen sijainti on $(-2,1)$.

Valitse uudelleen



Radius (säde).



Ympyrän säde on 4.

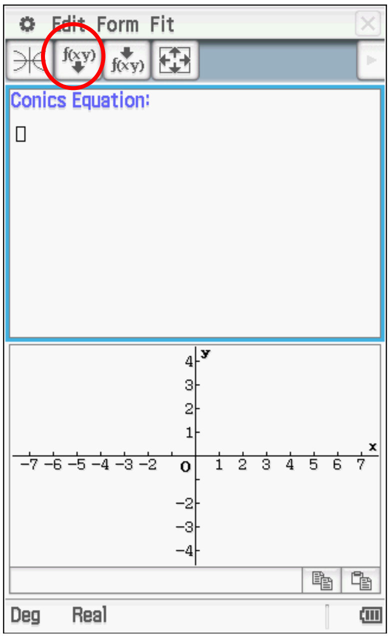
Huomaa, että ympyrän yhtälö näkyy keskipistemuodossa $(x+2)^2+(y-1)^2=4^2$. Voit myös sovittaa ympyrän eri muotoihin aktivoimalla ylemmän ikkunan kynällä ja valikosta Fit -> Fit into Conics Form.

10.2 Paraabeli

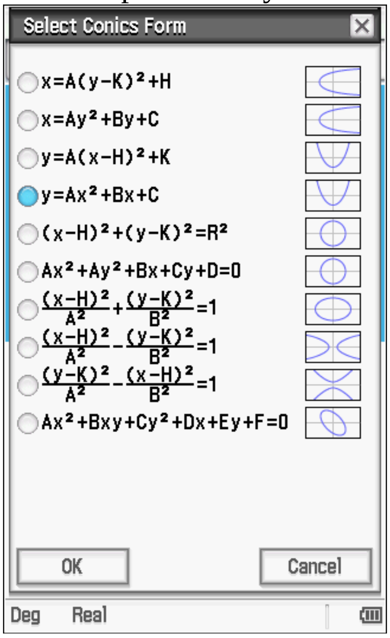
a) Piirrä yhtälöä $y = x^2 - 2x - 1$ vastaava paraabeli.
b) Määritä polttopiste, symmetria-akseli, johtosuora ja huippu.

a)

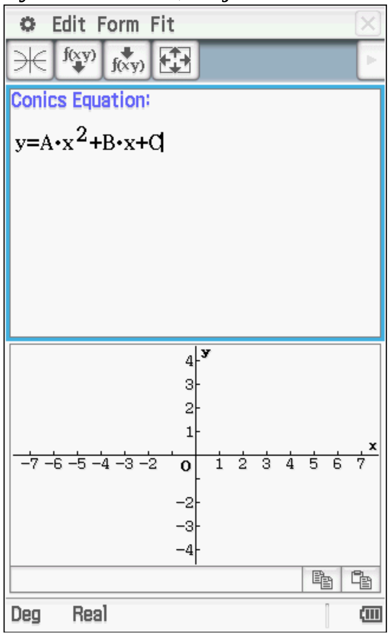
Valitse Conics Form -ikkuna.



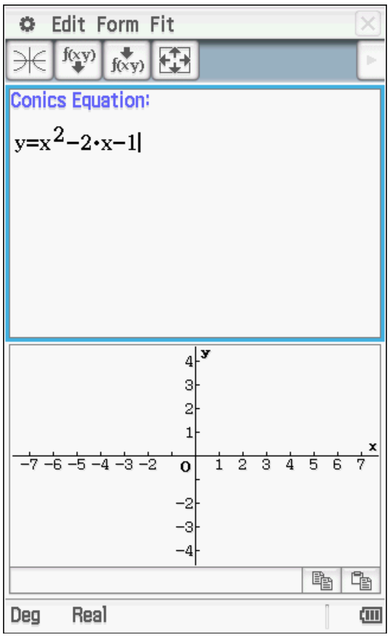
Merkitse paraabelin yhtälö.



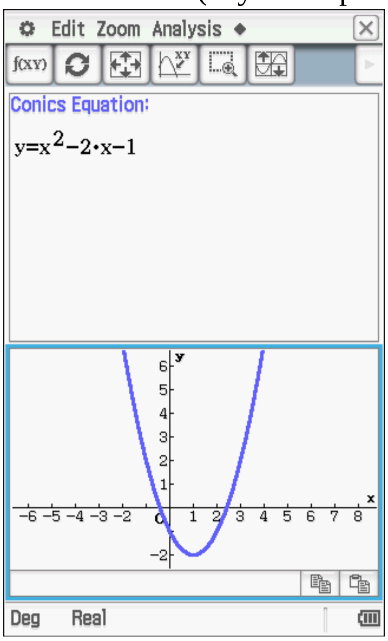
Syötä arvot A, B ja C.

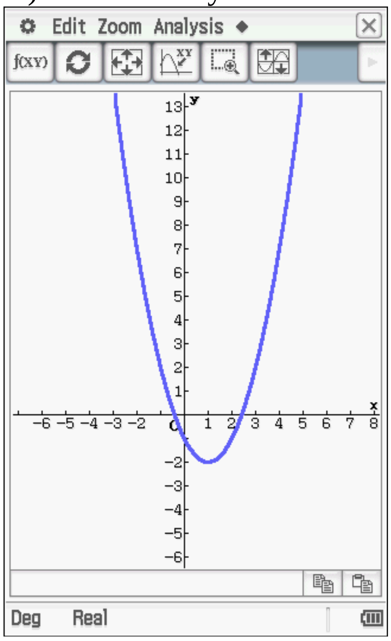


Paina Draw-kuvaketta.



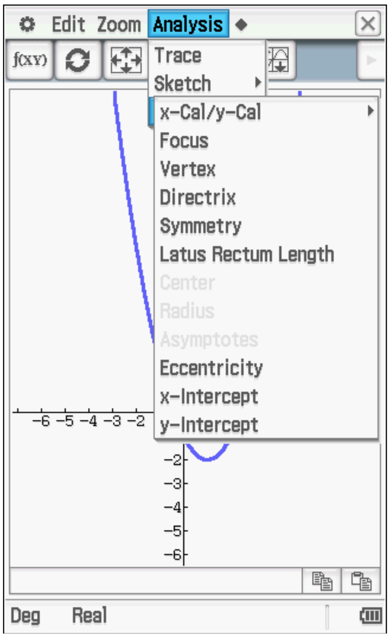
Painike Resize (näytön alapuolella) suurentaa näytön.



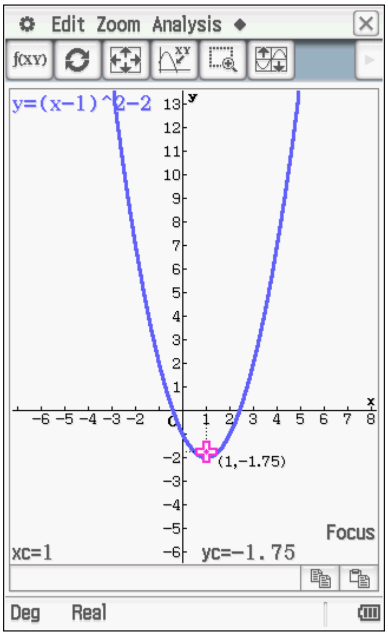


b)

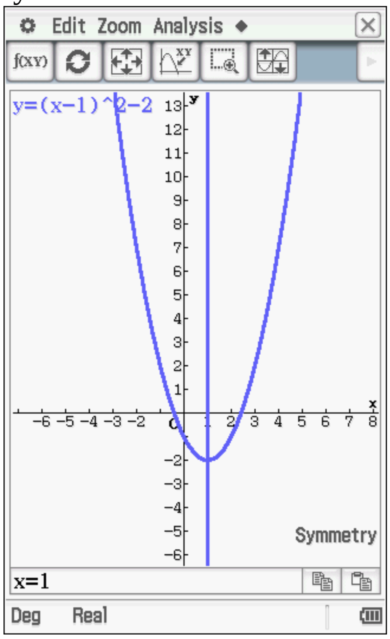
Valitse Analysis, G-Solve.



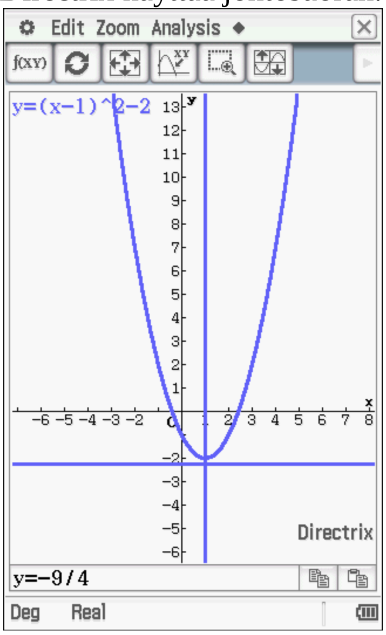
Focus näyttää polttopisteen.



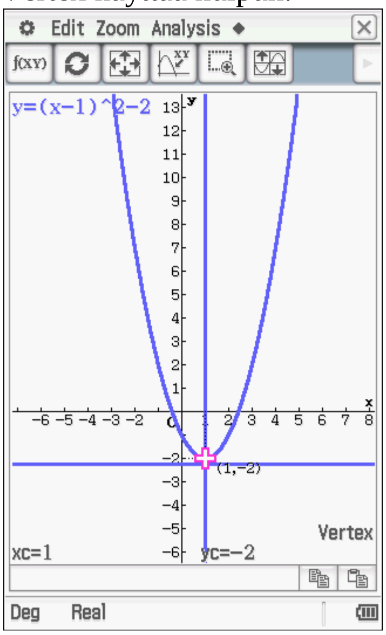
Symmetry näyttää symmetria-akselin.



Directrix näyttää johtosuoran.



Vertex näyttää huipun.



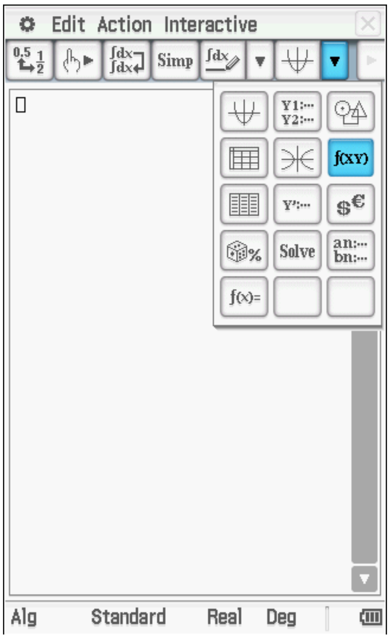
10.3 Ellipsi

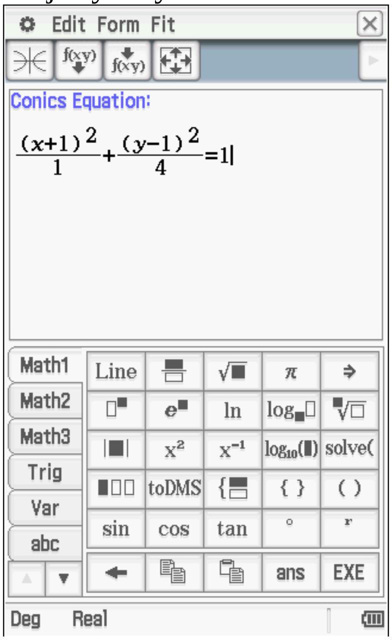
a) Piirrä ellipsi, joka määritellään $\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

b) Määritä polttopiste, leikkauspisteet x-akselilla ja y-akselilla.

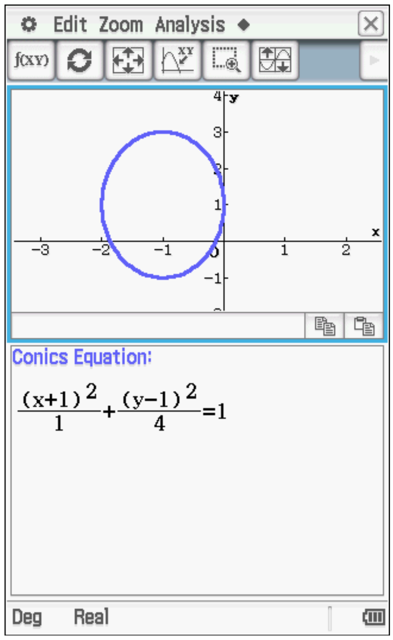
a)

Valitse Conics Main -sovelluksessa ja syötä yhtälö.



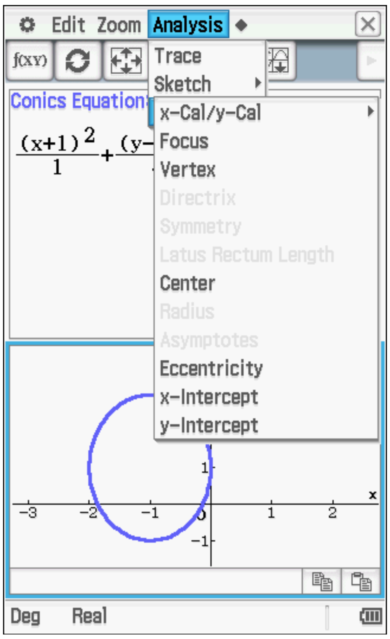


Paina Draw-kuvaketta.

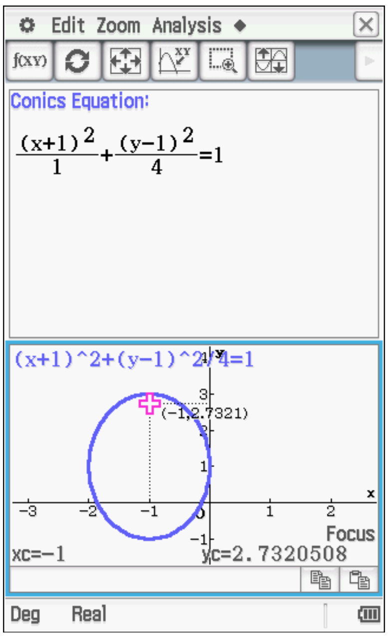


b)

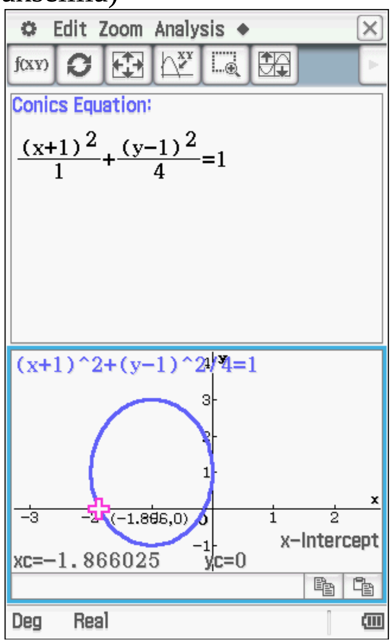
Analysis, G-Solve.



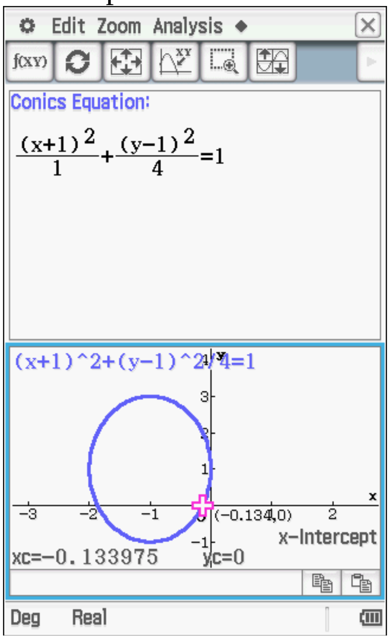
Focus näyttää polttopisteen.



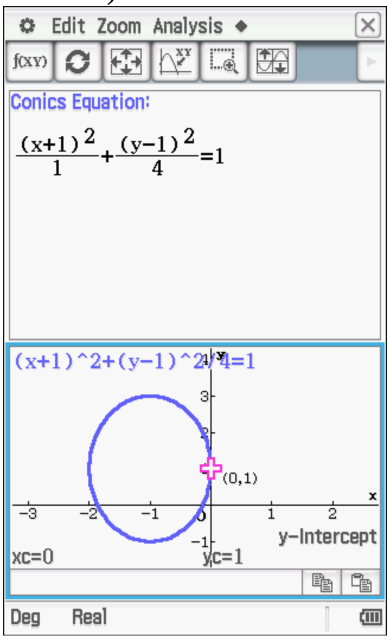
x-Intercept (leikkauspiste x-akselilla)



Nuoli oikealle näyttää seuraavan leikkauspisteen.



y-Intercept. (Leikkauspiste y-akselilla)

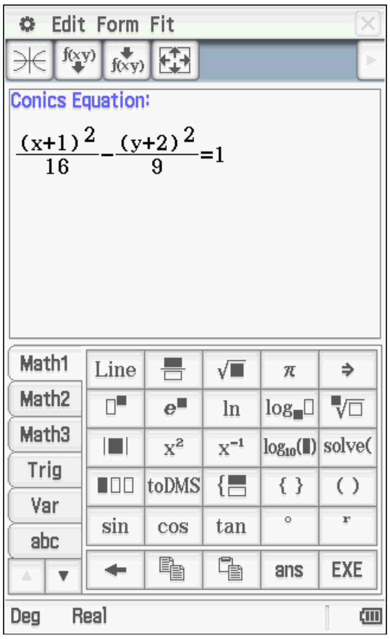


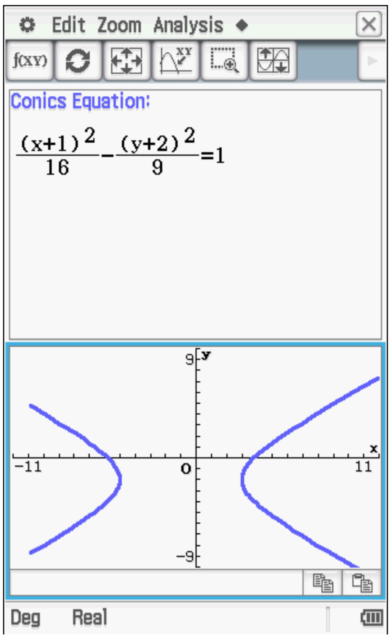
10.4 Hyperbeli

a) Piirrä hyperbeli, joka määritellään $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

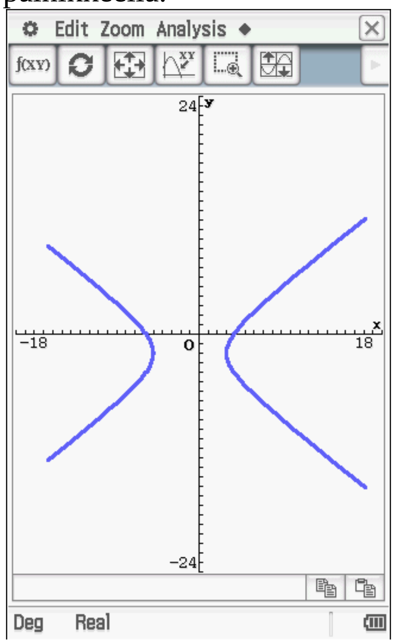
b) Määritä polttopisteet ja asymptoottien jyrkkyydet.

a)
Syötä yhtälö ja piirrä kuvaaja



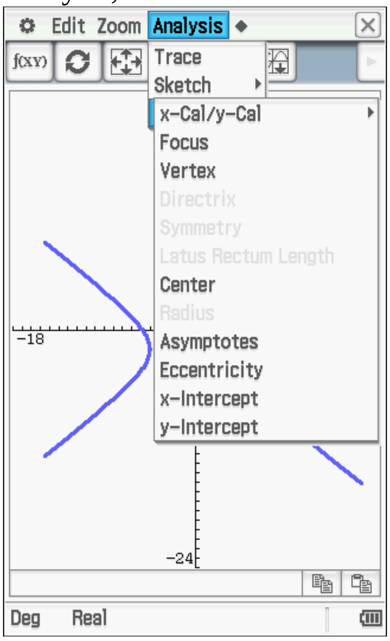


Muuta ikkunan koko Resize painikkeella.

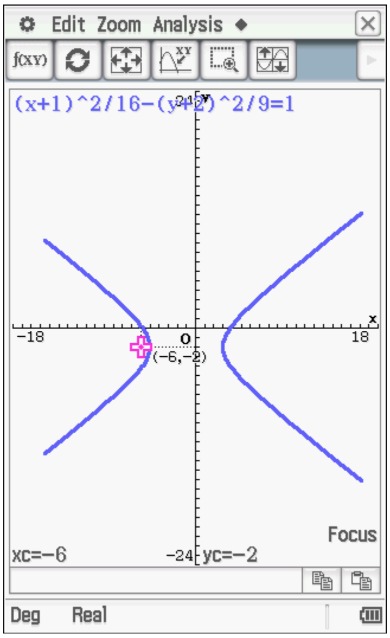


b)

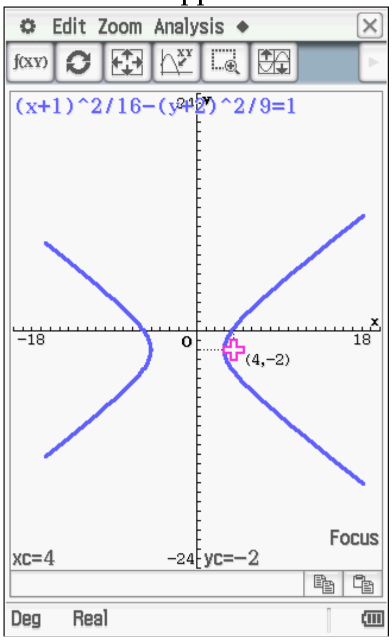
Analysis, G-Solve.



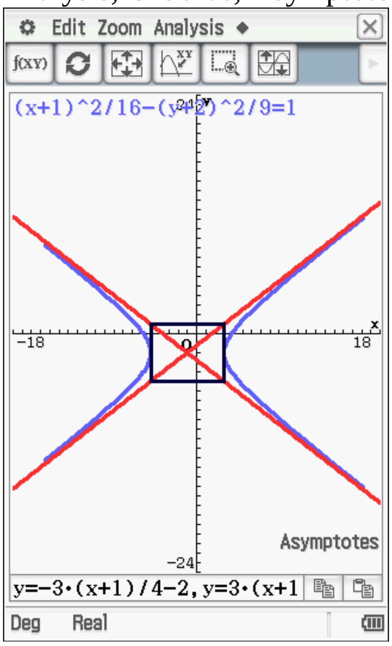
Focus.



Oikea nuolinäppäin.



Analysis, G-Solve, Asymptotes.



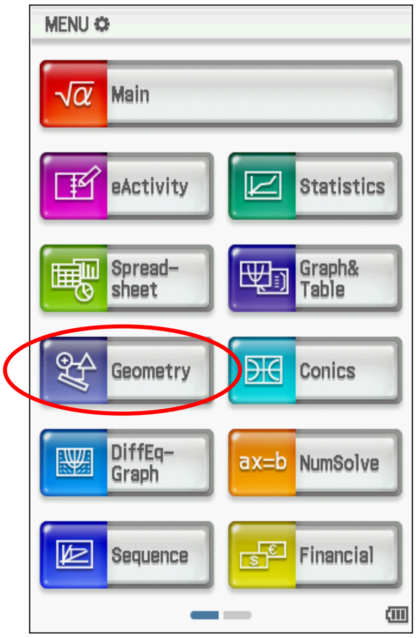
Asymptoottien jyrkkyydet ovat $\pm\frac{3}{4}$ (kulmakerroin).

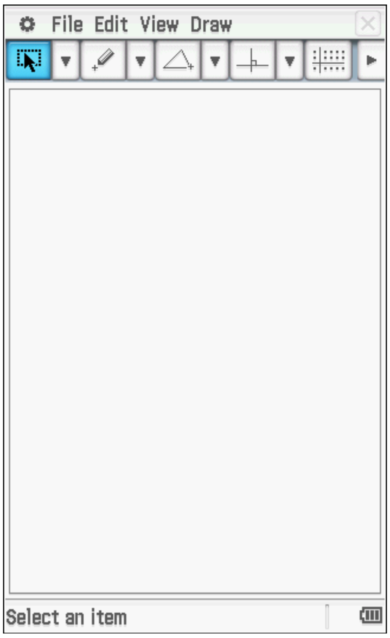
Koeta itse löytää hyperbelin muut tärkeät pisteet.
Kartioleikkaus voidaan myös piirtää napakoordinaattien ja parametrifunktioiden avulla

11. Geometria

Geometriasovelluksessa voit tehdä puhdasta tai analyyttista geometriaa.

11.1 Valikot ja näppäintoiminnot

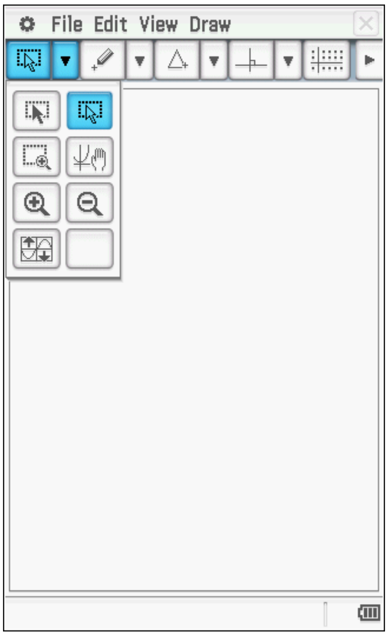


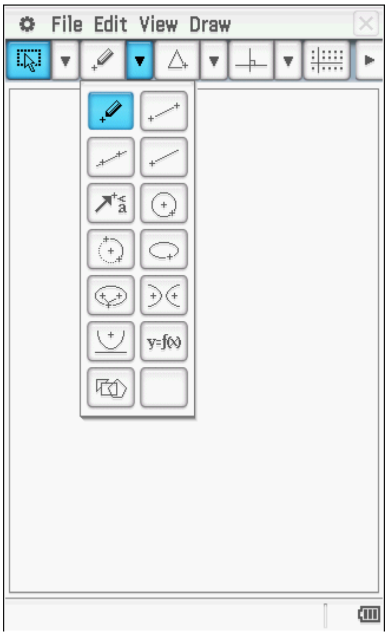


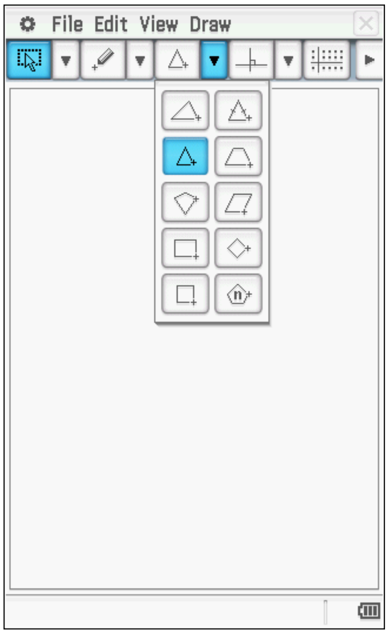
Kun valitset päävalikosta Geometry, näyttö tyhjenee ja näkyviin ilmestyy uusi painikevalikko näytön yläreunaan. Tätä valikkoa käytetään kuvioiden piirtämiseen ja näyttämiseen

Ylimpänä näytössä näkyvät seuraavat valinnat:

File Edit View Draw

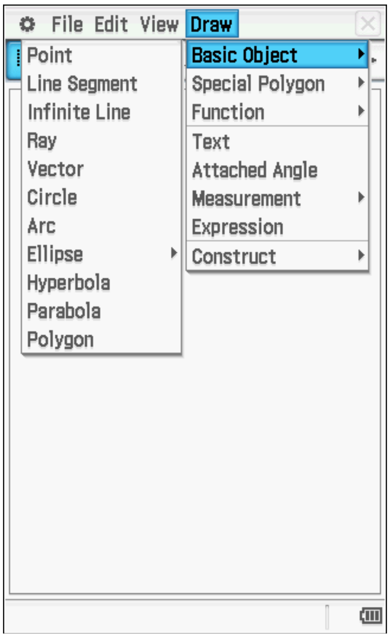


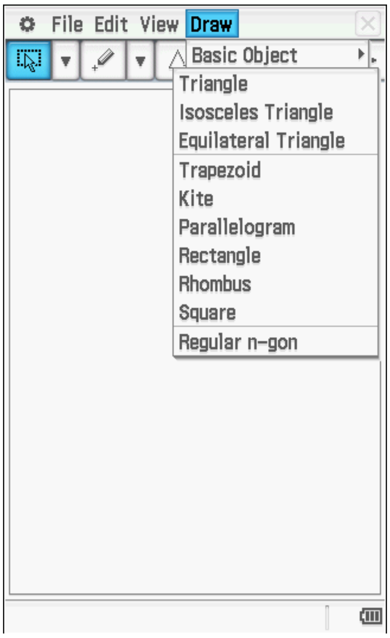




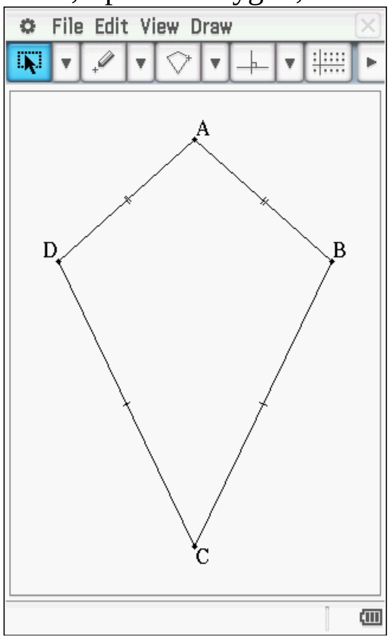
Seuraavassa kuvataan näiden painikkeiden toimintaa.

Draw-painiketta käytetään kuvaajien piirtämiseen. Draw-valikosta löytyvät vasemman puolimmaisessa kuvassa näkyvät valinnat erilaisille geometrisille muodoille ja perusmuodoille.

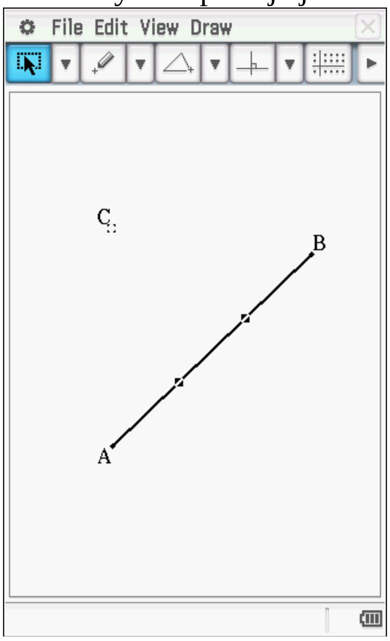




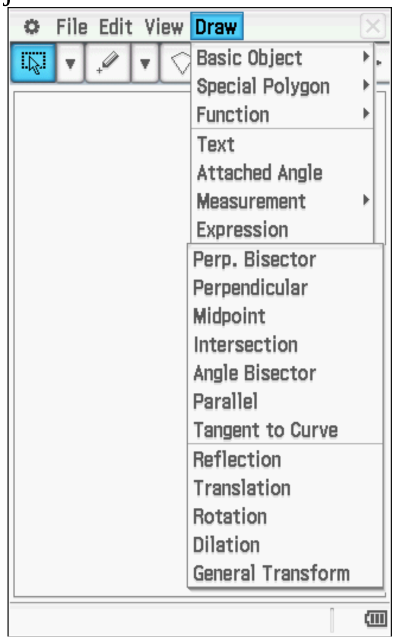
Draw, Special Polygon, Kite



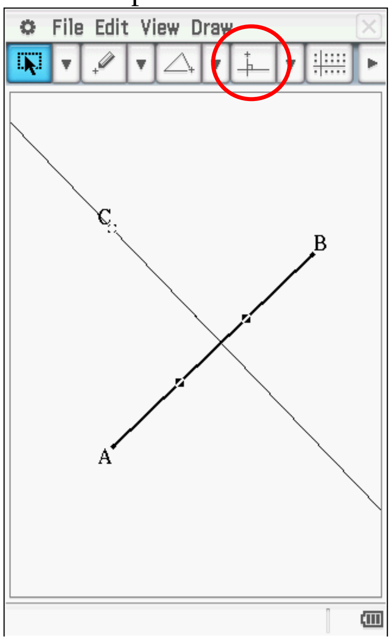
Jana ja piste.
Valitse kynällä piste ja jana.



Draw, Perpendicular tekee janalle keskinormaalin.



Painikkeista löydät samat toiminnot nopeasti.

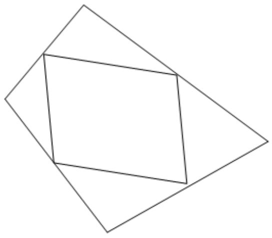


Geometriaohjelmisto on kattava ja se sisältää runsaasti erilaisia toimintoa. Kun aloitat työskentelyn Geometria-sovelluksen parissa on hyvä muistaa yksi asia: **tyhjän kohdan koskettaminen kosketuskynällä poistaa aiemmat valinnat.**

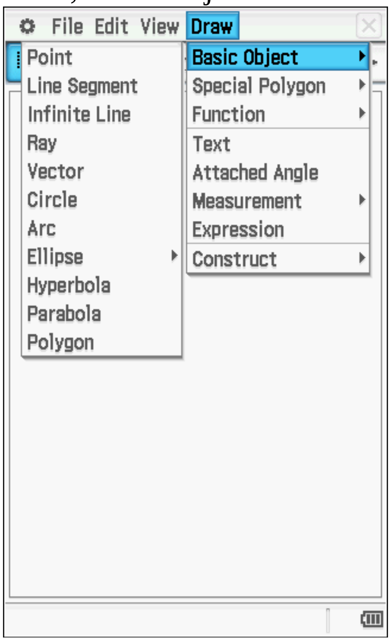
Esim. yllä kuvassa on valittu sekä piste C että jana AB. Nämä valinnat poistetaan koskettamalla tyhjää kohtaa piirtoalustassa.

11.2 Nelikulmio nelikulmiossa

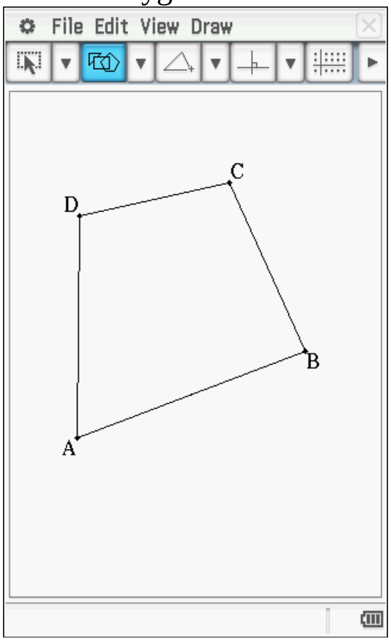
Kuvitellaan jokin mielivaltainen (ei säännöllinen) nelikulmio. Voimme määrittää uuden nelikulmion piirtämällä viiva nelikulmion sivujen keskipisteiden välille. Mitä voit sanoa uudesta nelikulmiosta?



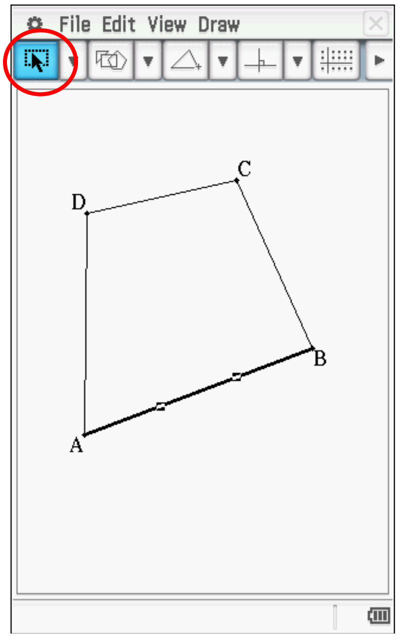
Draw, Basic Object



Valitse Polygon.

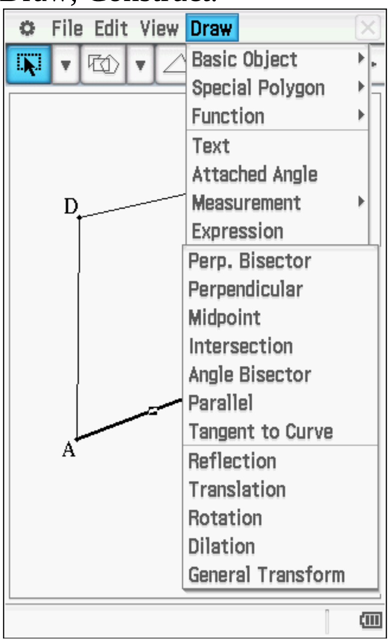


Merkitse AB.

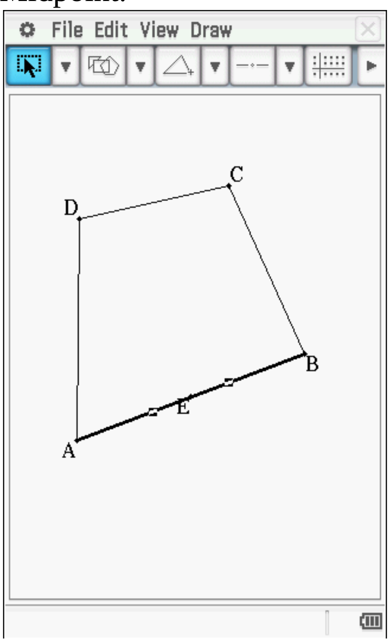


Laite piirtää monikulmion automaattisesti, kun kulmapisteet on merkitty.

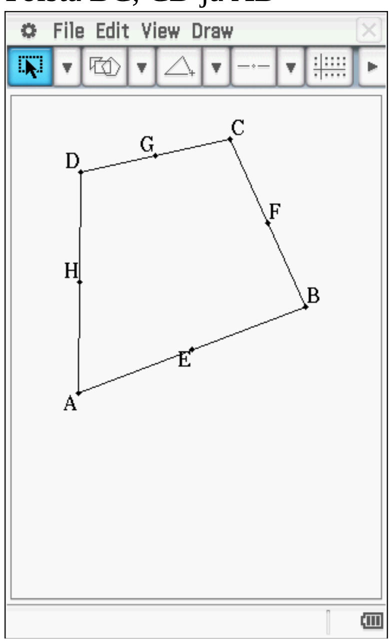
Draw, Construct.



Midpoint.

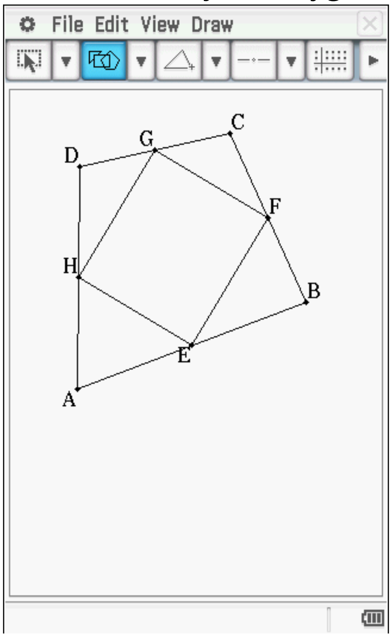


Toista BC, CD ja AD

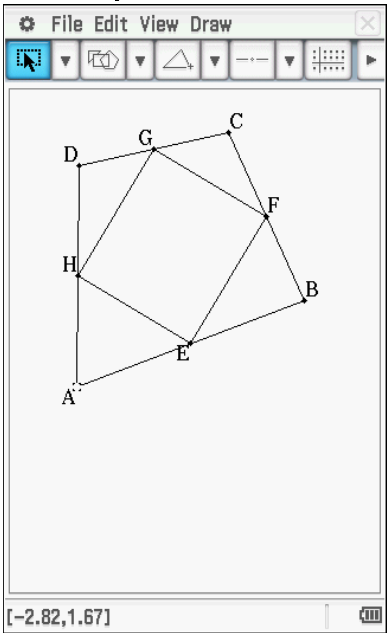


Nyt voit tehdä kokeiluja geometriaohjelmistolla.

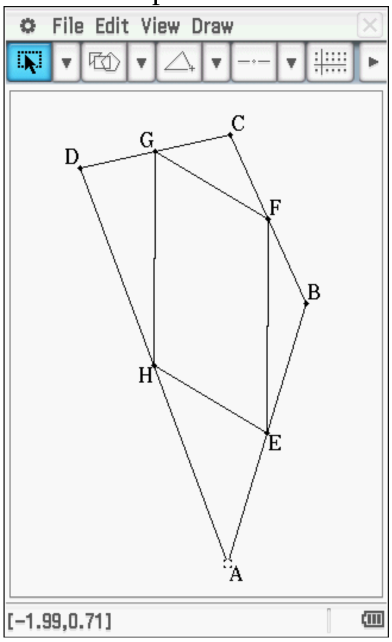
Draw, Basic Object, Polygon.



Valitse kynällä A.



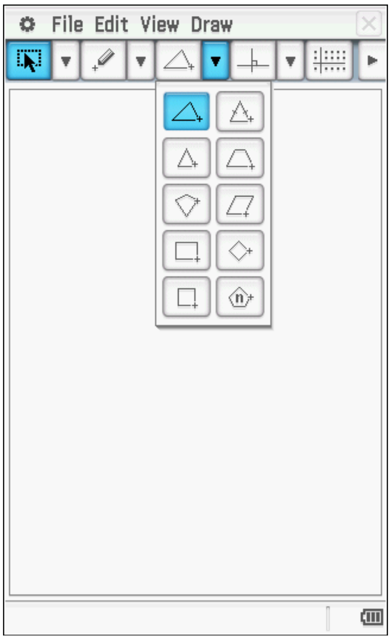
Siirrä A eri paikkaan.



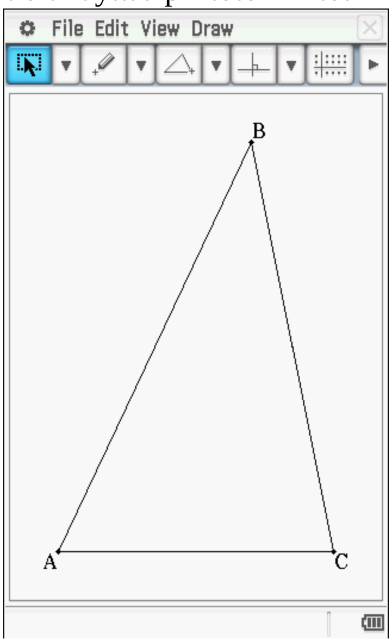
Nyt voit tutkia kuvion sisään piirrettyä nelikulmiota. Tutkiminen tuottaa olettamuksen, että nelikulmio on suunnikas. Tässä yhteydessä ei ole tarpeen esittää asian teoreettista perustelua.

11.3 Kolmikulmion ominaisuudet

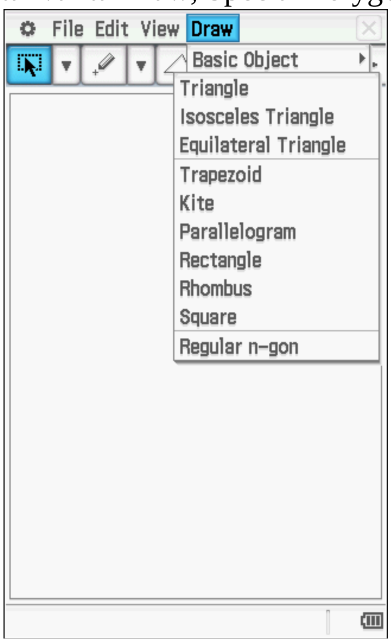
Piirrä mielivaltainen kolmio ja muodosta kolmion mediaanit.



Voit käyttää piirtotoimintoa



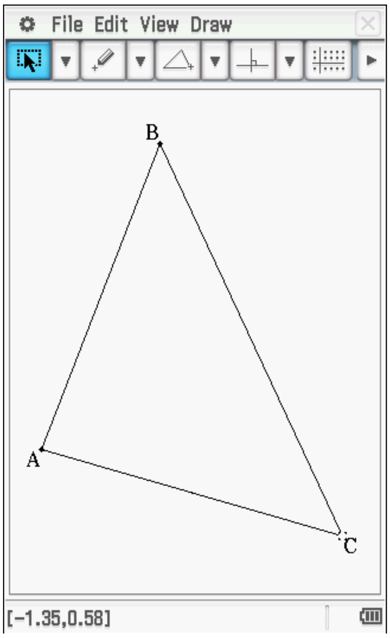
tai valita Draw, Special Polygon.

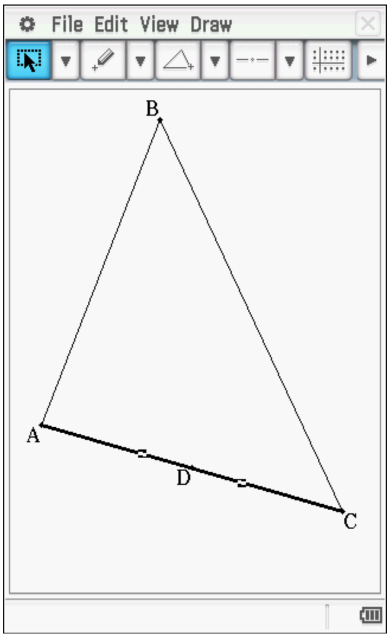


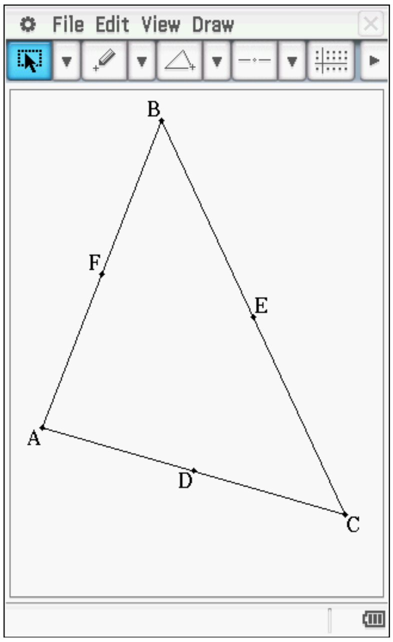
Harjoittele muilla muodoilla.

Draw, Construct, Midpoint.

Toista sama muille sivuille.



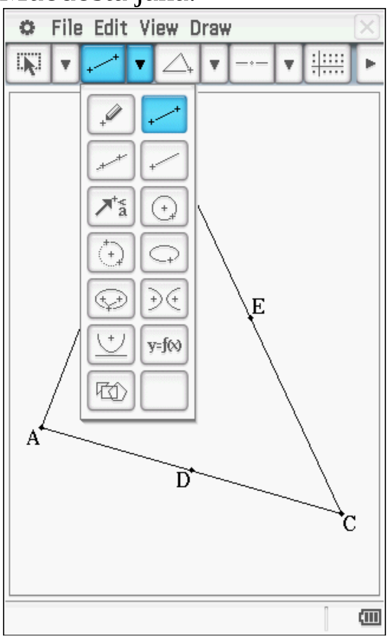


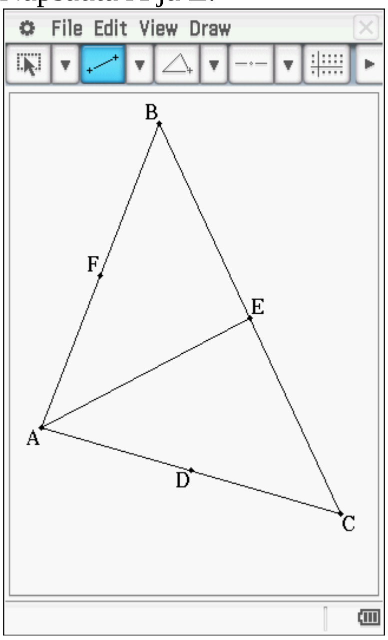


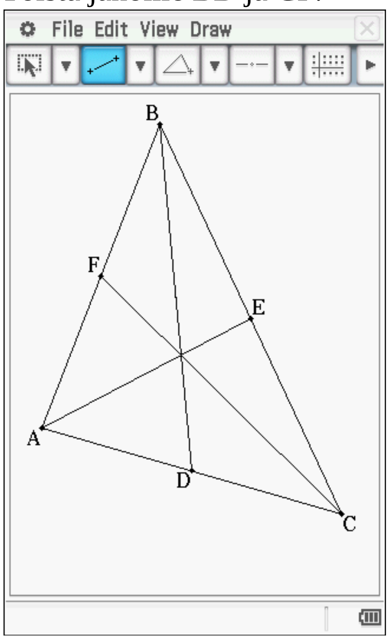
Muodosta jana.

Napsauta A ja E.

Toista janoille BD ja CF.



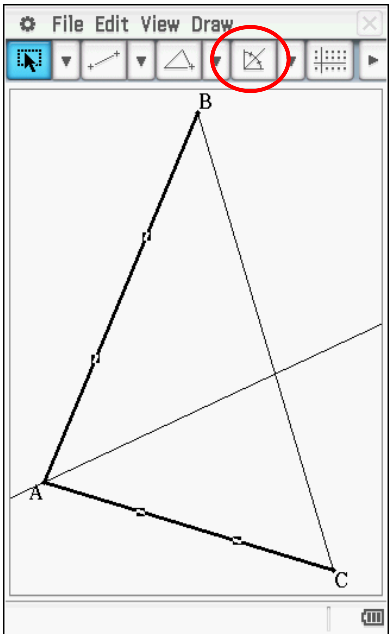


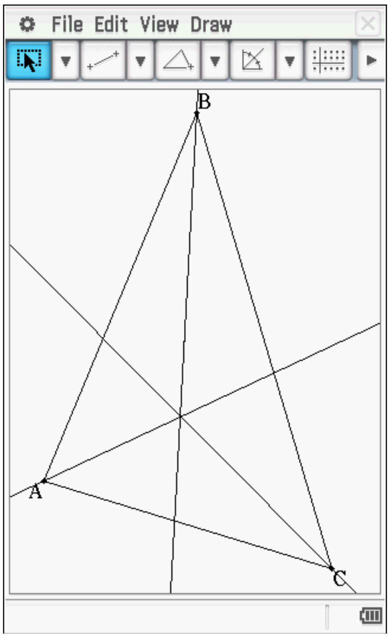


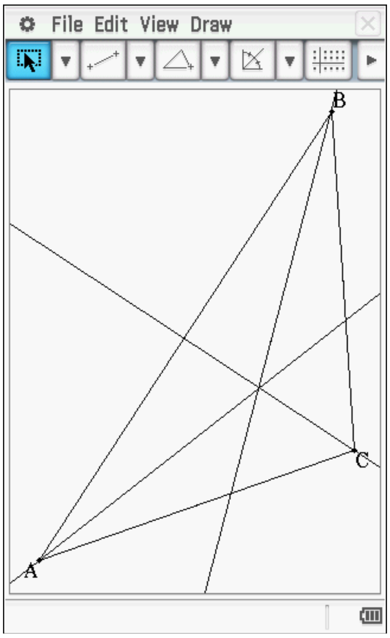
Kuvio osoittaa kolmen mediaanin leikkaavan toisensa samassa pisteessä. Muokkaa kolmiota ja kokeile päteekö tämä jälleen. Voidaanko tämä todistaa matemaattisesti?

Piirrä jokin kolmio ja luo kolmion kulmienpuolittajat.

Valitse ensin kynällä AC ja AB. Valitse työkaluista kulmanpuolittaja. Poista valinnat koskemalla tyhjää kohtaa ja toista prosessi muillekin kulmille. Muuta kolmion muotoa.



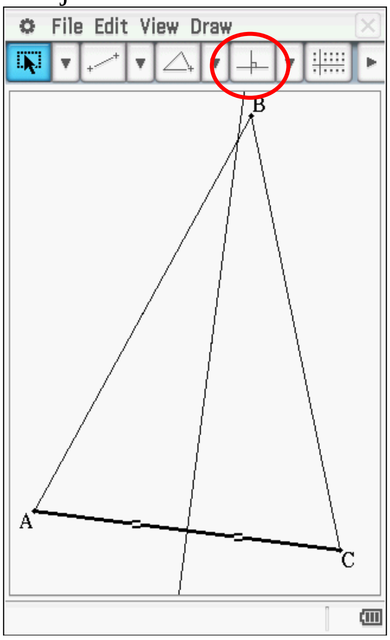


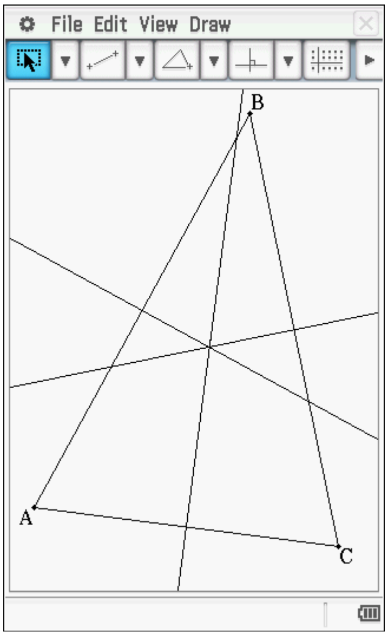


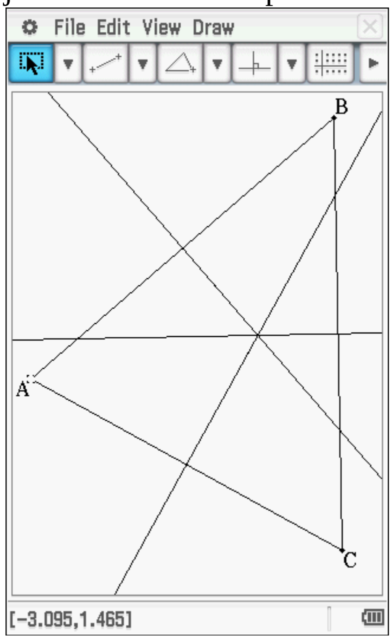
Kuvio osoittaa kolmen puolittajan leikkaavan toisensa samassa pisteessä. Muokkaa kolmiota ja kokeile päteekö tämä jälleen. Voidaanko tämä todistaa matemaattisesti?

 Piirrä jokin kolmio ja sivuille keskinormaalit.

Valitse AC ja piirrä sille keskinormaali. Poista valinta koskemalla tyhjää kohtaa. Valitse uusi sivu ja toista sama. Kokeile muuttaa kolmion muotoa siirtämällä jotain kolmion kärkipisteistä.





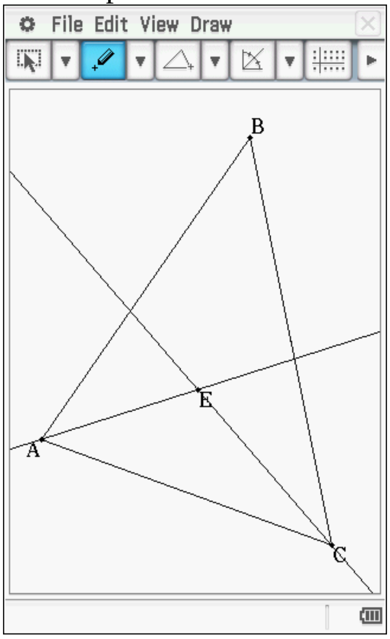


Kuvio osoittaa kolmen keskinormaalin leikkaavan toisensa samassa pisteessä. Muokkaa kolmiota ja kokeile päteekö tämä jälleen. Voidaanko tämä todistaa matemaattisesti?

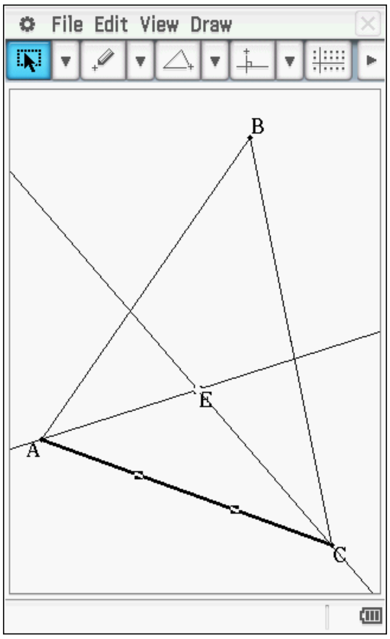
11.4 Kolmion sisään piirretty ympyrä ja kolmion ympärille piirretty ympyrä

 Piirrä jokin kolmio ja kahdelle kulmalle kulmanpuolittajat.

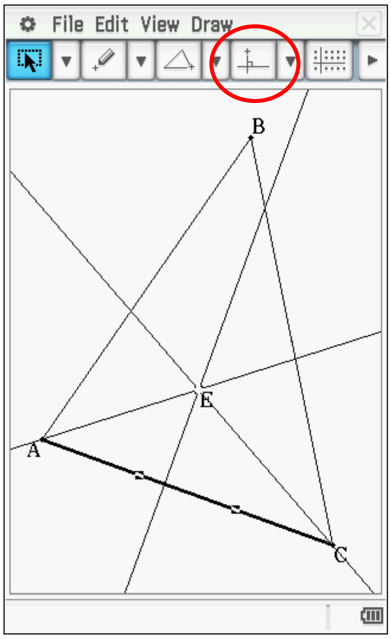
Määritä kulmanpuolittajien leikkauspiste E



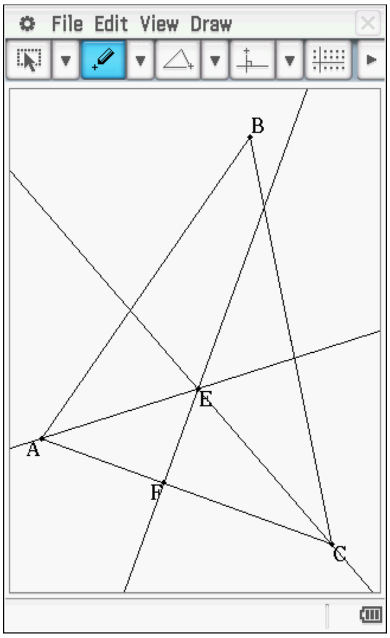
Valitse piste E ja sivu AC.



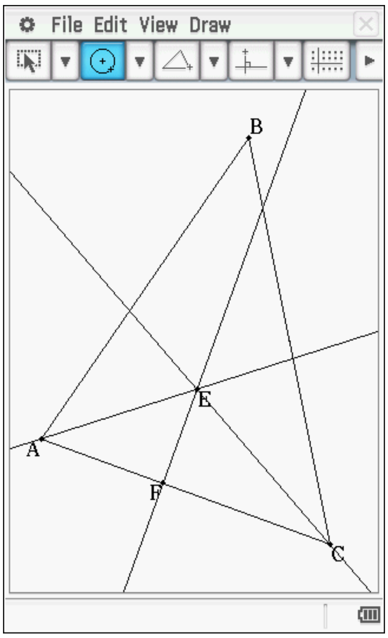
Piirrä normaali pisteestä E sivulle AC.



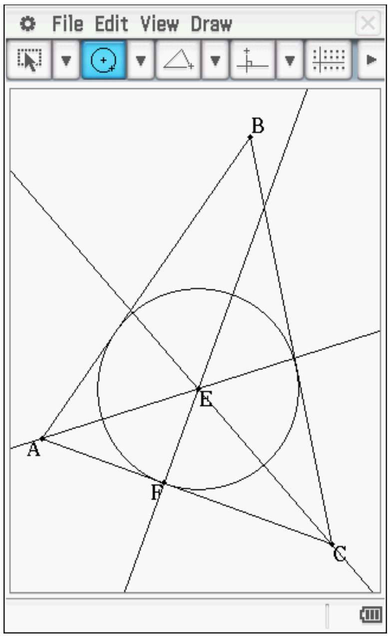
Määritä piste F.



Valitse ympyrätyökalu.

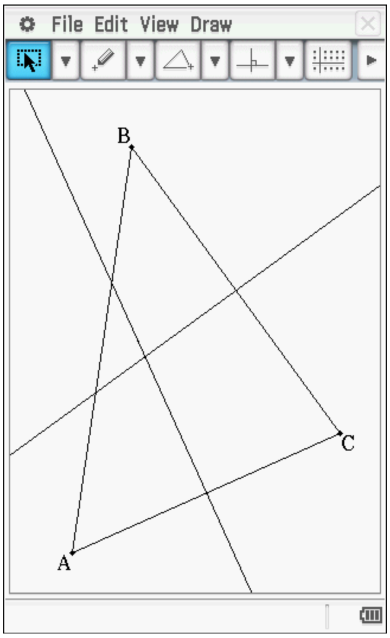


Koske pisteisiin E ja F.

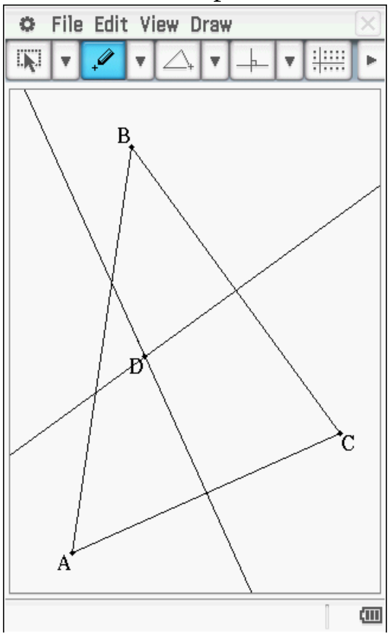


Piirrä jokin kolmio ja kahdelle sivuista keskinormaalit

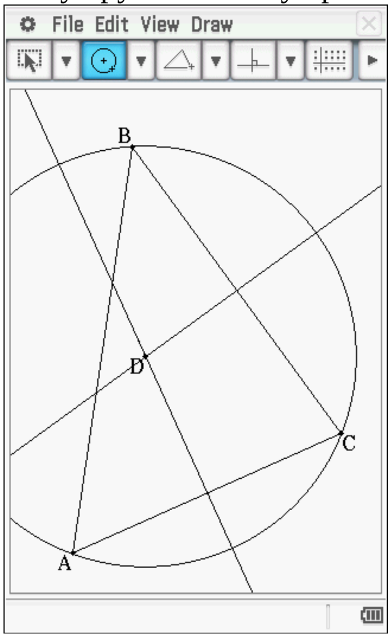
Keskinormaalit



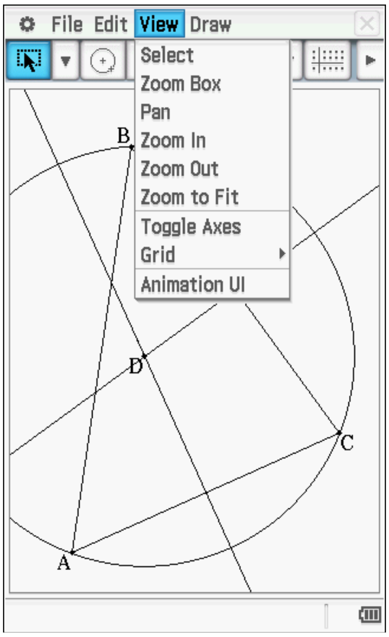
Määritä leikkauspiste.



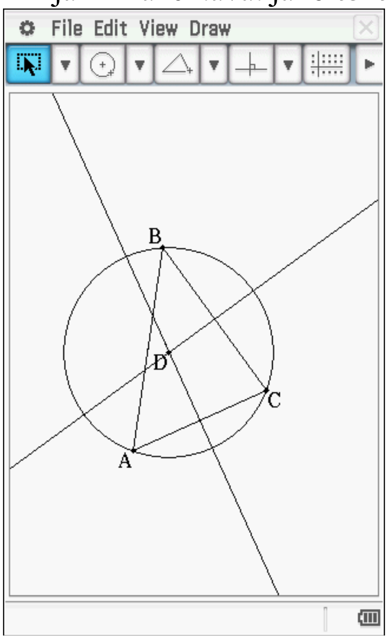
Luo ympyrä kolmion ympärille



Voit säätää zoomausta

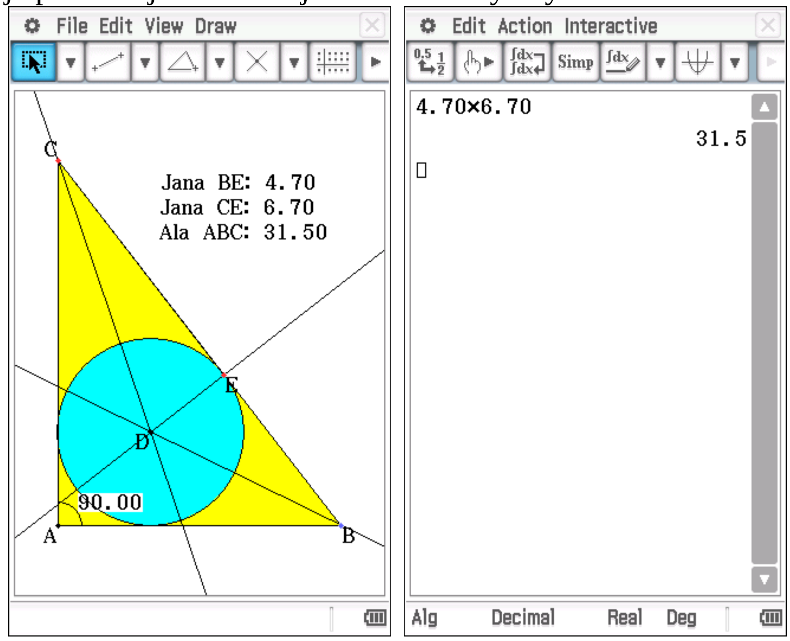


Muista pikazoomaus; näppäimistön ”=” sovittaa ihanteellisesti, ”+” ja ”-” lähentävät ja loitontavat.



 Piirrä suorakulmainen kolmio ABC ja luo sen sisään ympyrä. Tutki onko olemassa yhteys kolmion pinta-alan ja niiden kahden janan pituuden välillä, joihin sivuamispiste E jakaa hypotenuusan?

ClassPad laskee automaattisesti kolmion ABC pinta-alan
ja pituudet janoille BE ja CE. Näetkö yhteyden?

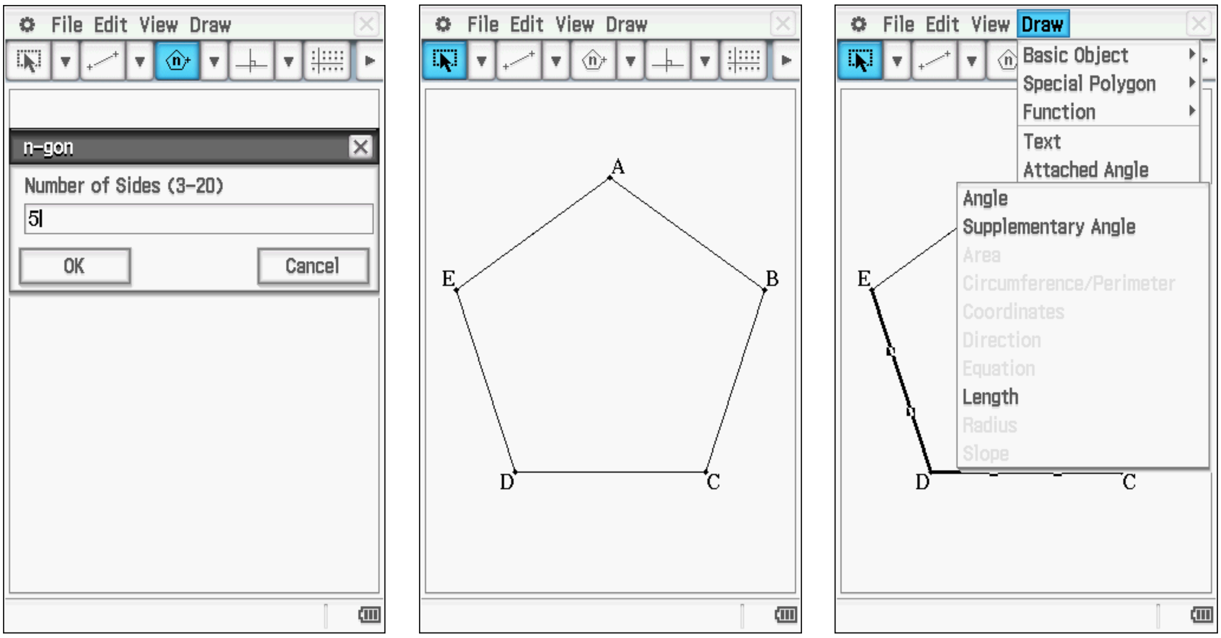


Värit voi määrittää Edit- ja Style-valintojen avulla. Pituudet voi määrittää Draw- ja Measurement-valintojen avulla. Valitse esim. pisteet B ja E ja niille pituus Measurement, Length.

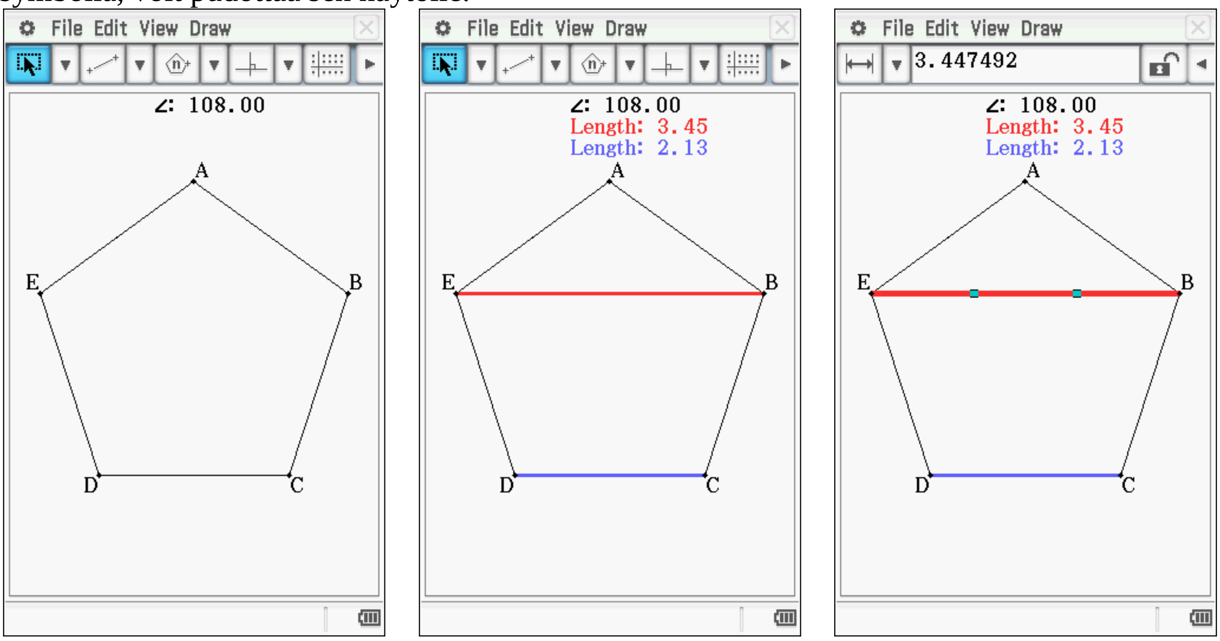
11.5 Viisikulmio

Piirrä säännöllinen viisikulmio. Kuinka suuri kulman suuruus on säännöllisessä viisikulmiossa?

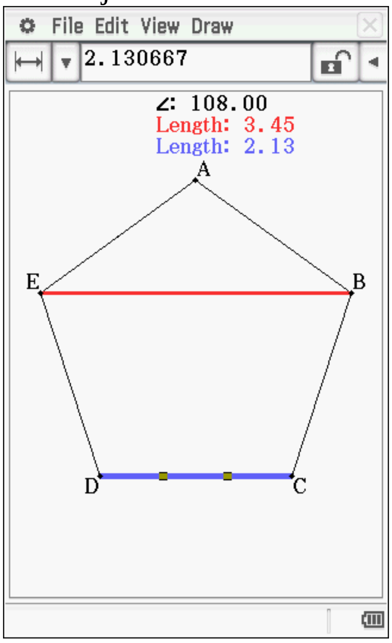
Mittaa viisikulmiosta yhden lävistäjän ja yhden sivun pituus. Laske lävistäjän ja sivun pituuden välinen suhde.

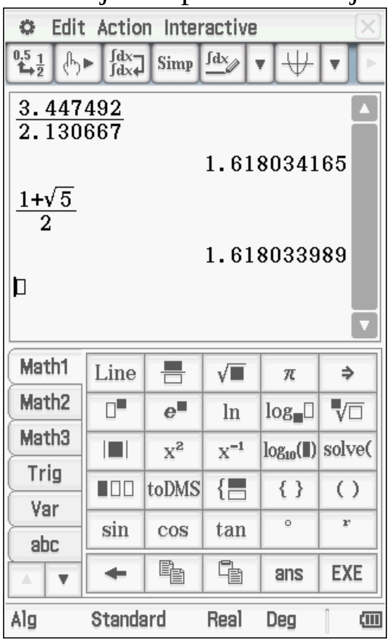


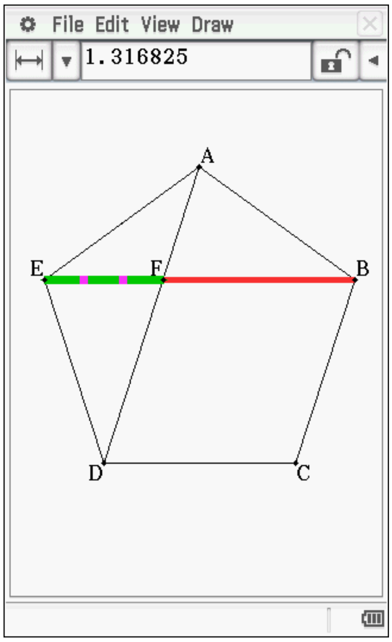
Kun jokin geometrisen kuvan kohta on valittu, voi sen ominaisuuksia katsoa näytön oikeassa yläreunassa olevasta nuolesta avautuvasta ominaisuusrivistä. Selaa ominaisuuksia alaspäin osoittavasta nuolesta. Koskemalla ominaisuusrivin vasemmalla puolella olevaa ominaisuuden symbolia, voit pudottaa sen näytölle.



Kuulostaako suhde tutulta? Mikä on tämän kuvion kultainen leikkaus? Vertaa suhdetta aiemmin tässä ohjeessa laskettuu Fibonaccin lukujonon peräkkäisten jäsenten suhteeseen.

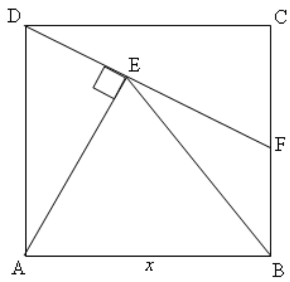




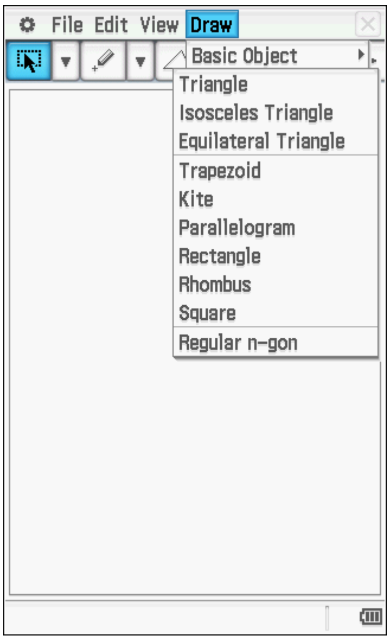


11.6 Neliölaskentaa

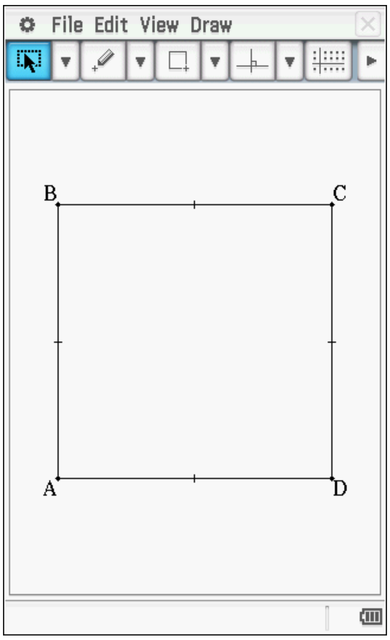
Neliön ABCD sivun pituus on x. F on keskikohta janalla BC, ja $AE \perp DF$. Mittaa neliön sivun ja janan BE pituus .



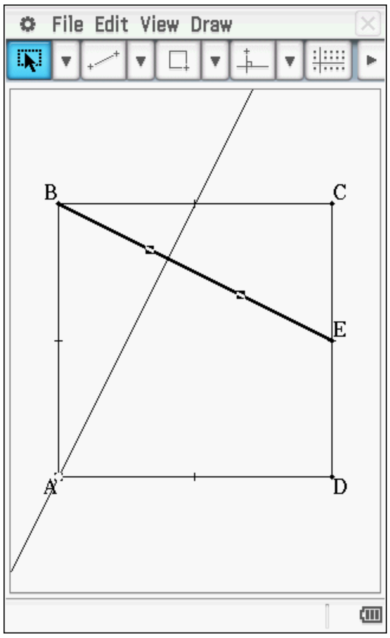
Draw, Square. A:sta.



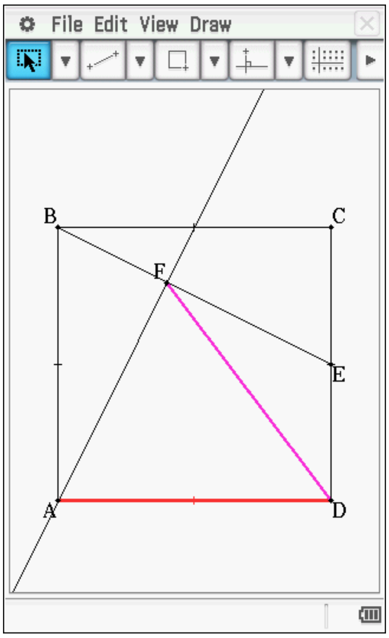
Valitse DC ja Midpoint.



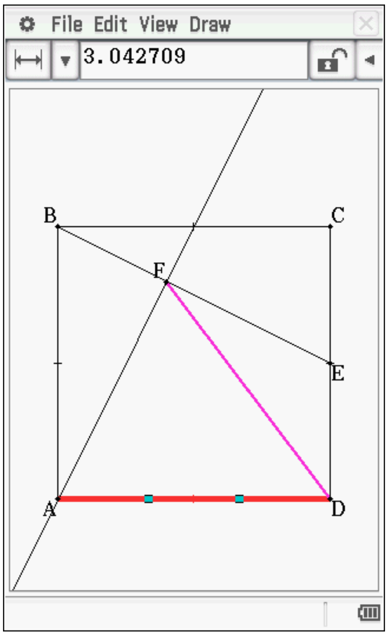
Tee jana BE ja sille normaali



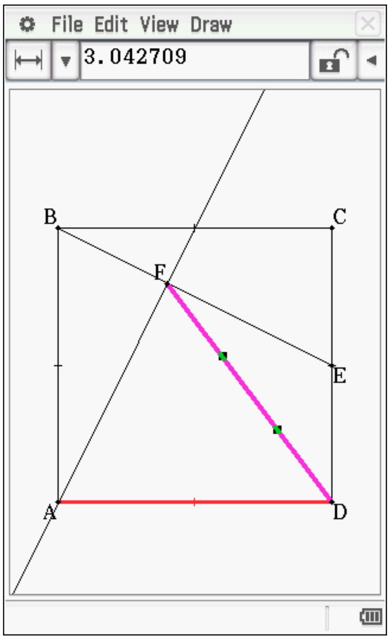
Määritä F. Piirrä jana FD.



Janan AD pituus



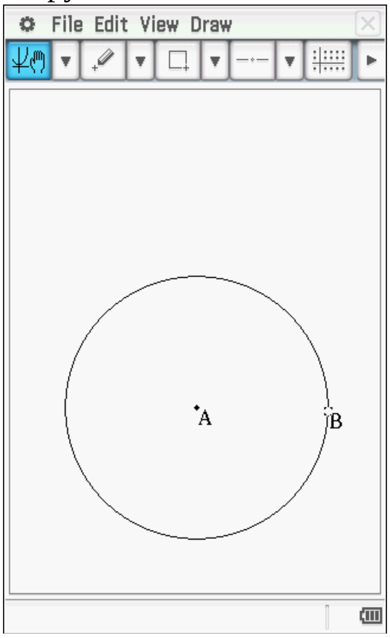
Janan FD pituus



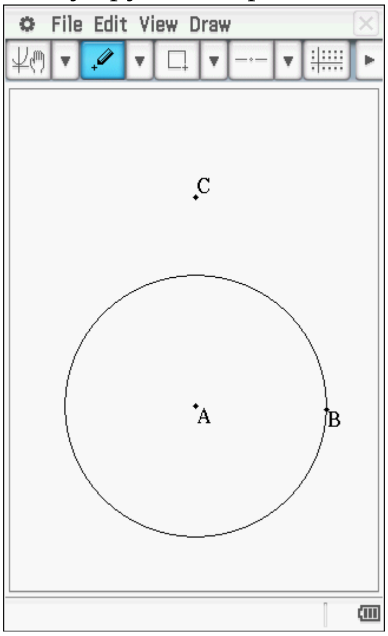
Mitä näemme? Muokkaa neliötä ja tutki pitääkö olettamus paikkansa. Todista matemaattisesti löydetylle yhteydelle.

11.7 Tangentti ympyrän ulkopuolisesta pisteestä

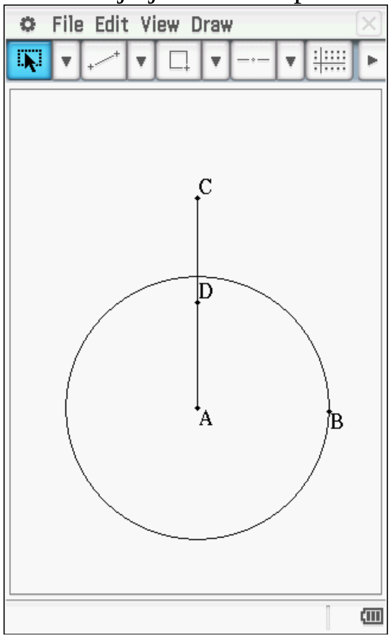
Ympyrä



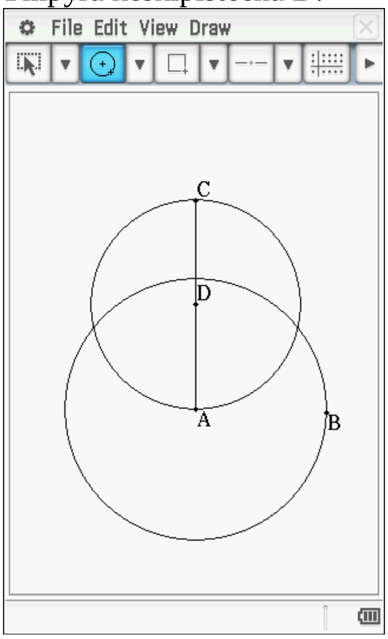
Piste ympyrän ulkopuolella.



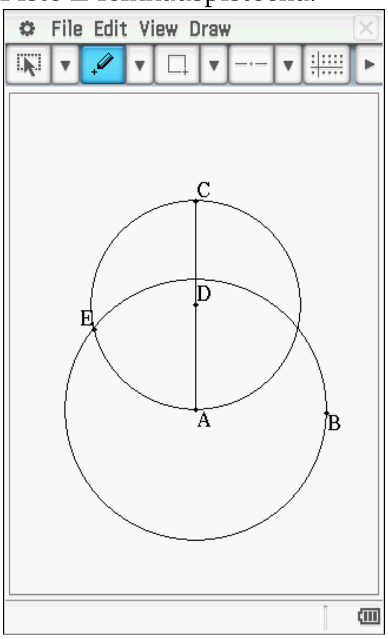
Jana AC ja janan keskipiste.



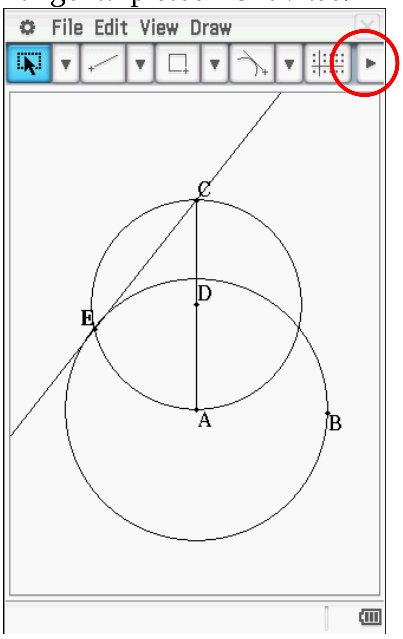
Ympyrä keskipisteenä D.



Piste E leikkauspisteenä.



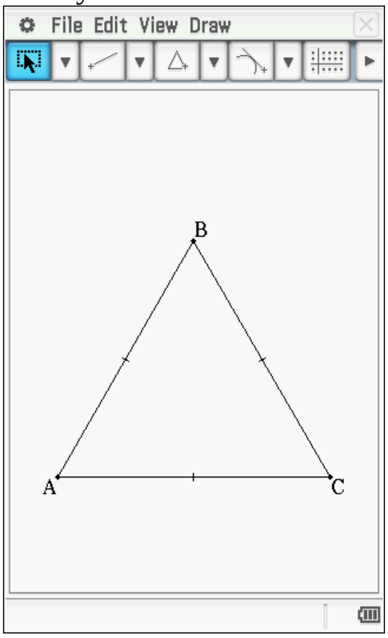
Tangentti pisteen C lävitse.



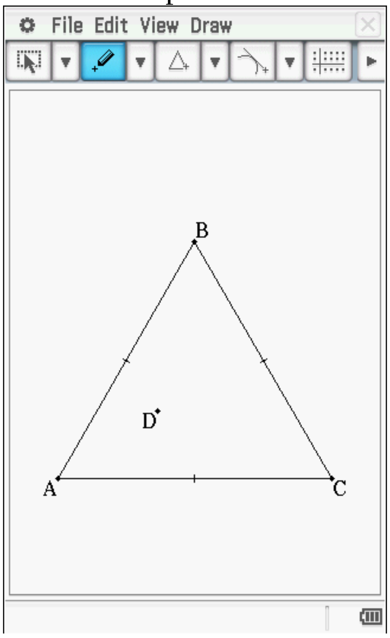
Perustele yllä oleva. Valitsemalla tangenttisuoran kynällä, voit helposti selvittää sen yhtälön. Paina äärimmäisenä oikealla olevaa pientä nuolta avataksesi ominaisuuskentän.

11.8 Mielenkiintoinen geometrinen lauseke

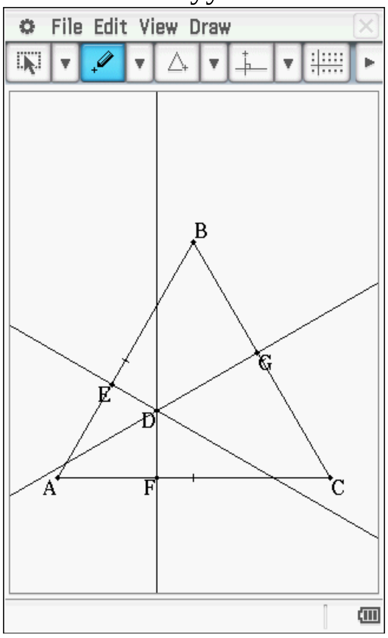
Tasakylkinen kolmio



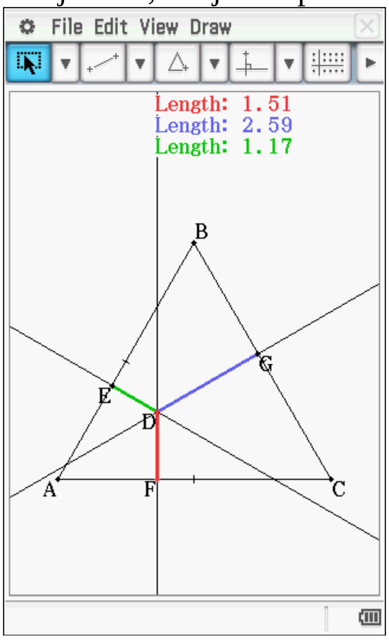
Satunnainen piste D.



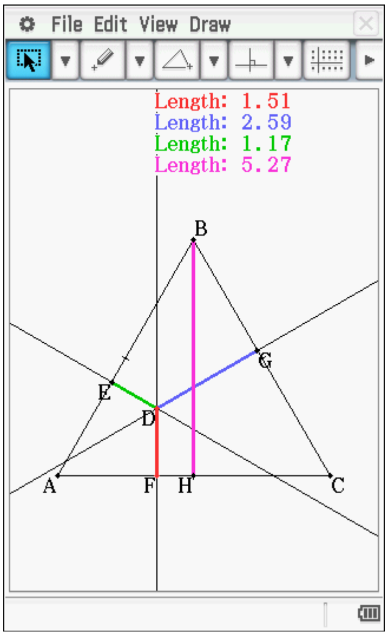
Pisteen D etäisyys sivuista.

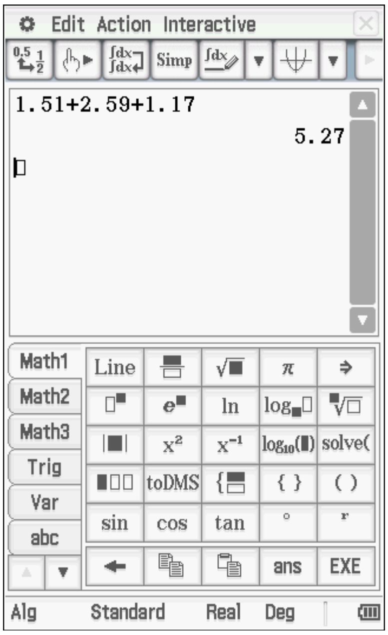


Janojen ED, FD ja DG pituudet.



Korkeus



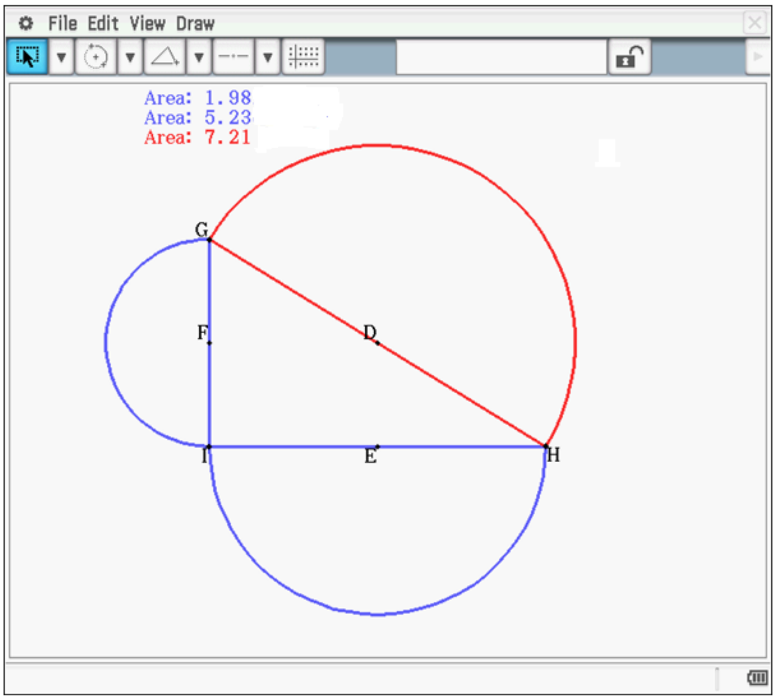


Mitä tästä tulee mieleen? CP400 -laskinta voi käyttää myös hypoteesien muodostamiseen. Muokkaa kolmiota ja liikuta pistettä D kolmion sisässä ja tutki päteekö alla oleva Vivianin lause.

Tasasivuisen kolmion sivujen etäisyydet kolmion sisällä olevasta pisteestä ovat yhteenlaskettuna sama kuin kolmion korkeus.

11.9 Pythagoras ja puoliympyrät

Miksi kahden sinisen puoliympyrän alat ovat yhteensä punaisen puoliympyrän pinta-ala?



Tee kokeiluja tasasivuisen kolmion kateeteilla ja hypotenuusalla.

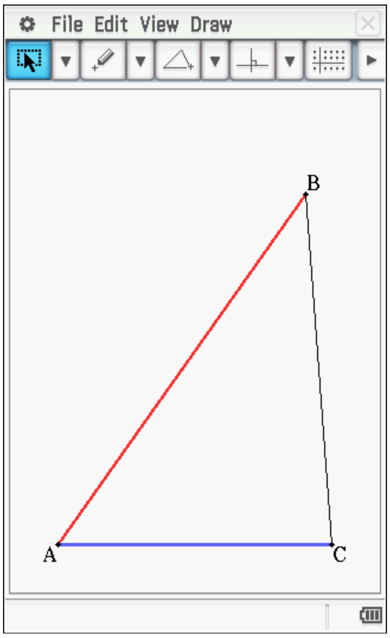
Mitä voimme sanoa muista yhdenmuotoisista kuvioista?

11.10 Kolmion pinta-ala

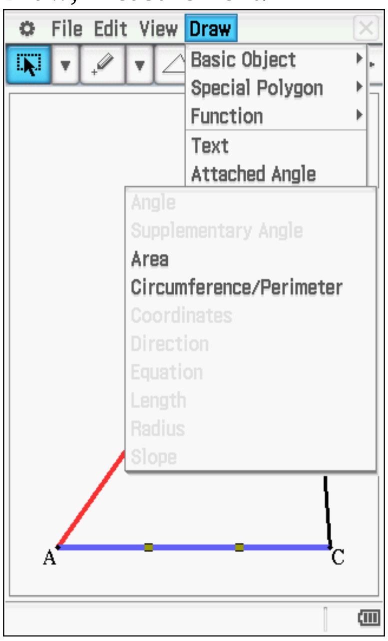
Piirrä vapaavalintainen kolmio ABC. Mittaa kolmion kahden sivun pituus ja niiden välinen kulma.

Laske $A = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$.

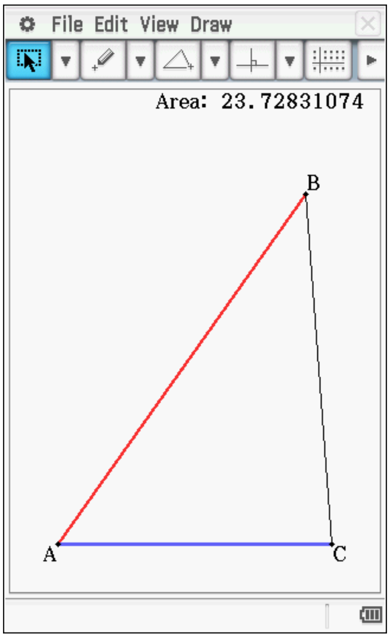
Piirrä kolmio

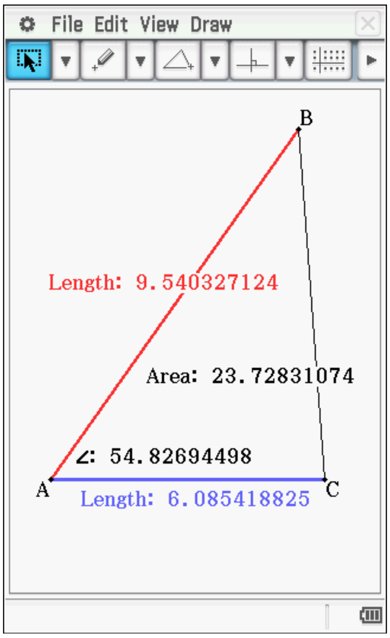


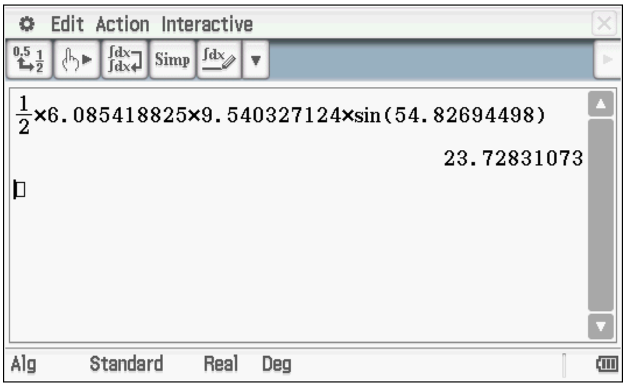
Draw, Measurement.



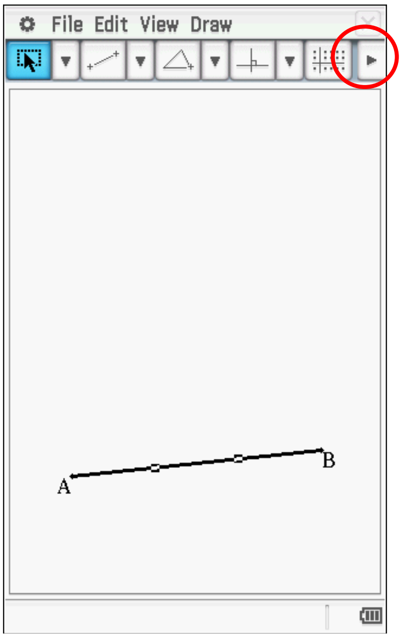
Area.



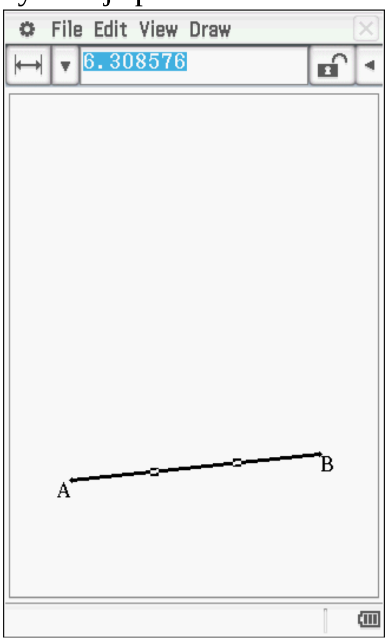




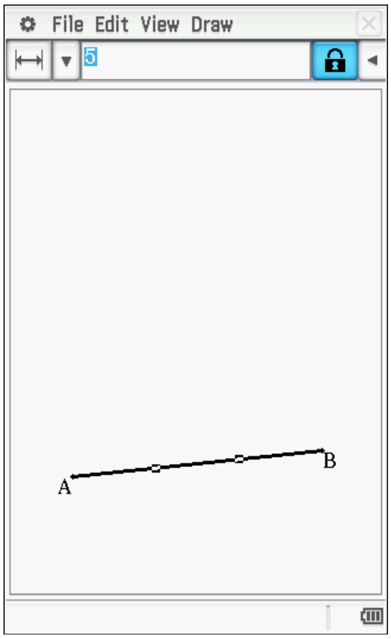
Piirrä kolmio ABC, jossa AB = 5 cm, AC = 3 cm ja $\angle A = 60^\circ$. Laske pinta-ala.



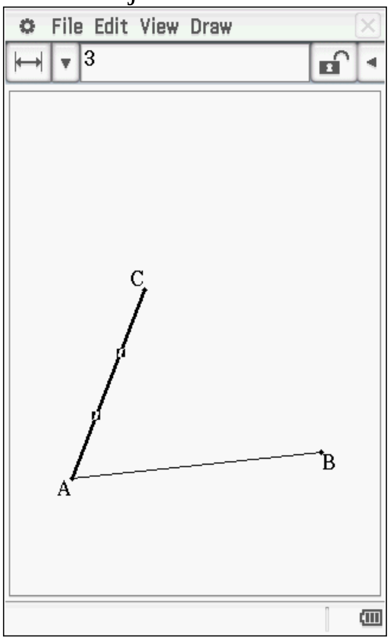
Syötä 5 ja paina EXE.



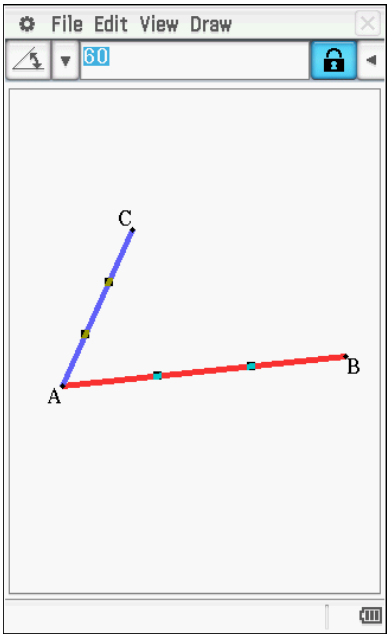
Ominaisuus lukittuu.



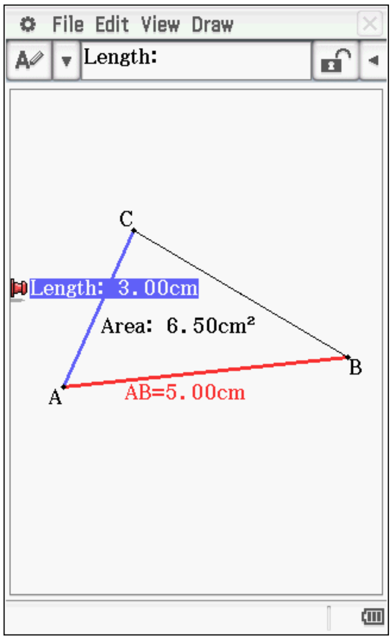
Tee sama janalle AC



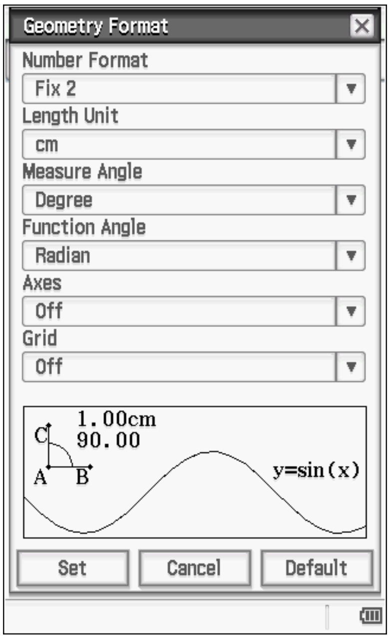
Aseta kulmaksi A 60^o.



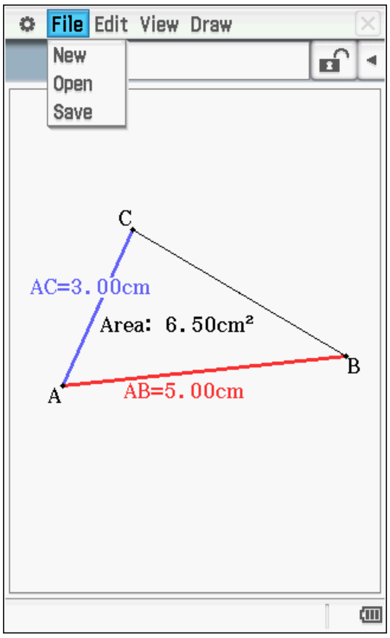
Tekstiä voi muokata.



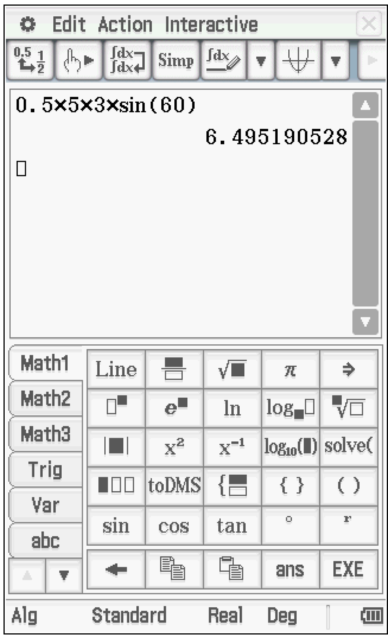
Pituuden yksikkö on cm.



Voit myös tallentaa tiedoston.



Pinta-alan suuruus laskemalla.

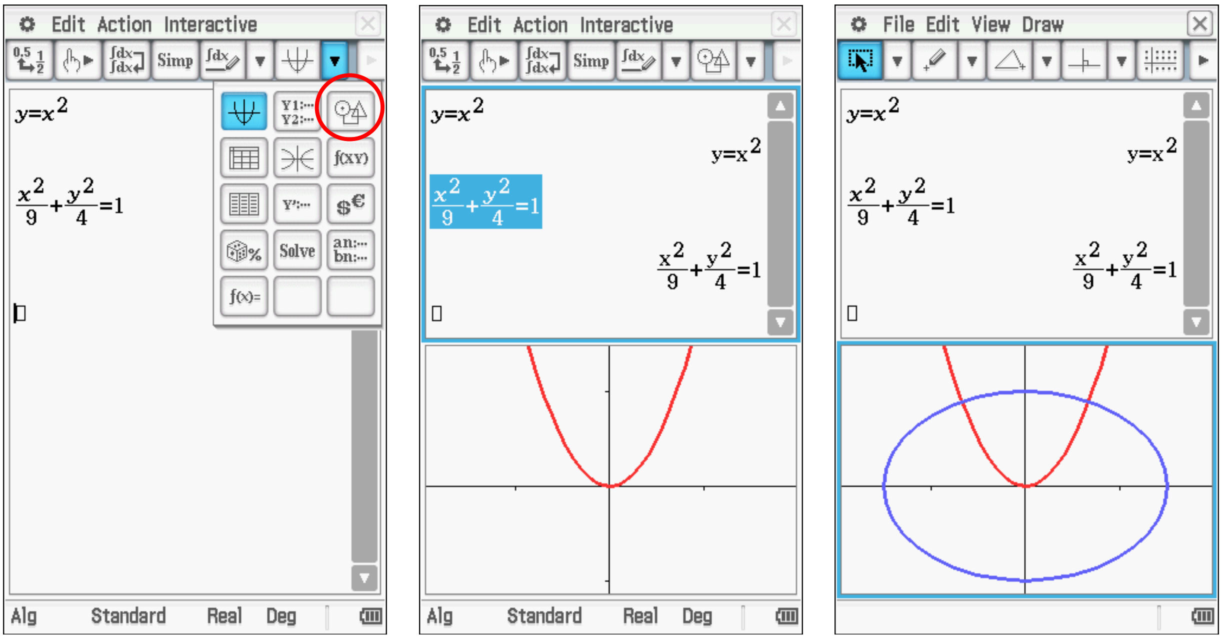


Harjoittele piirtämistä, mittaamista ja laskemista.

11.11 Main -sovelluksesta geometriaan ja takaisin

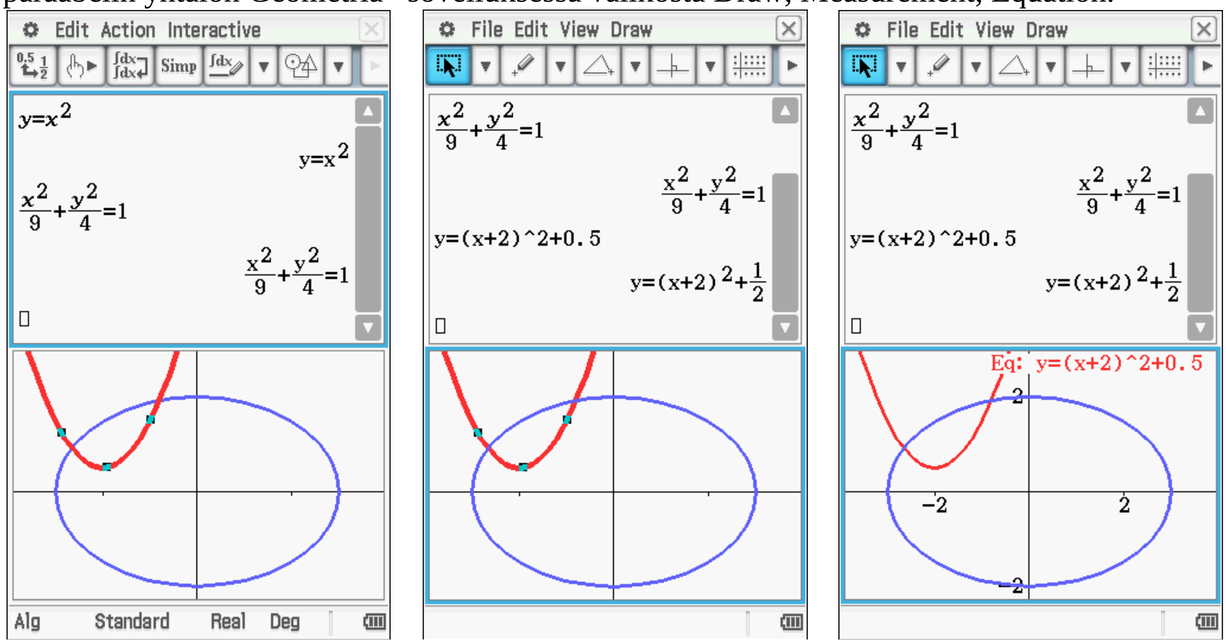
Syötä lauseke $y = x^2$ ja $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ Main -sovellukseen ja vie paraabeli ja ellipsi geometrianäyttöön.

Kirjoita lauseke Main-ikkunassa, maalaa se, nosta kynä hetkeksi ja raahaa lauseke alempaan ikkunaan.



Voit myös käyttää toista tapaa.

Siirrä paraabelia Geometria -sovelluksessa. Raahaa se ylempään ikkunaan. Voit myös tutkia paraabelin yhtälön Geometria –sovelluksessa valikosta Draw, Measurement, Equation.



Tee sama ellipsille!

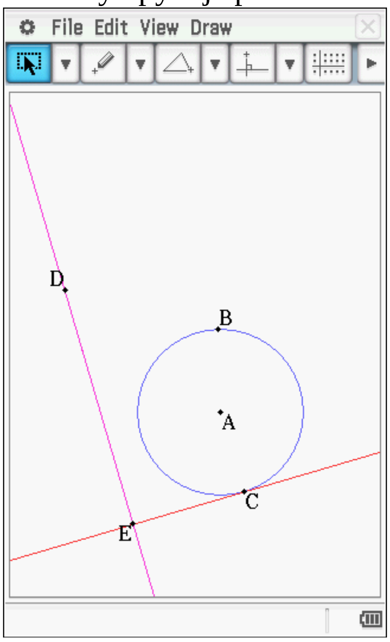
11.12 Animointi

CP400 -laskimella voit myös luoda animaatioita. Tämä toiminto on erityisen käyttökelpoinen tutkittaessa tiettyjä käyrien ominaisuuksia. Animoinnin avulla voi myös esim. piirtää käyrän.

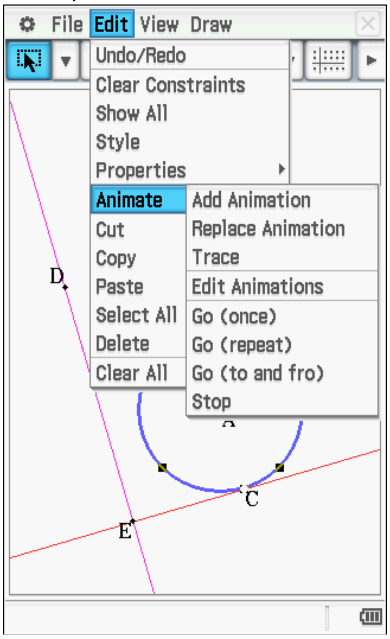
 Animoi niin sanottu ”Pascalin etana”.

Piirrä ympyrä ja luo sille tangentti. Määritä piste D ympyrän ulkopuolelle ja piirrä sen kautta normaali tangentille. Määritä tangentin ja normaalin leikkauspiste E. Animoi tangentti kulkemaan ympyrän ympäri ja tutki pisteen E muodostamaa käyrää.

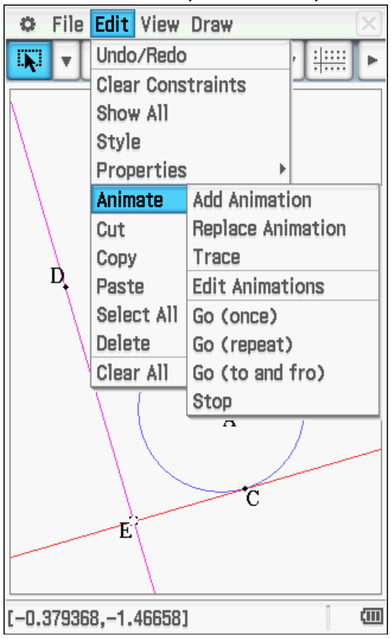
Valitse ympyrä ja piste C.



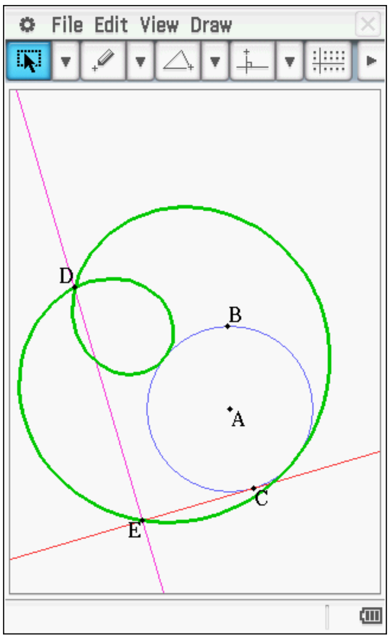
Edit, Add Animation.



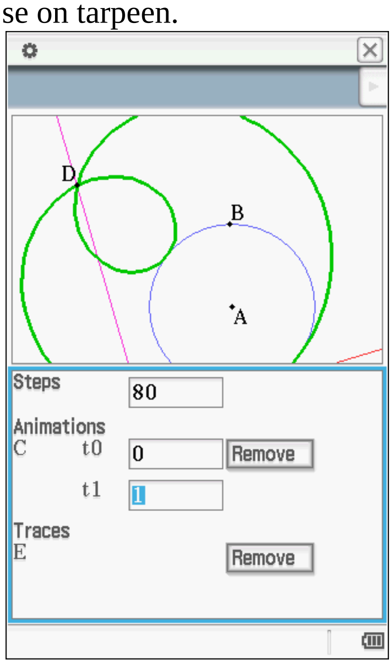
Valitse E. Edit, Animate, Trace.



Edit, Animate, Go (once).



Muokkaa Steps-valintaa, mikäli se on tarpeen.

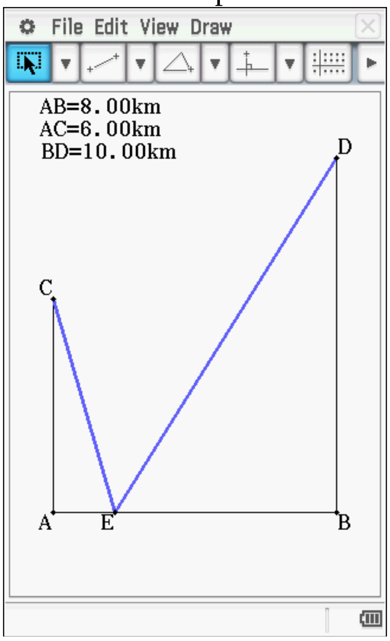


”=” näppäimistöltä sovittaa kuvan.

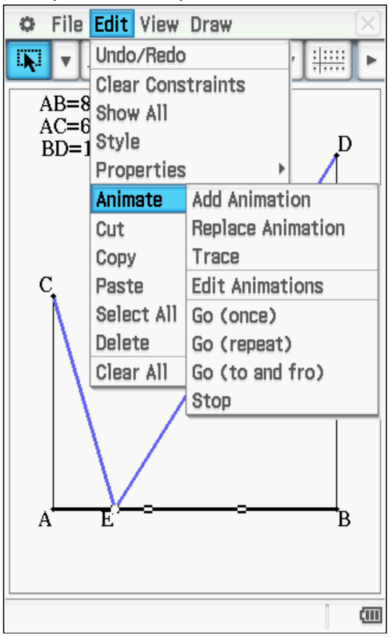
Steps-valintaa voi muokata valitsemalla Edit, Animate, Edit Animation.

 Selvitä animoinnin avulla missä kohti janaa AB pisteen E tulisi olla, jotta CE+DE olisi mahdollisimman pieni. Mittaukset on esitetty ensimmäisessä ikkunassa vasemmalla.

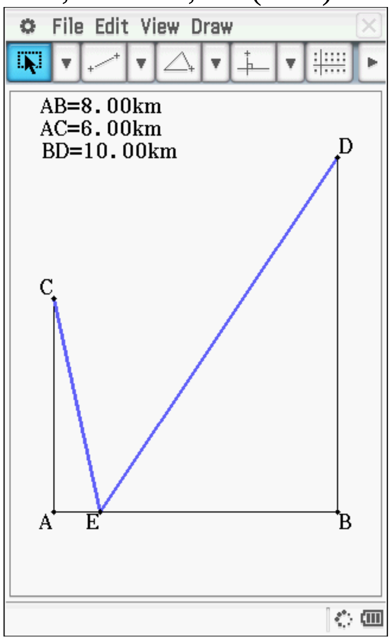
Valitse AB sekä piste E.



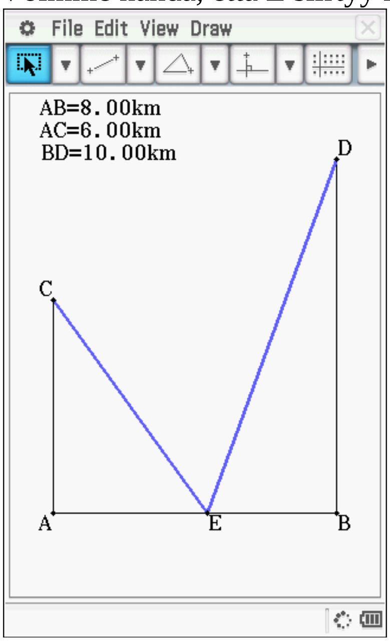
Edit, Animate, Add Animation.

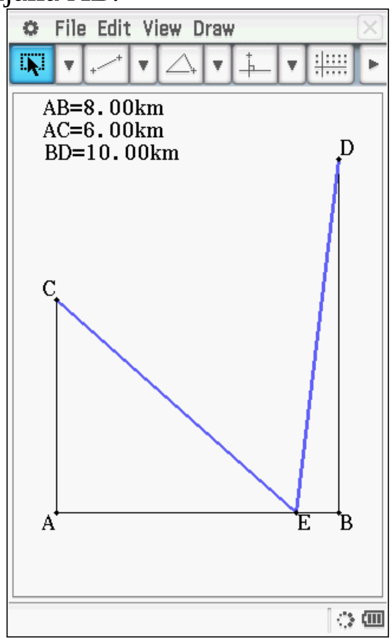


Edit, Animate, Go (once).

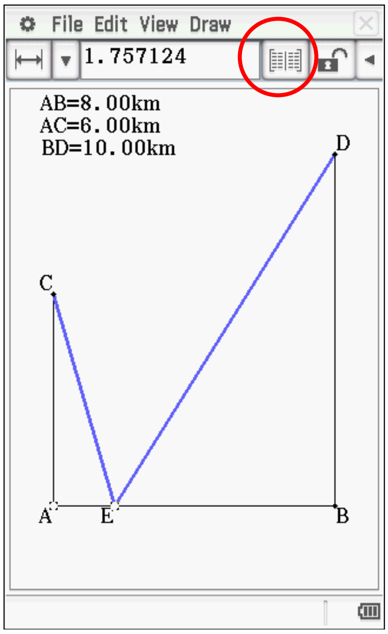


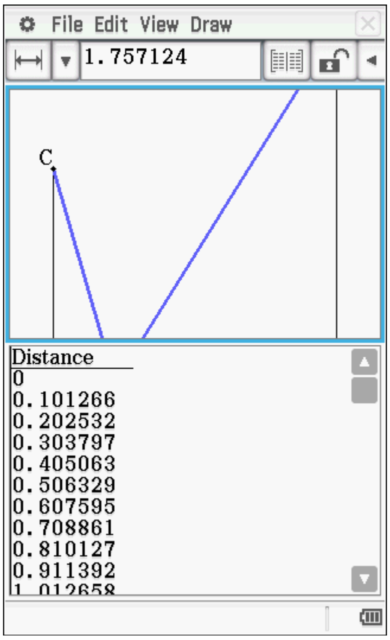
Voimme nähdä, että E siirtyy linjalla AB.



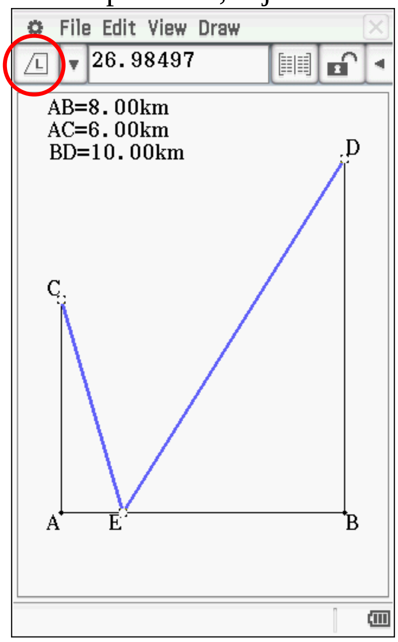


Valitse AE. Valitse taulukko.

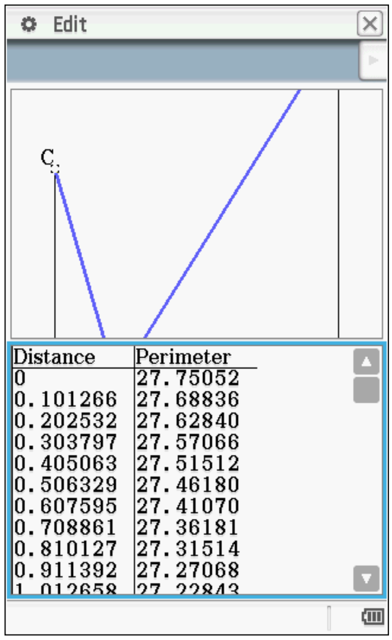




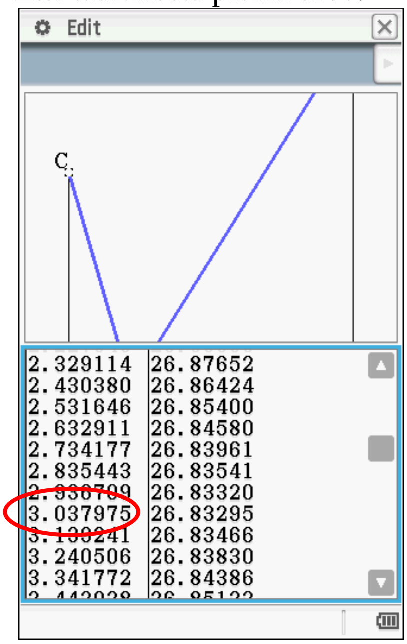
Valitse pisteet C, E ja D.



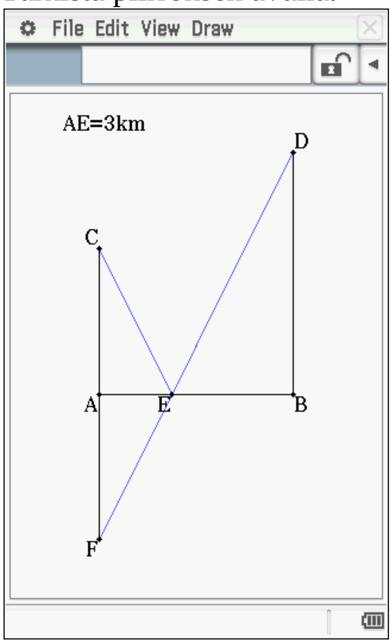
Piiri antaa mitan CE + DE + CD



Etsi taulukosta pienin arvo.



Tarkista piirroksen avulla.

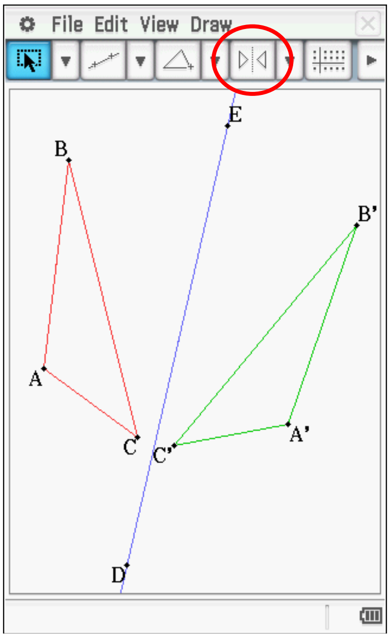


Miksi?

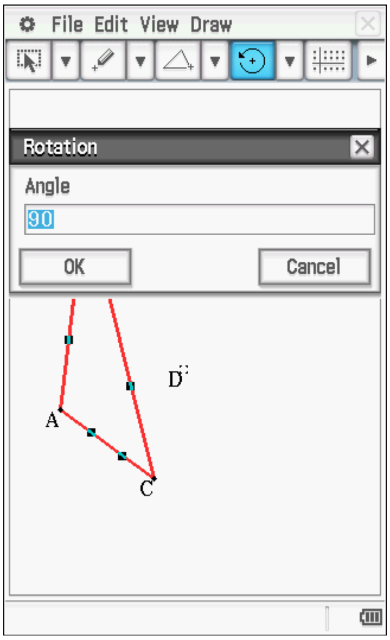
11.13 Peilikuva, kääntäminen ja muuntaminen

Lisätietoja peilikuva-, kierto- ja muokkaustoiminnoista löytyy käyttäjän oppaasta. Tässä ohjekirjassa esitämme näistä vain muutaman yksinkertaisen esimerkin.

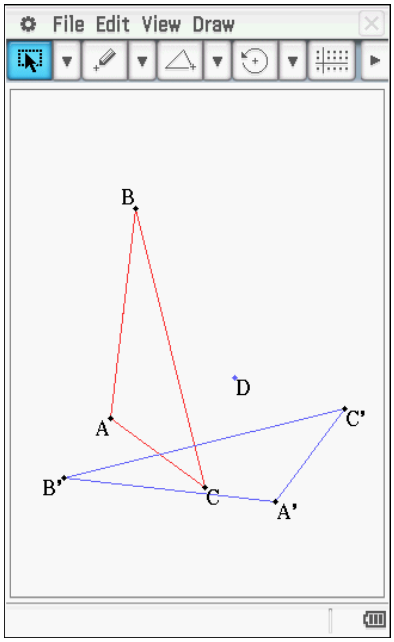
ABC:n peilikuva akselin DE suhteen.



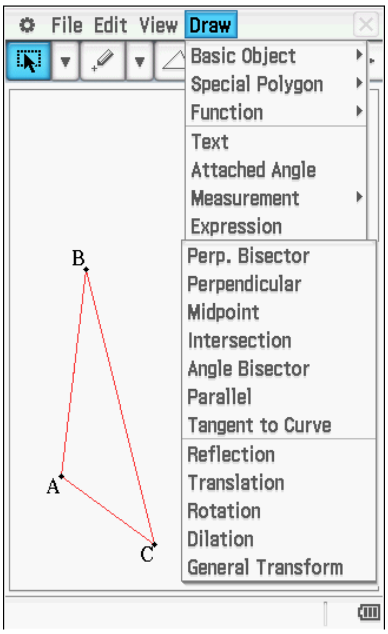
ABC:n peilaus pisteen suhteen. Valitse kiertokulma.



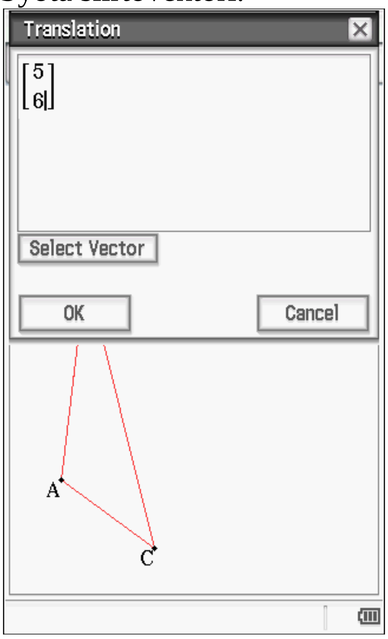
ABC kierrettynä 90° pisteen D suhteen.



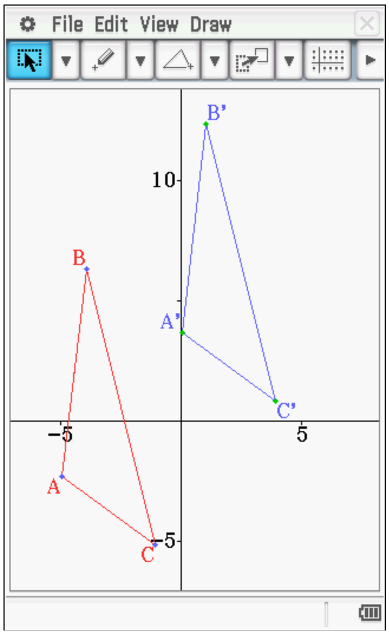
Valitse Translation.



Syötä siirtovektori.



Muokkaus koordinaatistossa.



12. Differentiaaliyhtälöt

12.1 Johdanto

Differentiaaliyhtälöitä voidaan käyttää monilla alueilla – esimerkiksi tarkasteltaessa jonkin kohteen lämpötilan vaihtelua, eksponentiaalista kasvua, sähkölatauksen purkautumista, radioaktiivista säteilyä tai kiihtyvää liikettä.

Differentiaaliyhtälö sisältää derivaattoja tai differentiaaleja. On olennaista pystyä erottamaan minkä tyyppisen differentiaaliyhtälön kanssa olemme tekemisissä ennen kuin yritämme ratkaista yhtälön CP400-laskimella.

Differentiaaliyhtälö, jossa ei esiinny korkeampaa kuin ensimmäisen asteen derivaattaa, on ***ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö***.

Differentiaaliyhtälöä, jossa toinen derivaatta on derivaatan korkein kertaluku, kutsutaan ***toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi***. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voi sisältää myös ensimmäisiä derivaattoja.

Differentiaaliyhtälön asteen määrää yhtälön korkeimman derivaatan aste (eksponentti).

Differentiaaliyhtälön $(y'')^4 + 3(y')^5 - 4y = 3$ *kertaluku on* 2, koska yhtälön korkein derivaatan kertaluku on 2. Lisäksi differentiaaliyhtälön *aste on* 4, koska korkeimman derivaatan aste on 4.

12.2 Yleinen ja yksikäsitteinen ratkaisu

Kun ratkaisemme epämääräisiä integraaleja, saamme ensin niin kutsutun ***yleisen ratkaisun***, joka sisältää vakion *C*. Saamme ns. ***yksikäsitteisen ratkaisun***, kun vakioille *C* annetaan jokin tietty arvo. Vakioiden arvot saadaan tunnetuista *x:n* ja *y:n* arvoista tietyillä ehdoilla. Nämä tietyt ehdot tunnetaan reunaehtoina tai alkuehtoina.

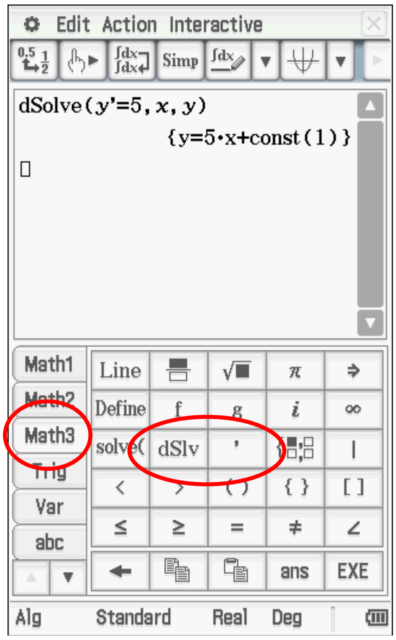
Laske yleinen ratkaisu ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle $y' = 5$ käyttäen apuna CP400-laskinta.

Laske yksikäsitteinen ratkaisu ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle $y' = 5$ jonka alkuehto on $x = 0$ kun $y = 2$ (toisin sanoen *y(0) = 2*).

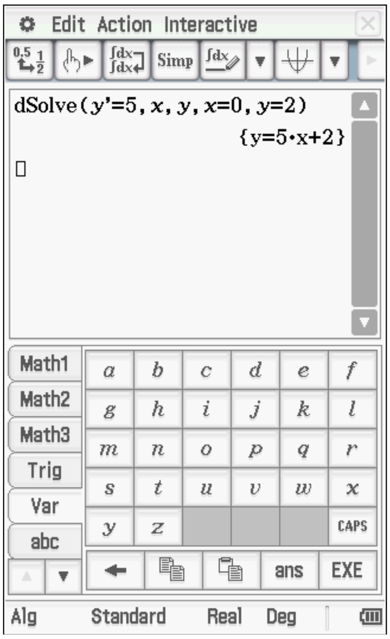
CP400-laskimen funktio dSolve laskee ensimmäisen, toisen ja kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä sekä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmiä.

Löytääksemme yleisen ratkaisun käytämme seuraavaa syntaksia [yhtälö, riippumattomat muuttujat, riippuvat muuttujat] tai Interactive –valikosta kohtaa Advance -> dSolve.

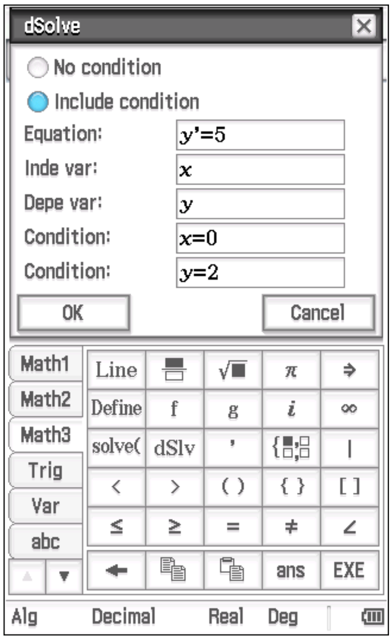
Yleinen ratkaisu



Yksikäsitteinen ratkaisu



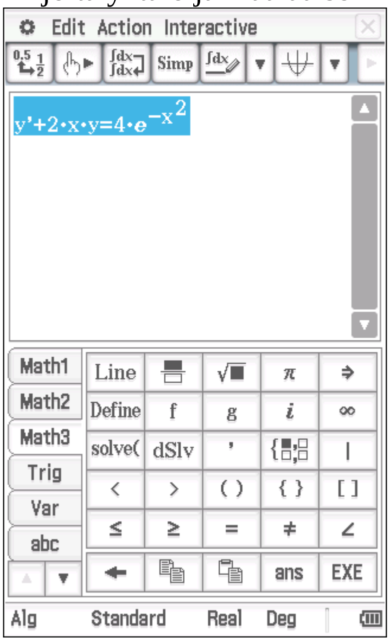
Interactive –valikon kautta



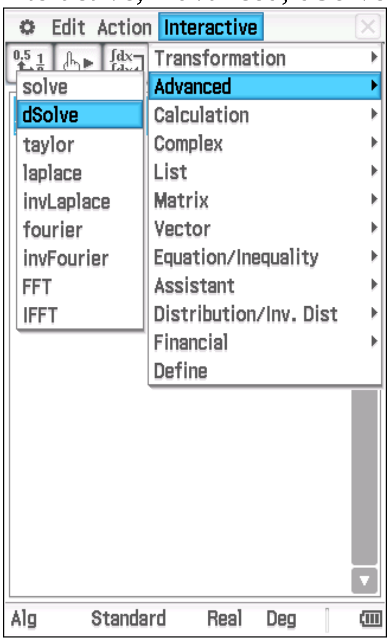
Voidaksemme laske yksikäsitteisen ratkaisun meidän on käytettävä seuraavaa syntaksia [yhtälö, riippumattomat muuttujat, riippuvat muuttujat, alkuehdot] tai valittava Interactive –valikon ikkunassa kohta ”Include condition”.


Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 2xy = 4e^{-x^2}$, $y(0) = 7$.

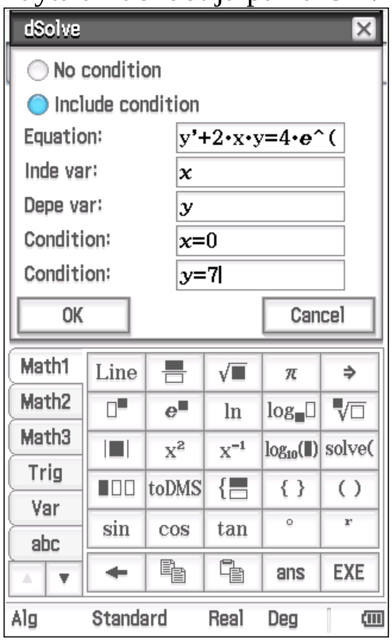
Kirjoita yhtälö ja maalaa se



Interactive, Advanced, dSolve

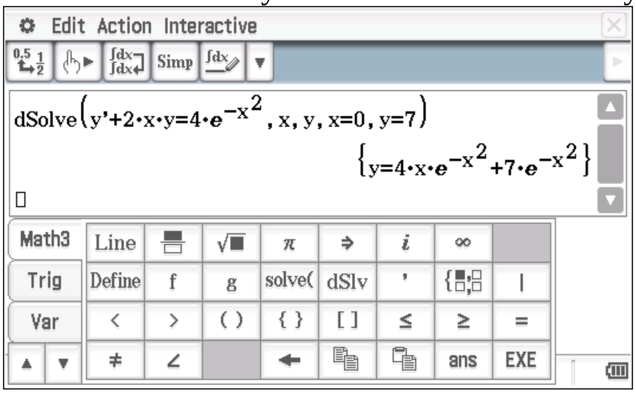


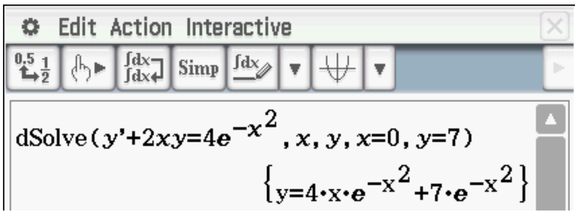
Täytä alkuehdot ja paina OK.



Kun käytät Interactive –valikkoa, ClassPad täydentää kaikki komennot ja syntaksin puolestasi. Näin vältyt kirjoitusvirheiltä eikä sinun tarvitse tietää laskimen komentojen kirjoitusasua.

Pitkissä laskuissa näytön voi kääntää vaakaan näytön alla olevasta kuvakkeesta Rotate.

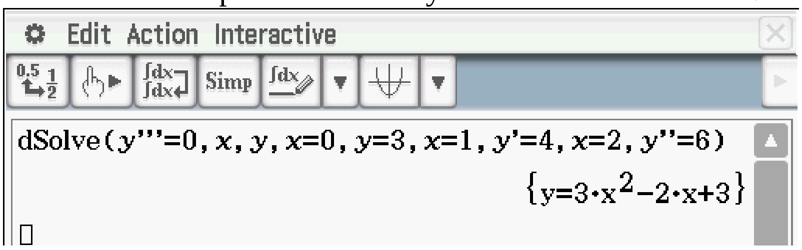




Vaihtoehtoinen tapa ratkaista tehtävä on käyttää komentoa dSlv Math3 –välilehdeltä, jolloin syntaksi on [yhtälö, riippumattomat muuttujat, riippuvat muuttujat, alkuehdot].

Meillä on kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y''' = 0$, jonka alkuehdot ovat $y(0) = 3$, $y'(1) = 4$ ja $y''(2) = 6$. Laske differentiaaliyhtälön yksikäsitteinen ratkaisu CP400-laskimella.

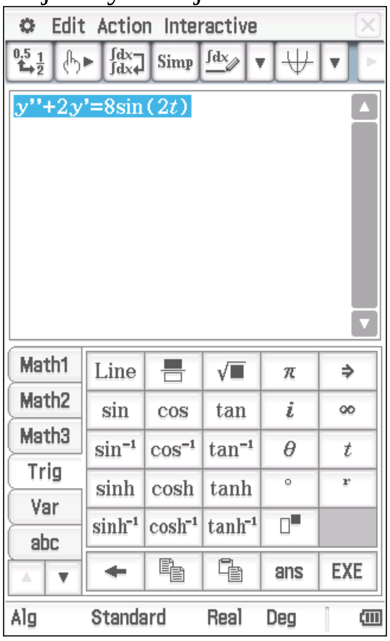
Kolmen ehdon tapauksessa on käytettävä suoraa komentoa.



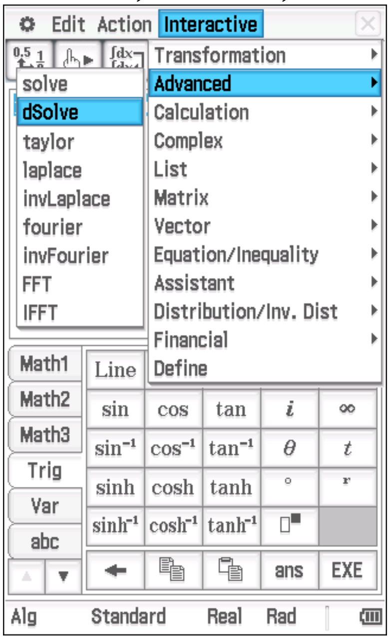
Syntaksi on [yhtälö, riippumattomat muuttujat, riippuvat muuttujat, alkuehdot -1, alkuehdot -2, alkuehdot -3].

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''+2y'=8\sin(2t)$, $y(0)=y'(0)=0$

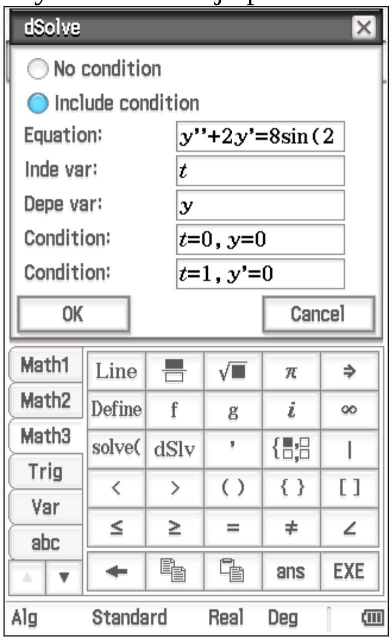
Kirjoita yhtälö ja maalaa se

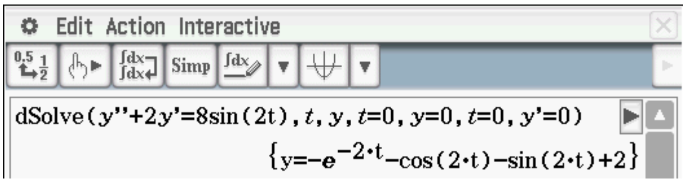


Interactive, Advanced, dSolve



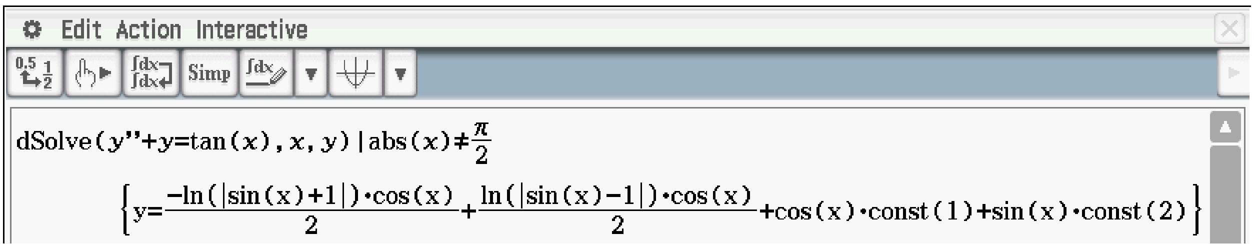
Täytä alkuehdot ja paina OK.





Huomaa! Rad-tila.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''+y=\tan(x)$, $|x|\neq\frac{\pi}{2}$.



Tutki seuraavaa!

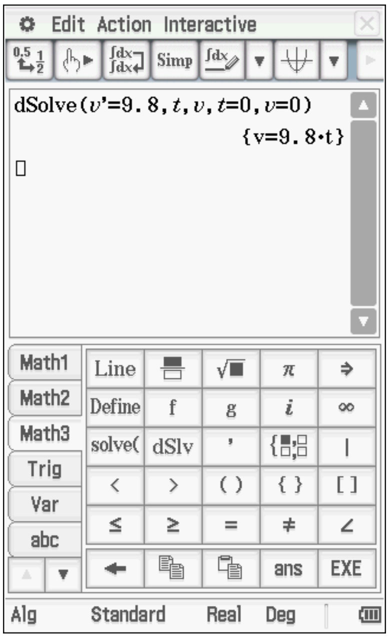
Osoita CP400-laskinta käyttäen, että differentiaaliyhtälön $y''-3y'+2y=0$ yleinen ratkaisu voidaan ilmaista $y=Ae^{2x}+Be^{x}$, jossa A ja B ovat vakioita. Valitse itse erilaisia alkuehtoja ja laske näiden avulla yksikäsitteisiä ratkaisuja.

12.3 Nopeus ja kiihtyvyys

Gravitaatiokiihtyvyys on lähellä maan pintaa $9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Tämä tarkoittaa sitä, että vapaasti tyhjiössä putoavan esineen nopeus kasvaa $9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ jokaista sekuntia kohden. Tästä puolestaan seuraa, että (nopeuden muutos sekunnissa on) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{s^2}$.

Päästämme esineen putoamaan alkunopeudella 0 m/s. Voimme ajatella esineen putoavan maata kohti ilman ilmanvastusta. Miten suuri nopeus on *t* sekuntia putoamaan päästämisen jälkeen?

Ratkaisemme differentiaaliyhtälön $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8$, jonka alkuehto on $v = 0$ kun $t = 0$.



CP400-laskin antaa vapaasti putoavan esineen nopeuden $v(t) = 9{,}8\cdot t\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, *t* sekuntia irtipäästämisen jälkeen. Huomaa, että *t*:n yksikkö on s.

12.4 Muuttujien separoiminen

Erästä differentiaaliyhtälötyyppiä kutsutaan separoituvaksi differentiaaliyhtälöksi. Tämän tyyppiset differentiaaliyhtälöt voidaan ratkaista muuttujien erottamiseen pohjautuvalla menetelmällä.

Tätä menetelmää voidaan käyttää vain silloin, kun differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $A(x)dx + B(y)dy = 0$, jossa $A(x)$ on ainoastaan *x:n funktio* ja jossa $B(y)$ on vain *y:n funktio*.

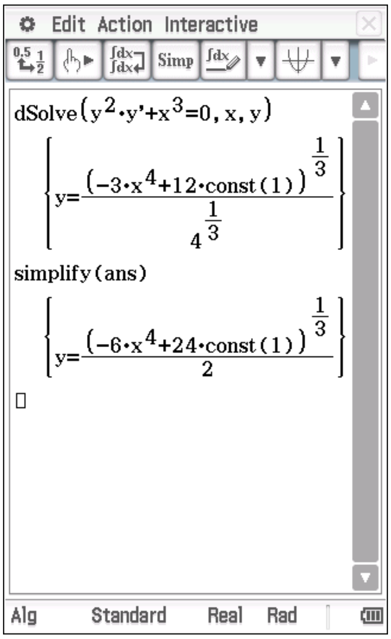
Kun differentiaaliyhtälö on tarvittaessa saatu kirjoitettua yllä kuvattuun muotoon, voimme muuttujien erottamisen avulla kerätä *y:n* tekijät vasemmalle puolelle ja *x:n* tekijät oikealle puolelle. Tämän jälkeen nämä puolet voidaan integroida yleisen ratkaisun löytämiseksi.

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $y^2dy + x^3dx = 0$ ensin ilman CP400-laskinta.

Tämä yhtälö on onneksemme jo halutussa muodossa ja voimme menetellä yllä kuvatulla tavalla ja suorittaa integroinnin yhtälön molemmin puolin. Tällöin tuloksena on

$\int y^2dy = -\int x^3dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = -\frac{x^4}{4} + C_1 \Rightarrow y = \left(-\frac{3x^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + C_2$, ja tämä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y^2\mathrm{d}y + x^3\mathrm{d}x = 0$.



Koska $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$, voimme kirjoittaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön seuraavasti $y^2 \cdot y' + x^3 = 0$ jakamalla sen symbolisesti dx:llä.

Voimme laskea yleisen ratkaisun CP400-laskimella seuraamalla syntaksia. Tee ensin yhtälö, maalaa se ja valitse Interactive, Advanced, dSolve.

Alkuehtoja ei ole. Vastausta voi sieventää painamalla näytön yläreunassa näkyvää painiketta Simp laskun jälkeen.

Tutki seuraavaa!

Osoita, että differentiaaliyhtälö $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ln x - \frac{y}{x} = 0$ voidaan ratkaista separoimalla muuttujat.

Ratkaise yhtälö ilman laskinta. Tarkista vastaus ratkaisemalla $y' \cdot \ln x - \frac{y}{x} = 0$ käyttäen CP400-laskinta.

Laske muuttujien erottamisen avulla yksikäsitteinen ratkaisu yhtälölle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 6$, jonka alkuehdot ovat $y = 1$ kun $x = 0$.

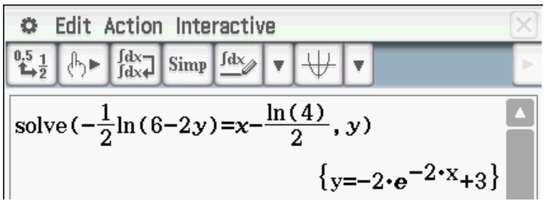
Separoiminen antaa $\frac{\mathrm{d}y}{6-2y} = \mathrm{d}x$. Integroimme yhtäläisyysmerkin molemmat puolet ja saamme

$\int \frac{\mathrm{d}y}{6-2y} = \int \mathrm{d}x$ joka tarkoittaa, että $-\frac{1}{2}\ln|6-2y| = x + C$.

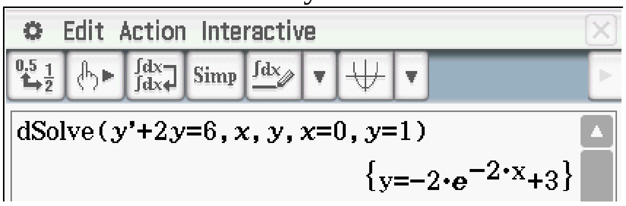
Alkuehdosta $y=1$ kun $x=0$ seuraa, että $-\frac{1}{2}\ln|6-2\cdot 1|=0+C$. Ratkaisemalla vakio C saadaan $C=-\frac{1}{2}\ln 4$.

Kun sijoitamme ehdon $C=-\frac{1}{2}\ln 4$ yleiseen ratkaisuun, saamme $-\frac{1}{2}\ln|6-2y|=x-\frac{1}{2}\ln 4$. Tästä voidaan ratkaista y laskimella.

Yksikäsitteinen ratkaisu.



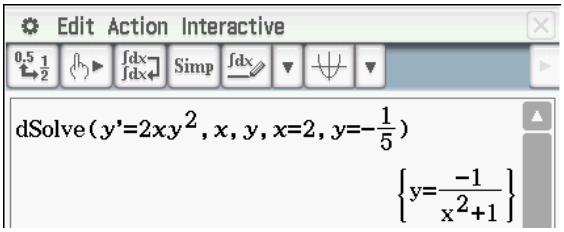
Yksikäsitteinen ratkaisu laskettuna CP400-laskimella differentiaaliyhtälönä.



Differentiaaliyhtälön $\frac{dy}{dx}+2y=6$ ratkaisu, alkuehdoilla $y=1$ kun $x=0$, on siis $y=-2e^{-2x}+3$

Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö $y'=2xy^2$, $y(2)=-\frac{1}{5}$.

Yksikäsitteinen ratkaisu.



Huomaa!
Koska nimittäjä $x^2+1\neq 0$ on *y* määriteltynä kaikille *x:ille*.

Tarkista tämä laskemalla ilman laskinta.

Tutki seuraavaa!

Kirchhoffin laki sähköisille piireille määrittää differentiaaliyhtälön $R\cdot I+L\frac{dI}{dt}=U$, jossa esimerkiksi $R=10\ \Omega$, $L=2\ \text{H}$, $U=60\ \text{V}$ ja $I=0$, kun $t=0$.

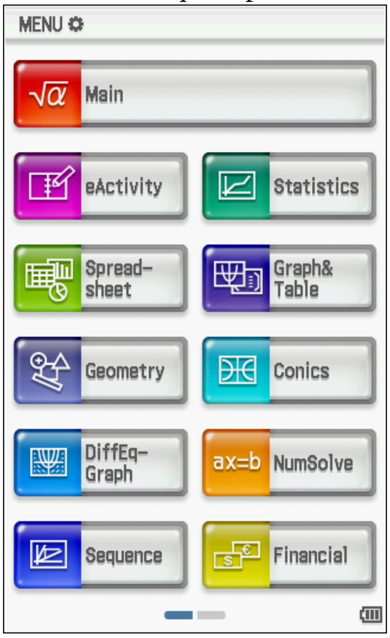
Ratkaise differentiaaliyhtälö sekä separoimalla että suoraan käyttämällä CP400-laskimella.

12.5 Käyräparvi ja suuntakenttä

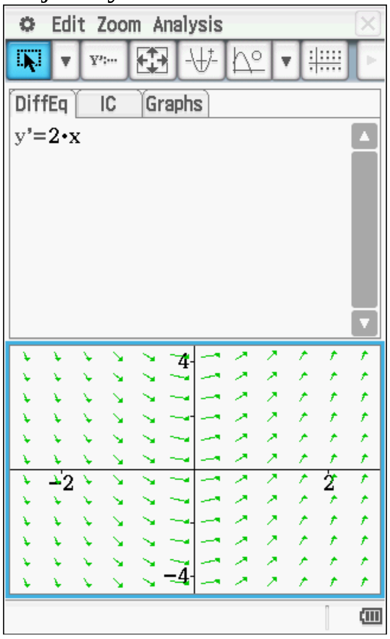
Voimme havainnollistaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöjen ratkaisuja ratkaisematta yhtälöä. Niin sanottu ***suuntakenttä*** havainnollistaa differentiaaliyhtälöä ja auttaa hahmottamaan sitä miltä ratkaisufunktio näyttää. Differentiaalifunktion ratkaisut muodostavat käyräparven. Alkuehdot toteuttavien funktioiden kuvaajia kutsutaan ratkaisukäyriksi.

Piirrä suuntakenttä differentiaaliyhtälölle $y' = 2x$.
Piirrä ratkaisukäyrä, joka toteuttaa alkuehdon $x = 0$, kun $y = 0$.

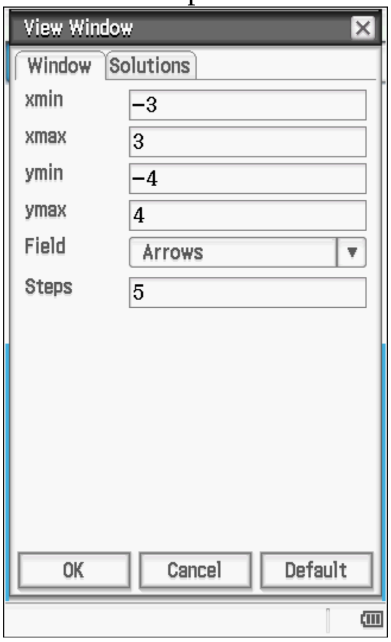
Valitse DiffEq-Graph



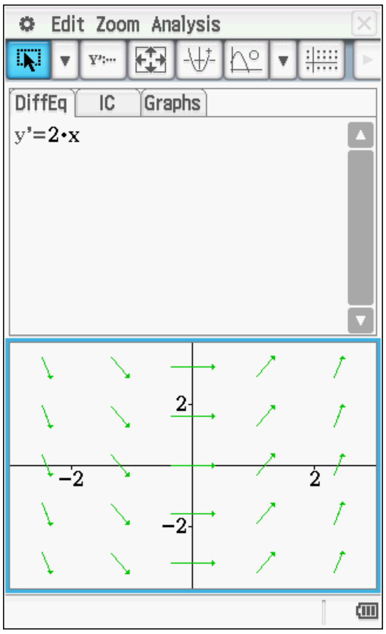
Kirjoita yhtälö.



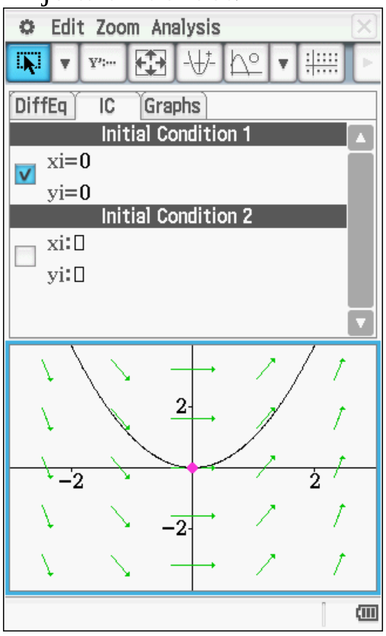
Muokkaa Steps.



Suuntakenttä.

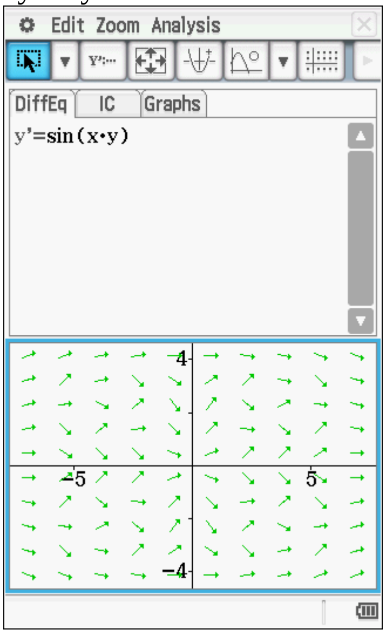


Kirjoita alkuehdot.

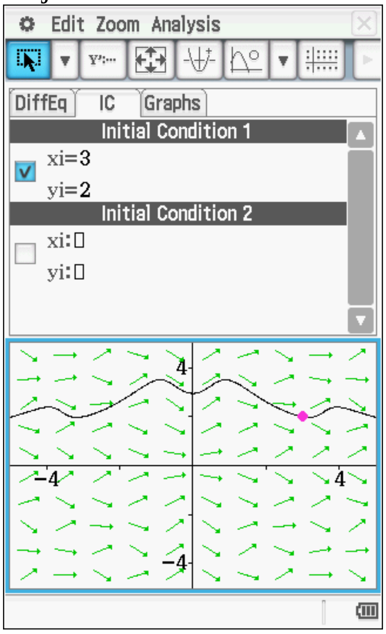


Piirrä suuntakenttä differentiaaliyhtälölle $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$, ja piirrä ratkaisukäyrä alkuehdolle $x = 3$ ja $y = 4$.

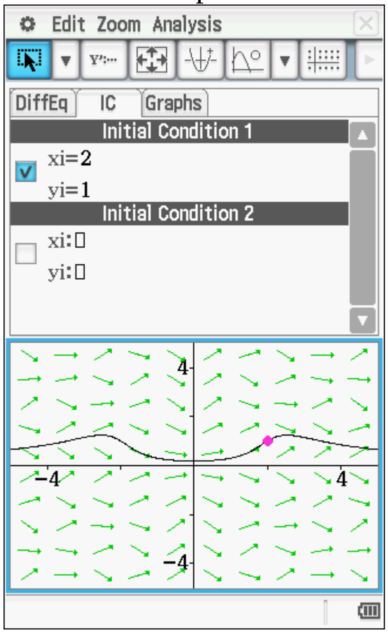
Syötä yhtälö.



Kirjoita alkuehdot.



Kokeile siirtää pisteitä.



Voit muuttaa alkuehtoja siirtämällä kosketuskynällä pisteitä.