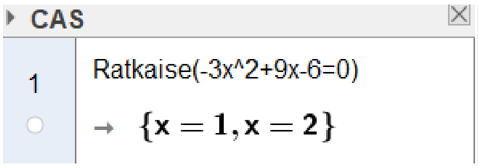
Ratkaisut: MAA6 Kertausta (Abitti)

1. Funktion kulku tulkitaan derivaattafunktion merkeistä.

$$f'(x) = -3x^2 + 9x - 6$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat cas-laskimella:



Derivaattafunktio on alaspäin aukeava paraabeli, joten se on nollakohtien välissä positiivinen ja muualla negatiivinen. Laaditaan funktion f merkkikaavio:

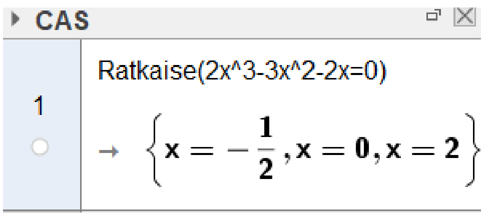
		1		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Kulkukaavion perusteella funktion f on kasvava välillä $1 \leq x \leq 2$ ja vähenevä väleillä $x \leq 1$ ja $x \geq 2$.

2. Tutkitaan funktion f derivaattafunktion merkkiä.

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat cas-laskimella:



Lasketaan derivaattafunktion arvo jokaiselta derivaatan nollakohtien rajoittamalta osaväliltä ja laaditaan funktion f kulkukaavio:

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = -3$

$f(-0{,}25) = 2 \cdot (-0{,}25)^3 - 3 \cdot (-0{,}25)^2 - 2 \cdot (-0{,}25) = 0{,}28125$

$f(1) = 2 \cdot (1)^3 - 3 \cdot (1)^2 - 2 \cdot (1) = -3$

$f(2) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 21$

		$-\frac{1}{2}$		0		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Kulkukaavion perusteella funktion pienin arvo on joko kohdassa $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 2$.

Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{29}{32}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2^3 - 2^2 + 1 = -3$$

Funktion pienin arvo on siis -3.

Funktiolla ei ole suurinta arvoa, koska f on kasvava kun $x \geq 2$ ja se saa kohdan $x = 2$ jälkeen aina vain suurempia arvoja.

3. Lasketaan funktion erotusosamäärän raja-arvo kohdassa -1.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(4(-1+h)^2 + (-1+h)\big) - (4 \cdot (-1)^2 + (-1))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(4(1 - 2h + h^2) + (-1+h)\big) - (4 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 8h + 4h^2 - 1 + h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 - 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4h - 7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4h - 7$$

$$= 4 \cdot 0 - 7$$

$$= -7$$

Siis, $f'(-1) = -7$.

4. Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot:

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} 2x^2 + x - 3 = 2 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 0$$

Koska sekä osoittajan, että nimittäjän raja-arvo on nolla, voidaan lauseketta sieventää.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1+1}{2\cdot 1 + 3} = \frac{2}{5}$$

5. a) $f'(x) = 10x^4 - 1$

b) Osamäärän derivoimissäännön mukaan

$$h'(x) = \frac{2\cdot x^7 - (2x+1)\cdot 7x^6}{(x^7)^2}$$
$$= \frac{2x^7 - 14x^7 - 7x^6}{x^{14}}$$
$$= \frac{-12x^7 - 7x^6}{x^{14}}$$
$$= \frac{x^6(-12x - 7)}{x^{14}}$$
$$= \frac{-12x - 7}{x^8}, x \neq 0$$

6. Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -4x - 1$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$-4x - 1 = 0$

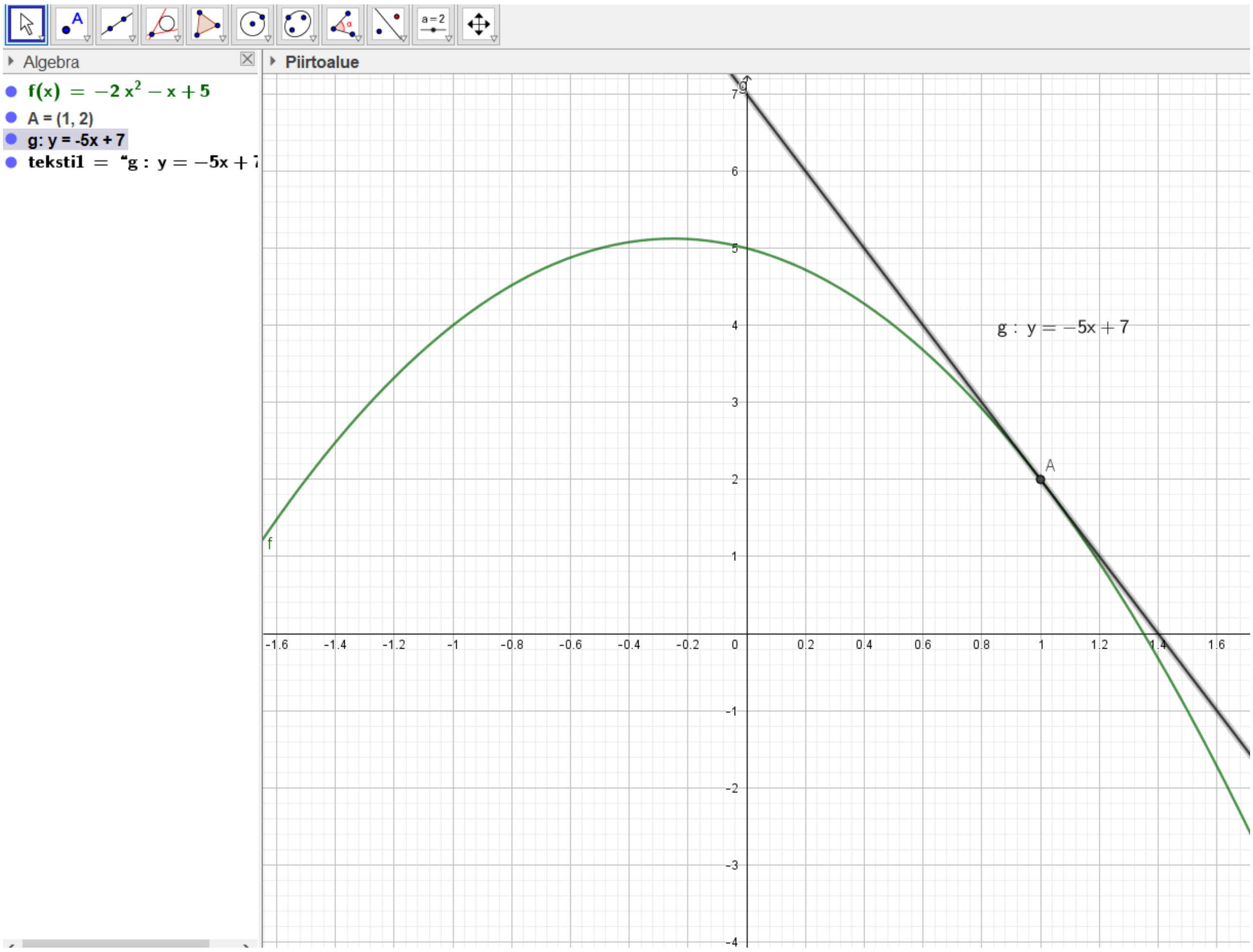
$-4x = 1$

$x = -\frac{1}{4}$

Ratkaistaan huipun y- koordinaatti sijoittamalla $x = -\frac{1}{4}$ paraabelin yhtälöön.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 5 = \frac{41}{8}$$

Paraabelin huipun koordinaatit ovat siis $\left(-\frac{1}{4}, \frac{41}{8}\right)$.



Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö on $y = -5x + 7$.