5. Rationaalifunktion derivaatta

5.1 Osamäärän derivaatta

5.2 Rationaalifunktion kulku

Funktioiden osamäärän derivaatta

Olkoot f ja g derivoituvia funktiota ja $g(x) \neq 0$. Tällöin

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Esim. Määritä funktion $f(x) = \frac{2x+1}{x^7}, x \neq 0$ derivaatta.

Osamäärän derivoimissäännön mukaan:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x^7 - (2x+1) \cdot 7x^6}{((x^7)^2}$$
$$= \frac{2x^7 - 14x^7 - 7x^6}{x^{14}}$$
$$= \frac{-12x^7 - 7x^6}{x^{14}}$$
$$= \frac{x^6(-12x - 7)}{x^{14}}$$
$$= \frac{-12x - 7}{x^8}, kun\ \ x \neq 0$$

5.2 Rationaalifunktion kulku

1. Määritä funktion määrittelyjoukko.
2. Derivoi funktio.
3. Ratkaise derivaatan nollakohdat.
4. Laadi kulkukaavio. Muista ottaa huomioon kohta, jossa funktiota ei ole määritelty.
5. Merkitse kulkukaavioon minimit ja maksimit.
6. Tulkitse vastaukset.

Esim. Olkoon $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

a) Millä väleillä funktio f on kasvava ja millä vähenevä?

b) Määritä funktion f ääriarvokohdat?

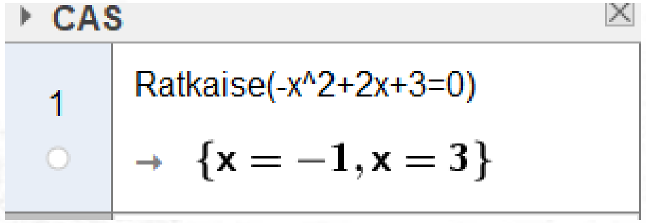
Funktio f on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Osamäärän derivoimissäännön mukaan:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

Funktion f nimittäjä on määrittelyjoukossaan positiivinen. Merkki määräytyy siis osoittajan merkin mukaan.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat:



Osoittajan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen merkki on positiivinen nollakohtien välissä.

Tehdään kulkukaavio:

		-1		3	
$f'(x)$	$--$		$++$		$--$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		min		max	

a) Kulkukaavion perusteella funktio f on kasvava, kun $-1 \leq x \leq 3$ ja vähenevä, kun $x \leq -1$ ja $x \geq 3$.

b) Minimikohta on $x = -1$ ja maksimikohta $x = 3$.

6. Derivaatan sovelluksia

Esim. Maanviljelijä haluaa aidata navettansa yhteyteen suorakulmion muotoisen aitauksen laidunmaaksi. Aitauksen yhtenä sivuna on navetan seinä, kolmelle muulle sivulle tulee aita. Aitaa on käytettävissä 100 m ja navetan seinän pituus on 107 m. Miten aitauksen mitat tulisi valita, että laidunmaan pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

Merkitään navetan seinää vasten tulevan sivun pituutta x:llä.

x voi saada arvot välillä [0,50].

Pinta-alafunktioksi saadaan:

$$A(x) = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

Funktio saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan pinta-alafunktio:

$$A'(x) = -4x + 100$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -4x + 100 &= 0 \quad \| -100 \\ -4x &= -100 \quad \| : (-4) \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa:
$A(0) = 0$
$A(50) = -2 \cdot 50^2 + 100 \cdot 50 = 0$
$A(25) = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 = 1250$

V: Seinää vasten tuleva sivu on 25 m ja navetan seinän suuntainen sivu on 50 m.