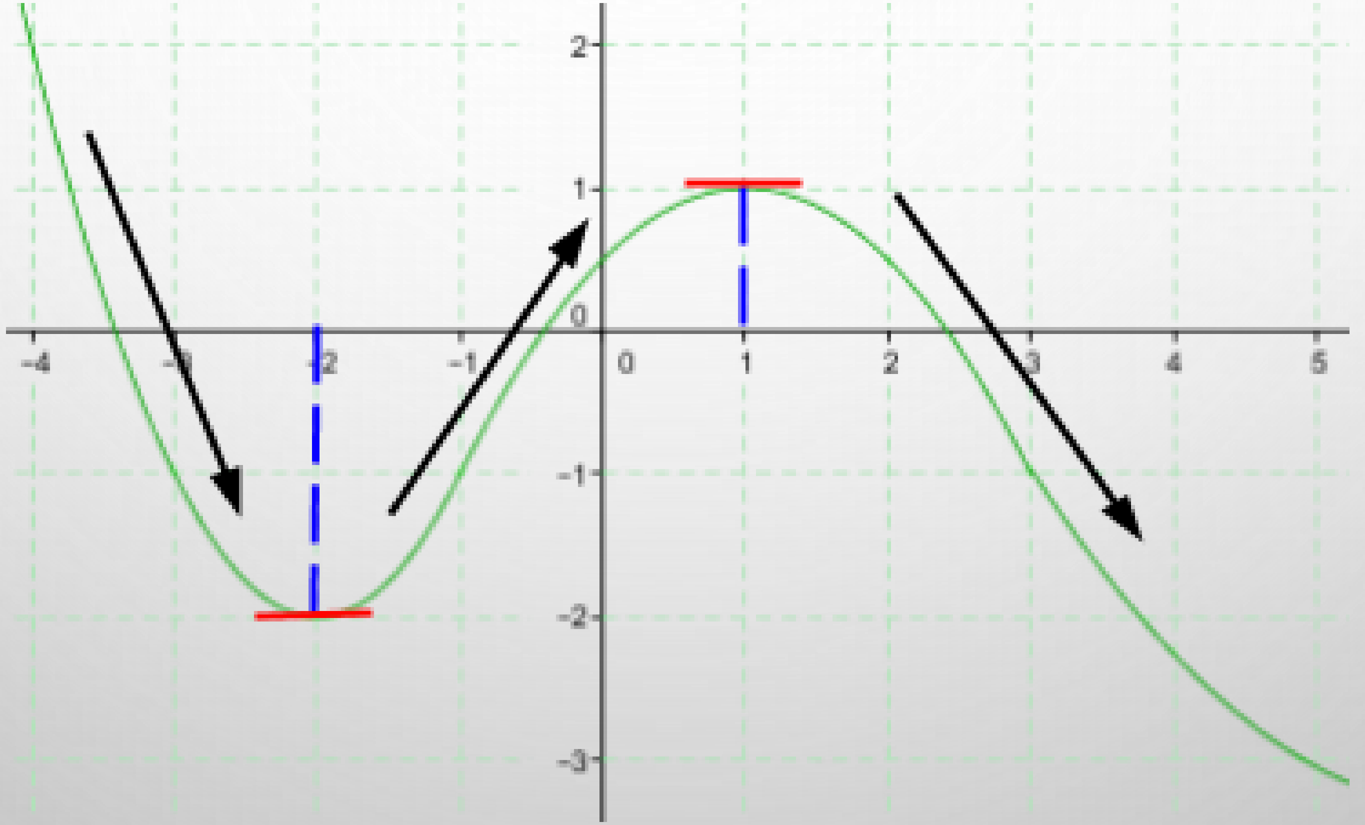
4 POLYNOMIFUNKTION DERIVAATTA

4.2 POLYNOMIFUNKTION KASVAMINEN JA VÄHENEMINEN

4.3 POLYNOMIFUNKTION SUURIN JA PIENIN ARVO

4.4 TANGENTIN YHTÄLÖ

4.2 POLYNOMIFUNKTION KASVAMINEN JA VÄHENEMINEN



- Jos $f'(x) > 0$ kaikissa välin kohdissa, lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$, funktio f on kyseisellä välillä aidosti kasvava.

- Jos $f'(x) < 0$ kaikissa välin kohdissa, lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$, funktio f on kyseisellä välillä aidosti vähenevä.

Derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio:

		-2		5	
$f'(x)$	$----$		$++++$		$----$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		min		max	

Esim. Tutki millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ on aidosti

a) kasvava b) vähenevä

Mitkä ovat funktion ääriarvokohdat?

Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = -2 \cdot 2x^{2-1} + 8 = -4x + 8$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$-4x + 8 = 0 \quad \| -8$$

$$-4x = -8 \quad \|: (-4)$$

$$x = 2$$

Lasketaan derivaatan arvot nollakohdan molemmilta puolilta:

$$f'(0) = -4 \cdot 0 + 8 = 8$$

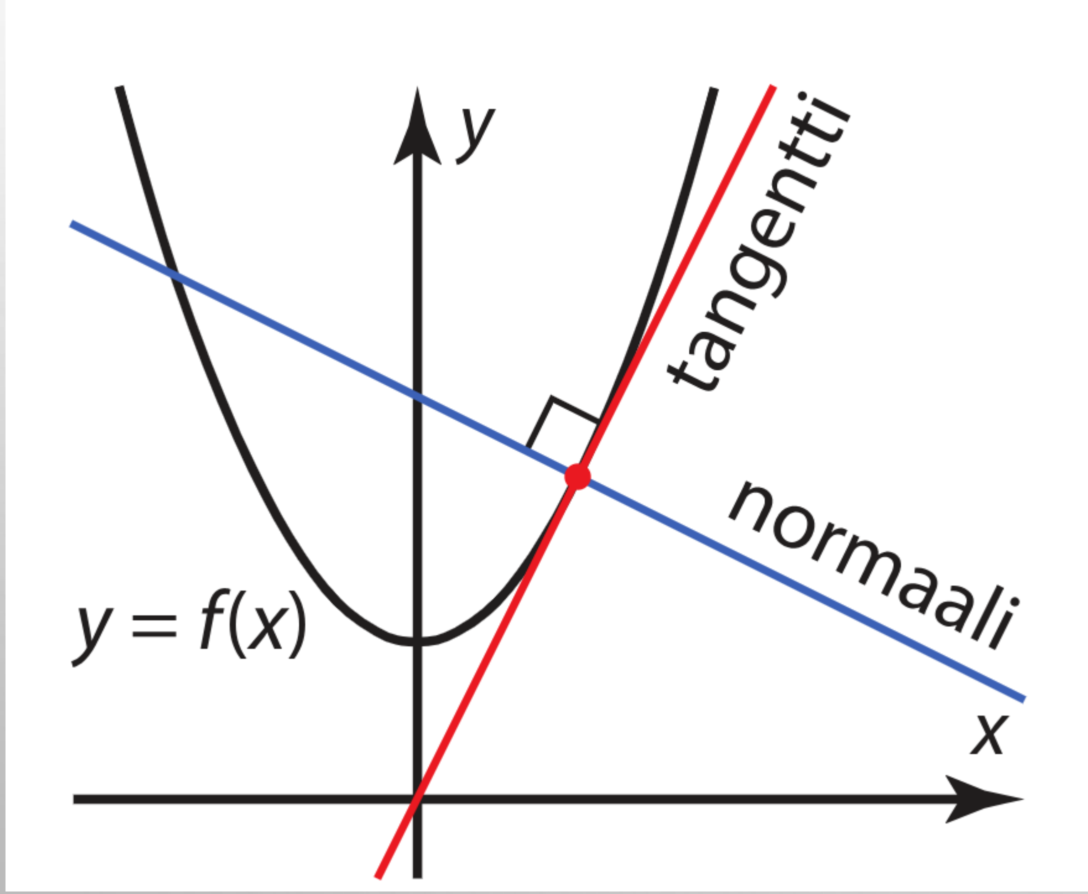
$$f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -4$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio:

		2	
$f'(x)$	$+++$		$---$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		max	

Funktio on kasvava, kun $x \leq 2$ ja vähenevä, kun $x > 2$. Maksimikohta on $x = 2$.

TANGENTIN JA NORMAALIN YHTÄLÖN MÄÄRITTÄMINEN



- Käyrän normaali on suora, joka on kohtisuorassa käyrän pisteeseen piirrettyä tangenttia vastaan.
- Jos suorien kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2, niin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin kuin $k_1 \cdot k_2 = -1$

(Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

kun kulmakerroin ja suoralla oleva piste tunnetaan)

Esim. Määritä käyrälle $y = x^3 - 5x + 5$ kohtaan $x = 1$ asetetun normaalin yhtälö.

Ratkaistaan normaalin ja käyrän leikkauspisteen y- koordinaatti:

$$y = 1^3 - 5 \cdot 1 + 5 = 1$$

Normaalin ja käyrän leikkauspiste on (1,1).
Käyrän derivaatta:

$$y' = 3x^2 - 5$$

Tangentin kulmakerroin pisteessä (1,1):

$$k = 2 \cdot 1^2 - 5 = -2$$

Normaalin kulmakerroin kohtisuoruusehdosta:

$$k_n \cdot (-2) = -1 \;\; \Rightarrow \;\; k_n = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Normaalin yhtälö: $y - y_0 = k_n(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow \; y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$