2 RAJA-ARVO JA JATKUVUUS

2.1 FUNKTION RAJA-ARVO

2.2 RAJA-ARVON MÄÄRITTÄMINEN

2.3 FUNKTION JATKUVUUS

2.4 JATKUVUUS JOUKOSSA

RAJA-ARVON LASKUSÄÄNNÖT

Raja-arvon laskusääntöjä

Lause

Oletetaan, että kohdassa a funktioilla f ja g on olemassa raja-arvot. Oletetaan lisäksi, että k on reaaliluku. Tällöin ovat voimassa seuraavat laskusäännöt.

1) Vakion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} k = k$$

2) Identtisen funktion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} x = a$$

3) Vakion siirtosääntö

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

4) Funktioiden summan raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

5) Funktioiden tulon raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

6) Funktioiden osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ jos } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Osamäärän raja-arvon olemassaolo

Lause

Tarkastellaan funktioiden osamäärän $\frac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvoa kohdassa a.

1) Jos $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, niin $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

2) Jos $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, raja-arvoa $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ei ole olemassa.

3) Jos $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, voidaan lauseketta $\frac{f(x)}{g(x)}$ mahdollisesti sieventää. Jos sievennetyllä lausekkeella on kohdassa a raja-arvo b, tämä on myös alkuperäisen osamäärän raja-arvo.

Esim. Määritä raja-arvo

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-5x}{2x-1}$

Osoittajan ja nimittäjän raja-arvot ovat $\neq 0$ $\rightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-5x}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 3x^2-5x}{\lim\limits_{x\to 1} 2x-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

Tutkitaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x - 2 = 0$$
$$\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$$

→*Lauseketta voi sieventää*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x + 2 = 3$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{3x-6}{x^2-4x+4}$

Tutkitaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot:

$$\lim_{x \to 2} 3x - 6 = 0$$
$$\lim_{x \to 1} x^2 - 4x + 4 = 0$$

→Lauseketta voi sieventää

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x-6}{x^2-4x+4} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa.