

# 3. Lukuteoria

3.2 SUURIN YHTEINEN TEKIJÄ

3.3 KONGRUENSSI

3.4 ALKULUVUT

3.5 JAOLLISUUSLAUSEITA

## 3.2 SUURIN YHTEINEN TEKIJÄ

- ▶ Olkoon  $a$  positiivinen kokonaisluku. Jokainen positiivinen kokonaisluku, jolla luku  $a$  on jaollinen, on luvun  $a$  tekijä.

Esim.  $36 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 18 = 6 \cdot 6 = 1 \cdot 36 \rightarrow$  Luvun 36 tekijät ovat siis 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ja 36.

- ▶ Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja. Lukujen  $a$  ja  $b$  yhteisistä tekijöistä suurin on lukujen  $a$  ja  $b$  suurin yhteinen tekijä.
- ▶ Suurin yhteinen tekijä merkitään  $\text{syt}(a, b)$ .

Esim. Määritä lukujen 10 ja 16 suurin yhteinen tekijä.

➤ Suurin yhteinen tekijä jakoyhtälössä:

Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja ja  $a = qb + r$ , missä  $0 < r < b$ . Tällöin  $\text{syt}(a, b) = \text{syt}(b, r)$ .

Esim.  $17 = 3 \cdot 5 + 2$       $\text{syt}(17, 5) = \text{syt}(3, 2) = 1$

# Eukleideen algoritmi

- ▶ Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja ja  $a = qb + r$ , missä  $0 < r < b$ . Lukujen  $a$  ja  $b$  suurin yhteinen tekijä saadaan, kun toistetaan jakoyhtälöä kunnes jakojäännös on 0. Syt on viimeinen nollasta poikkeava jakojäännös.

Esim. Selvitä lukujen 433 ja 38 suurin yhteinen tekijä jakoyhtälön avulla.

# Pienin yhteinen monikerta

- ▶ Toinen nimi on pienin yhteinen jaettava (pyj)
- ▶ Positiivisten kokonaislukujen  $a$  ja  $b$  pienin yhteinen monikerta on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvuilla  $a$  ja  $b$ .
- ▶ Merkitään joko  $pym(a, b)$  tai  $pyj(a, b)$ .

Esim. Mikä on lukujen 22 ja 42 pienin yhteinen monikerta?

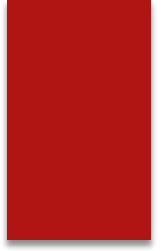
## 3.3 Kongruenssi

► Tulossa....

## 3.4 Alkuluvut

- ▶ *Lukua 1 suurempi kokonaisluku on alkuluku, jos se on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.*
- ▶ Luku 1 ei ole alkuluku vaan yhdistetty luku.
- ▶ Luvun osoittaminen alkuluvuksi:  
Luku  $n$  on alkuluku, jos se ei ole jaollinen millään alkuluvulla, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin  $\sqrt{n}$

Esim. Selvitä ilman teknisiä apuvälineitä onko luku 101 alkuluku.

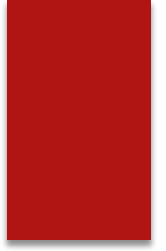




# Erastostheneen seula

- ▶ Tietyn luvun  $n$  suuriset alkuluvut voidaan löytää vetämällä yli 2:lla jaolliset luvut, sitten 3:lla, sitten 5:llä jne. kunnes listalta on poistettu kaikkien korkeintaan luvun  $\sqrt{n}$  suuristen lukujen monikerrat. Jäljelle jäävät ovat alkulukuja. Seulan avulla on helppo etsiä tiettyä lukua pienemmät alkuluvut.

Esim. Etsi kaikki lukua 30 pienemmät alkuluvut Erastostheneen seuralalla.



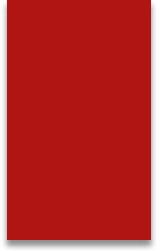
## Aritmetiikan peruslause:

*Jokainen lukua 1 suurempi kokonaisluku voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla alkulukujen tulona.*

Suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta alkulukujen tulon avulla:

- Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan.
- Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun 2, 3, 5, 7 ja 11. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaiseva määrä.

Esim. Määritä  $\text{sy}(24,30)$  ja  $\text{pym}(24,30)$  alkulukuhajotelman avulla.



## 3.5 Jaollisuuslauseita

### EUKLEIDEEN LEMMA

Jos kokonaislukujen  $a$  ja  $b$  tulo  $ab$  on jaollinen alkuluvulla  $p$ , niin ainakin toinen luvuista  $a$  ja  $b$  on jaollinen luvulla  $p$ .

Esim. Onko luku 78 jaollinen alkuluvulla 13?

## KYMMENJÄRJESTELMÄN HYÖDYNTÄMINEN:

- Jos luvun  $a$  numeroiden summa on jaollinen luvulla  $b$ , on luku  $a$  jaollinen luvulla  $b$ .

Esim. Onko luku 37 668 jaollinen luvulla 3?

Lause: Jos luku  $a$  on jaollinen eri suurilla alkuluvuilla  $p_1, p_2, \dots, p_n$  niin  $a$  on jaollinen tulolla  $p_1 p_2 \dots p_n$

Esim. Onko luku 78 jaollinen luvulla 26?

Lause: Jos luku  $a$  on jaollinen luvuilla  $p$  ja  $q$ , joiden suurin yhteinen tekijä on 1, niin luku  $a$  on jaollinen tulolla  $pq$ .

Esim. Onko luku 240 jaollinen luvulla 30?