

2. TODISTUSMENETELMIÄ

2.1 SUORA TODISTUS

2.2 VASTAESIMERKKI

2.3 EPÄSUORA TODISTUS

2.4 MATEMAATTINEN INDUKTIO

2.1 SUORA TODISTUS

- ▶ Perustuu tautologiaan $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (Modus ponens).
- ▶ A on tosi. Implikaatio $A \Rightarrow B$ on tosi, jos sekä A ja B ovat tosia. Implikaation $A \Rightarrow B$ todistamiseen riittää siis osoittaa, että B on tosi.

Todistuksen rakenne:

Oletus P

Väite Q

Todistus Otetaan lähtökohdaksi oletus P ja johdetaan siitä väite Q

- 
- Todistus päätetään pieneen neliöön ■ tai kirjainyhdistelmään m.o.t (= mikä oli todistettava).

Esim. Todista lause: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

Esim. Todista, että kolmion kulman vieruskulma on yhtä suuri kuin kolmion muiden kulmien summa.

2.2 VASTAESIMERKKI

- ▶ Vastaesimerkkiä käytetään, kun halutaan todistaa joku lause epätodeksi.
- ▶ Epätodeksi todistamiseen riittää antaa vain yksi vastaesimerkki, jolla lause ei ole tosi.
- ▶ Vastaesimerkillä voidaan todistaa lause vain epätodeksi.

Lause $\forall x: A(x)$ saadaan osoitettua epätodeksi. Kun löydetään yksi perusjoukon alkio x , jolle lause $A(x)$ on epätosi. Tätä alkiota kutsutaan lauseen $\forall x: A(x)$ vastaesimerkiksi.

Esim. Osoita, että lause $x^2 - 2 > 0$ on epätosi kaikilla reaalityövuilla.

Esim. Onko väite "Luvun x neliö x^2 on aina suurempi tai yhtä suuri kuin luku itse." totta?

2.3 EPÄSUORA TODISTUS

- ▶ Epäsuorassa todistuksessa tehdään *vastaväite* eli *antiteesi* ("vastaaoletus").
- ▶ Todistetaan, että vastaväitteestä seuraa ristiriita alkuperäisen oletuksen kanssa tai jonkun yleisesti tiedetyn toden kanssa. Tällöin vastaväite on väärä eli väite on oikea.
- ▶ Epäsuora todistus perustuu kontrapositiolakiin $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ tai kontradiktioon eli todettuun ristiriitaan $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow \text{ristiriita})$

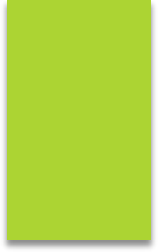
Todistuksen rakenne:

Oletus P

Väite Q

Todistus Tehdään vastaoletus $\neg B$ ja päätellään $\neg A$. (Pyritään pääsemään vastaoletuksesta ristiriitaan oletuksen kanssa.)

Esim. Todista, että jos n^2 on pariton, niin luku $n \in \mathbb{Z}$ on pariton.



2.4 MATEMAATTINEN INDUKTIO

- ▶ Luonnollisten lukujen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ja positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ joukossa pätee induktio-ominaisuus:
 - ▶ Jos jokin ominaisuus *pätee jollekin luvulle n* (joukon ensimmäinen luku, 0 tai 1)
JA
 - ▶ Jos siitä, että väite *pätee arvolla n* seuraa, että väite *pätee myös arvolla $n + 1$* , niin väite *pätee kaikilla arvoilla n* .

Induktiotodistus

- Alkuaskel: Osoitetaan, että väite pätee, kun $n = 0$ (tai $n = 1$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$).
- Induktioaskel: Oletetaan, että väite on tosi mielivaltaisella n :n arvolla ja todistetaan, että väite on tosi luvulla $n+1$
- (Näistä seuraa, että luvusta 0 (tai 1) alkaen väite pätee kaikilla muillakin luvuilla.)

ESIMERKKEJÄ

1) Osoita, että $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

