Abitti- kertaustehtävien ratkaisut:

2. **Ratkaise epäyhtälöt**
   a) $\mathbf{5x + 2 > 3x - 3}$
   b) $\mathbf{x^2 + 7x + 10 < 0}$

Ratkaisu:

a) $5x + 2 > 3x - 3 \quad \| -3x$
$2x + 2 > -3 \quad \| -2$
$2x > -5 \quad \| : 2$
$x > -\frac{5}{2}$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$
Laskimella: $x = -2$ tai $x = -5$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktion kulkukaavio on

	-5	-2
f(x) +	-	+

Joten epäyhtälö toteutuu, kun -5 < x < -2.

3. **Määritä funktion $\mathbf{f(x) = 2x^2 - 3x - 7}$**
   a) **Keskimääräinen muutosnopeus välillä [-1, 3]**
   b) **Hetkellinen muutosnopeus kohdissa $\mathbf{x = -1}$ ja $\mathbf{x = 3}$**

Ratkaisu:

a) Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä:
$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 7 = 2 + 3 - 7 = -2$
$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 7 = 18 - 9 - 7 = 2$

(Y:n arvot voi myös katsoa kuvaajasta)

Keskimääräinen muutosnopeus saadaan laskettua siis pisteiden (-1, -2) ja (3, 2) kautta kulkevan sekantin kulmakertoimella

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

b) Hetkellinen muutosnopeus saadaan derivaatan arvoista kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$

$f'(x) = 4x - 3$

$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 3 = -4 - 3 = -7$

$f'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 12 - 3 = 9$

Eli hetkellinen muutosnopeus kohdassa x = -1 on -7 ja kohdassa x = 3 on 9.

4. Olkoon $f(x) = -6x^2 + 7x + 3$.

a) Laske derivaatan arvo kohdassa -2

b) Millä muuttujan x arvolla funktiolle piirretyn tangentin arvo on -2?

Ratkaisu:

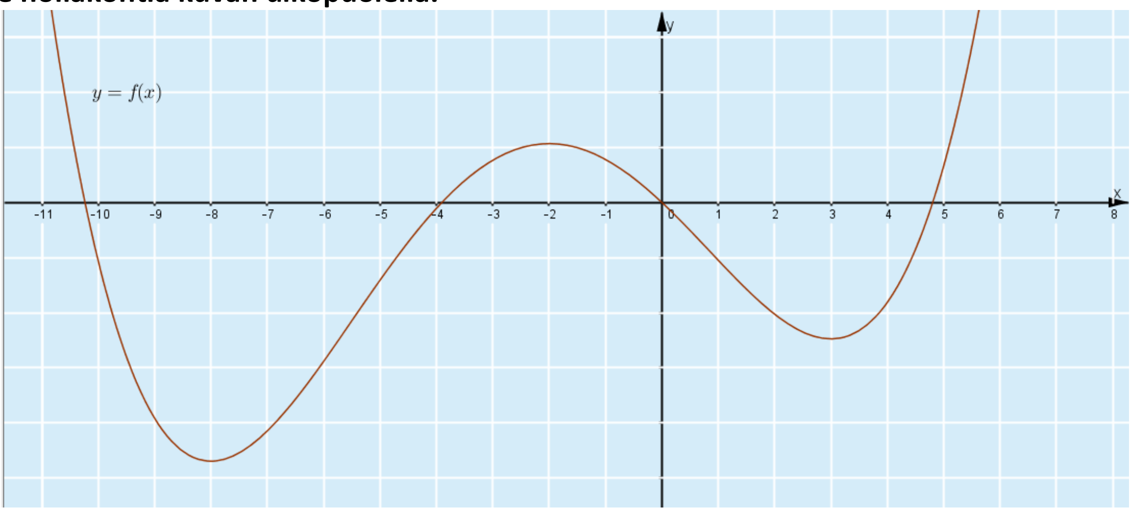
a) $f'(x) = -12x + 7$

$f(-2) = -12 \cdot (-2) + 7 = 24 + 7 = 31$

b) Merkitään derivaatta yhtä suureksi kuin -2

$$-12x + 7 = -2 \quad \| -7$$
$$-12x = -9 \quad \|: (-12)$$
$$x = \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4}$$

5. Vastaa kysymyksiin oheisen funktion *f* kuvaajan avulla. Polynomifunktion *f* derivaatalla ei ole nollakohtia kuvan ulkopuolella.



a) Millä muuttujan *x* arvoilla funktio *f* on kasvava?

b) Millä muuttujan *x* arvoilla funktion *f* arvo on negatiivinen?

c) Millä muuttujan *x* arvoilla funktion *f* derivaatan arvo on negatiivinen?

Ratkaisu:

a) Funktio f on kasvava likimain, kun $-8{,}0 \leq x \leq -2{,}0$ ja $x \geq 3{,}0$.

b) Funktion f arvo on negatiivinen likimain, kun $-10{,}4 \leq x \leq -3{,}9$ ja $0{,}0 \leq x \leq 4{,}7$

c) Funktion f derivaatta on negatiivinen avoimella välillä, jolla funktio f on vähenevä.Funktion f derivaatta on negatiivinen likimain, kun $x < -8{,}0$ ja $-2{,}0 < x < 3{,}0$.

6. **Olkoon funktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$.**

   a) **Derivoi funktio f ja määritä derivaatan nollakohdat.**

   b) **Määritä derivaattafunktion merkki jokaisella derivaatan nollakohtien rajaamalla välillä.**
   Mitä nämä merkit kertovat funktion kulusta?

   c) **Millä muuttujan arvoilla funktio f on kasvava?**

Ratkaisut:

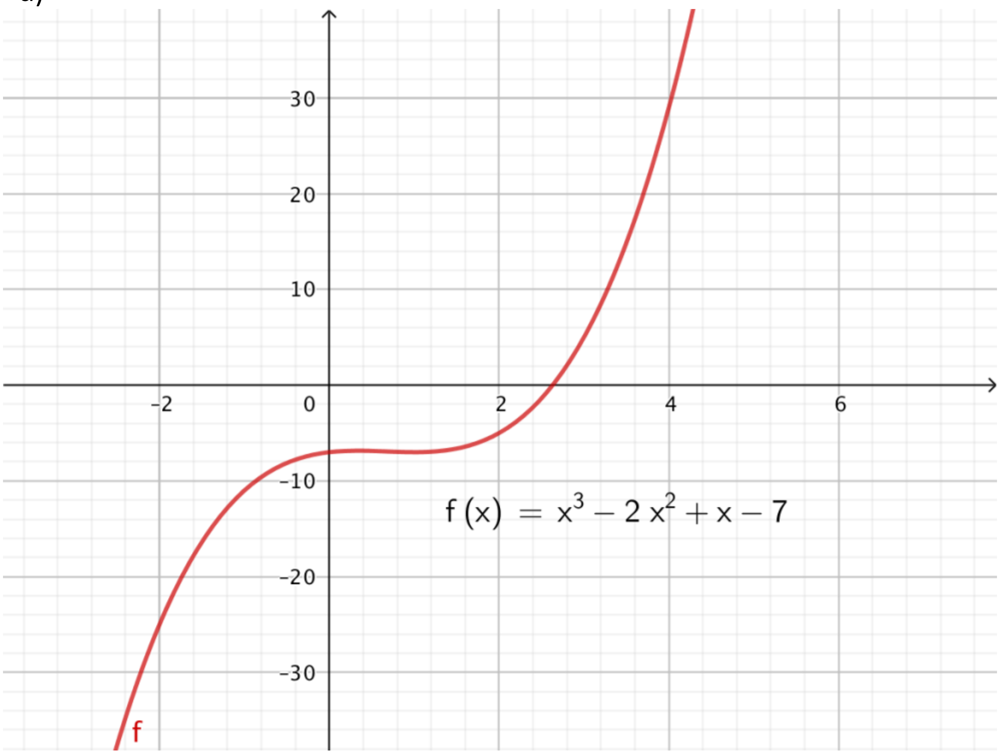
a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
   $3x^2 - 4x + 1 = 0$
   Sopivalla ohjelmalla saadaan
   $x = \frac{1}{3}$ tai $x = 1$.

b) Lasketaan
   $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$
   $f\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+1=-\frac{1}{3}$
   $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$.

   Väleillä, joilla derivaatan merkki on positiivinen, funktio on kasvava ja väleillä, joilla derivaatan merkki on negatiivinen, funktio on vähenevä.

c) Kohdan b perusteella, funktio f on kasvava kun $x \leq \frac{1}{3}$ ja kun $x \geq 1$.

d)



7. Määritä funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ paikalliset ääriarvot sekä suurin ja pienin arvo välillä [−1, 1].

Ratkaisu:

Derivoidaan funktio *f*.
$f'(x) = 3x^2 + 2x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$3x^2 + 2x = 0$
Yhtälön ratkaisut saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.
Ratkaisut ovat $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{3}$.

Laaditaan funktion kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se saa negatiivisia arvoja nollakohtien välillä ja positiivisia arvoja muualla.

		$-\frac{2}{3}$	0
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗
	max	min	

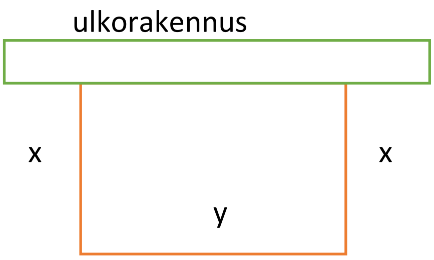
Funktion *f* paikallinen maksimiarvo on $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{58}{27}$
ja paikallinen minimiarvo $f(0) = 0^3 + 0^2 + 2 = 2$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.
Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$ ja $x = 1$.

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2 = 2$
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{58}{27} \approx 2{,}148\ldots$
$f(0) = 2$
$f(1) = 1^3 + 1^2 + 2 = 4$

Välillä [−1, 1] funktion suurin arvo on 4 ja pienin arvo on 2.

8. Ponille tehdään suorakulmion muotoinen aitaus ulkorakennuksen viereen. Aitauksen yhtenä sivuna on osa rakennuksen seinästä. Muille sivuille rakennetaan aita. Aidan yhteenlaskettu pituus on 160 m. Miten aitauksen mitat on valittava, jotta sen pinta-ala on mahdollisimman suuri?



Aidan pituus on 160 m. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä aitauksen pituus y
$x + y + x = 160 \parallel -2x$
$y = 160 - 2x$

Muodostetaan aitauksen pinta-alan lauseke:
$A(x) = x(160 - 2x) = -2x^2 + 160x$

Aidan leveys x ja pituus y ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan tämän perusteella, mitä arvoja leveys x voi saada:

$x > 0$ ja $160 - 2x > 0$
$x < 80$

Pinta- alan määrittelyväli on siis $0 < x < 80$.

Derivoidaan pinta-alafunktio A ja lasketaan derivaatan nollakohdat:
$A'(x) = -4x + 160$

$-4x + 160 = 0 \parallel -160$
$-4x = -160 \parallel : (-4)$
$x = 40$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio välillä $0 < x < 80$.
Derivaatta on laskeva suora, joten sen merkki ennen nollakohtaa on positiivinen ja nollakohdan jälkeen negatiivinen.

f’(x)	+	-
f(x)	↗	↘

0 40 80

Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan, kun pituus x = 40m. Leveys y on
$y = 160 - 2x = 160 - 2 \cdot 40 = 80$

Aitauksen mitat ovat 40m ja 80m.