4.2 Talouden ja luonnontieteiden sovelluksia

-Esimerkkejä-

Esim. 1:

Kiukaan lämpötilaa f (℃) ajan t (h) funktiona kuvaa funktio $f(t) = -347t^2 + 893t + 20$. Lämpötilaa tutkittiin välillä [0 min, 150 min]. Määritä lämpötilan suurin ja pienin arvo. Anna vastaukset asteen tarkkuudella.

$f'(x) = -694t + 893$

Derivaatan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
-694t + 893 &= 0 \\
-694t &= -893 \quad \| : (-694) \\
t &= \frac{-893}{-694} \\
t &\approx 1{,}29
\end{aligned}
$$

Derivaatan nollakohta kuuluu tarkasteltavalla välille. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Huom. 150min = 2,5h

$f(0) = -347 \cdot 0^2 + 893 \cdot 0 + 20 = 20$

$f(1{,}29) = -347 \cdot 1{,}29^2 + 893 \cdot 1{,}29 + 20 \approx 595$

$f(2{,}5) = -347 \cdot 2{,}5^2 + 893 \cdot 2{,}5 + 20 \approx 84$

Vastaus: Funktion f suurin arvo on 595°C ja pienin 20°C.

Esim. 2:

Jäätelökioskilla myydään päivässä 140 kpl jäätelöpuikkoja hintaan 1,60€. Jokainen 20 sentin hinnankorotus laskee päivittäistä myyntimäärää 20 kappaleella ja vastaavasti 20 sentin alennus nostaa päivittäistä myyntimäärää 20 kappaleella. Millä hinnalla jäätelöpuikkoja kannattaa myydä, jotta päivittäinen myyntitulo olisi mahdollisimman suuri?

Muodostetaan myyntituloa *M* kuvaava funktio taulukon avulla:

Jäätelön hinta (€)	Myyntimäärä päivässä (kpl)	Myyntitulo M päivässä (€)
1,60	140	1,60 · 140
1,60 + 0,20	140 – 20	(1,60 + 0,20)· (140 – 20)
1,60 + 0,20 · 2	140 – 20 · 2	(1,60 + 0,20· 2)· (140 – 20· 2)
1,60 + 0,20 · 3	140 – 20 · 3	(1,60 + 0,20· 3)· (140 – 20· 3)
1,60 + 0,20x	140 – 20x	(1,60 + 0,20x)· (140 – 20x)

Päivittäisen myyntitulon funktio *M* riippuu siis hinnankorotusten *x* määrästä:

$$M(x) = (1{,}60 + 0{,}20x)(140 - 20x) = -4x^2 - 4x + 224$$

Funktio *M* on määritelty, kun hinta ja myyntimäärä ovat ei-negatiivisia. Ratkaistaan mitä lukuja *x* voi saada:

$1{,}60 + 0{,}20x \geq 0$
$0{,}20x \geq -1{,}60 \quad \| : 0{,}20$
$x \geq -8$

$140 - 20x \geq 0$
$-20x \geq -140 \quad \| : (-20)$
$x \leq 7$

Myyntitulo on siis määritelty, kun $-8 \leq x \leq 7$.

Derivoidaan funktio *M*:
$M'(x) = -8x - 4$

Lasketaan derivaatan nollakohta:
$-8x - 4 = 0$
$-8x = 4$
$x = -0{,}5$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $-8 \leq x \leq 7$.

Lasketaan funktion arvo määrittelyvälin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdassa:

$M(-8) = -4 \cdot (-8)^2 - 4 \cdot (-8) + 224 = 0$

$M(7) = -4 \cdot 7^2 - 4 \cdot 7 + 224 = 0$

$M(-0{,}5) = -4 \cdot (-0{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) + 224 = 225$

Päivittäinen myyntitulo *M* on suurin, kun *x = -0,5*. Jäätelöpuikkojen myyntihinta on tuolloin:

$1{,}60 + 0{,}20x = \ 1{,}60 + 0{,}20 \cdot (-0{,}5) = 1{,}50.$

Vastaus: Myyntitulo on suurin, kun jäätelöpuikon hinta on 1,50€.