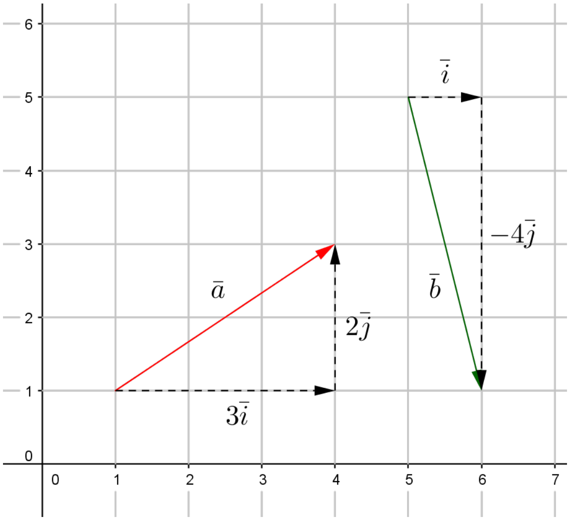
79



a) Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$.

b) Kuvasta nähdään, että $\overline{b} = \overline{i} - 4\overline{j}$.

c) Käytetään a- ja b-kohtien tuloksia ja muokataan lauseketta.

$$
\begin{aligned}
5\overline{a} - 2\overline{b} &= 5(3\overline{i} + 2\overline{j}) - 2(\overline{i} - 4\overline{j}) \\
&= 15\overline{i} + 10\overline{j} - 2\overline{i} + 8\overline{j} \\
&= 15\overline{i} - 2\overline{i} + 10\overline{j} + 8\overline{j} \\
&= 13\overline{i} + 18\overline{j}
\end{aligned}
$$

Vastaus
a) $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$
b) $\overline{b} = \overline{i} - 4\overline{j}$
c) $5\overline{a} - 2\overline{b} = 13\overline{i} + 18\overline{j}$

80

Merkitään pisteitä $A(4,7)$, $B(3,-5)$ ja $C(-9,0)$.

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(4,7)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = 4\overline{i} + 7\overline{j}\ .$$

b) Pisteen $B(3,-5)$ paikkavektori on

$$\overline{OB} = 3\overline{i} - 5\overline{j}\ .$$

c) Pisteen $C(-9,0)$ paikkavektori on

$$\overline{OC} = -9\overline{i} + 0\overline{j} = -9\overline{i}\ .$$

Vastaus
a) $\overline{OA} = 4\overline{i} + 7\overline{j}$
b) $\overline{OB} = 3\overline{i} - 5\overline{j}$
c) $\overline{OC} = -9\overline{i}$

81

a) Pisteen koordinaatit saadaan luettua paikkavektorin komponenttien kertoimista. Kun pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i} - 8\overline{j}$, pisteen koordinaatit ovat $(3,-8)$.

b) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 7\overline{j} = 0\overline{i} + 7\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(0,7)$.

c) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(-1,\frac{2}{3})$.

Vastaus
a) $(3,-8)$
b) $(0,7)$
c) $(-1,\frac{2}{3})$

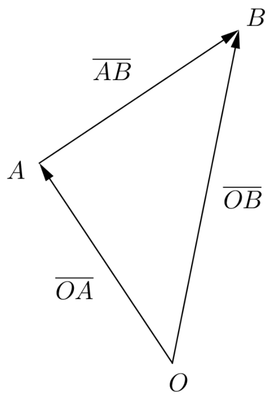
82

On selvitettävä, mihin pisteeseen päädytään, kun lähdetään pisteestä $A(-5,4)$ ja edetään 9 yksikköä vektorin $\overline{i}$ suuntaan ja 23 yksikköä vektorin $\overline{j}$ suuntaan.

Pisteen $A(-5,4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$.

Merkitään loppupistettä kirjaimella B. Pisteiden A ja B välinen siirtymävektori on $\overline{AB} = 9\overline{i} + 23\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= -5\overline{i} + 4\overline{j} + 9\overline{i} + 23\overline{j} \\ &= 4\overline{i} + 27\overline{j}\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $(4,27)$.

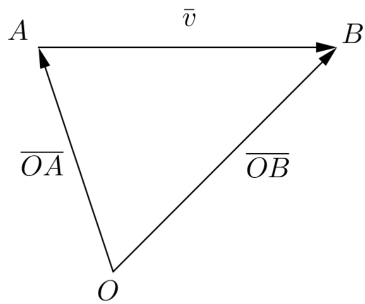
Vastaus pisteeseen $(4,27)$

83

Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä $A(-6,8)$ ja kuljetaan vektori $\overline{v} = 3\overline{i} - 12\overline{j}$.

Pisteen $A(-6,8)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{v} \\ &= -6\overline{i} + 8\overline{j} + 3\overline{i} - 12\overline{j} \\ &= -3\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

Loppupiste on siis $(-3,-4)$.

Vastaus $(-3,-4)$

84

a) Pisteiden $A(2,3)$, $B(0,7)$ ja $C(4,-2)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{OB} = 7\overline{j}$ ja $\overline{OC} = 4\overline{i} - 2\overline{j}$.

Paikkavektorien summa on

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{j} + 4\overline{i} - 2\overline{j}$$

$$= 6\overline{i} + 8\overline{j}.$$

b) On selvitettävä loppupiste P, kun lähdetään pisteestä $C(4,-2)$ ja kuljetaan vektori $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 6\overline{i} + 8\overline{j}$. Merkitään tätä siirtymävektoria $\overline{CP}$.

Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

$$= 4\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{i} + 8\overline{j}$$

$$= 10\overline{i} + 6\overline{j}$$

Loppupiste on siis $P = (10,6)$.

Vastaus a) $6\overline{i} + 8\overline{j}$
b) $P = (10,6)$

85

a) $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$

$$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

b) $\overline{b} = -2\overline{i} + 2\overline{j}$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

c) $\overline{c} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$

$$|\overline{c}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

Vastaus a) $|\overline{a}| = 5$

b) $|\overline{b}| = 2\sqrt{2}$

c) $|\overline{c}| = \sqrt{65}$

86

Vektorin $\overline{v} = 3t\overline{i} - 77\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{v}| = \sqrt{(3t)^2 + (-77)^2} = \sqrt{9t^2 + 5929}\,.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{v}| = 85$ ja ratkaistaan vakion t arvo (voidaan myös ratkaista suoraan laskimella).

$$\sqrt{9t^2 + 5929} = 85$$

$$9t^2 + 5929 = 85^2 = 7225$$

$$9t^2 = 7225 - 5929 = 1296$$

$$t^2 = 144$$

$$t = 12 \quad \text{tai} \quad t = -12$$

Siis kun $t = 12$ tai $t = -12$, vektorin $\overline{v}$ pituus on 85.

Vastaus $t = 12$ tai $t = -12$

87

a) Selvitetään kärkipiste B, kun lähdetään pisteestä $A(3,0)$ ja kuljetaan vektori $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$.

Pisteen $A(3,0)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= 3\overline{i} + 5\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 8\overline{i} - 2\overline{j}\end{aligned}$$

Kärki B on siis $B = (8,-2)$.

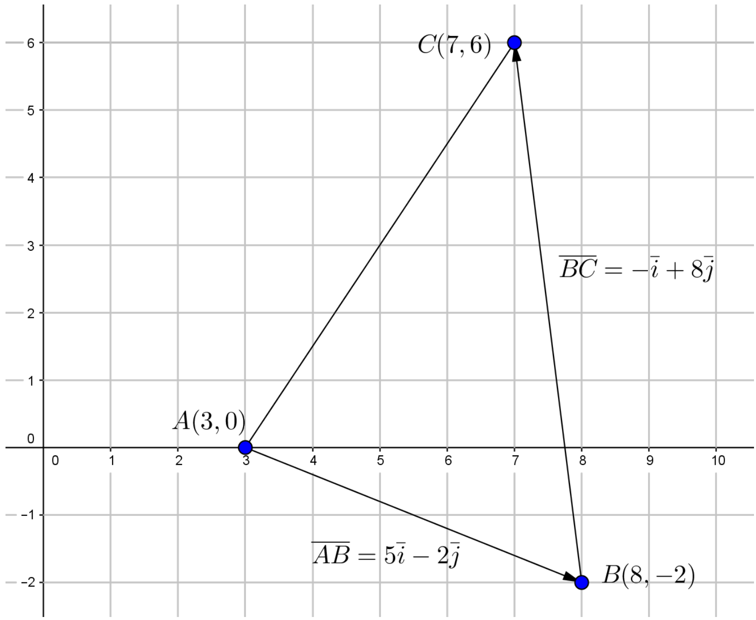
Selvitetään sitten kärkipiste C. Nyt lähdetään pisteestä $B(8,-2)$ ja kuljetaan vektori $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen C paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OB} + \overline{BC} \\ &= 8\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{i} + 8\overline{j} \\ &= 7\overline{i} + 6\overline{j}\end{aligned}$$

Kärki C on siis $C = (7,6)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



b) Kuvan perusteella näyttää, että kolmio ei ole suorakulmainen. Tarkistetaan havainto laskemalla.

Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan saadun kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

Sivun AB pituus on sama kuin vektorin $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Sivun BC pituus on sama kuin vektorin $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Sivun AC pituus on sama kuin vektorin $\overline{AC}$ pituus. Kuvan perusteella $\overline{AC} = 4\overline{i} + 6\overline{j}$.

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

Nähdään, että sivuista pisin on BC. Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{BC}\right|^2$$

$$29 + 52 = 65$$

$$81 = 65$$

epätosi

Kolmion sivujen pituudet eivät toteuta Pythagoraan lausetta, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus a) $B = (8, -2)$ ja $C = (7, 6)$

b) ei ole

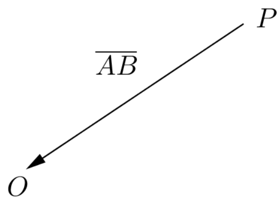
88

a) Pisteiden $A(9,13)$ ja $B(5,3)$ välinen vektori $\overline{AB}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-9)\overline{i} + (3-13)\overline{j} \\ &= -4\overline{i} - 10\overline{j}\end{aligned}$$

b) Määritetään alkupisteen P paikkavektori. Pisteeseen P päästään origosta O kulkemalla vektori $\overline{BA}$.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{BA} \\ &= -\overline{AB} \\ &= -(-4\overline{i} - 10\overline{j}) \\ &= 4\overline{i} + 10\overline{j}\end{aligned}$$



Siis alkupiste P on $P = (4,10)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = -4\overline{i} - 10\overline{j}$
b) $P = (4,10)$

89

Vektorin $\overline{a} = 10\overline{i} + 3t\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{a}| = \sqrt{10^2 + (3t)^2} = \sqrt{100 + 9t^2}.$$

Vektorin $\overline{b} = 5t\overline{i} - 6\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{b}| = \sqrt{(5t)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25t^2 + 36}.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$\begin{aligned}
\sqrt{100 + 9t^2} &= \sqrt{25t^2 + 36} \\
100 + 9t^2 &= 25t^2 + 36 \\
9t^2 - 25t^2 &= 36 - 100 \\
-16t^2 &= -64 \\
t^2 &= 4 \\
t = 2 \quad \text{tai} \quad t &= -2
\end{aligned}$$

Siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät, kun $t = 2$ tai $t = -2$.

Vastaus $\quad t = 2$ tai $t = -2$

90

a) Pisteen $A(-7,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -7\overline{i} + \overline{j}$.

b) Pisteen B paikkavektori on $\overline{OB} = 6\overline{i} - 8\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(6,-8)$.

c) $\left|\overline{OA}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ ja
$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

Vastaus
a) $\overline{OA} = -7\overline{i} + \overline{j}$
b) $B = (6,-8)$
c) $\left|\overline{OA}\right| = 5\sqrt{2}$ ja $\left|\overline{OB}\right| = 10$

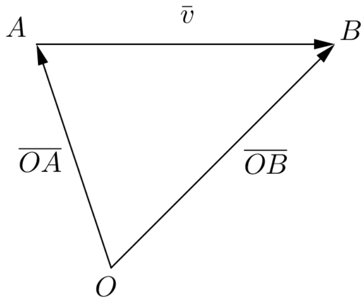
91

Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä alkupiste A, kun kuljetaan vektori $\overline{v} = 14\overline{i} - 9\overline{j}$ ja päädytään pisteeseen $B(3,-6)$.

Pisteen $B(3,-6)$ paikkavektori on $\overline{OB} = 3\overline{i} - 6\overline{j}$.

Muodostetaan pisteen A paikkavektori.

$$
\begin{aligned}
\overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{v} \\
&= 3\overline{i} - 6\overline{j} - (14\overline{i} - 9\overline{j}) \\
&= 3\overline{i} - 6\overline{j} - 14\overline{i} + 9\overline{j} \\
&= -11\overline{i} + 3\overline{j}
\end{aligned}
$$



Alkupiste on siis $(-11,3)$.

Vastaus $\quad (-11,3)$

92

Kirjoitetaan ensin vektori $\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}$ kantavektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v} &= \frac{1}{3}(6\overline{i}-12\overline{j})-5(-\overline{i}+4\overline{j})\\ &= 2\overline{i}-4\overline{j}+5\overline{i}-20\overline{j}\\ &= 7\overline{i}-24\overline{j}\end{aligned}$$

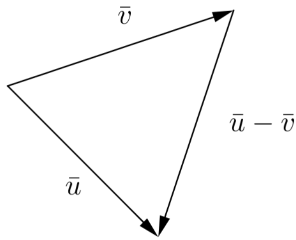
Vektorin $\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}$ pituus on

$$\left|\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}\right| = \sqrt{7^2+(-24)^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25.$$

Vastaus 25

93

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$, $\overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j}$ ja näiden erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{u} - \overline{v} &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - (5\overline{i} - 12\overline{j}) \\ &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - 5\overline{i} + 12\overline{j} \\ &= 15\overline{i} - 9\overline{j}.\end{aligned}$$

Lasketaan kaikkien kolmen sivun pituus.

$$|\overline{v}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$$

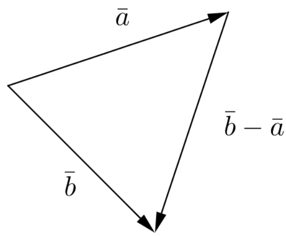
$$|\overline{u} - \overline{v}| = \sqrt{15^2 + (-9)^2} = \sqrt{225 + 81} = \sqrt{306} \approx 17,5$$

Nähdään, että kolmion lyhyimmän sivun pituus on 13.

Vastaus 13

94

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = -2\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + 9\overline{j}$ ja näiden erotusvektorista



$$\overline{b} - \overline{a} = 5\overline{i} + 9\overline{j} - (-2\overline{i} + 7\overline{j})$$

$$= 5\overline{i} + 9\overline{j} + 2\overline{i} - 7\overline{j}$$

$$= 7\overline{i} + 2\overline{j}.$$

Jos kolmio on suorakulmainen, sen
sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$|\overline{b} - \overline{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

Nähdään, että kolmion pisimmän sivun määrää vektori $\overline{b}$.
Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{a}|^2 + |\overline{b} - \overline{a}|^2 = |\overline{b}|^2$$

$$53 + 53 = 106$$

$$106 = 106$$

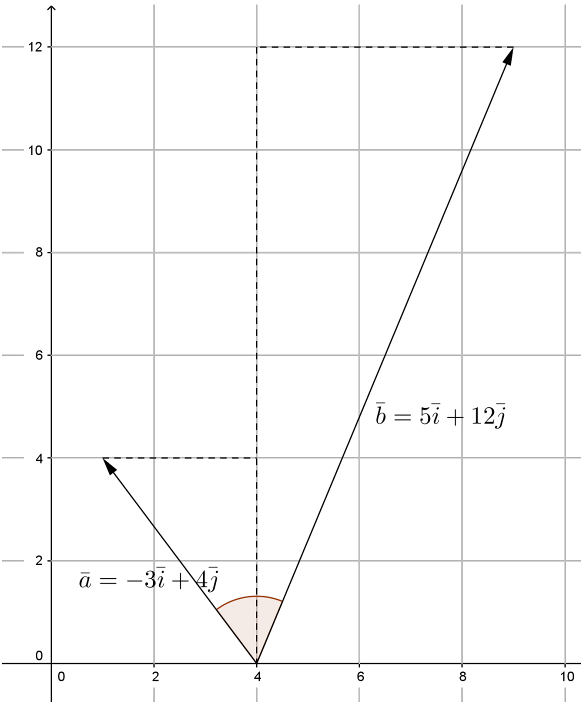
tosi

Kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus on

95

Piirretään vektorit $\overline{a} = -3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$ koordinaatistoon.



Nähdään, että vektorien välinen kulma $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ muodostuu kahdesta kulmasta, joiden tangentit ovat $\dfrac{3}{4}$ ja $\dfrac{5}{12}$. Siten

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) + \tan^{-1}(\frac{5}{12}) \approx 59{,}5°.$$

Vastaus $\quad 59{,}5°$

96

Vektorin $\overline{a} = 7t\overline{i} - 24t\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{a}| = \sqrt{(7t)^2 + (-24t)^2} = \sqrt{49t^2 + 576t^2}$$

$$= \sqrt{625t^2} = 25\sqrt{t^2} = 25|t|.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = 1$ ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$25|t| = 1$$

$$|t| = \frac{1}{25}$$

$$t = \frac{1}{25} \quad \text{tai} \quad t = -\frac{1}{25}$$

Kun $t = \frac{1}{25}$, vektori $\overline{a} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$.

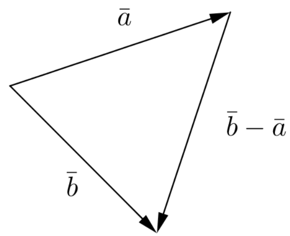
Kun $t = -\frac{1}{25}$, vektori $\overline{a} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}$.

Vastaus Kun $t = \frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$;
kun $t = -\frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}$.

97

Merkitään $\overline{a} = 2\overline{i} - t\overline{j} + \overline{j}$ ja $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j}$. Tutkitaan kolmiota, jonka sivut määräytyvät samasta kärjestä lähtevistä vektoreista $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ sekä näiden erotusvektorista

$$\begin{aligned}\overline{b} - \overline{a} &= 6\overline{i} + 4\overline{j} - (2\overline{i} - t\overline{j} + \overline{j}) \\ &= 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{i} + t\overline{j} - \overline{j} \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{j} + t\overline{j}.\end{aligned}$$



Jotta vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ olisivat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kolmion sivujen pituuksien täytyy toteuttaa Pythagoraan lause siten, että hypotenuusan määrää vektori $\overline{b} - \overline{a}$.

Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-t+1)^2} = \sqrt{4 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{t^2 - 2t + 5}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$|\overline{b} - \overline{a}| = \sqrt{4^2 + (3+t)^2} = \sqrt{16 + 9 + 6t + t^2} = \sqrt{t^2 + 6t + 25}$$

Muodostetaan Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö
$|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 = |\overline{b} - \overline{a}|^2$ ja ratkaistaan vakion t arvo (voidaan myös ratkaista laskimella).

$$t^2 - 2t + 5 + 52 = t^2 + 6t + 25$$

$$-2t + 57 = 6t + 25$$

$$-8t = 25 - 57 = -32$$

$$t = 4$$

Siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $t = 4$.

Vastaus $\quad t = 4$

98

a) Pisteiden $A(17,-27)$ ja $B(-7,18)$ välinen vektori $\overline{AB}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (-7-17)\overline{i} + (18-(-27))\overline{j}$$

$$= -24i + 45\overline{j}$$

b) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-24)^2 + 45^2} = \sqrt{576+2025} = \sqrt{2601} = 51$

c) Jos lähdetään origosta ja kuljetaan vektori $\frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(-24i + 45\overline{j}) = -8i + 15\overline{j}$, päädytään pisteeseen $(-8,15)$.

Vastaus
a) $\overline{AB} = -24i + 45\overline{j}$
b) $\left|\overline{AB}\right| = 51$
c) pisteeseen $(-8,15)$

99

Kärkipisteiden $A(-3,7)$ ja $B(4,-5)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$ ja $\overline{OB} = 4\overline{i} - 5\overline{j}$. Kärkipisteen C paikkavektori on $\overline{OC}$.

Kärkipisteiden paikkavektorien summa on nollavektori.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan paikkavektori $\overline{OC}$.

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$$

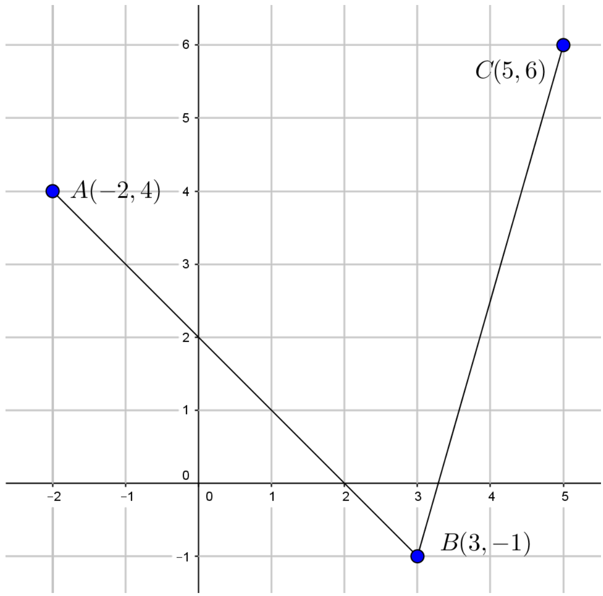
$$\begin{aligned}
\overline{OC} &= -\overline{OA} - \overline{OB} \\
&= -(-3\overline{i} + 7\overline{j}) - (4\overline{i} - 5\overline{j}) \\
&= 3\overline{i} - 7\overline{j} - 4\overline{i} + 5\overline{j} \\
&= -\overline{i} - 2\overline{j}
\end{aligned}$$

Kärkipiste C on siis $C = (-1,-2)$.

Vastaus $C = (-1,-2)$

100

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen D päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä A ja kulkemalla vektori $\overline{BC}$.

Pisteiden $B(3,-1)$ ja $C(5,6)$ välinen vektori $\overline{BC}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{BC} = (5-3)\overline{i} + (6-(-1))\overline{j}$$

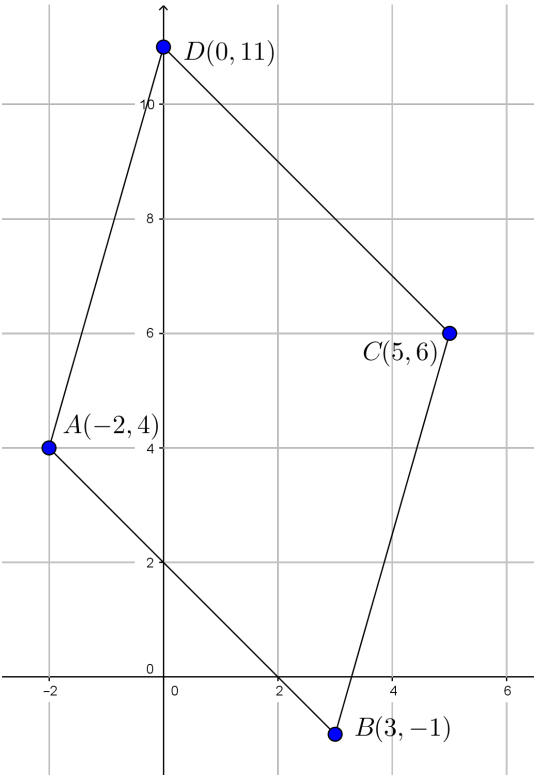
$$= 2i + 7\overline{j}$$

Muodostetaan kärkipisteen D paikkavektori.

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC}$$
$$= -2\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{i} + 7\overline{j}$$
$$= 0\overline{i} + 11\overline{j} \ (= 11\overline{j})$$

Neljäs kärkipiste on siis $D = (0,11)$.

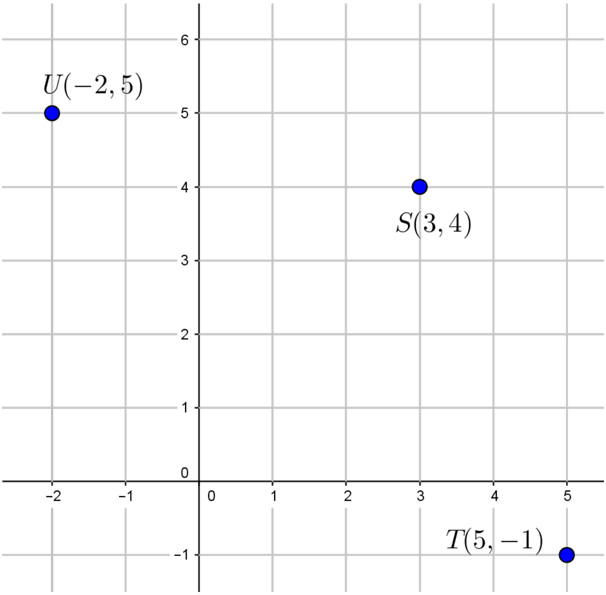
Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



Vastaus $\quad D = (0,11)$

101

Merkitään annettuja kärkipisteitä $S(3,4)$, $T(5,-1)$ ja $U(-2,5)$. Pisteiden sijaintia havainnollistaa oheinen kuva.



Olkoon neljäs kärkipiste V. Kaikki mahdolliset suunnikkaat ovat (poikkeuksellisesti myötäpäivään kiertäen) $STUV$, $STVU$ ja $SVTU$. Käsitellään jokainen tapaus erikseen.

STUV

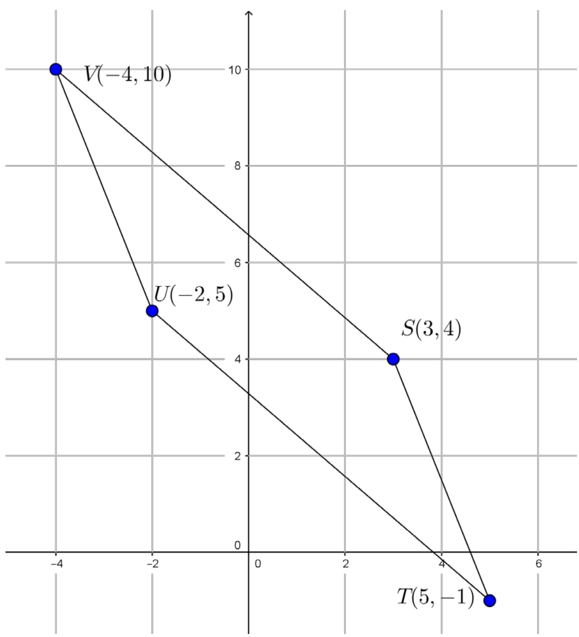
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä S ja kulkemalla vektori $\overline{TU} = -7i + 6\overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OS} + \overline{TU} \\ &= 3\overline{i} + 4\overline{j} - 7\overline{i} + 6\overline{j} \\ &= -4\overline{i} + 10\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (-4, 10)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



STVU

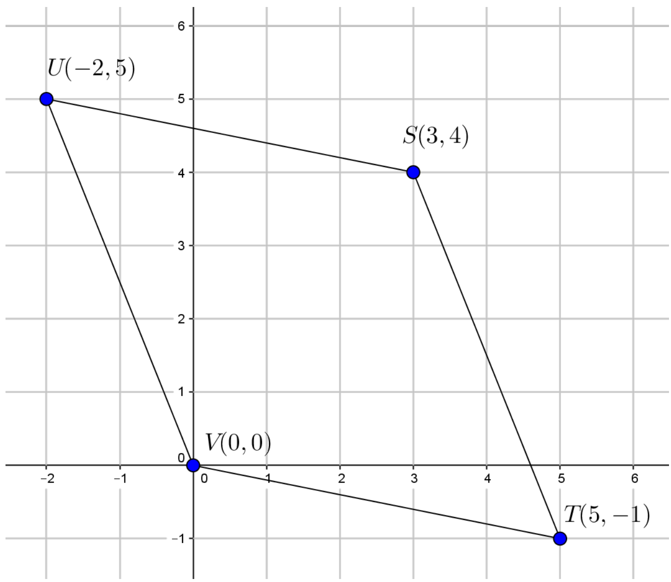
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{SU} = -5i + \overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OT} + \overline{SU} \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{i} + \overline{j} \\ &= 0\overline{i} + 0\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (0,0)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



SVTU

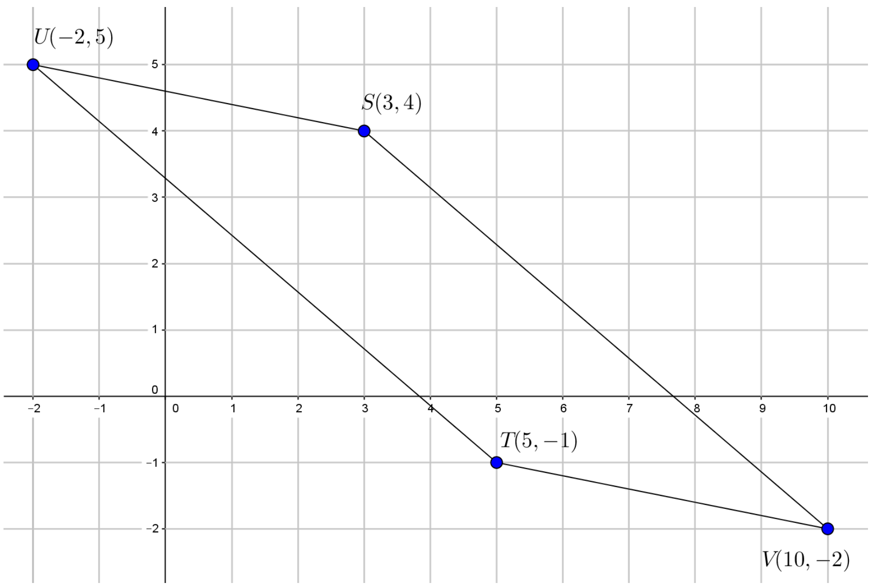
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esim. lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{US} = 5i - \overline{j}$ (lauseke saadaan laskemalla tai katsomalla kuvasta).

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OV} &= \overline{OT} + \overline{US} \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{i} - \overline{j} \\ &= 10\overline{i} - 2\overline{j}\end{aligned}$$

Neljäs kärkipiste on siis $V = (10, -2)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



Kaiken kaikkiaan on siis saatu, että suunnikkaan neljäs kärkipiste on $(-4,10)$, $(0,0)$ tai $(10,-2)$.

Vastaus $(-4,10)$, $(0,0)$ tai $(10,-2)$

102

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - \sqrt{5}\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{3}(2\overline{i} - \sqrt{5}\overline{j}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j}.$$

b) Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla 21, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntainen ja jonka pituus on 21.

$$\overline{b} = 21 \cdot \overline{a}^0$$

$$= 21(\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j})$$

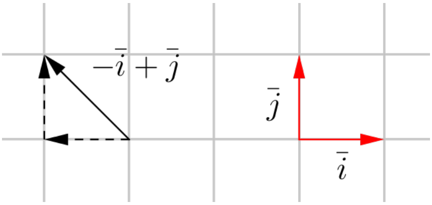
$$= 14\overline{i} - 7\sqrt{5}\overline{j}$$

Vastaus a) $\overline{a}^0 = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{\sqrt{5}}{3}\overline{j}$

b) $\overline{b} = 14\overline{i} - 7\sqrt{5}\overline{j}$

103

a) Luoteeseen osoittaa esimerkiksi vektori $-\overline{i}+\overline{j}$.



b) Lasketaan a-kohdan vektorin pituus.

$$\left|-\overline{i}+\overline{j}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Luoteeseen osoittava yksikkövektori on siten

$$\frac{1}{\left|-\overline{i}+\overline{j}\right|}\cdot(-\overline{i}+\overline{j})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overline{i}+\overline{j})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}.$$

c) Kun b-kohdan yksikkövektori kerrotaan luvulla 7, saadaan vektori, joka osoittaa luoteeseen ja jonka pituus on 7.

$$7\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j})=-\frac{7}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{7}{\sqrt{2}}\overline{j}$$

Vastaus a) esimerkiksi $-\overline{i}+\overline{j}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$

c) $-\frac{7}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{7}{\sqrt{2}}\overline{j}$

104

Lasketaan vektorin $\overline{b} = 4\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0 = \frac{1}{\left|\overline{b}\right|} \cdot \overline{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}(4\overline{i} - \overline{j})$$

$$= {}^{\sqrt{17})}\frac{4}{\sqrt{17}}\overline{i} - {}^{\sqrt{17})}\frac{1}{\sqrt{17}}\overline{j} = \frac{4\sqrt{17}}{17}\overline{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\overline{j}.$$

Määritetään vektori $\overline{a}$. Kun yksikkövektori $\overline{b}^0$ kerrotaan luvulla 34 tai luvulla -34, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{b}$ kanssa yhdensuuntainen (eli samansuuntainen tai vastakkaissuuntainen) ja jonka pituus on 34, eli vektori $\overline{a}$.

$$\overline{a} = \pm 34 \cdot \overline{b}^0$$

$$= \pm 34\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\overline{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\overline{j}\right)$$

$$= \pm 2 \cdot 4\sqrt{17}\overline{i} \mp 2\sqrt{17}\overline{j} = \pm 8\sqrt{17}\overline{i} \mp 2\sqrt{17}\overline{j}$$

Siis $\overline{a} = 8\sqrt{17}\overline{i} - 2\sqrt{17}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -8\sqrt{17}\overline{i} + 2\sqrt{17}\overline{j}$.

Vastaus $\overline{a} = 8\sqrt{17}\overline{i} - 2\sqrt{17}\overline{j}$ tai $\overline{a} = -8\sqrt{17}\overline{i} + 2\sqrt{17}\overline{j}$

105

Lasketaan vektorin $\overline{a} = 9\overline{i} - 12\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{15}(9\overline{i} - 12\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}.$$

Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla -10, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen ja jonka pituus on 10.

$$\overline{v} = -10 \cdot \overline{a}^0$$

$$= -10(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j})$$

$$= -6\overline{i} + 8\overline{j}$$

Vastaus $\overline{v} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$

106

Lähtöpiste on $A(43,87)$. Merkitään loppupistettä kirjaimella B.

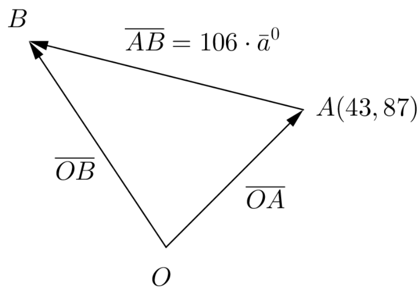
Vektorin $\overline{a} = 45\overline{i} - 28\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}| = \sqrt{45^2 + (-28)^2} = 53$.

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{53}(45\overline{i} - 28\overline{j}) = \frac{45}{53}\overline{i} - \frac{28}{53}\overline{j}.$$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= \overline{OA} + 106 \cdot \overline{a}^0$$

$$= 43\overline{i} + 87\overline{j} + 106 \cdot (\frac{45}{53}\overline{i} - \frac{28}{53}\overline{j})$$

$$= 43\overline{i} + 87\overline{j} + 90\overline{i} - 56\overline{j}$$

$$= 133\overline{i} + 31\overline{j}$$

Päädytään siis pisteeseen $B = (133,31)$.

Vastaus pisteeseen $(133,31)$

107

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

a) Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r(4\overline{i} + 6\overline{j})$$

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = 4r\overline{i} + 6r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2 = 4r \\ 3 = 6r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ r = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Saatiin ratkaisu $r = \dfrac{1}{2}$, joten $\overline{a} = \dfrac{1}{2}\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja erityisesti samansuuntaiset, sillä $\dfrac{1}{2} > 0$.

b) Voitaisiin laskea samoin kuin a-kohdassa. Voidaan myös suoraan huomata, että koska
$10\overline{i} - 16\overline{j} = -2 \cdot (-5\overline{i} + 8\overline{j})$,
niin $\overline{a} = -2\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja erityisesti vastakkaissuuntaiset, sillä $-2 < 0$.

c) Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$-7\overline{i} + 2\overline{j} = r(14\overline{i} - 6\overline{j})$$

$$-7\overline{i} + 2\overline{j} = 14r\overline{i} - 6r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -7 = 14r \\ 2 = -6r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = -\dfrac{7}{14} = -\dfrac{1}{2} \\ r = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Nähdään, että yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$ ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Siten vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole yhdensuuntaiset vaan erisuuntaiset.

Vastaus
a) yhdensuuntaiset ja samansuuntaiset
b) yhdensuuntaiset ja vastakkaissuuntaiset
c) erisuuntaiset

108

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$t\overline{i} - 5\overline{j} = r(-7\overline{i} + \overline{j})$$

$$t\overline{i} - 5\overline{j} = -7r\overline{i} + r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} t = -7r \\ -5 = r \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan ratkaisu $r = -5$. Sijoitetaan ratkaisu ylempään yhtälöön ja ratkaistaan t.

$$t = -7r = -7 \cdot (-5) = 35$$

Kun $t = 35$, vektorit ovat $\overline{u} = t\overline{i} - 5\overline{j} = 35\overline{i} - 5\overline{j}$ ja $\overline{v} = -7\overline{i} + \overline{j}$. Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -5\overline{v}$ ja $-5 < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = 35$. Vektorit ovat tällöin vastakkaissuuntaiset.

109

Pisteen $A=(s+8,-6s)$ paikkavektori on $\overline{OA}=(s+8)\overline{i}-6s\overline{j}$.

Vektorit $\overline{OA}$ ja $\overline{v}=\overline{i}+2\overline{j}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{OA}=r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{OA}=r\overline{v}$, $r\neq 0$, ratkaisu joillain vakion s arvoilla.

$$\overline{OA}=r\overline{v}$$

$$(s+8)\overline{i}-6s\overline{j}=r(\overline{i}+2\overline{j})$$

$$(s+8)\overline{i}-6s\overline{j}=r\overline{i}+2r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} s+8=r \\ -6s=2r \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan laskimella $r=6$ ja $s=-2$.

Kun $s=-2$, vektorit ovat $\overline{OA}=(s+8)\overline{i}-6s\overline{j}=6\overline{i}+12\overline{j}$ ja $\overline{v}=\overline{i}+2\overline{j}$. Koska tällöin $\overline{OA}=r\overline{v}=6\overline{v}$ ja $6>0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $s=-2$. Vektorit ovat samansuuntaiset.

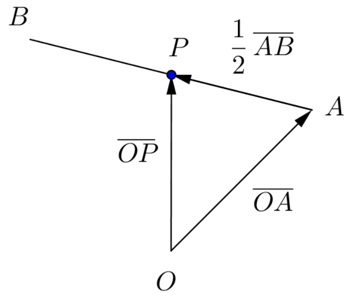
110

a) Pisteen A koordinaatit ovat $(-7,15)$ ja pisteen B $(11,-9)$.

Pisteiden A ja B välinen vektori $\overline{AB}$ on

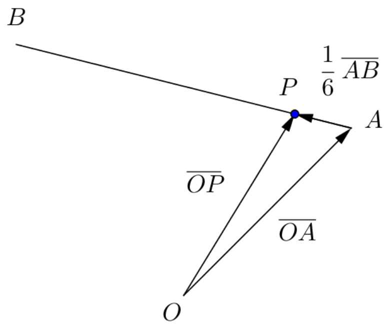
$$\overline{AB} = (11-(-7))\overline{i} + (-9-15)\overline{j}$$
$$= 18\overline{i} - 24\overline{j}.$$

Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$
$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + \frac{1}{2}(18\overline{i} - 24\overline{j})$$
$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + 9\overline{i} - 12\overline{j}$$
$$= 2\overline{i} + 3\overline{j}$$

b) Piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$. Yhteensä jakovälejä on siis $1 + 5 = 6$, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{1}{6}$ vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{6}\overline{AB}$$

$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + \frac{1}{6}(18\overline{i} - 24\overline{j})$$

$$= -7\overline{i} + 15\overline{j} + 3\overline{i} - 4\overline{j}$$

$$= -4\overline{i} + 11\overline{j}$$

Vastaus a) $\overline{OP} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$

b) $\overline{OP} = -4\overline{i} + 11\overline{j}$

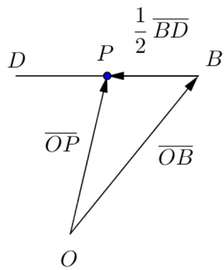
111

Tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten lävistäjien leikkauspiste P saadaan laskettua esimerkiksi siten, että lasketaan annettujen vastakkaisten kärkipisteiden B ja D välisen janan BD keskipiste.

Pisteiden B ja D välinen vektori $\overline{BD}$ on
$\overline{BD} = (-2-6)\overline{i} + (1-5)\overline{j} = -8\overline{i} - 4\overline{j}$.

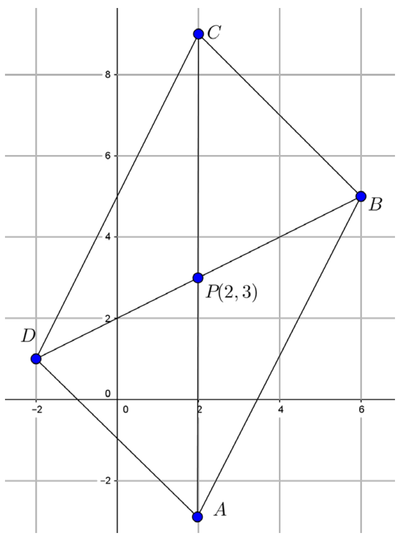
Piste P on janan BD keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä B kulkemalla puolet vektorista $\overline{BD}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BD} \\ &= 6\overline{i} + 5\overline{j} + \frac{1}{2}(-8\overline{i} - 4\overline{j}) \\ &= 6\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 2\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$



Leikkauspiste P on siis
$P = (2,3)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:
(kuvaan on merkitty myös kärkipiste C)



Vastaus $\quad P = (2,3)$

112

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 3\overline{i} - 3\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3\overline{i} - 3\overline{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}.$$

b) Vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) yksikkövektorit ovat yksikkövektori $\overline{a}^0$ ja kyseisen yksikkövektorin vastavektori $-\overline{a}^0$:

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j} \quad \text{ja} \quad -\overline{a}^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}.$$

Vastaus a) $\overline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ ja $-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$

113

Merkitään lähtöpistettä $(-5,4)$ kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B.

Vektorin $\overline{a}=5\overline{i}-12\overline{j}$ pituus on $|\overline{a}|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$.
Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0=\frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}=\frac{1}{13}(5\overline{i}-12\overline{j})=\frac{5}{13}\overline{i}-\frac{12}{13}\overline{j}.$$

Vektorin $\overline{b}=-24\overline{i}+7\overline{j}$ pituus on $|\overline{b}|=\sqrt{(-24)^2+7^2}=25$.
Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0=\frac{1}{|\overline{b}|}\cdot\overline{b}=\frac{1}{25}(-24\overline{i}+7\overline{j})=-\frac{24}{25}\overline{i}+\frac{7}{25}\overline{j}.$$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.

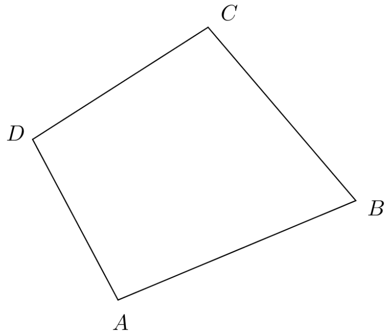
$$\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{OA}+\overline{AB}\\&=\overline{OA}+26\cdot\overline{a}^0+75\cdot\overline{b}^0\\&=-5\overline{i}+4\overline{j}+26\cdot(\frac{5}{13}\overline{i}-\frac{12}{13}\overline{j})+75\cdot(-\frac{24}{25}\overline{i}+\frac{7}{25}\overline{j})\\&=-5\overline{i}+4\overline{j}+10\overline{i}-24\overline{j}-72\overline{i}+21\overline{j}\\&=-67\overline{i}+\overline{j}\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $B=(-67,1)$.

Vastaus pisteeseen $(-67,1)$

114

Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Tutkitaan, ovatko nelikulmion sivut AB ja CD ja vastaavasti AD ja BC yhdensuuntaiset.



Pisteiden $A(4,5)$ ja $B(12,9)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on $\overline{AB} = (12-4)\overline{i} + (9-5)\overline{j} = 8i + 4\overline{j}$.

Pisteiden $C(-4,16)$ ja $D(-12,12)$ välinen vektori $\overline{CD}$ on $\overline{CD} = (-12-(-4))\overline{i} + (12-16)\overline{j} = -8i - 4\overline{j}$.

Pisteiden $A(4,5)$ ja $D(-12,12)$ välinen vektori $\overline{AD}$ on $\overline{AD} = (-12-4)\overline{i} + (12-5)\overline{j} = -16i + 7\overline{j}$.

Pisteiden $B(12,9)$ ja $C(-4,16)$ välinen vektori $\overline{BC}$ on $\overline{BC} = (-4-12)\overline{i} + (16-9)\overline{j} = -16i + 7\overline{j}$.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{CD}$.

Nyt huomataan, että koska $8\overline{i} + 4\overline{j} = -1 \cdot (-8\overline{i} - 4\overline{j})$, niin $\overline{AB} = -\overline{CD}$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ ja siis sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset.

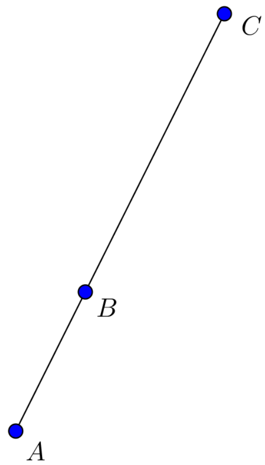
Vastaavasti nähdään suoraan, että $\overline{AD} = \overline{BC}$. Vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ ja siis sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset.

Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas.

Vastaus on

115

Kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla, jos esimerkiksi pisteiden väliset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset.



Pisteiden $A(2,-5)$ ja $B(7,2)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on
$\overline{AB} = (7-2)\overline{i} + (2-(-5))\overline{j} = 5i + 7\overline{j}$.

Pisteiden $A(2,-5)$ ja $C(87,114)$ välinen vektori $\overline{AC}$ on
$\overline{AC} = (87-2)\overline{i} + (114-(-5))\overline{j} = 85i + 119\overline{j}$
.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{AB} = r\overline{AC}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{AB} = r\overline{AC}$$

$$5\overline{i} + 7\overline{j} = r(85\overline{i} + 119\overline{j})$$

$$5\overline{i} + 7\overline{j} = 85r\overline{i} + 119r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 5 = 85r \\ 7 = 119r \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \dfrac{5}{85} = \dfrac{1}{17} \\ r = \dfrac{7}{119} = \dfrac{1}{17} \end{cases}$$

Saatiin ratkaisu $r = \dfrac{1}{17}$, joten $\overline{AB} = \dfrac{1}{17}\overline{AC}$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja annetut kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla. □

116

Ratkaistaan ensin c-kohta, sillä a- ja b-kohdat saadaan sen erikoistapauksina.

c) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$(4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = r(3\overline{i} + 6t\overline{j})$$

$$(4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = 3r\overline{i} + 6rt\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4t-2 = 3r \\ 3t = 6rt \end{cases}$$

Jos $t = 0$, alempi yhtälö toteutuu aina. Sijoitetaan $t = 0$ yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$4t-2 = 3r$$

$$3r = 4t-2 = 0-2 = -2$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

Oletetaan sitten, että $t \neq 0$. Tällöin yhtälöparin alemmasta yhtälöstä saadaan

$$3t = 6rt \quad | : t$$

$$3 = 6r$$

$$r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r = \frac{1}{2}$ yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$4t - 2 = 3r$$

$$4t - 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$4t = \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$t = \frac{7}{8}$$

Yhtälöparille saatiin siis kaksi ratkaisua: $r = -\frac{2}{3}$ ja $t = 0$ sekä $r = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{7}{8}$.

Kun $t = 0$, vektorit ovat $\overline{a} = (4t-2)\overline{i} + 3t\overline{j} = -2\overline{i} + 0\overline{j} = -2\overline{i}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + 6t\overline{j} = 3\overline{i} + 0\overline{j} = 3\overline{i}$. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = -\frac{2}{3}\overline{b}$ ja $-\frac{2}{3} < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Kun $t=\frac{7}{8}$, vektorit ovat

$\overline{a}=(4t-2)\overline{i}+3t\overline{j}=(4\cdot\frac{7}{8}-2)\overline{i}+3\cdot\frac{7}{8}\overline{j}=(\frac{7}{2}-\frac{4}{2})\overline{i}+\frac{21}{8}\overline{j}=\frac{3}{2}\overline{i}+\frac{21}{8}\overline{j}$

ja $\overline{b}=3\overline{i}+6t\overline{j}=3\overline{i}+6\cdot\frac{7}{8}\overline{j}=3\overline{i}+\frac{21}{4}\overline{j}$. Koska tällöin

$\overline{a}=r\overline{b}=\frac{1}{2}\overline{b}$ ja $\frac{1}{2}>0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Kaiken kaikkiaan siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) silloin, kun $t=0$ tai $t=\frac{7}{8}$.

a) c-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset silloin, kun $t=\frac{7}{8}$.

b) c-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t=0$.

Vastaus
a) $t=\frac{7}{8}$
b) $t=0$
c) $t=0$ tai $t=\frac{7}{8}$

117

Kolme pistettä määräävät kolmion, jos ne eivät ole samalla suoralla. Tutkitaan ensin, millä vakion a arvoilla pisteet ovat samalla suoralla.

Kolme pistettä A, B ja C ovat samalla suoralla, jos esimerkiksi pisteiden väliset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset (vrt. teht. 115).

Pisteiden $A(a+1,5)$ ja $B(2a,3)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on $\overline{AB} = (2a-(a+1))\overline{i} + (3-5)\overline{j} = (a-1)i - 2\overline{j}$.

Pisteiden $A(a+1,5)$ ja $C(a+5,a+6)$ välinen vektori $\overline{AC}$ on $\overline{AC} = (a+5-(a+1))\overline{i} + (a+6-5)\overline{j} = 4i + (a+1)\overline{j}$.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{AB} = r\overline{AC}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{AB} = r\overline{AC}$$

$$(a-1)\overline{i} - 2\overline{j} = r(4\overline{i} + (a+1)\overline{j})$$

$$(a-1)\overline{i} - 2\overline{j} = 4r\overline{i} + (a+1)r\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a-1 = 4r \\ -2 = (a+1)r \end{cases}$$

Laskimen mukaan yhtälöparilla ei ole reaalisia ratkaisuita. Tulos tarkoittaa, että millään vakion a arvolla ei ole olemassa sellaista lukua r, että $\overline{AB} = r\overline{AC}$. Siten annetut pisteet eivät koskaan ole samalla suoralla, joten ne määräävät kolmion olipa vakion a arvo mikä tahansa.

Vastaus Pisteet määräävät kolmion kaikilla vakion a arvoilla.

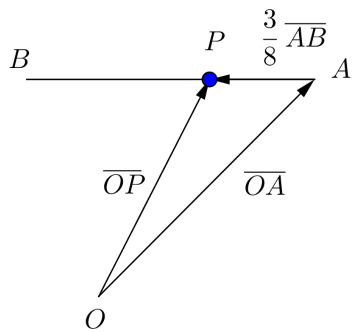
118

Pisteiden $A(-3,7)$ ja $B(5,-9)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\overline{AB} = (5-(-3))\overline{i} + (-9-7)\overline{j}$$
$$= 8\overline{i} - 16\overline{j}.$$

Piste P jakaa janan AB suhteessa 3 : 5. Yhteensä jakovälejä on siis 3 + 5 = 8, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{3}{8}$ vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{3}{8}\overline{AB}$$
$$= -3\overline{i} + 7\overline{j} + \frac{3}{8}(8\overline{i} - 16\overline{j})$$
$$= -3\overline{i} + 7\overline{j} + 3\overline{i} - 6\overline{j}$$
$$= 0\overline{i} + \overline{j} = \overline{j}$$



Siis piste P on $(0,1)$.

Vastaus $(0,1)$

119

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että

$$2\overline{i}+3\overline{j}=r\overline{a}+s\overline{b}=r(3\overline{i}-3\overline{j})+s(-6\overline{i}+\overline{j}).$$

Muokataan yhtälöä.

$$2\overline{i}+3\overline{j}=r(3\overline{i}-3\overline{j})+s(-6\overline{i}+\overline{j})$$

$$2\overline{i}+3\overline{j}=3r\overline{i}-3r\overline{j}-6s\overline{i}+s\overline{j}$$

$$2\overline{i}+3\overline{j}=(3r-6s)\overline{i}+(-3r+s)\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2=3r-6s \\ 3=-3r+s \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} 3r-6s=2 \\ -3r+\ \ s=3 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s.

$$+\begin{cases} 3r-6s=2 \\ -3r+\ \ s=3 \end{cases}$$

$$-5s=5$$

$$s=-1$$

Sijoitetaan $s = -1$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r.

$$3r - 6s = 2$$

$$3r = 2 + 6s = 2 + 6 \cdot (-1) = 2 - 6 = -4$$

$$r = -\frac{4}{3}$$

Siis

$$2\overline{i} + 3\overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = -\frac{4}{3}\overline{a} - \overline{b}\ .$$

Vastaus $\quad 2\overline{i} + 3\overline{j} = -\frac{4}{3}\overline{a} - \overline{b}$

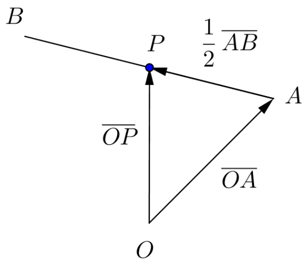
HUOM. Yhtälöpari voitaisiin ratkaista myös laskimella.

120

Pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}.$$

Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + \frac{1}{2}((x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j})$$

$$= x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + \frac{x_2 - x_1}{2}\overline{i} + \frac{y_2 - y_1}{2}\overline{j}$$

$$= \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2}\overline{i} + \frac{2y_1 + y_2 - y_1}{2}\overline{j}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}\overline{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\overline{j} \quad \square$$

121

a) **Tapa 1.** Lasketaan samaan tapaan kuin aikaisemmissakin tehtävissä. Pisteen A koordinaatit ovat $(4,6)$ ja pisteen B $(-4,3)$.

Pisteiden A ja B välinen vektori $\overline{AB}$ on
$\overline{AB} = (-4-4)\overline{i} + (3-6)\overline{j} = -8\overline{i} - 3\overline{j}$.

Piste Q on janan AB keskipiste. Pisteeseen Q päästään siis pisteestä A kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen Q paikkavektori.

$$\overline{OQ} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= 4\overline{i} + 6\overline{j} + \frac{1}{2}(-8\overline{i} - 3\overline{j})$$

$$= 4\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} = 0\overline{i} + \frac{9}{2}\overline{j}$$

Siis piste Q on $(0,\frac{9}{2})$.

Tapa 2. Soveltamalla suoraan tehtävän 120 kaavaa saadaan pisteen Q paikkavektoriksi

$$\overline{OQ} = \frac{4-4}{2}\overline{i} + \frac{6+3}{2}\overline{j} = 0\overline{i} + \frac{9}{2}\overline{j}.$$

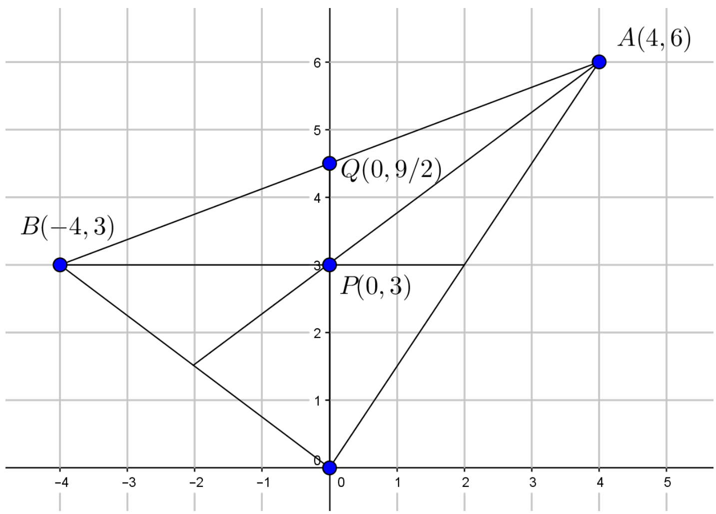
Siis piste Q on $(0, \frac{9}{2})$.

b) Tiedetään, että kolmion painopiste P on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa $2:1$ kärjestä lukien. Painopisteeseen P päästään siis kulkemalla origosta lähtien $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{OQ} = \frac{9}{2}\overline{j}$. Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \frac{2}{3}\overline{OQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\overline{j} = 3\overline{j}$$

Siis painopiste P on $(0,3)$.

a- ja b-kohtien tulokset voi tarkistaa piirtämällä:



Vastaus a) $(0,\frac{9}{2})$ b) $(0,3)$

122

Määritetään ensin esimerkiksi sivun AB keskipiste, jota merkitään kirjaimella Q. Soveltamalla suoraan tehtävän 120 kaavaa saadaan pisteen Q paikkavektoriksi (ks. myös tapa 2 teht. 121 a-kohdassa)

$$\overline{OQ} = \frac{-2+6}{2}\overline{i} + \frac{-1+5}{2}\overline{j} = 2\overline{i} + 2\overline{j}.$$

Siis sivun AB keskipiste Q on $(2,2)$.

Pisteiden $C(-4,5)$ ja Q välinen vektori $\overline{CQ}$ on

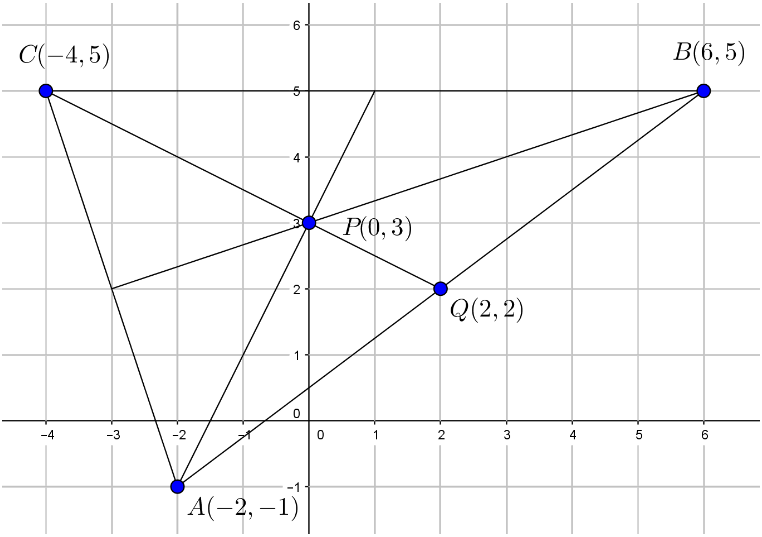
$$\overline{CQ} = (2-(-4))\overline{i} + (2-5)\overline{j} = 6\overline{i} - 3\overline{j}.$$

Tiedetään, että kolmion painopiste (merkitään kirjaimella P) on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.
Painopisteeseen P päästään siis pisteestä C kulkemalla $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{CQ} = 6\overline{i} - 3\overline{j}$ (vrt. kuva alla).
Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CQ}\\ &= -4\overline{i} + 5\overline{j} + \frac{2}{3}(6\overline{i} - 3\overline{j})\\ &= -4\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{i} - 2\overline{j} = 0\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

Siis painopiste P on $(0,3)$.

Tuloksen voi tarkistaa piirtämällä:



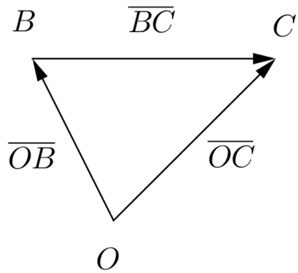
Vastaus $\quad (0,3)$

123

a) Määritetään ensin esimerkiksi sivun BC keskipisteen paikkavektori (merkitään keskipistettä kirjaimella Q).

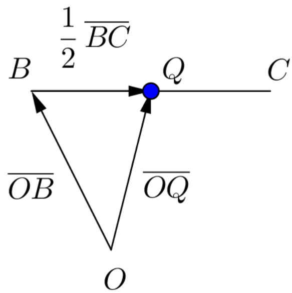
Pisteen B paikkavektori on $\overline{OB} = \overline{b}$ ja pisteen C paikkavektori on $\overline{OC} = \overline{c}$.

Pisteiden B ja C välinen vektori $\overline{BC}$ on



$$\overline{BC} = -\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{c} - \overline{b}.$$

Piste Q on janan BC keskipiste. Pisteeseen Q päästään siis pisteestä B kulkemalla puolet vektorista $\overline{BC}$. Muodostetaan pisteen Q paikkavektori.



$$\overline{OQ} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$= \overline{b} + \frac{1}{2}(\overline{c} - \overline{b}) = \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$$

Pisteiden A ja Q välinen vektori $\overline{AQ}$ on

$$\overline{AQ} = -\overline{OA} + \overline{OQ} = -\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}.$$

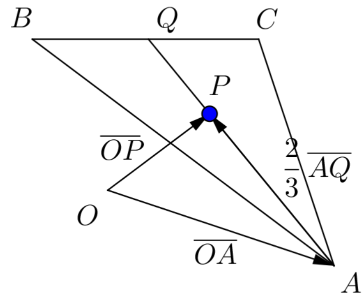
Tiedetään, että kolmion painopiste (merkitään kirjaimella P) on sama kuin kolmion mediaanien leikkauspiste. Toisaalta mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Painopisteeseen P päästään siis pisteestä A kulkemalla $\frac{2}{3}$ vektorista (mediaanista) $\overline{AQ} = -\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$.
Muodostetaan painopisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AQ}$$

$$= \overline{a} + \frac{2}{3}(-\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c})$$

$$= \overline{a} - \frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$$

$$= \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c} = \frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$$



Siis painopisteen paikkavektori on $\frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$. □

b) Tehtävässä 122 pisteiden A, B ja C paikkavektorit ovat $\overline{a} = -2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{b} = 6\overline{i} + 5\overline{j}$ ja $\overline{c} = -4\overline{i} + 5\overline{j}$. Paikkavektoreiden summa on

$$\begin{aligned}\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} &= -2\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{i} + 5\overline{j} \\ &= 0\overline{i} + 9\overline{j}.\end{aligned}$$

Painopisteen paikkavektoriksi saadaan

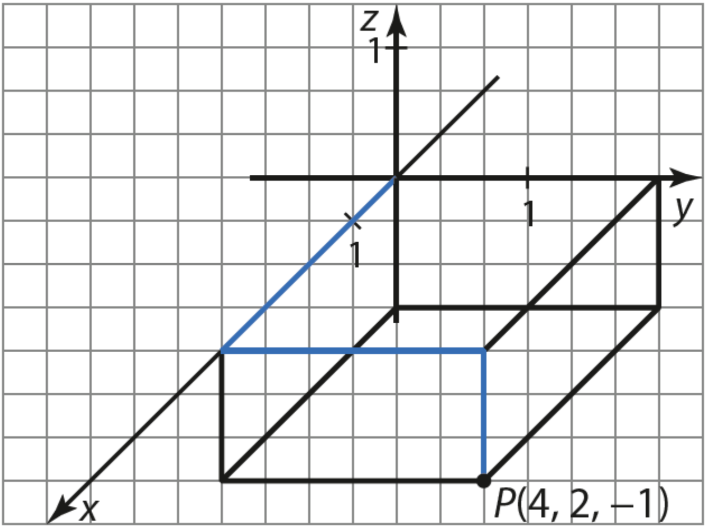
$$\frac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3} = \frac{9\overline{j}}{3} = 3\overline{j},$$

joten painopiste on $(0,3)$. Tulos on sama kuin edellisessä tehtävässä saatu.

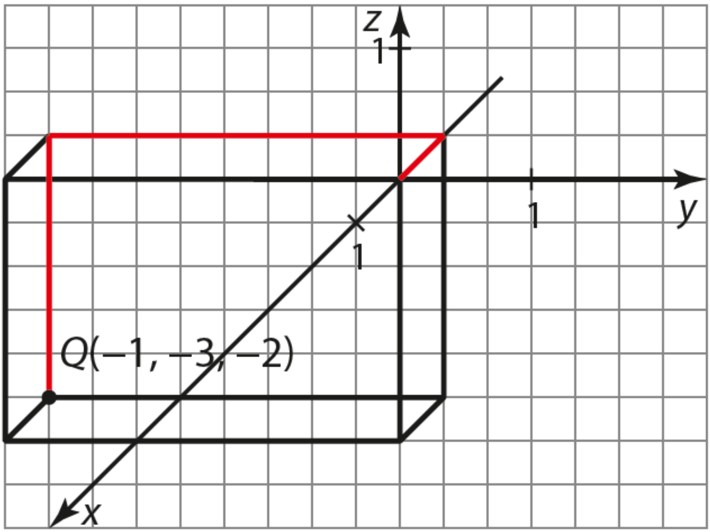
Vastaus b) $(0,3)$

124

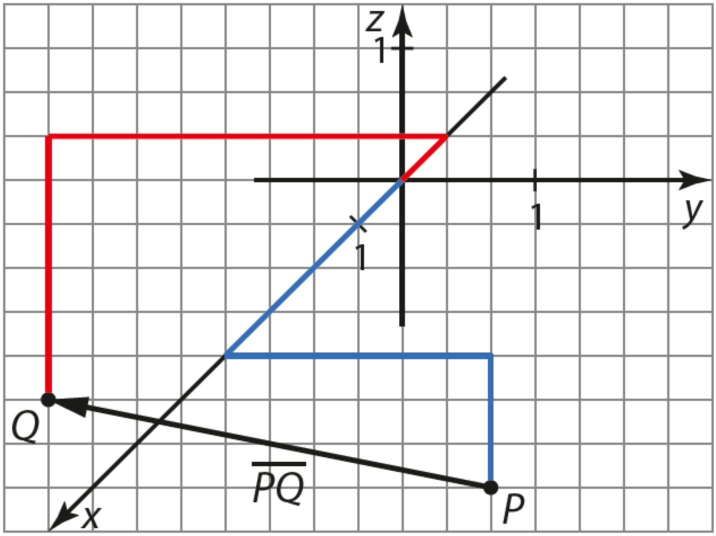
a)



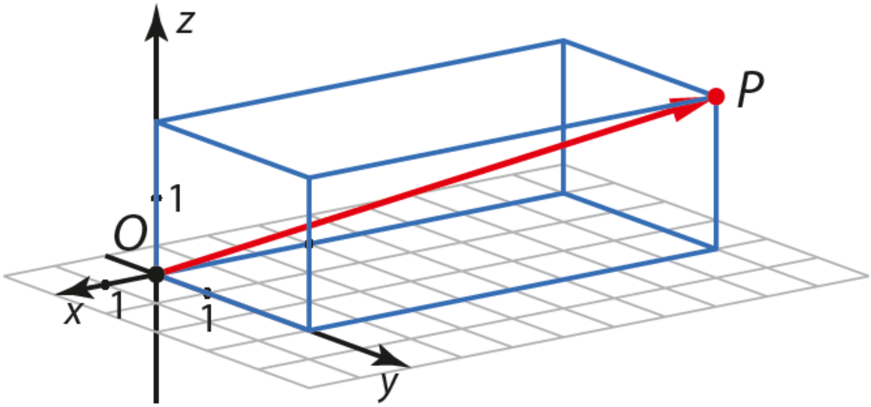
b)



c)

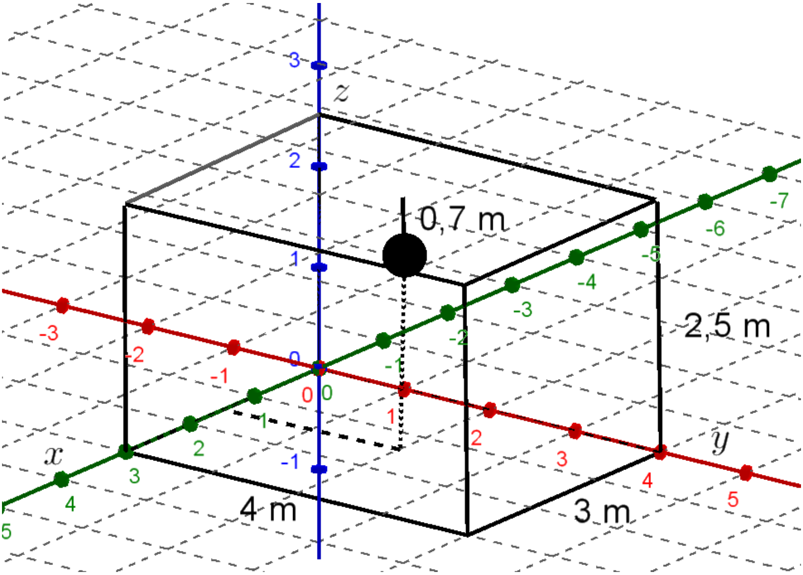


125



126

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



Origosta lähtien lampun kohdalle päästään kulkemalla $1{,}5$ yksikköä (metriä) positiivisen x-akselin suuntaan ja 2 yksikköä positiivisen y-akselin suuntaan. Lopuksi pitää vielä kulkea ylös (eli positiivisen z-akselin suuntaan) $2{,}5-0{,}7=1{,}8$ yksikköä. Siten lampun koordinaatit ovat $(1{,}5;\ 2;\ 1{,}8)$.

Vastaus $\quad (1{,}5;\ 2;\ 1{,}8)$

127

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja z-koordinaatti $\overline{k}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(1,2,3)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}\,.$$

b) Pisteen $B(5,0,-4)$ paikkavektori on

$$\overline{OB} = 5\overline{i} + 0\overline{j} - 4\overline{k} = 5\overline{i} - 4\overline{k}\,.$$

c) Pisteen $C(0,13,0)$ paikkavektori on

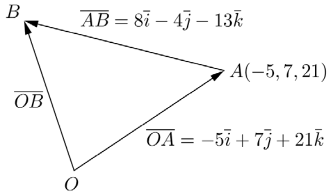
$$\overline{OC} = 0\overline{i} + 13\overline{j} + 0\overline{k} = 13\overline{j}\,.$$

Vastaus
a) $\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$
b) $\overline{OB} = 5\overline{i} - 4\overline{k}$
c) $\overline{OC} = 13\overline{j}$

128

a) Pisteen $A=(-5,7,21)$ paikkavektori on $\overline{OA}=-5\overline{i}+7\overline{j}+21\overline{k}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$$

$$=-5\overline{i}+7\overline{j}+21\overline{k}+8\overline{i}-4\overline{j}-13\overline{k}$$

$$=3\overline{i}+3\overline{j}+8\overline{k}$$

Saadaan siis $B=(3,3,8)$.

b) Määritetään pisteen D paikkavektori.

$$\overline{OD}=\overline{OA}-3\overline{AB}$$

$$=-5\overline{i}+7\overline{j}+21\overline{k}-3(8\overline{i}-4\overline{j}-13\overline{k})$$

$$=-5\overline{i}+7\overline{j}+21\overline{k}-24\overline{i}+12\overline{j}+39\overline{k}$$

$$=-29\overline{i}+19\overline{j}+60\overline{k}$$

Saadaan siis $D=(-29,19,60)$.

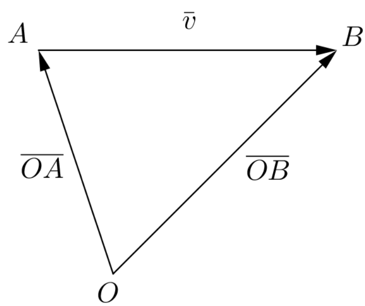
Vastaus a) $B=(3,3,8)$
b) $D=(-29,19,60)$

129

a) Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä $A(-1,6,9)$ ja kuljetaan vektori $\overline{v}=\overline{i}+7\overline{j}-5\overline{k}$.

Pisteen $A(-1,6,9)$ paikkavektori on $\overline{OA}=-\overline{i}+6\overline{j}+9\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



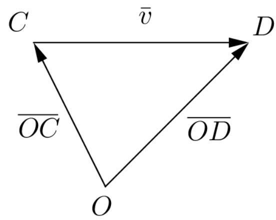
$$\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{OA}+\overline{v}\\&=-\overline{i}+6\overline{j}+9\overline{k}+\overline{i}+7\overline{j}-5\overline{k}\\&=0\overline{i}+13\overline{j}+4\overline{k}\end{aligned}$$

Loppupiste on siis $(0,13,4)$.

b) Merkitään alkupistettä kirjaimella C ja loppupistettä kirjaimella D. On selvitettävä alkupiste C, kun kuljetaan vektori $\overline{v} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$ ja päädytään pisteeseen $D(4,-2,-13)$.

Pisteen $D(4,-2,-13)$ paikkavektori on $\overline{OD} = 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen C paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OD} - \overline{v} \\ &= 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k} - (\overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}) \\ &= 4\overline{i} - 2\overline{j} - 13\overline{k} - \overline{i} - 7\overline{j} + 5\overline{k} \\ &= 3\overline{i} - 9\overline{j} - 8\overline{k}\end{aligned}$$

Alkupiste on siis $(3,-9,-8)$.

Vastaus a) $(0,13,4)$
b) $(3,-9,-8)$

130

Pisteiden $A(0,4,-6)$, $B(5,-5,9)$ ja $C(10,0,-10)$ paikkavektorit ovat

$$\overline{OA} = 0\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k} = 4\overline{j} - 6\overline{k},$$

$$\overline{OB} = 5\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k},$$

$$\overline{OC} = 10\overline{i} + 0\overline{j} - 10\overline{k} = 10\overline{i} - 10\overline{k}.$$

Pisteen D paikkavektori on pisteiden A, B ja C paikkavektorien summa. Määritetään pisteen D paikkavektori.

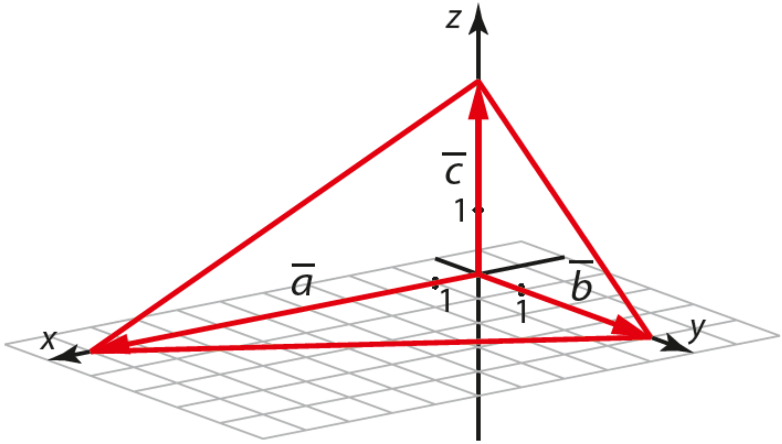
$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\ &= 4\overline{j} - 6\overline{k} + 5\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k} + 10\overline{i} - 10\overline{k} \\ &= 15\overline{i} - \overline{j} - 7\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $D = (15,-1,-7)$.

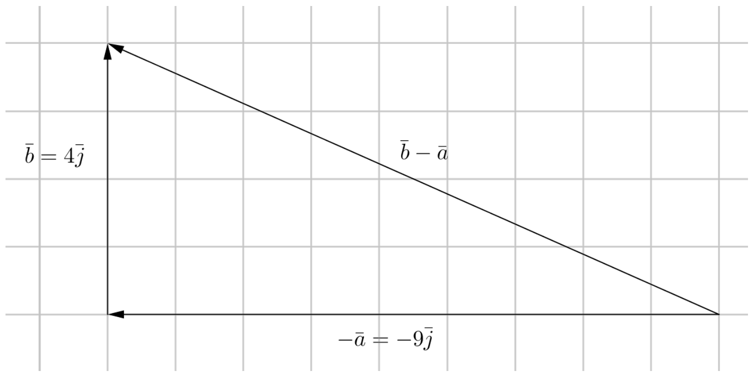
Vastaus $D = (15,-1,-7)$

131

a)



b) Pohjasärmät saadaan, kun vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ vähennetään pareittain toisistaan.



Siten vektorit ovat

$\overline{b} - \overline{a} = 4\overline{j} - 9\overline{i} = -9\overline{i} + 4\overline{j}$,

$\overline{c} - \overline{a} = 3\overline{k} - 9\overline{i} = -9\overline{i} + 3\overline{k}$,

$\overline{c} - \overline{b} = 3\overline{k} - 4\overline{j} = -4\overline{j} + 3\overline{k}$.

Toisaalta vähennyslaskut olisi voitu tehdä myös toisinpäin ($\overline{a} - \overline{b}$ jne.), joten myös saatujen vektorien vastavektorit käyvät vastaukseksi.

c) Pohjasärmien pituudet ovat b-kohdassa laskettujen vektorien pituudet.

$$\left|\overline{b} - \overline{a}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

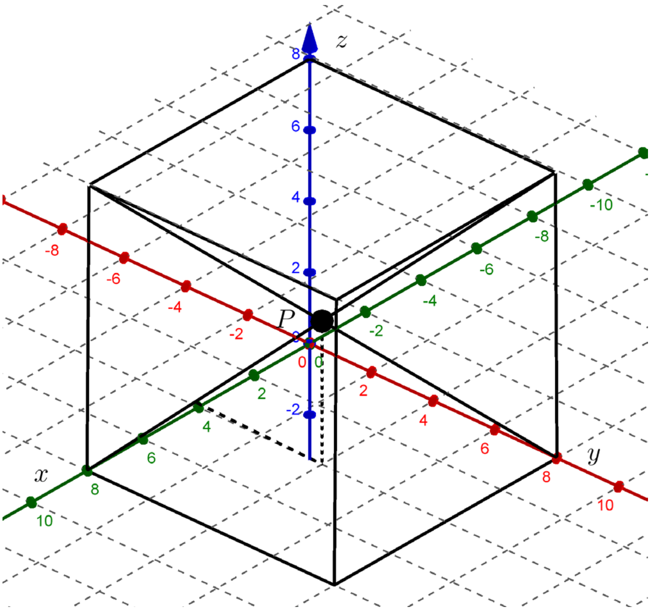
$$\left|\overline{c} - \overline{a}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$$

$$\left|\overline{c} - \overline{b}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Vastaus b) $-9\overline{i} + 4\overline{j}$, $-9\overline{i} + 3\overline{k}$ ja $-4\overline{j} + 3\overline{k}$
(tai vastaavat vastavektorit)
c) $\sqrt{97}$, $3\sqrt{10}$ ja 5

132

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva. Näkyviin on piirretty kaksi avaruuslävistäjää ja niiden leikkauspiste P.



Tiedetään, että suorakulmaisen särmiön (jollainen myös kuutio on) avaruuslävistäjät puolittavat toisensa. Siten avaruuslävistäjien leikkauspisteeseen P päästään kulkemalla minkä tahansa avaruuslävistäjän puoliväliin. Esimerkiksi origosta alkava avaruuslävistäjä on $8\overline{i}+8\overline{j}+8\overline{k}$, joten leikkauspisteen P paikkavektoriksi saadaan

$$\overline{OP}=\frac{1}{2}(8\overline{i}+8\overline{j}+8\overline{k})=4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}\ .$$

Vastaus $\quad \overline{OP}=4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$

133

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että

$$3\overline{i}-5\overline{j}=r\overline{a}+s\overline{b}=r(\overline{i}-\overline{j})+s(\overline{i}+\overline{j}).$$

Muokataan yhtälöä.

$$3\overline{i}-5\overline{j}=r(\overline{i}-\overline{j})+s(\overline{i}+\overline{j})$$

$$3\overline{i}-5\overline{j}=r\overline{i}-r\overline{j}+s\overline{i}+s\overline{j}$$

$$3\overline{i}-5\overline{j}=(r+s)\overline{i}+(-r+s)\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}3=r+s\\-5=-r+s\end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan laskimella $r=4$ ja $s=-1$.

Siis

$$3\overline{i}-5\overline{j}=r\overline{a}+s\overline{b}=4\overline{a}-\overline{b}.$$

Vastaus $\quad 3\overline{i}-5\overline{j}=4\overline{a}-\overline{b}$

134

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(3\overline{j} + \overline{k}) + t(2\overline{i} - 4\overline{k})$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{j} + s\overline{k} + 2t\overline{i} - 4t\overline{k}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = r\overline{i} + 2t\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{j} + s\overline{k} - 4t\overline{k}$$

$$16\overline{i} - 48\overline{j} + 96\overline{k} = (r + 2t)\overline{i} + (-2r + 3s)\overline{j} + (s - 4t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 16 = r + 2t \\ -48 = -2r + 3s \\ 96 = s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = 54$, $s = 20$ ja $t = -19$.

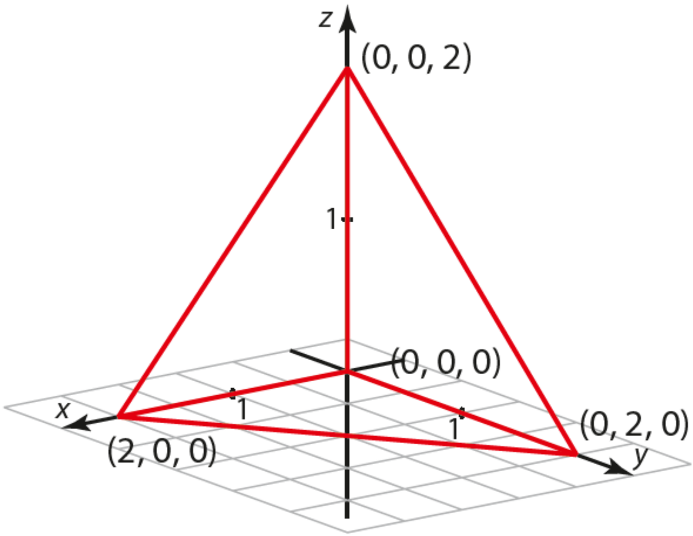
Siis

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = 54\overline{a} + 20\overline{b} - 19\overline{c}\ .$$

Vastaus $\quad \overline{v} = 54\overline{a} + 20\overline{b} - 19\overline{c}$

135

a)



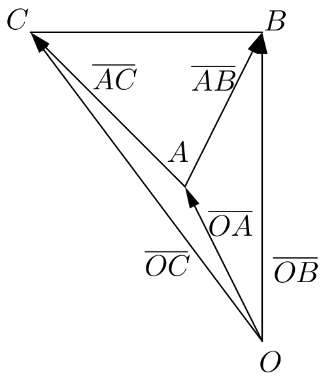
b) Suoraan a-kohdan kuvasta lukemalla tetraedrin kärkipisteiden koordinaateiksi saadaan $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,2)$.

Vastaus b) $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,2)$

136

a) Pisteen $A(-1,2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Selvitetään kärkipisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(-1,2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$= -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} + 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$$

$$= \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$$

Selvitetään sitten kärkipisteen C paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(-1,2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AC} = -3\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}$.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$= -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} - 3\overline{i} + 5\overline{j} + 8\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$$

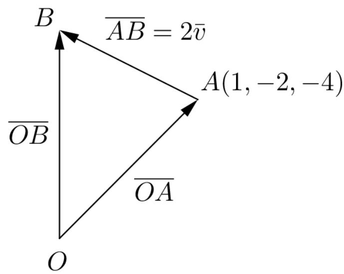
b) a-kohdan mukaan $\overline{OB} = \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{OC} = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$, joten kärkipiste B on $B = (1,5,-1)$ ja kärkipiste C on $C = (-4,7,11)$.

Vastaus a) $\overline{OA} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{OB} = \overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{OC} = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k}$

b) $B = (1,5,-1)$ ja $C = (-4,7,11)$

137

a) Pisteen $A(1,-2,-4)$ paikkavektori on $\overline{OA}=\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k}$.
Selvitetään pisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,-4)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB}=2\overline{v}$.

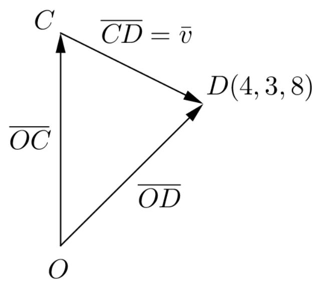


$$\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{OA}+\overline{AB}\\&=\overline{OA}+2\overline{v}\\&=\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k}+2(2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k})\\&=\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k}+4\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}\\&=5\overline{i}-8\overline{j}-2\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $B=(5,-8,-2)$.

b) Ehto $\overline{CD}=\overline{v}$ tarkoittaa, että kun lähdetään pisteestä C ja kuljetaan vektori $\overline{v}$, päädytään pisteeseen $D(4,3,8)$.

Pisteen $D(4,3,8)$ paikkavektori on $\overline{OD}=4\overline{i}+3\overline{j}+8\overline{k}$.
Muodostetaan pisteen C paikkavektori.



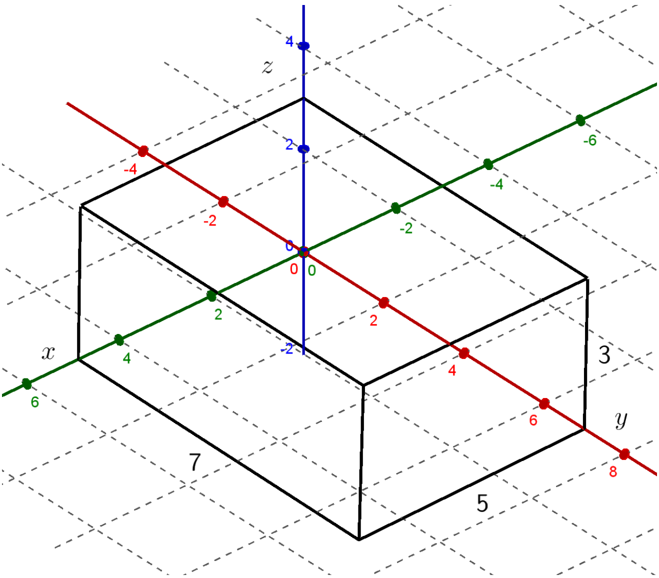
$$\begin{aligned}\overline{OC}&=\overline{OD}-\overline{v}\\&=4\overline{i}+3\overline{j}+8\overline{k}-(2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k})\\&=4\overline{i}+3\overline{j}+8\overline{k}-2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}\\&=2\overline{i}+6\overline{j}+7\overline{k}\end{aligned}$$

Saadaan siis $C=(2,6,7)$.

Vastaus a) $B=(5,-8,-2)$ b) $C=(2,6,7)$

138

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Piste P on purkin pohjanurkassa, jos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 0,\ y = 7,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 7,\ z = 0$.

b) Piste P on purkin kannessa, jos $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 7$ ja $z = 3$.

Vastaus a) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 0,\ z = 0$ tai $x = 0,\ y = 7,\ z = 0$ tai $x = 5,\ y = 7,\ z = 0$

b) $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 7$ ja $z = 3$

139

Pisteen $A(1,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

Selvitetään kärkipisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AB} = -2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} - 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k} \\ &= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

Siis $B = (-1,-1,1)$.

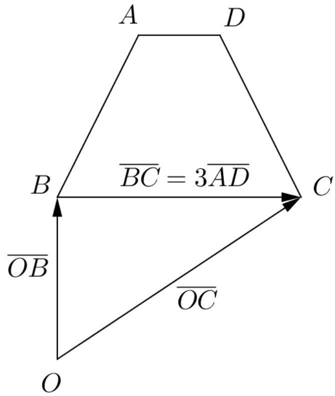
Selvitetään sitten kärkipisteen D paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(1,-2,3)$ ja kulkemalla vektori $\overline{AD} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{AD} \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 0\overline{j} + 4\overline{k} = 2\overline{i} + 4\overline{k}\end{aligned}$$

Siis $D = (2,0,4)$.

Kärkipisteeseen C päästään kärkipisteestä B kulkemalla vektori $\overline{BC}$. Koska sivu BC on yhdensuuntainen sivun AD kanssa ja pituudeltaan kolminkertainen sivuun AD verrattuna, on $\overline{BC} = 3\overline{AD}$. Siten kärkipisteen C paikkavektoriksi saadaan

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OB} + \overline{BC} \\ &= \overline{OB} + 3\overline{AD} \\ &= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k} + 3(\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}) \\ &= -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k} + 3\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}\end{aligned}$$



Siis $C = (2,5,4)$.

Vastaus $B = (-1,-1,1)$, $C = (2,5,4)$ ja $D = (2,0,4)$

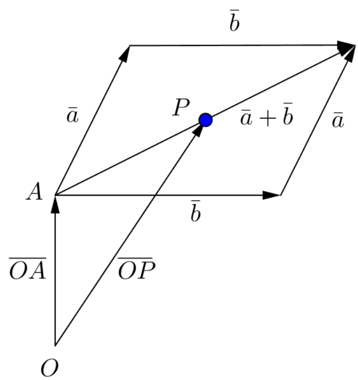
140

Merkitään suunnikkaan lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella P.

Tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten lävistäjien leikkauspisteeseen P päästään kulkemalla pisteestä A alkavan lävistäjän puoliväliin. Kyseinen lävistäjä on

$$\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}+9\overline{k}+4\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}$$

$$=6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k}.$$



Muodostetaan pisteen P paikkavektori lähtemällä pisteestä $A(3,7,-2)$ ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{a}+\overline{b}=6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k}$.

$$\overline{OP}=\overline{OA}+\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$$

$$=3\overline{i}+7\overline{j}-2\overline{k}+\frac{1}{2}(6\overline{i}-2\overline{j}+16\overline{k})$$

$$=3\overline{i}+7\overline{j}-2\overline{k}+3\overline{i}-\overline{j}+8\overline{k}$$

$$=6\overline{i}+6\overline{j}+6\overline{k}$$

Leikkauspiste P on siis $(6,6,6)$.

Vastaus $(6,6,6)$

141

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(3\overline{i} - 4\overline{k}) + t(5\overline{j} - 6\overline{k})$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r\overline{i} - 2r\overline{j} + 3s\overline{i} - 4s\overline{k} + 5t\overline{j} - 6t\overline{k}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = r\overline{i} + 3s\overline{i} - 2r\overline{j} + 5t\overline{j} - 4s\overline{k} - 6t\overline{k}$$

$$48\overline{i} - 64\overline{j} + 80\overline{k} = (r + 3s)\overline{i} + (-2r + 5t)\overline{j} + (-4s - 6t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 48 = r + 3s \\ -64 = -2r + 5t \\ 80 = -4s - 6t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -63$, $s = 37$ ja $t = -38$.

Siis

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = -63\overline{a} + 37\overline{b} - 38\overline{c}\ .$$

Vastaus $\quad \overline{v} = -63\overline{a} + 37\overline{b} - 38\overline{c}$

142

Muodostetaan yhtälö $\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = r(2\overline{i} - \overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) + t(\overline{j} - 4\overline{k})$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = 2r\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{i} + s\overline{j} + s\overline{k} + t\overline{j} - 4t\overline{k}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = 2r\overline{i} + s\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{j} + t\overline{j} + s\overline{k} - 4t\overline{k}$$

$$7\overline{i} + 13\overline{j} - 21\overline{k} = (2r + s)\overline{i} + (-r + s + t)\overline{j} + (s - 4t)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 7 = 2r + s \\ 13 = -r + s + t \\ -21 = s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = \frac{2}{7}$, $s = \frac{45}{7}$ ja $t = \frac{48}{7}$.

Siis

$$\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = \frac{2}{7}\overline{a} + \frac{45}{7}\overline{b} + \frac{48}{7}\overline{c}.$$

Vastaus $\overline{u} = \frac{2}{7}\overline{a} + \frac{45}{7}\overline{b} + \frac{48}{7}\overline{c}$

143

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3.

Kärkipisteen $A(-6,9,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k}$.

Kahden muun kärkipisteen paikkavektorit saadaan, kun kuljetaan pisteestä A lähtien vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$.

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{a} &= -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} + 2\overline{i} - 6\overline{k} \\ &= -4\overline{i} + 9\overline{j} - 5\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{b} &= -6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} - 4\overline{j} + 8\overline{k} \\ &= -6\overline{i} + 5\overline{j} + 9\overline{k}\end{aligned}$$

Saatujen paikkavektoreiden summa on

$$\begin{aligned}&-6\overline{i} + 9\overline{j} + \overline{k} - 4\overline{i} + 9\overline{j} - 5\overline{k} - 6\overline{i} + 5\overline{j} + 9\overline{k} \\ &= -16\overline{i} + 23\overline{j} + 5\overline{k}.\end{aligned}$$

Painopisteen P paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{-16\overline{i} + 23\overline{j} + 5\overline{k}}{3} = -\frac{16}{3}\overline{i} + \frac{23}{3}\overline{j} + \frac{5}{3}\overline{k},$$

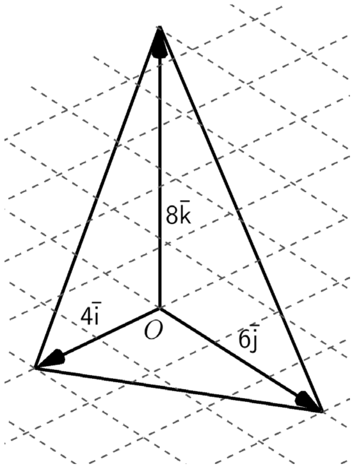
joten painopiste on $P = (-\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{5}{3})$.

Vastaus $P = (-\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{5}{3})$

144

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3. (Vrt. myös edellinen tehtävä.)

Nyt pohjakolmion kärkipisteiden paikkavektorit ovat $4\overline{i}$, $6\overline{j}$ ja $8\overline{k}$.



Paikkavektoreiden summa on
$4\overline{i}+6\overline{j}+8\overline{k}$.

Kolmion painopisteen paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{4\overline{i}+6\overline{j}+8\overline{k}}{3}=\frac{4}{3}\overline{i}+2\overline{j}+\frac{8}{3}\overline{k},$$

joten painopiste on $(\frac{4}{3},2,\frac{8}{3})$.

Vastaus $(\frac{4}{3},2,\frac{8}{3})$

145

a) Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden kaava on johdettu kurssissa 3. Tulosta soveltamalla saadaan avaruuslävistäjän pituudeksi

$$\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}\,.$$

b) Vektorin $\overline{v}=2\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ voidaan tulkita olevan sellaisen suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä, jonka sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4. (Vrt. tehtävä 125.) Siten vektorin $\overline{v}$ pituus on sama kuin a-kohdassa laskettu avaruuslävistäjän pituus:

$$|\overline{v}|=\sqrt{29}\,.$$

Vastaus a) $\sqrt{29}$
b) $\sqrt{29}$

146

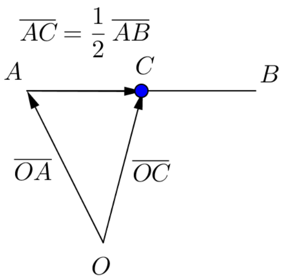
Pisteen $A(-2,3,-4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + 8\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k} \\ &= 6\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}\end{aligned}$$

Piste B on siis $(6,4,4)$, joten jana AB kulkee pisteestä $(-2,3,-4)$ pisteeseen $(6,4,4)$. Janan AB pisteistä xy-tasossa sijaitsee se piste, jonka z-koordinaatti on 0. Vertaamalla janan alku- ja loppupisteen z-koordinaatteja 4 ja -4 nähdään, että xy-tasossa sijaitseva piste on janan puolivälissä. Kyseiseen pisteeseen pääsee lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$. Merkitään pistettä kirjaimella C ja lasketaan sen paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + \frac{1}{2}(8\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k}) \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} + 4\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j} + 4\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j} + 0\overline{k}\end{aligned}$$



Saadaan siis $C = (2, \frac{7}{2}, 0)$.

Vastaus $(2, \frac{7}{2}, 0)$

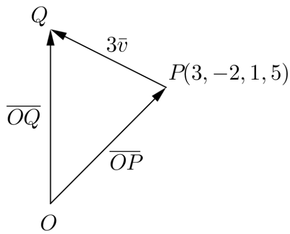
147

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja niin edelleen. Siten pisteen $P(3,-2,1,5)$ paikkavektori on

$$\overline{OP} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} .$$

b) Vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k} - 2\overline{l}$ pituus on 4. Siten liikkuminen ko. vektorin suuntaan 12 pituusyksikköä vastaa vektorin $3\overline{v}$ kulkemista. Selvitetään pisteen Q paikkavektori lähtemällä pisteestä $P(3,-2,1,5)$ ja kulkemalla vektori $3\overline{v}$.

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \overline{OP} + 3\overline{v} \\ &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} + 3(2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k} - 2\overline{l}) \\ &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l} + 6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k} - 6\overline{l} \\ &= 9\overline{i} - 8\overline{j} + 7\overline{k} - \overline{l}\end{aligned}$$



Saadaan siis $Q = (9,-8,7,-1)$.

Vastaus a) $\overline{OP} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} + 5\overline{l}$

b) $Q = (9,-8,7,-1)$

148

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A(1,5,3)$ pisteeseen $B(4,3,9)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4-1)\overline{i} + (3-5)\overline{j} + (9-3)\overline{k} \\ &= 3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}\end{aligned}$$

b) Pisteiden A ja B välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

Vastaus a) $\overline{AB} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$
b) 7

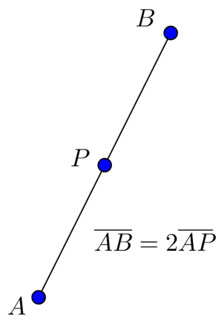
149

a) Määritetään ensin vektori $\overline{AP}$. Vektori pisteestä $A(1,-2,7)$ pisteeseen $P(2,0,5)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AP} = (2-1)\overline{i} + (0-(-2))\overline{j} + (5-7)\overline{k}$$

$$= \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$$

Piste P on janan AB keskipiste. Siten vektori $\overline{AB}$ on samansuuntainen ja kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{AP}$:



$$\overline{AB} = 2\overline{AP}$$

$$= 2(\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}.$$

b) Janan AB pituus on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

c) Pisteen $A(1,-2,7)$ paikkavektori on $\overline{OA}=\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k}$.

Määritetään päätepisteen B paikkavektori lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{OA}+\overline{AB}\\&=\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k}+2\overline{i}+4\overline{j}-4\overline{k}\\&=3\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}\end{aligned}$$

Siten $B=(3,2,3)$.

Vastaus
a) $\overline{AB}=2\overline{i}+4\overline{j}-4\overline{k}$
b) 6
c) $B=(3,2,3)$

150

Muodostetaan ensin vektori $3\overline{b} - 2\overline{a}$.

$$
\begin{aligned}
3\overline{b} - 2\overline{a} &= 3(-2\overline{i} - 4\overline{j} - \overline{k}) - 2(4\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}) \\
&= -6\overline{i} - 12\overline{j} - 3\overline{k} - 8\overline{i} - 2\overline{j} + 10\overline{k} \\
&= -14\overline{i} - 14\overline{j} + 7\overline{k}
\end{aligned}
$$

Vektorin $3\overline{b} - 2\overline{a}$ pituus on

$$\left|3\overline{b} - 2\overline{a}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-14)^2 + 7^2} = \sqrt{441} = 21.$$

Vastaus 21

151

a) Vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ pituus on
$|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$.

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on
$\overline{v}^0 = \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v} = \frac{1}{3}(2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$.

b) Vektorin $\overline{u} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ pituus on
$|\overline{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Vektorin $\overline{u}$ suuntainen yksikkövektori on
$\overline{u}^0 = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{k}$.

c) Vektorin $\overline{s} = \frac{3}{7}\overline{i} - \frac{6}{7}\overline{j} - \frac{2}{7}\overline{k}$ pituus on
$|\overline{s}| = \sqrt{(\frac{3}{7})^2 + (-\frac{6}{7})^2 + (-\frac{2}{7})^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$.

Koska vektorin $\overline{s}$ pituus on 1, vektori on yksikkövektori. Siten
$\overline{s}^0 = \overline{s} = \frac{3}{7}\overline{i} - \frac{6}{7}\overline{j} - \frac{2}{7}\overline{k}$.

Vastaus
a) $\overline{v}^0 = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$
b) $\overline{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{k}$
c) $\overline{s}^0 = \overline{s}$

152

Merkitään pistettä, johon päädytään kirjaimella B. Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin pisteen A paikkavektori $\overline{OA}$ ja vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{a}^0$.

Pisteen $A(5,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

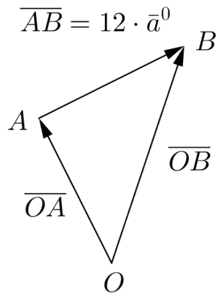
Vektorin $\overline{a} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{a}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9.$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{9}(6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}.$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + 12 \cdot \overline{a}^0 \\ &= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + 12 \cdot (\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}) \\ &= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + 8\overline{i} - 8\overline{j} + 4\overline{k} \\ &= 13\overline{i} - 10\overline{j} + 7\overline{k}\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $(13,-10,7)$.

Vastaus pisteeseen $(13,-10,7)$

153

a) Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ suuntaiset yksikkövektorit $\overline{v}^0$ ja $\overline{u}^0$.

Vektorin $\overline{v} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{v}^0 = \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v} = \frac{1}{6}(-2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}) = -\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}.$$

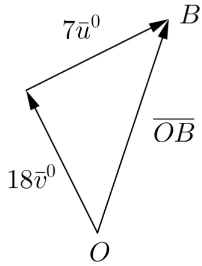
Vektorin $\overline{u} = -\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} + 3\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{3}{2})^2 + 3^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Vektorin $\overline{u}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{u}^0 = \frac{1}{|\overline{u}|}\overline{u} = \frac{1}{(\frac{7}{2})}(-\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} + 3\overline{k}) = -\frac{2}{7}\overline{i} + \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}.$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= 18\cdot\overline{v}^0 + 7\cdot\overline{u}^0 \\ &= 18\cdot(-\frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}) + 7\cdot(-\frac{2}{7}\overline{i} + \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}) \\ &= -6\overline{i} + 12\overline{j} - 12\overline{k} - 2\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} \\ &= -8\overline{i} + 15\overline{j} - 6\overline{k}\end{aligned}$$

Siis piste B on $B = (-8, 15, -6)$.

b) Pisteen B ja origon välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{OB}$ pituus.

$$\left|\overline{OB}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2 + (-6)^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

Päädyttiin siis $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän lähtöpisteestä.

Vastaus a) $B = (-8, 15, -6)$

b) $5\sqrt{13}$ pituusyksikön päähän

154

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$6\overline{i} - 12\overline{j} + 4t\overline{k} = r(3\overline{i} + t\overline{j} - 12\overline{k})$$

$$6\overline{i} - 12\overline{j} + 4t\overline{k} = 3r\overline{i} + rt\overline{j} - 12r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 6 = 3r & (1) \\ -12 = rt & (2) \\ 4t = -12r & (3) \end{cases}$$

Ratkaistaan muuttuja r yhtälöstä 1.

$$6 = 3r$$

$$r = 2$$

Ratkaistaan muuttuja t yhtälöstä 2.

$$-12 = rt$$

$$-12 = 2t$$

$$t = -6$$

Tarkistetaan, että arvot $r = 2$ ja $t = -6$ toteuttavat myös yhtälön 3.

$$4t = -12r$$

$$4 \cdot (-6) = -12 \cdot 2$$

$$-24 = -24$$

tosi

Siis arvolla $t = -6$ vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = 2\overline{b}$ ja $2 > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = -6$. Vektorit ovat tällöin samansuuntaiset.

155

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen negatiivinen reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.
Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r < 0$, ratkaisu.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$-12\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k} = r(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{1}{4}\overline{j} + \frac{3}{10}\overline{k})$$

$$-12\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k} = \frac{3}{5}r\overline{i} - \frac{1}{4}r\overline{j} + \frac{3}{10}r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -12 = \frac{3}{5}r \\ 5 = -\frac{1}{4}r \\ -6 = \frac{3}{10}r \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \frac{5}{3}\cdot(-12) = 5\cdot(-4) = -20 \\ r = -\frac{4}{1}\cdot 5 = -20 \\ r = \frac{10}{3}\cdot(-6) = 10\cdot(-2) = -20 \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $r = -20$, joten $\overline{u} = -20\overline{v}$. Koska $-20 < 0$, vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset. □

156

a) Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{u} = r\overline{v}$$

$$-11t\overline{i} - 9\overline{j} + 6t\overline{k} = r((t+2)\overline{i} + 3\overline{j} - 2t\overline{k})$$

$$-11t\overline{i} - 9\overline{j} + 6t\overline{k} = r(t+2)\overline{i} + 3r\overline{j} - 2rt\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -11t = r(t+2) \\ -9 = 3r \\ 6t = -2rt \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -3$ ja $t = \dfrac{3}{4}$.

Siis arvolla $t = \dfrac{3}{4}$ vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset.
Koska tällöin $\overline{u} = r\overline{v} = -3\overline{v}$ ja $-3 < 0$, niin vektorit ovat erityisesti vastakkaissuuntaiset.

b) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t = \dfrac{3}{4}$.

c) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ eivät ole samansuuntaiset millään vakion t arvolla.

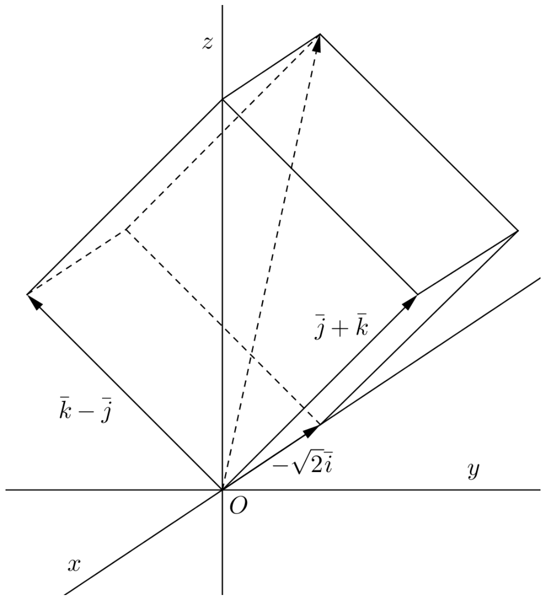
Vastaus a) $t = \frac{3}{4}$

b) $t = \frac{3}{4}$

c) ei millään vakion t arvolla

157

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Kuution särmät määräytyvät vektoreista $\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{k}-\overline{j}$ ja $-\sqrt{2}\overline{i}$. Särmän pituus saadaan laskemalla minkä tahansa em. vektorin pituus. Esimerkiksi

$$\left|\overline{j}+\overline{k}\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad \left|-\sqrt{2}\overline{i}\right| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}.$$

Särmän pituus on siis $\sqrt{2}$.

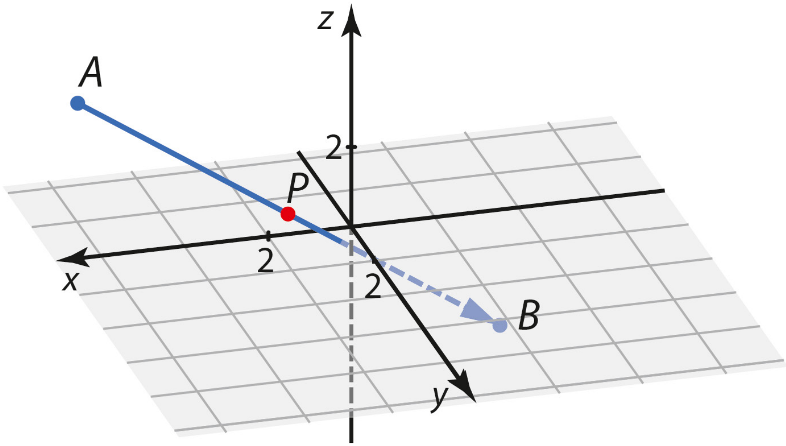
b) Origosta lähtevä avaruuslävistäjävektori saadaan, kun lasketaan yhteen kaikki kolme vektoria, jotka määräävät kuution sivusärmät. (Kyseinen vektori näkyy oheisessa kuvassa katkoviivalla.)

$$\overline{j}+\overline{k}+\overline{k}-\overline{j}-\sqrt{2}\overline{i}=-\sqrt{2}\overline{i}+2\overline{k}$$

c) Origosta katsottuna kaukaisin kärkipiste on se, johon päästään kulkemalla origosta lähtevä avaruuslävistäjävektori. Tämä vektori on juuri b-kohdassa laskettu vektori. Kaukaisin kärkipiste on siten $(-\sqrt{2},0,2)$.

Vastaus
a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}\overline{i}+2\overline{k}$
c) $(-\sqrt{2},0,2)$

158



a) Määritetään ensin vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A=(6,-2,3)$ pisteeseen $B=(-3,2,-2)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=(-3-6)\overline{i}+(2-(-2))\overline{j}+(-2-3)\overline{k}\\&=-9\overline{i}+4\overline{j}-5\overline{k}\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{AB}$ pituus on

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-9)^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{122}\approx 11.$$

b) Piste P on janan AB keskipiste. Pisteeseen P päästään siis lähtemällä pisteestä A ja kulkemalla puolet vektorista $\overline{AB}$.

Pisteen $A(6,-2,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} + \frac{1}{2}(-9\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k})$$

$$= 6\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k} - \frac{9}{2}\overline{i} + 2\overline{j} - \frac{5}{2}\overline{k}$$

$$= \frac{3}{2}\overline{i} + 0\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}$$

Siis $P = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Vastaus a) $\left|\overline{AB}\right| \approx 11$

b) $P = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$

159

a) Vektori pisteestä $A(2,-9,1)$ pisteeseen $B(-5,5,5)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

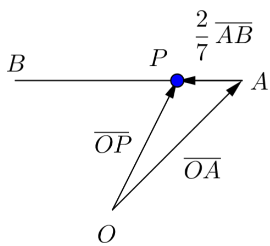
$$\overline{AB} = (-5-2)\overline{i} + (5-(-9))\overline{j} + (5-1)\overline{k}$$

$$= -7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k}$$

b) Piste P jakaa janan AB suhteessa 2 : 5. Yhteensä jakovälejä on siis 2 + 5 = 7, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{2}{7}$ vektorista $\overline{AB}$.

Pisteen $A(2,-9,1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{7}\overline{AB}$$



$$= 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k} + \frac{2}{7}(-7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k} - 2\overline{i} + 4\overline{j} + \frac{8}{7}\overline{k}$$

$$= 0\overline{i} - 5\overline{j} + \frac{15}{7}\overline{k}$$

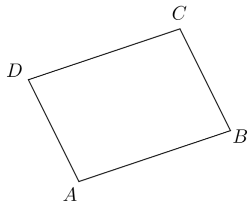
Siis $P = (0,-5,\frac{15}{7})$.

Vastaus a) $\overline{AB} = -7\overline{i} + 14\overline{j} + 4\overline{k}$

b) $P = (0,-5,\frac{15}{7})$

160

Suunnikkaan lävistäjät ovat janat AC ja BD. Muodostetaan janoja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.



$$\overline{AC} = (17-8)\overline{i} + (0-(-7))\overline{j} + (-10-3)\overline{k}$$

$$= 9\overline{i} + 7\overline{j} - 13\overline{k}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{9^2 + 7^2 + (-13)^2} = \sqrt{299} \ (\approx 17,3)$$

$$\overline{BD} = (-8-33)\overline{i} + (32-(-39))\overline{j} + (-57-50)\overline{k}$$

$$= -41\overline{i} + 71\overline{j} - 107\overline{k}$$

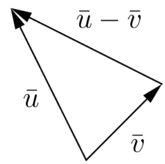
$$\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{(-41)^2 + 71^2 + (-107)^2} = \sqrt{18171} = 3\sqrt{2019} \ (\approx 134,8)$$

Pidemmän lävistäjän pituus on $3\sqrt{2019}$.

Vastaus $\quad 3\sqrt{2019}$

161

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$,
$\overline{v} = -5\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}$ ja näiden erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{u} - \overline{v} &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k} - (-5\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}) \\ &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k} + 5\overline{i} - 8\overline{j} + 2\overline{k} \\ &= 7\overline{i} - 5\overline{j} + 9\overline{k}.\end{aligned}$$

Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan kolmion sivujen pituudet ja tarkistetaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

$$|\overline{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{62}$$
$$|\overline{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{93}$$
$$|\overline{u} - \overline{v}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 9^2} = \sqrt{155}$$

Nähdään, että kolmion pisimmän sivun määrää vektori $\overline{u} - \overline{v}$.
Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

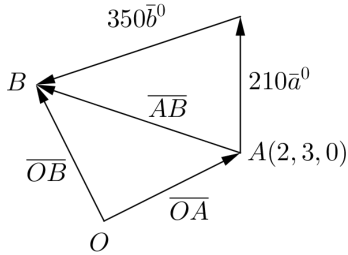
$$|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 = |\overline{u} - \overline{v}|^2$$
$$62 + 93 = 155$$
$$155 = 155$$
tosi

Kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus on

162

a) Merkitään hyttysen lähtöpistettä kirjaimella A ja päätepistettä kirjaimella B. Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin paikkavektori $\overline{OA}$ sekä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaiset yksikkövektorit $\overline{a}^0$ ja $\overline{b}^0$.



Pisteen $A(2,3,0)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$.

Vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ pituus on
$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{3}(2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}.$$

Vektorin $\overline{b} = -3\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$ pituus on
$|\overline{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$.

Vektorin $\overline{b}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{b}^0 = \frac{1}{|\overline{b}|}\overline{b} = \frac{1}{7}(-3\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}) = -\frac{3}{7}\overline{i} + \frac{6}{7}\overline{j} + \frac{2}{7}\overline{k}.$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + 210 \cdot \overline{a}^0 + 350 \cdot \overline{b}^0$$

$$= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 210 \cdot (\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{1}{3}\overline{k}) + 350 \cdot (-\frac{3}{7}\overline{i} + \frac{6}{7}\overline{j} + \frac{2}{7}\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 140\overline{i} - 140\overline{j} + 70\overline{k} - 150\overline{i} + 300\overline{j} + 100\overline{k}$$

$$= -8\overline{i} + 163\overline{j} + 170\overline{k}$$

Hyttynen päätyy pisteeseen $(-8,163,170)$.

b) Määritetään pisteiden $A(2,3,0)$ ja $B(-8,163,170)$ välinen etäisyys muodostamalla vektori $\overline{AB}$ ja laskemalla sen pituus.

$$\overline{AB} = (-8-2)\overline{i} + (163-3)\overline{j} + (170-0)\overline{k}$$

$$= -10\overline{i} + 160\overline{j} + 170\overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 160^2 + 170^2} = \sqrt{54600} = 10\sqrt{546}$$

Hyttynen päätyi siis $10\sqrt{546}$ pituusyksikön päähän lähtöpisteestä.

Vastaus
a) $(-8,163,170)$
b) $10\sqrt{546}$ pituusyksikön päähän

163

a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{a} = r\overline{b}$$

$$(3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = r(2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k})$$

$$(3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = 2r\overline{i} + 4rt\overline{j} + r(6t+2)\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3t-1 = 2r & (1) \\ 2t = 4rt & (2) \\ 6t-1 = r(6t+2) & (3) \end{cases}$$

Jos $t = 0$, yhtälö 2 toteutuu aina. Sijoitetaan $t = 0$ yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r.

$$3t-1 = 2r$$

$$2r = 3t-1 = 0-1 = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

Tarkistetaan, että arvot $r=-\frac{1}{2}$ ja $t=0$ toteuttavat myös yhtälön 3.

$$6t-1=r(6t+2)$$

$$0-1=-\frac{1}{2}\cdot(0+2)$$

$$-1=-\frac{1}{2}\cdot 2$$

$$-1=-1$$

tosi

Oletetaan sitten, että $t\neq 0$. Tällöin yhtälöryhmän yhtälöstä 2 saadaan

$$2t=4rt \qquad |:t$$

$$2=4r$$

$$r=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r=\frac{1}{2}$ yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t.

$$3t-1=2r$$

$$3t-1=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$3t=1+1=2$$

$$t=\frac{2}{3}$$

Tarkistetaan, että arvot $r=\frac{1}{2}$ ja $t=\frac{2}{3}$ toteuttavat myös yhtälöryhmän yhtälön 3.

$$6t-1=r(6t+2)$$

$$6\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{2}\cdot(6\cdot\frac{2}{3}+2)$$

$$4-1=\frac{1}{2}\cdot(4+2)$$

$$3=3$$

tosi

Yhtälöparille saatiin siis kaksi ratkaisua: $r=-\frac{1}{2}$ ja $t=0$ sekä $r=\frac{1}{2}$ ja $t=\frac{2}{3}$.

Kun $t = 0$, vektorit ovat
$\overline{a} = (3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = -\overline{i} + 0\overline{j} - \overline{k} = -\overline{i} - \overline{k}$ ja
$\overline{b} = 2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k} = 2\overline{i} + 0\overline{j} + 2\overline{k} = 2\overline{i} + 2\overline{k}$. Koska tällöin
$\overline{a} = r\overline{b} = -\frac{1}{2}\overline{b}$ ja $-\frac{1}{2} < 0$, niin vektorit ovat
vastakkaissuuntaiset.

Kun $t = \frac{2}{3}$, vektorit ovat

$\overline{a} = (3t-1)\overline{i} + 2t\overline{j} + (6t-1)\overline{k} = \overline{i} + \frac{4}{3}\overline{j} + 3\overline{k}$ ja

$\overline{b} = 2\overline{i} + 4t\overline{j} + (6t+2)\overline{k} = 2\overline{i} + \frac{8}{3}\overline{j} + 6\overline{k}$. Koska tällöin

$\overline{a} = r\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{b}$ ja $\frac{1}{2} > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Kaiken kaikkiaan siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset (eli samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) silloin, kun $t = 0$ tai $t = \frac{2}{3}$.

b) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset silloin, kun $t = 0$.

c) a-kohdan perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset silloin, kun $t = \frac{2}{3}$.

Vastaus a) $t = 0$ tai $t = \frac{2}{3}$

b) $t = 0$

c) $t = \frac{2}{3}$

164

Käytetään hyväksi tehtävän 123 tulosta: kolmion painopisteen paikkavektori on kolmion kärkipisteiden paikkavektorien summa jaettuna luvulla 3.

Kärkipisteen $A(1,-3,3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = \overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

Kärkipisteen $B(-3,6,7)$ paikkavektori on $\overline{OB} = -3\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k}$.

Kärkipisteen $C(-4,0,2)$ paikkavektori on $\overline{OC} = -4\overline{i} + 2\overline{k}$.

Paikkavektoreiden summa on

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} &= \overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k} - 3\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k} - 4\overline{i} + 2\overline{k} \\ &= -6\overline{i} + 3\overline{j} + 12\overline{k}.\end{aligned}$$

Painopisteen paikkavektoriksi saadaan

$$\frac{-6\overline{i} + 3\overline{j} + 12\overline{k}}{3} = -2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k},$$

joten painopiste on $(-2,1,4)$.

Vastaus $\quad(-2,1,4)$

165

Pallon keskipiste on $P(-3,12,-1)$ ja säde on 13.

Jos piste on z-akselilla, sen x- ja y-koordinaatit ovat 0. Siten z-akselilla olevat pisteet ovat muotoa $Q(0,0,z)$, missä z on reaaliluku.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (0-(-3))\overline{i} + (0-12)\overline{j} + (z-(-1))\overline{k}$$
$$= 3\overline{i} - 12\overline{j} + (z+1)\overline{k}$$

Vektorin $\overline{PQ}$ pituus on

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + (-12)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{153 + (z+1)^2}\ .$$

Jos piste Q on pallon piste, se sijaitsee säteen etäisyydellä pallon keskipisteestä P. Pisteiden Q ja P välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{PQ}$ pituus. Muodostetaan yhtälö $\left|\overline{PQ}\right| = 13$ ja ratkaistaan muuttujan z arvo laskimella.

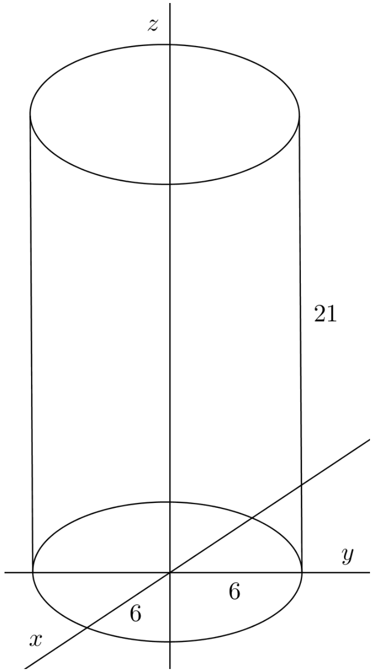
$$\sqrt{153 + (z+1)^2} = 13$$
$$z = 3 \quad \text{tai} \quad z = -5$$

Siis ne pallon pisteet, jotka sijaitsevat z-akselilla, ovat $(0,0,3)$ ja $(0,0,-5)$.

Vastaus $(0,0,3)$ ja $(0,0,-5)$

166

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva.



a) Piste P on purkin pohjan reunaympyrällä (etäisyydellä 6 origosta), jos $z = 0$ ja vektorin $\overline{OP}$ pituus on 6. Koska (ehdolla $z = 0$)
$\left|\overline{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$,
saadaan kertoimille x ja y ehto
$\sqrt{x^2 + y^2} = 6$ eli $x^2 + y^2 = 36$.

b) Piste P on purkin kannessa, jos $z = 21$ ja piste sijaitsee purkkia rajaavalla reunaympyrällä tai sen sisäpuolella eli korkeintaan etäisyydellä 6 z-akselista.
a-kohtaa apuna käyttäen voidaan päätellä, että vaatimus johtaa ehtoon $\sqrt{x^2 + y^2} \le 6$ eli $x^2 + y^2 \le 36$.

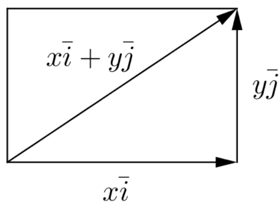
c) Piste P on purkin vaipalla, jos $0 \le z \le 21$ ja kertoimet x ja y toteuttavat saman ehdon kuin a-kohdassa eli $x^2 + y^2 = 36$.

Vastaus
a) $z = 0$ ja $x^2 + y^2 = 36$
b) $z = 21$ ja $x^2 + y^2 \le 36$
c) $0 \le z \le 21$ ja $x^2 + y^2 = 36$

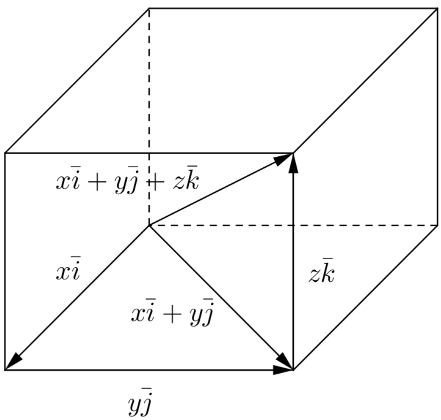
167

a) Lähestytään neliulotteisen avaruuden vektoreita kaksi- ja kolmiulotteisen avaruuden vektorien kautta.

Olkoon kaksiulotteisessa avaruudessa (eli tasossa) suorakulmion lävistäjä $x\overline{i} + y\overline{j}$. Lävistäjän pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $|x\overline{i} + y\overline{j}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Vastaavasti kolmiulotteisessa avaruudessa suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ pituus on $|x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Kaavan voi johtaa soveltamalla Pythagoraan lausetta kuvan kolmiossa, jossa kateetit määräävät vektorit $x\overline{i} + y\overline{j}$ ja $z\overline{k}$ ja hypotenuusan vektori $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Kateettien pituudet ovat $\sqrt{x^2 + y^2}$ ja $|z\overline{k}| = z$ ja hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summana $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Neliulotteisen avaruuden tilannetta voidaan käsitellä analogisesti. Ajatellaan, että kolmiulotteisen avaruuden vektori $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ on kateettina suorakulmaisessa kolmiossa, jonka toinen kateetti on neljänteen ulottuvuuteen osoittava vektori $t\bar{l}$, missä $\bar{l}$ on t-akselin suuntainen yksikkövektori. Kolmion hypotenuusa on neliulotteisen avaruuden suorakulmaisen hypersärmiön avaruuslävistäjä $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + t\bar{l}$. Kateettien pituudet ovat $|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja $|t\bar{l}| = t$ ja hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summana $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 + t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Avaruuslävistäjän pituuden neliölle on siis saatu

$$|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + t\bar{l}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Ottamalla neliöjuuri (ja rajoittumalla positiiviseen tapaukseen) saadaan vektorin pituudeksi

$$|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + t\bar{l}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Kuten huomataan, kaava on vastaavien kaksi- ja kolmiulotteisten avaruuksien kaavojen $|x\bar{i} + y\bar{j}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $|x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luonteva laajennus.

b) Käyttämällä a-kohdan kaavaa saadaan vektorin $2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k} - 5\bar{l}$ pituudeksi

$$|2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k} - 5\bar{l}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

c) Määritetään ensin vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A(-5,0,1,3)$ pisteeseen $B(1,-4,-7,-2)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\overline{AB} = (1-(-5))\overline{i} + (-4-0)\overline{j} + (-7-1)\overline{k} + (-2-3)\overline{l}$$

$$= 6\overline{i} - 4\overline{j} - 8\overline{k} - 5\overline{l}$$

Pisteiden A ja B välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-8)^2 + (-5)^2} = \sqrt{141}$$

Vastaus
a) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$
b) $3\sqrt{6}$
c) $\sqrt{141}$