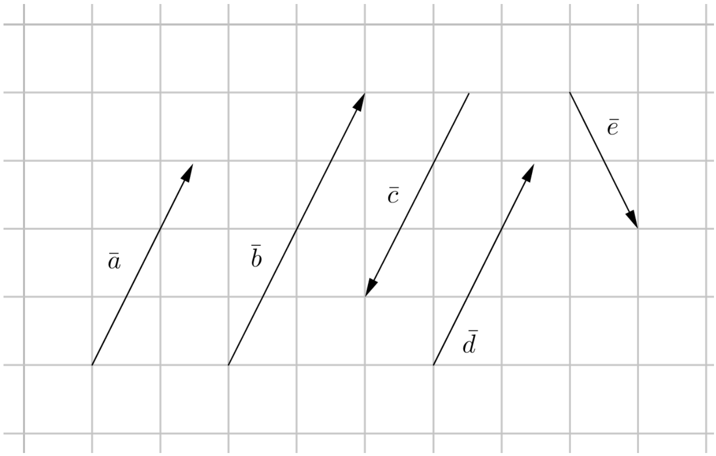
**20**




a) Vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntaisia ovat vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{d}$ .

b) Vektorit ovat erisuuntaiset, jos ne eivät ole yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset). Vektorin $\overline{a}$ kanssa erisuuntainen on vektori $\overline{e}$ .

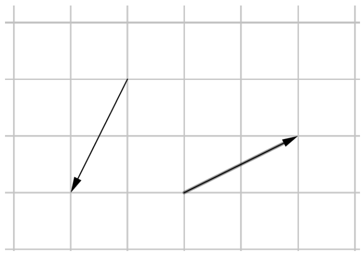
c) Vektorit ovat samat, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\overline{a}$ kanssa sama vektori on vektori $\overline{d}$ .

d) Vektorit ovat toistensa vastavektorit, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\overline{a}$ vastavektori on vektori $\overline{c}$ .

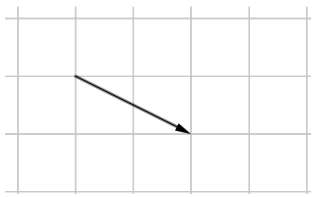
Vastaus a) $\overline{b}$ ja $\overline{d}$
b) $\overline{e}$
c) $\overline{d}$
d) $\overline{c}$

**21**

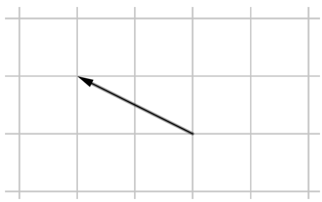
a) Kuvassa on kaksi vektoria, jotka ovat vektorin $\overline{a}$ kanssa erisuuntaisia ja yhtä pitkiä.



b) Vektorit ovat samat, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ kanssa sama vektori.



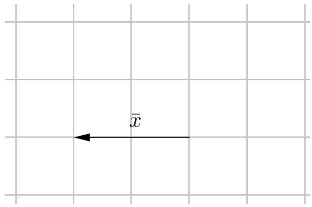
c) Vektorit ovat toistensa vastavektorit, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ vastavektori.



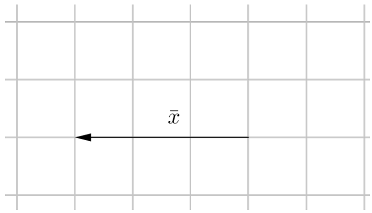
**22**

Vektorin $\overline{b}$ pituus on toisaalta 6 ja toisaalta kolme ruutua. Siis yksi ruutu vastaa pituutta 2.

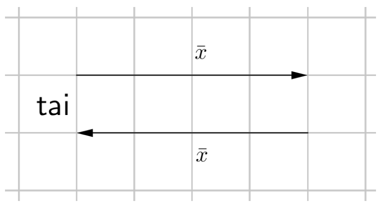
a) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on 4 eli kaksi ruutua.




b) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vektorin $\overline{b}$ vastavektori.

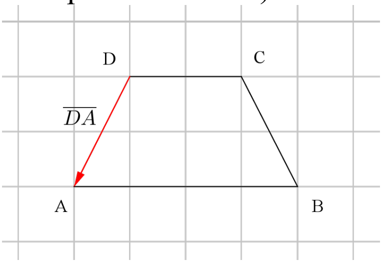



c) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on yhdensuuntainen (samansuuntainen tai vastakkaissuuntainen) vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on 8 eli neljä ruutua. Vastaukseksi saadaan kaksi eri vektoria.

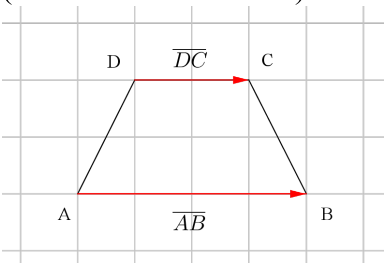


**23**

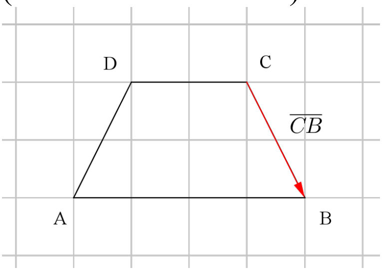
a) Ainoa vektorin $\overline{AD}$ kanssa vastakkaissuuntainen (kahden kärkipisteen välinen) vektori on vektori $\overline{DA}$.




b) Vektorin $\overline{DC}$ kanssa samansuuntainen vektori on vektori $\overline{AB}$ (sekä itse vektori $\overline{DC}$).



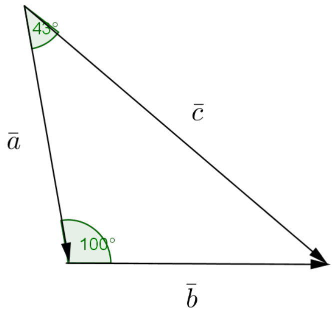

c) Vektorin $\overline{BC}$ kanssa yhdensuuntainen vektori on vektori $\overline{CB}$ (sekä itse vektori $\overline{BC}$).



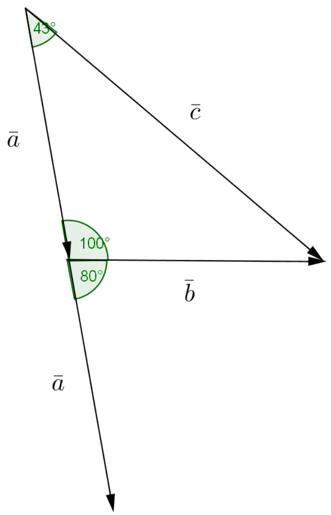

Vastaus a) $\overline{DA}$ b) $\overline{AB}$ (ja $\overline{DC}$) c) $\overline{CB}$ (ja $\overline{BC}$)

**24**

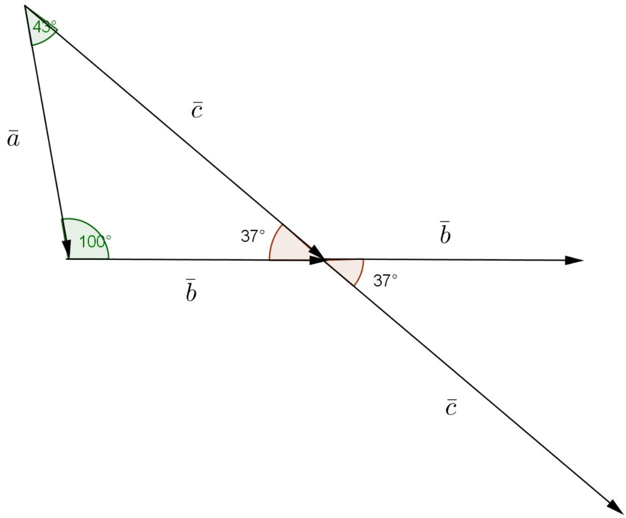
a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ alkavat samasta pisteestä. Niiden välinen kulma on $43°$ eli $\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) = 43°$.




b) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 100° = 80°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 80°$.



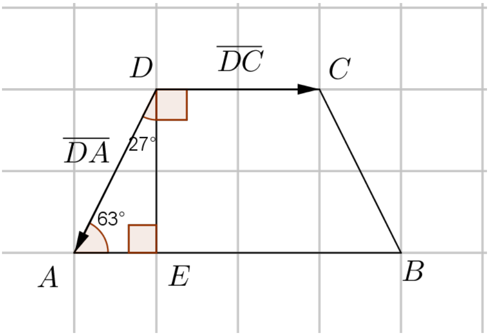
c) Kuvion kolmion kolmas kulma on $180° - 100° - 43° = 37°$.
Siirretään vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä.
Vektorien välinen kulma on ristikulmana myös $37°$. Siis
$\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 37°$.



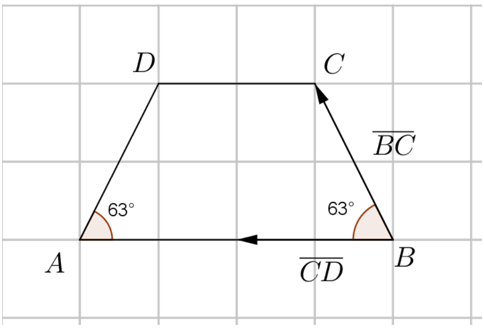

Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{c}) = 43°$
b) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 80°$
c) $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 37°$

**25**

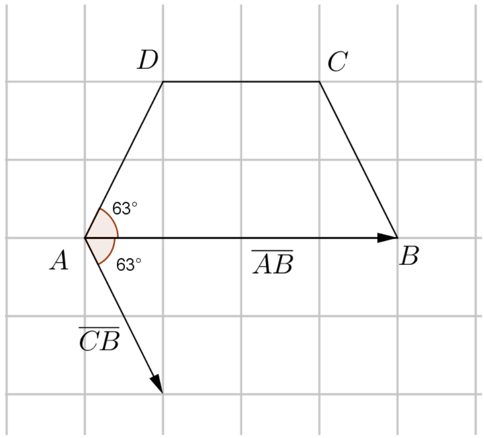
a) Kolmion $ADE$ kolmas kulma on $180° - 90° - 63° = 27°$. Siten vektorien $\overline{DA}$ ja $\overline{DC}$ välinen kulma on $27° + 90° = 117°$ eli $\sphericalangle(\overline{DA}, \overline{DC}) = 117°$.




b) Siirretään vektori $\overline{CD}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{BC}$. Symmetrian perusteella vektorien välinen kulma on $63°$. Siis $\sphericalangle(\overline{BC}, \overline{CD}) = 63°$.



c) Siirretään vektori $\overline{CB}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{AB}$. Symmetrian perusteella vektorien välinen kulma on $63°$. Siis $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CB}) = 63°$.




Vastaus

a) $\sphericalangle(\overline{DA},\overline{DC}) = 117°$

b) $\sphericalangle(\overline{BC},\overline{CD}) = 63°$

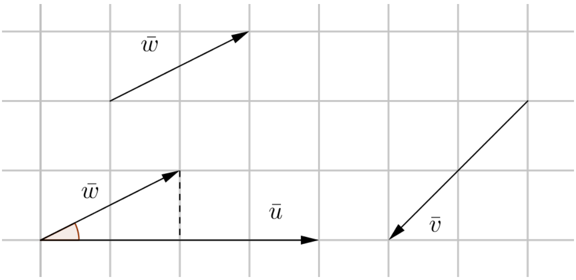
c) $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{CB}) = 63°$

**26**

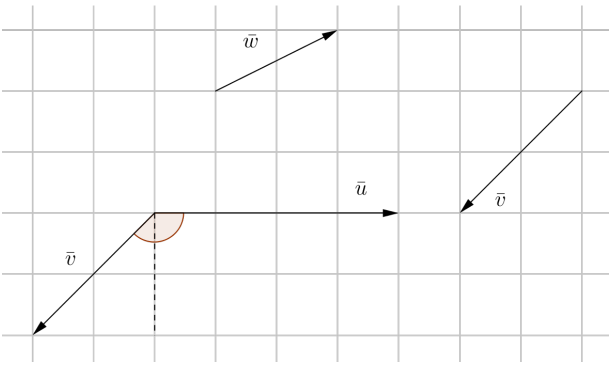
a) Siirretään vektori $\overline{w}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{u}$. Trigonometrian avulla saadaan vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ väliselle kulmalle

$$\tan(\sphericalangle(\overline{u},\overline{w})) = \frac{1}{2}$$

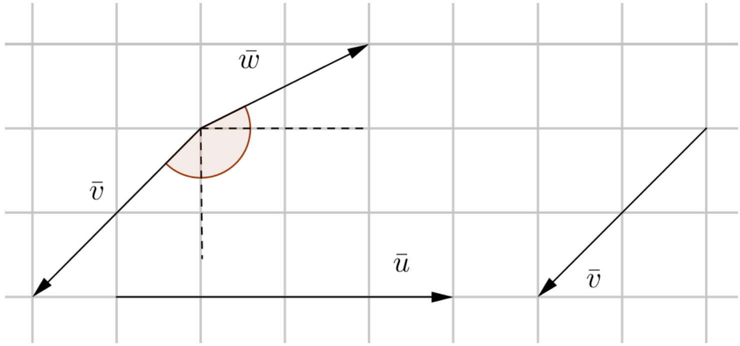
$$\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 27°$$




b) Siirretään vektori $\overline{v}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{u}$. Nähdään suoraan, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma muodostuu suorakulmasta ja suorakulman puolikkaasta. Siten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90° + 45° = 135°$.



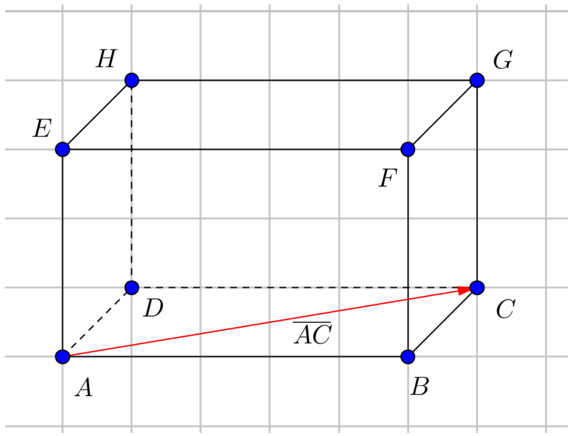
c) Siirretään vektori $\overline{v}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{w}$. Nähdään, että vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma muodostuu suorakulmasta, suorakulman puolikkaasta ja a-kohdan kulmasta. Siten $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 90° + 45° + 27° = 162°$.



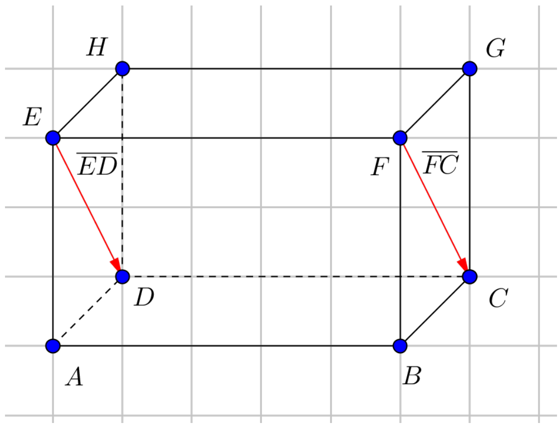

Vastaus
a) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) \approx 27°$
b) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 135°$
c) $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 162°$

## 27

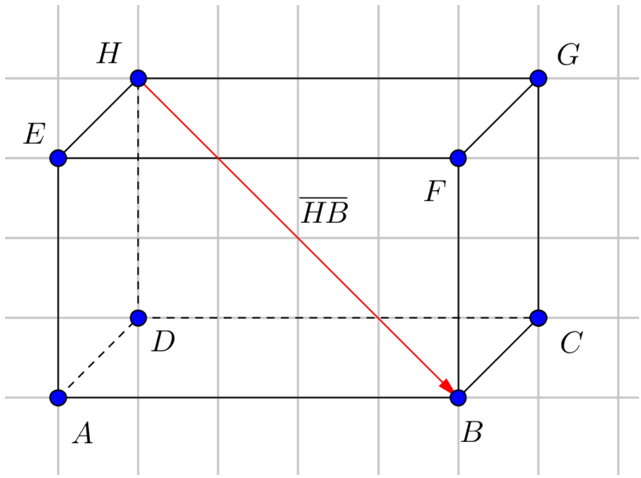
a) Ainoa (kahden kärkipisteen välinen) vektori, joka on sama vektori kuin $\overline{EG}$, on vektori $\overline{AC}$.




b) Vektorin $\overline{CF}$ kanssa yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat $\overline{FC}$ ja $\overline{ED}$.



c) Vektorin $\overline{BH}$ vastavektori on vektori $\overline{HB}$.

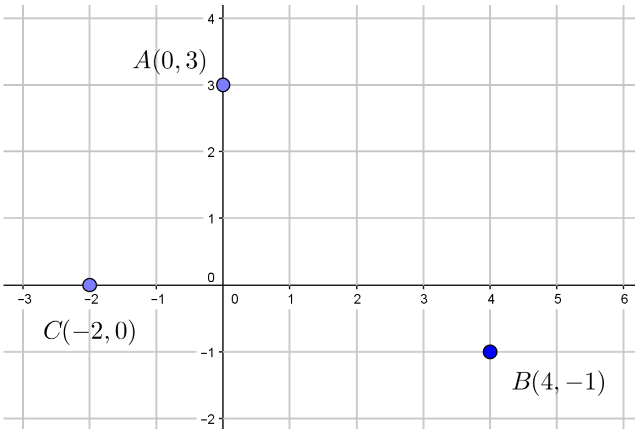



Vastaus a) $\overline{AC}$

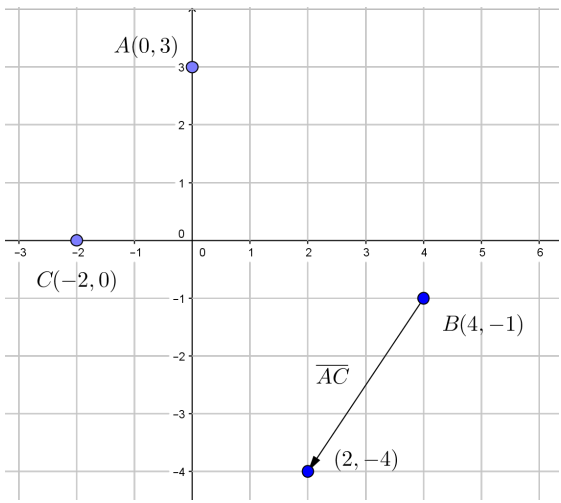
b) $\overline{FC}$ ja $\overline{ED}$

c) $\overline{HB}$

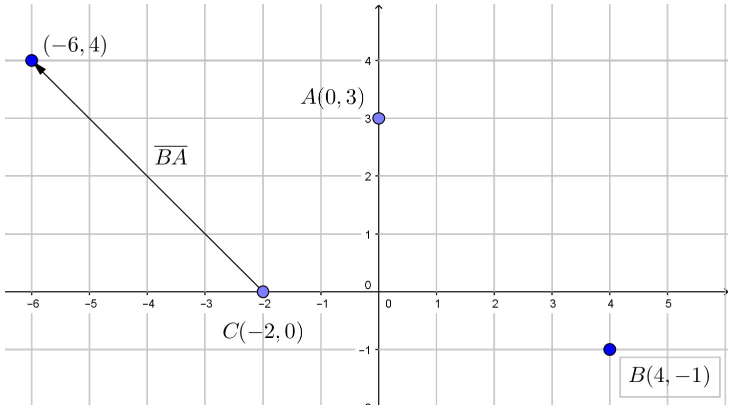
**28**



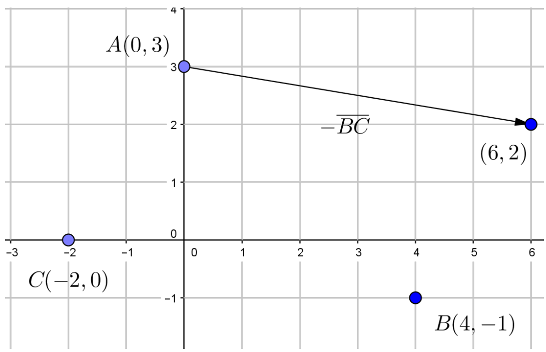

a) Kun lähdetään pisteestä $B$ ja kuljetaan vektori $\overline{AC}$, saavutaan pisteeseen $(2, -4)$.



b) Kun lähdetään pisteestä $C$ ja kuljetaan vektori $\overline{BA}$, saavutaan pisteeseen $(-6,\ 4)$.

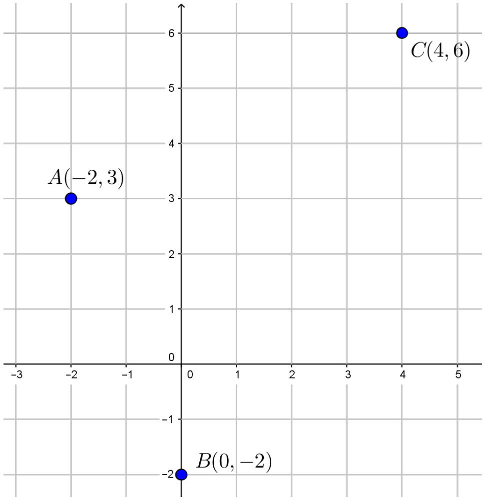



c) Kun lähdetään pisteestä $A$ ja kuljetaan vektori $-\overline{BC}$ (eli $\overline{CB}$ ), saavutaan pisteeseen $(6,\ 2)$.



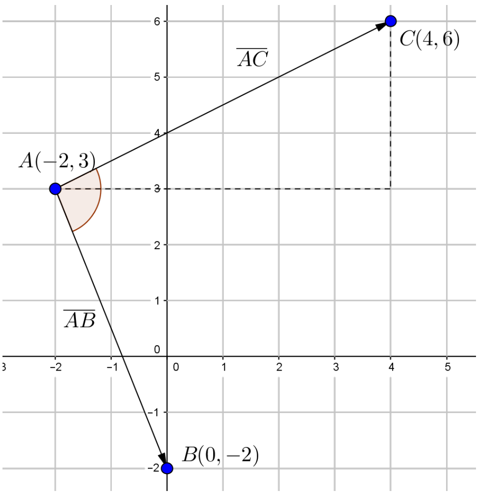

Vastaus a) $(2,-4)$
b) $(-6,\ 4)$
c) $(6,\ 2)$

**29**




a) Kulma $\sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC})$ muodostuu kahdesta kulmasta, joiden tangentit ovat $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{2}$. Siten

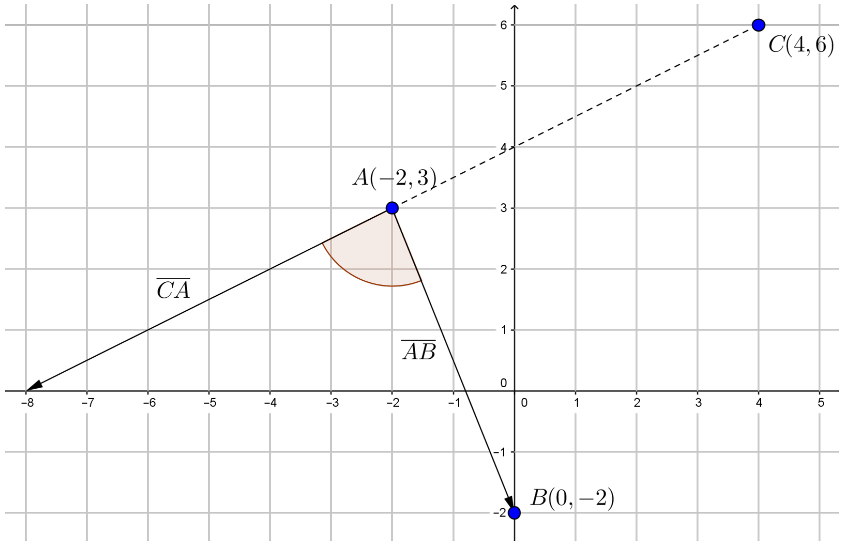
$$\sphericalangle(\overline{AB},\overline{AC}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) + \tan^{-1}(\frac{5}{2}) \approx 95°.$$



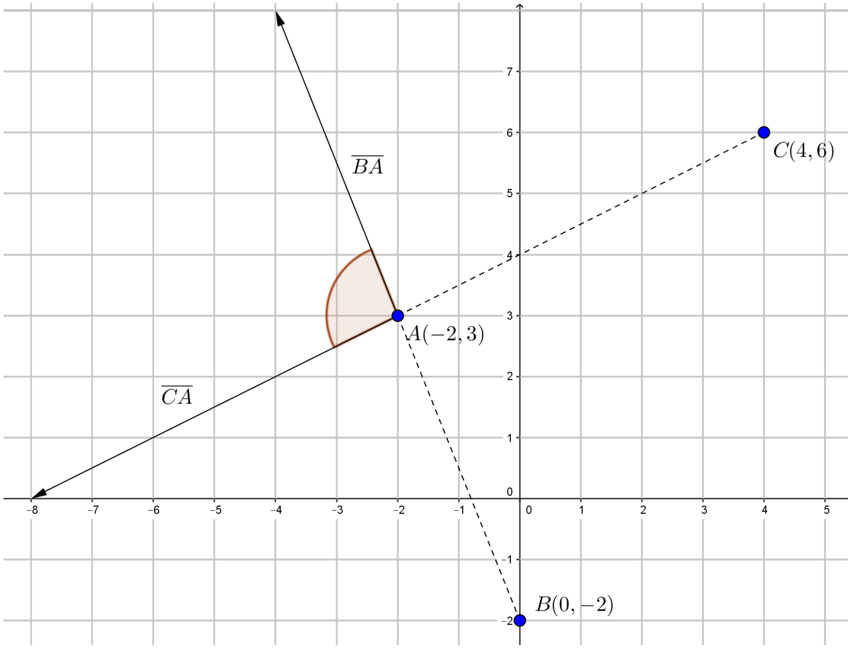
b) Kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA})$ laskemiseksi voitaisiin käyttää a-kohdan tavoin trigonometriaa, mutta kuvan perusteella voidaan myös nähdä, että kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA})$ ja a-kohdan kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$ summa on $180°$. Siten

$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA}) \approx 180° - 95° = 85°$.

(Kuvassa vektori $\overline{CA}$ on siirretty alkamaan pisteestä $A$.)



c) Siirretään vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{CA}$ alkamaan samasta pisteestä. Huomataan, että kulma $\sphericalangle(\overline{BA}, \overline{CA})$ on a-kohdan kulman $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$ ristikulma. Siten $\sphericalangle(\overline{BA}, \overline{CA}) = \sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) \approx 95°$.



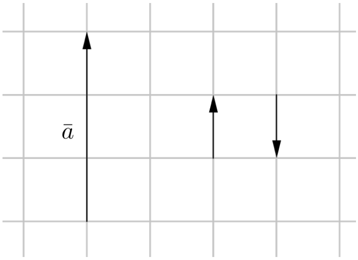

Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) \approx 95°$

b) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA}) \approx 85°$

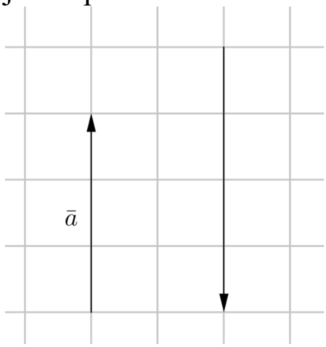
c) $\sphericalangle(\overline{BA}, \overline{CA}) \approx 95°$

**30**

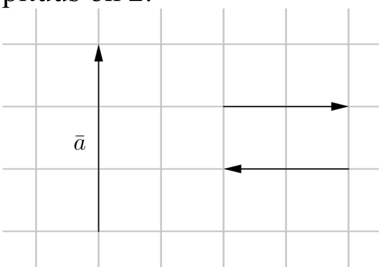
a) Kuvassa ovat vektorit, jotka ovat vektorin $\overline{a}$ kanssa yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) ja joiden pituus on 1 (eli 1 ruutu).




b) Kuvassa on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 4.

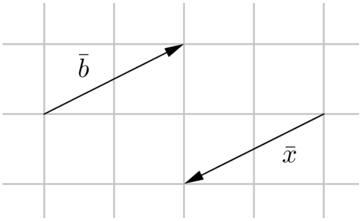



c) Kuvassa ovat vektoria $\overline{a}$ vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 2.

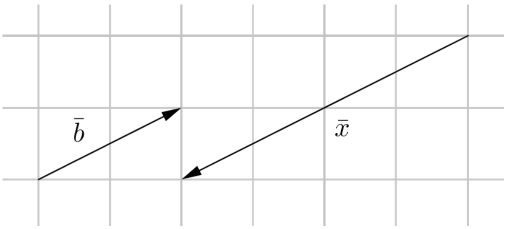


**31**

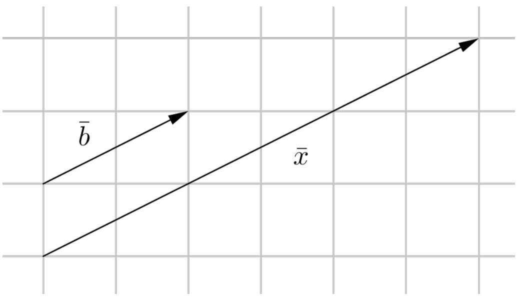
a) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vektorin $\overline{b}$ vastavektori.



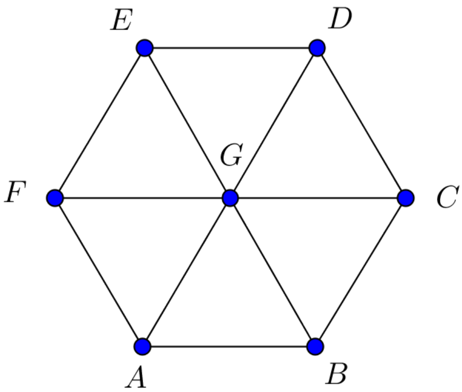

b) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on kaksinkertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.




c) On piirrettävä vektori $\overline{x}$, joka on samansuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja jonka pituus on kolminkertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.



**32**



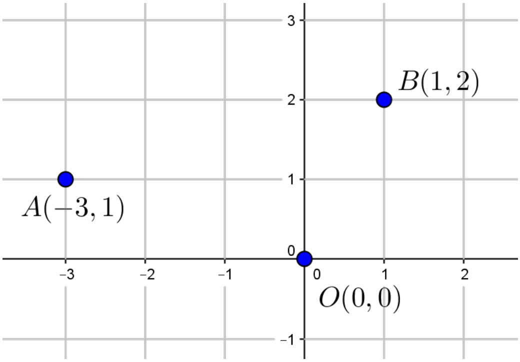

a) Vektorin $\overline{BG}$ kanssa samoja vektoreita ovat vektorit $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{GE}$.

b) Vektorin $\overline{DC}$ kanssa samansuuntaisen ja kaksi kertaa niin pitkä vektori on vektori $\overline{EB}$.

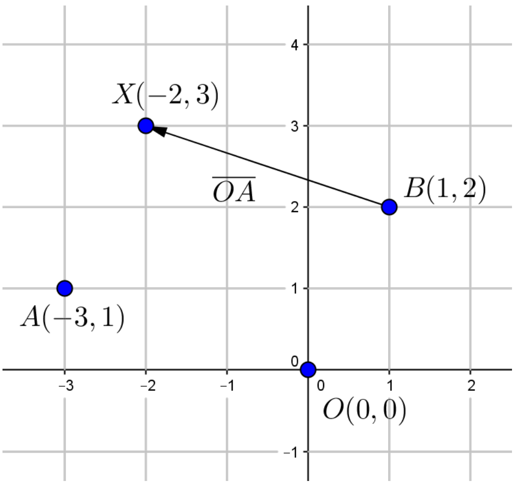
c) Vektorin $\overline{AG}$ vastavektorit ovat vektorit $\overline{GA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DG}$ ja $\overline{EF}$.

Vastaus a) $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{GE}$
b) $\overline{EB}$
c) $\overline{GA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DG}$ ja $\overline{EF}$

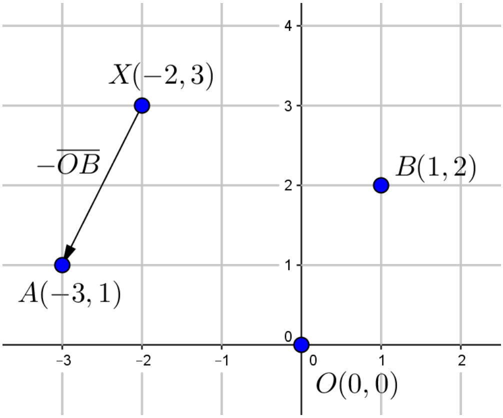
**33**




a) Ehto $\overline{BX} = \overline{OA}$ tarkoittaa, että pisteeseen $X$ päästään lähtemällä pisteestä $B$ ja kulkemalla vektori $\overline{OA}$. Piste $X$ on $(-2,\ 3)$.



b) Ehto $\overline{XA} = -\overline{OB}$ tarkoittaa, että kun lähdetään pisteestä $X$, on päädyttävä pisteeseen $A$, kun kuljetaan vektori $-\overline{OB}$ eli vektorin $\overline{OB}$ vastavektori eli vektori $\overline{BO}$. Piste $X$ on $(-2,\ 3)$
.

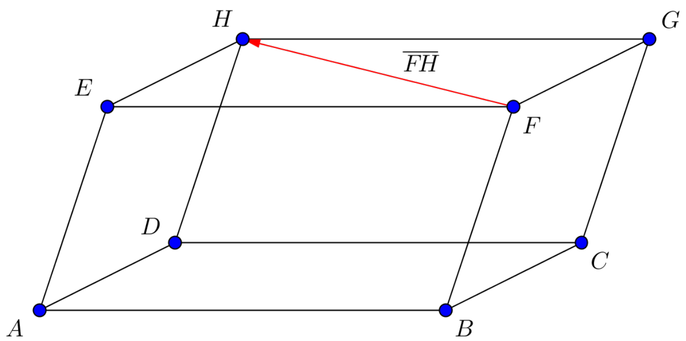



Vastaus a) $(-2,\ 3)$

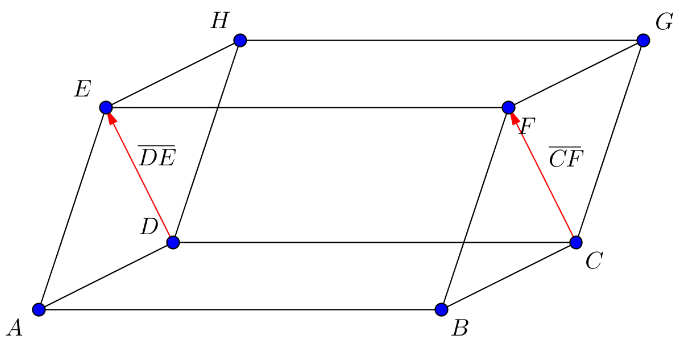
b) $(-2,\ 3)$

**34**

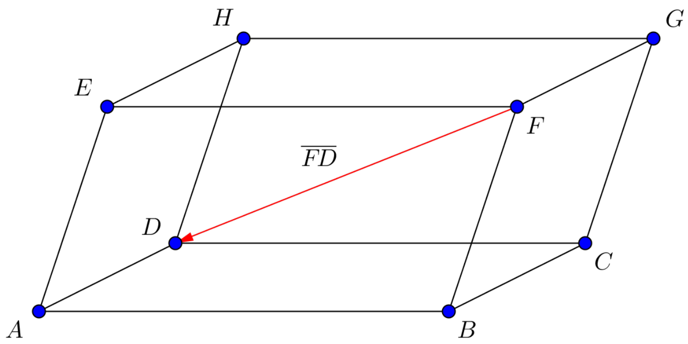
a) Ainoa (kahden kärkipisteen välinen) vektori, joka on sama vektori kuin $\overline{BD}$, on vektori $\overline{FH}$.



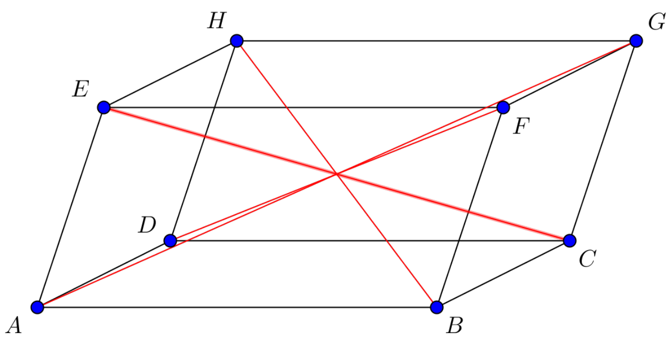

b) Vektorin $\overline{ED}$ kanssa yhtä pitkät ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat $\overline{DE}$ ja $\overline{CF}$.



c) Vektorin $\overline{DF}$ vastavektori on vektori $\overline{FD}$.



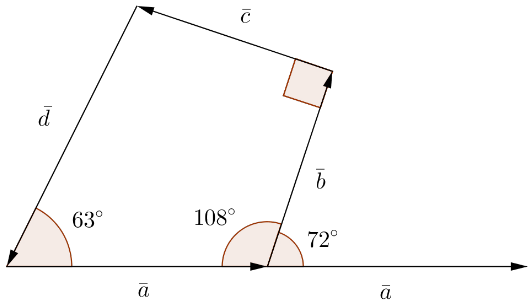

d) Suuntaissärmiön avaruuslävistäjät ovat vektorit $\overline{AG}$ ja $\overline{GA}$, $\overline{DF}$ ja $\overline{FD}$, $\overline{BH}$ ja $\overline{HB}$ sekä $\overline{CE}$ ja $\overline{EC}$.



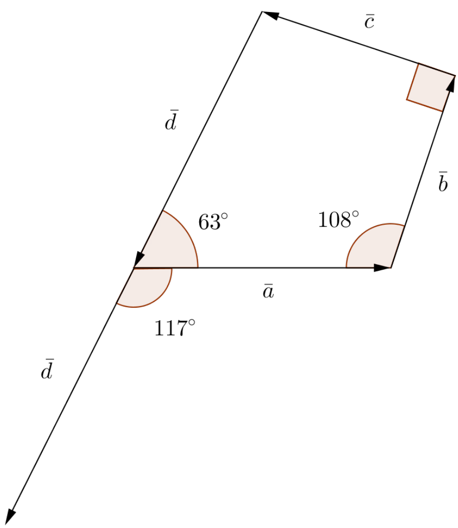

Vastaus
a) $\overline{FH}$
b) $\overline{DE}$ ja $\overline{CF}$
c) $\overline{FD}$
d) $\overline{AG}$, $\overline{GA}$, $\overline{DF}$, $\overline{FD}$, $\overline{BH}$, $\overline{HB}$, $\overline{CE}$ ja $\overline{EC}$

**35**

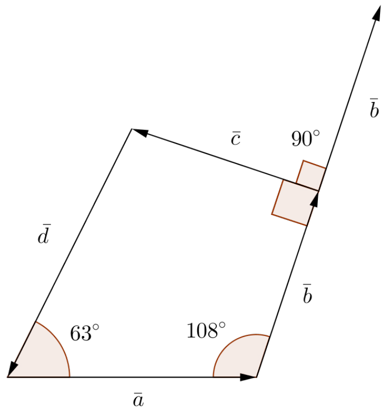
a) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 108° = 72°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 72°$.



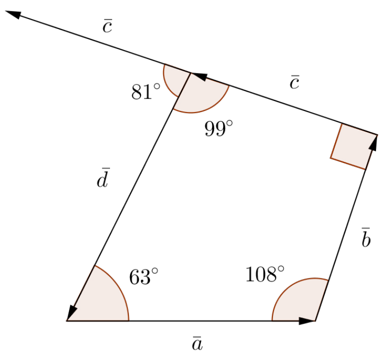

b) Siirretään vektori $\overline{d}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 63° = 117°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{d}) = 117°$.



c) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{c}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 90° = 90°$. Siis $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 90°$.



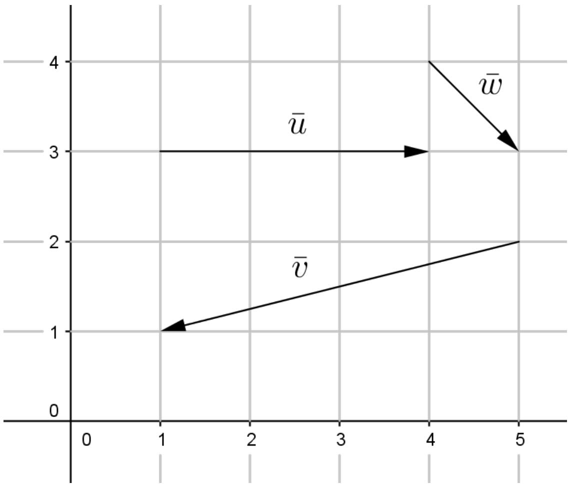

d) Nelikulmion kulmien summa on $360°$. Kuvion nelikulmion neljäs kulma on $360° - 90° - 108° - 63° = 99°$. Siirretään vektori $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{d}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 99° = 81°$. Siis $\sphericalangle(\overline{d}, \overline{c}) = 81°$.




Vastaus a) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 72°$ b) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{d}) = 117°$

c) $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 90°$ d) $\sphericalangle(\overline{d}, \overline{c}) = 81°$

**36**

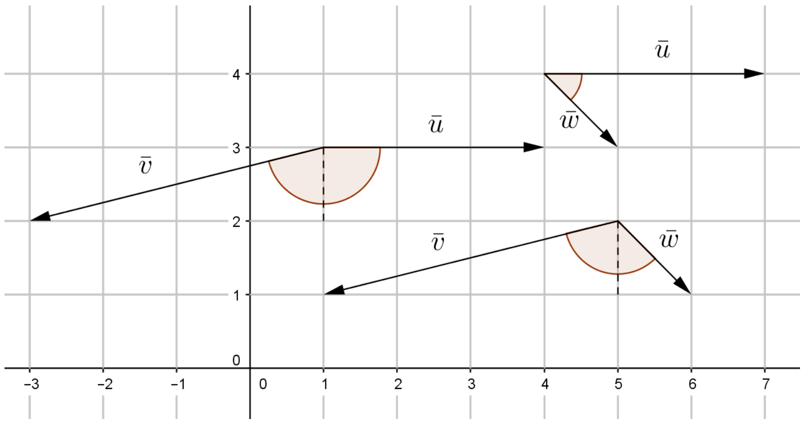



a) Vektorin $\overline{u}$ pituus on $|\overline{u}| = 3$.

Vektorin $\overline{v}$ pituudeksi saadaan Pythagoraan lauseen avulla
$|\overline{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

Vektorin $\overline{w}$ pituudeksi saadaan Pythagoraan lauseen avulla
$|\overline{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

b)




Kuvasta nähdään, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma koostuu suorakulmasta ja kulmasta, jonka tangentti on 4. Siten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90° + \tan^{-1} 4 \approx 166°$.

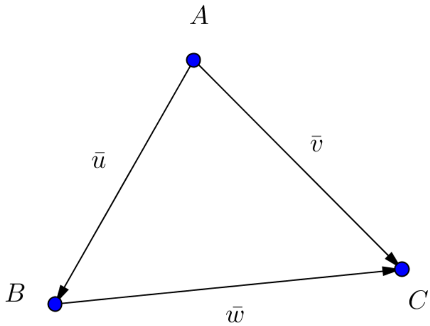
Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma on suorakulman puolikas, joten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = 45°$.

Vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma koostuu suorakulman puolikkaasta ja kulmasta, jonka tangentti on 4. Siten $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) = 45° + \tan^{-1} 4 \approx 121°$.

Vastaus a) $|\overline{u}| = 3$, $|\overline{v}| = \sqrt{17}$ ja $|\overline{w}| = \sqrt{2}$

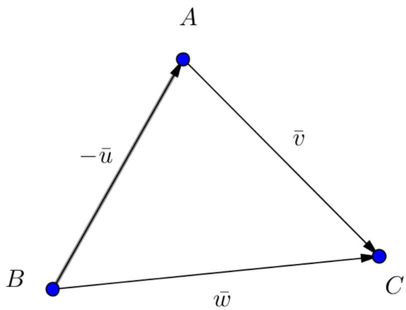
b) $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) \approx 166°$, $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = 45°$ ja $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) \approx 121°$

**37**




a) Kulma $\sphericalangle A$ on yhtä suuri kuin vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$.

b) Kulma $\sphericalangle B$ on yhtä suuri kuin vektorin $\overline{w}$ ja vektorin $\overline{u}$ vastavektorin $-\overline{u}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{u}, \overline{w})$.

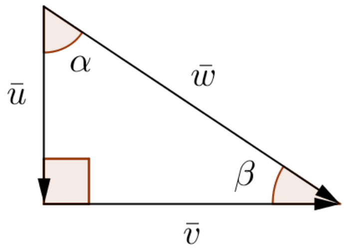



c) Samalla tavoin kuin b-kohdassa nähdään, että kulma $\sphericalangle C$ on yhtä suuri kuin vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ vastavektorien $-\overline{v}$ ja $-\overline{w}$ välinen kulma. Siten $\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{v}, -\overline{w})$.

Vastaus a) $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{u}, \overline{v})$ b) $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{u}, \overline{w})$

c) $\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{v}, -\overline{w})$

Tarkastellaan esimerkiksi kuvan mukaista suorakulmaista kolmiota. Kuvassa kulmat $\alpha$ ja $\beta$ ovat mielivaltaisia teräviä kulmia. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, teräville kulmille pätee
$\alpha + \beta = 90°$.




Osoitetaan seuraavaksi, että yhtälö

$$\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) + \sphericalangle(\overline{v},\overline{w}) + \sphericalangle(\overline{w},\overline{u}) = 180°$$

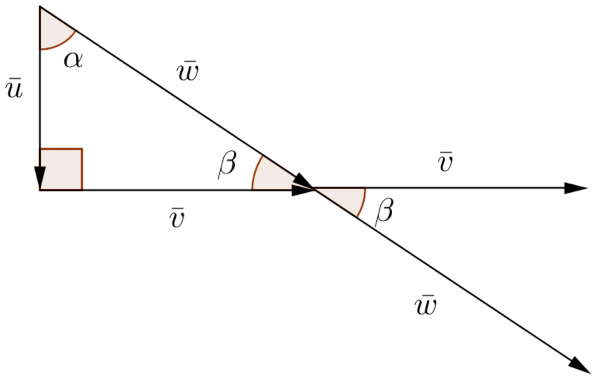
pätee kuvan suorakulmaiselle kolmiolle.

Määritetään vektorien väliset kulmat.

Suoraan nähdään, että $\sphericalangle(\overline{u},\overline{w}) = \sphericalangle(\overline{w},\overline{u}) = \alpha$ .

Siirtämällä vektori $\overline{u}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{v}$ nähdään, että $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90°$ .

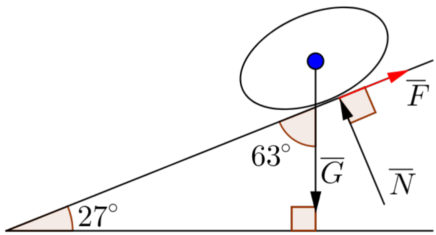
Siirretään vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ alkamaan samasta pisteestä. Vektorien välinen kulma on ristikulmana myös $\beta$. Siis $\sphericalangle(\overline{v},\overline{w})=\beta$.




Tulokset yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\overline{u},\overline{v})+\sphericalangle(\overline{v},\overline{w})+\sphericalangle(\overline{w},\overline{u}) &= 90^\circ+\beta+\alpha\\ &= 90^\circ+90^\circ\\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

**39**

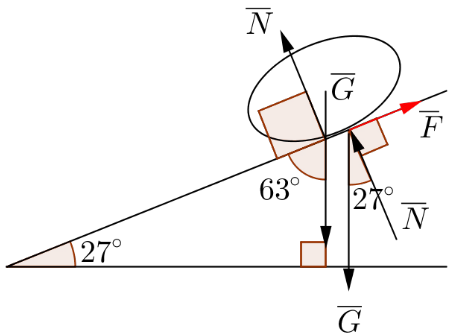



Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 27° = 63°$.

Määritetään vektorien väliset kulmat.

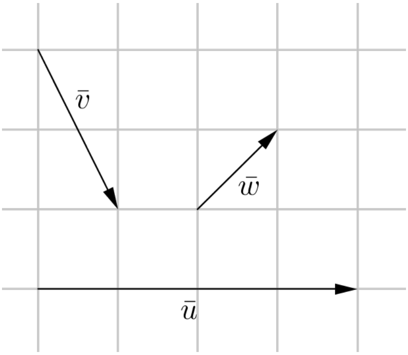
Siirtämällä vektori $\overline{N}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{F}$ nähdään, että $\sphericalangle(\overline{F},\overline{N}) = 90°$.

Tekemällä sopivat vektorien siirrot nähdään kuvan avulla (alla), että $\sphericalangle(\overline{G},\overline{N}) = 90° + 63° = 153°$ ja $\sphericalangle(\overline{F},\overline{G}) = 90° + 27° = 117°$.

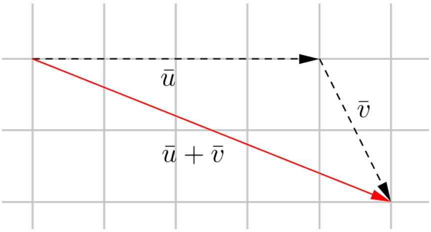



Vastaus $\quad \sphericalangle(\overline{F},\overline{N}) = 90°$, $\sphericalangle(\overline{G},\overline{N}) = 153°$ ja $\sphericalangle(\overline{F},\overline{G}) = 117°$

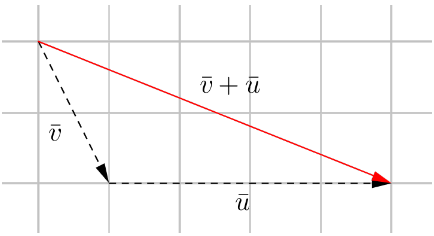
**40**



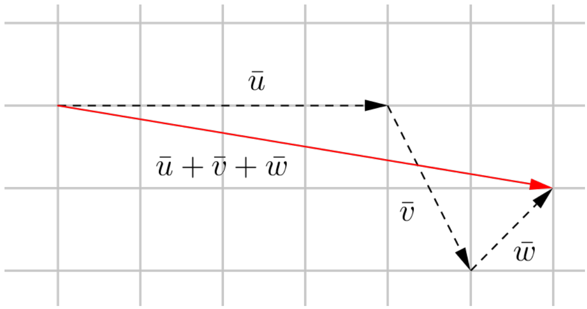

a) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+\overline{v}$.



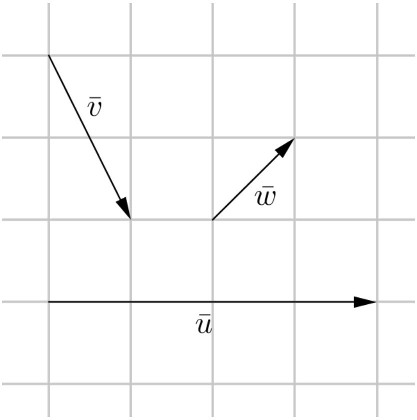

b) Asetetaan vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{u}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{v}$:n alkupisteestä $\overline{u}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{v}+\overline{u}$. Huomataan, että saatiin sama vektori kuin a-kohdassa.



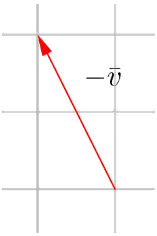
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}$.



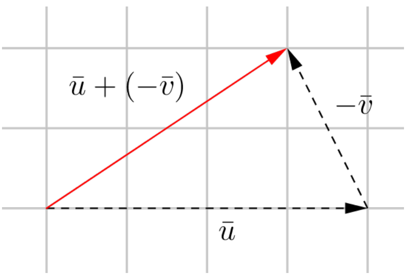
**41**



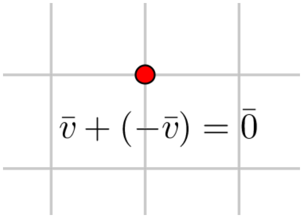

a) Vektori $-\overline{v}$ on vektorin $\overline{v}$ vastavektori.



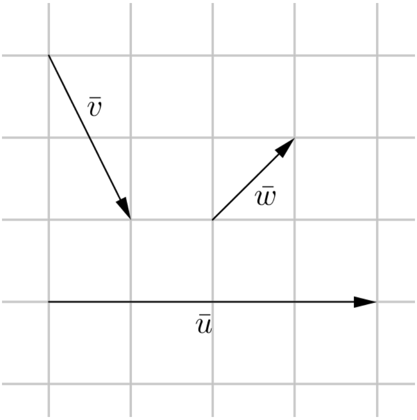

b) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja a-kohdan vektori $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$ :n alkupisteestä $-\overline{v}$ :n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+(-\overline{v})$.



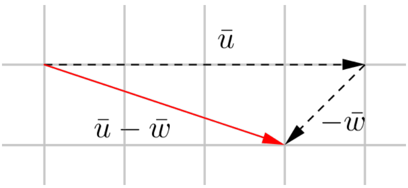
c) Asetetaan vektorit $\overline{v}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Palataan samaan pisteeseen, josta lähdettiin. Siten summavektori on nollavektori: $\overline{v}+(-\overline{v})=\overline{0}$.



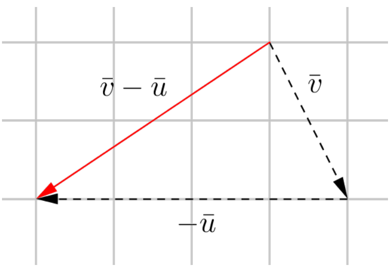
**42**



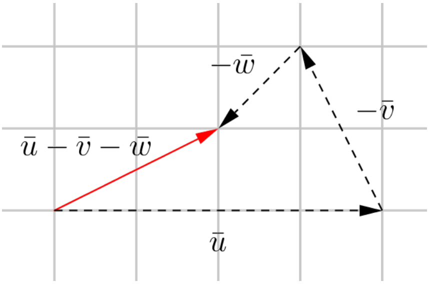

a) $\overline{u}-\overline{w}=\overline{u}+(-\overline{w})$. Asetetaan vektori $\overline{u}$ ja (vasta)vektori $-\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}-\overline{w}$.



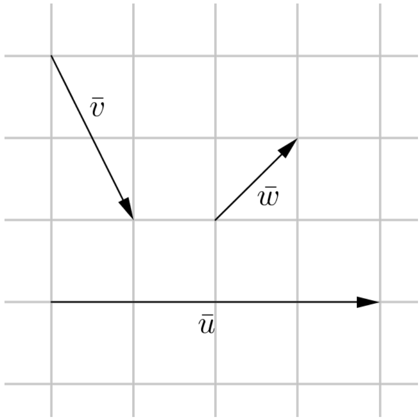

b) $\overline{v}-\overline{u}=\overline{v}+(-\overline{u})$. Asetetaan vektori $\overline{v}$ ja (vasta)vektori $-\overline{u}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{v}$:n alkupisteestä $-\overline{u}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{v}-\overline{u}$.



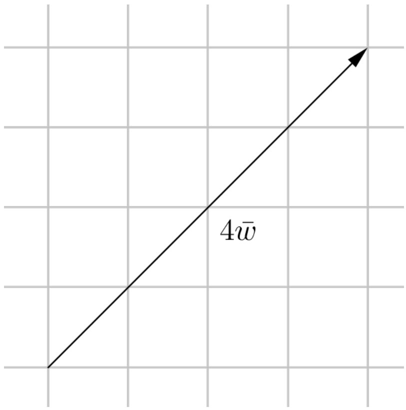
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$, $-\overline{v}$ ja $-\overline{w}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{w}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}-\overline{v}-\overline{w}$.



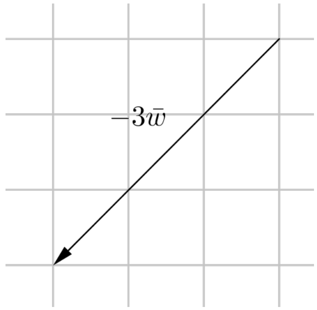
**43**



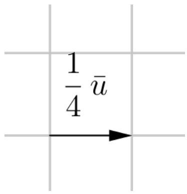

a) Vektori $4\overline{w}$ on 4 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{w}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



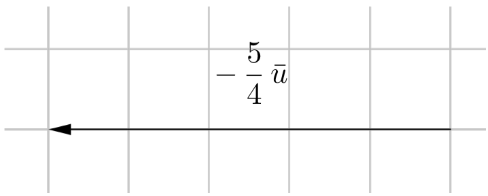
b) Vektori $-3\overline{w}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{w}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



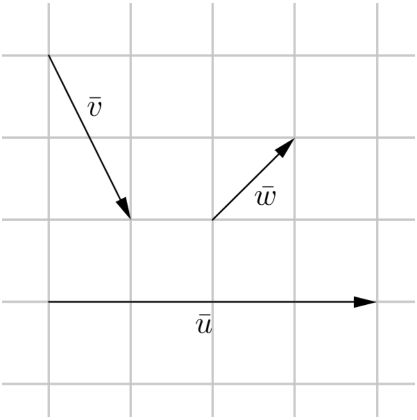

c) Vektori $\frac{1}{4}\overline{u}$ on $\frac{1}{4}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



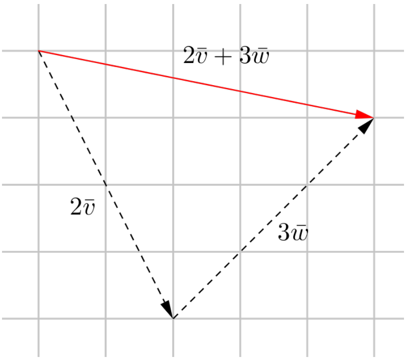

d) Vektori $-\frac{5}{4}\overline{u}$ on $\frac{5}{4}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ (eli 5 ruutua) ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



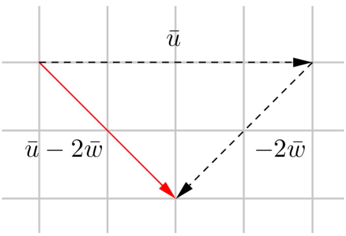
**44**



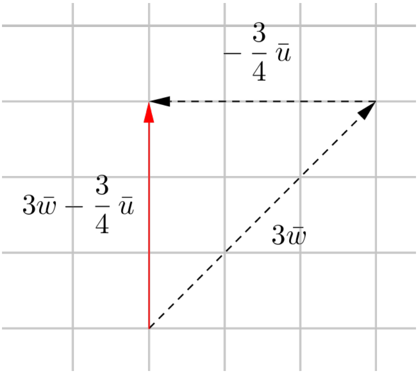

a) Vektori $2\overline{v}+3\overline{w}$ on vektorien $2\overline{v}$ ja $3\overline{w}$ summavektori.



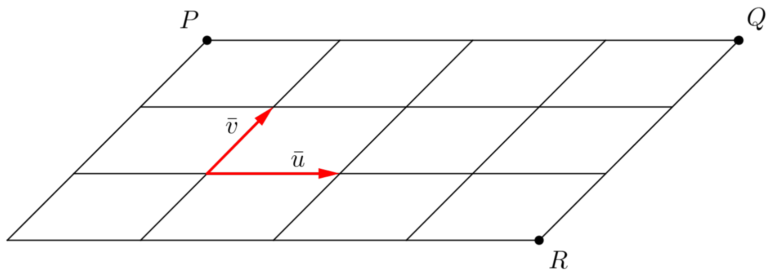

b) Vektori $\overline{u}-2\overline{w}$ on vektorien $\overline{u}$ ja $-2\overline{w}$ summavektori.



c) Vektori $3\overline{w}-\dfrac{3}{4}\overline{u}$ on vektorien $3\overline{w}$ ja $-\dfrac{3}{4}\overline{u}$ summavektori.



**45**




a) Pisteiden $P$ ja $Q$ välinen vektori $\overline{PQ}$ on 4 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa samansuuntainen. Siten $\overline{PQ} = 4\overline{u}$ .

b) Pisteiden $Q$ ja $R$ välinen vektori $\overline{QR}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{v}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen. Siten $\overline{QR} = -3\overline{v}$ .

Voidaan myös ajatella, että kulkeminen pisteestä $Q$ pisteeseen $R$ vastaa kolmen (vasta)vektorin $-\overline{v}$ kulkemista.

c) Kirjoitetaan vektori $\overline{PR}$ kahden vektorin summana ja käytetään a- ja b-kohtien tuloksia:

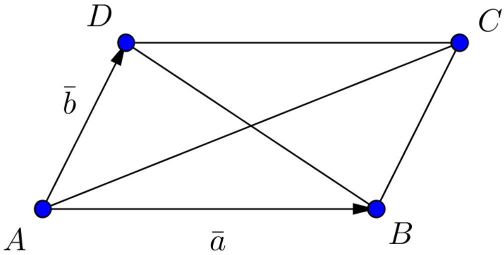
$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = 4\overline{u} - 3\overline{v} .$$

Vastaus a) $\overline{PQ} = 4\overline{u}$

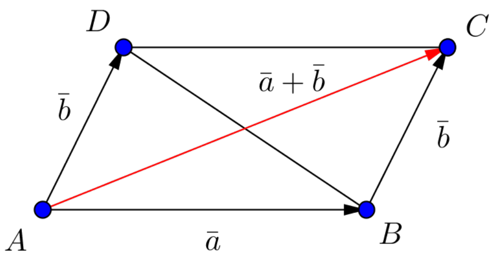
b) $\overline{QR} = -3\overline{v}$

c) $\overline{PR} = 4\overline{u} - 3\overline{v}$

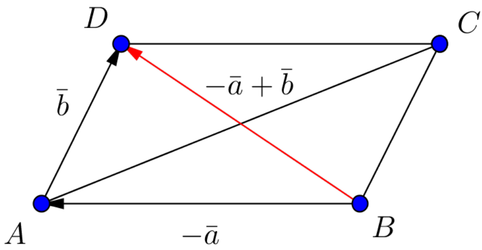
**46**




a) Vektori $\overline{a}+\overline{b}$ saadaan siten, että asetetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin ja piirretään vektori $\overline{a}$ :n alkupisteestä $\overline{b}$ :n loppupisteeseen. Kuvan perusteella kyseinen summavektori on sama kuin vektori $\overline{AC}$ . Siis $\overline{a}+\overline{b}=\overline{AC}$ .



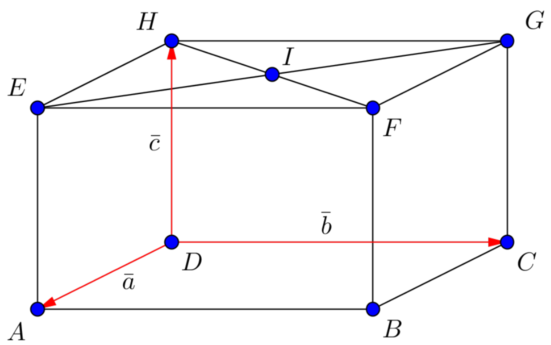
b) Vektori $-\overline{a}+\overline{b}$ saadaan siten, että asetetaan vektorit $-\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin ja piirretään vektori $-\overline{a}$ :n alkupisteestä $\overline{b}$ :n loppupisteeseen. Kuvan perusteella kyseinen summavektori on sama kuin vektori $\overline{BD}$. Siis $-\overline{a}+\overline{b}=\overline{BD}$.




c) Voitaisiin tehdä kuten a- ja b-kohdassa, mutta voidaan myös huomata, että koska $-\overline{a}-\overline{b}=-(\overline{a}+\overline{b})$, niin vektori $-\overline{a}-\overline{b}$ on a-kohdan vektorin $\overline{a}+\overline{b}$ vastavektori. Koska $\overline{a}+\overline{b}=\overline{AC}$, niin $-\overline{a}-\overline{b}=-\overline{AC}=\overline{CA}$.

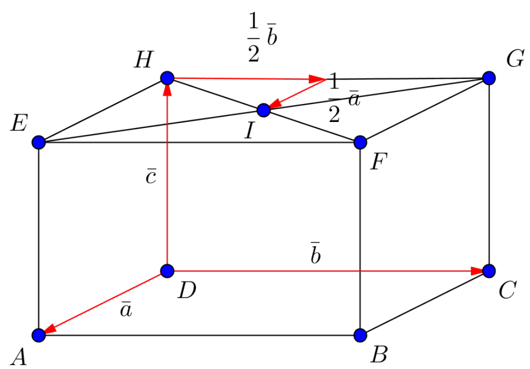
Vastaus
a) $\overline{AC}$
b) $\overline{BD}$
c) $\overline{CA}$

**47**




Kirjoitetaan vektori $\overline{DI}$ kahden vektorin summana:
$\overline{DI} = \overline{DH} + \overline{HI}$. Suoraan kuvasta nähdään, että $\overline{DH} = \overline{c}$. Toisaalta pisteestä $H$ päästään pisteeseen $I$ kulkemalla puolikas vektori $\overline{b}$ ja puolikas vektori $\overline{a}$ (kuva alla). Siten

$$\overline{DI} = \overline{DH} + \overline{HI} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{c}.$$




Vastaus $\quad \overline{DI} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{c}$

**48**

a) Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$(\overline{u}-\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})+(\overline{w}-\overline{u})$$

$$=\overline{u}-\overline{v}-\overline{w}+\overline{v}+\overline{w}-\overline{u}$$

$$=\overline{u}-\overline{u}-\overline{v}+\overline{v}-\overline{w}+\overline{w}$$

$$=\overline{0}$$

b) Sievennetään kuten a-kohdassa.

$$(\overline{u}+2\overline{v})-(\overline{w}-\overline{v})-2(\overline{w}-\overline{u})$$

$$=\overline{u}+2\overline{v}-\overline{w}+\overline{v}-2\overline{w}-2\cdot(-\overline{u})$$

$$=\overline{u}+2\overline{v}+\overline{v}-\overline{w}-2\overline{w}+2\overline{u}$$

$$=\overline{u}+2\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$$

$$=3\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$$

Vastaus a) $\overline{0}$
b) $3\overline{u}+3\overline{v}-3\overline{w}$

**49**

a) Ratkaistaan yhtälöstä $\overline{a} - 4\overline{b} = 6(\overline{b} + \overline{a})$ vektori $\overline{a}$.
Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$\overline{a} - 4\overline{b} = 6(\overline{b} + \overline{a})$$

$$\overline{a} - 4\overline{b} = 6\overline{b} + 6\overline{a}$$

$$\overline{a} - 6\overline{a} = 6\overline{b} + 4\overline{b}$$

$$-5\overline{a} = 10\overline{b}$$

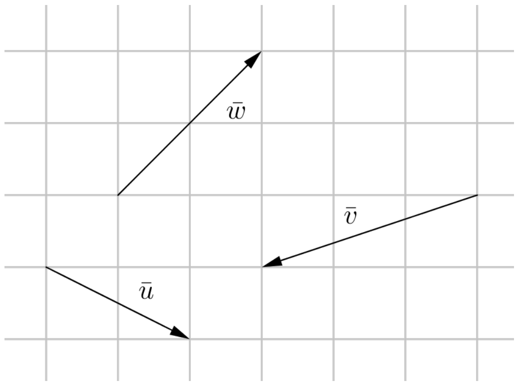
$$\overline{a} = -2\overline{b}$$

Koska kerroin $-2$ on negatiivinen, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

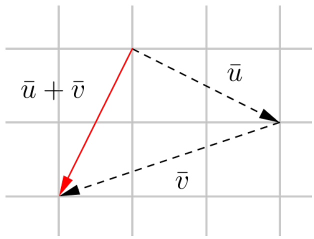
b) Yhtälöstä $\overline{a} = -2\overline{b}$ nähdään, että vektori $\overline{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

Vastaus b) Vektori $\overline{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

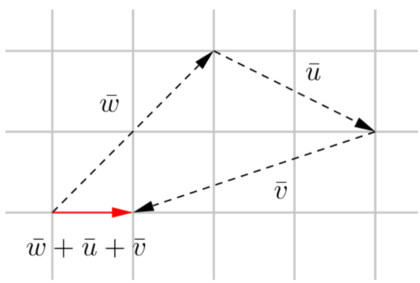
**50**



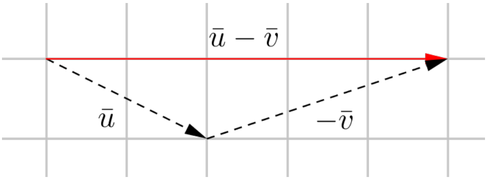

a) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}+\overline{v}$.



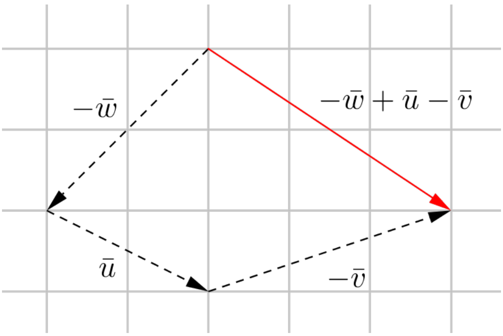

b) Asetetaan vektorit $\overline{w}$, $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{w}$:n alkupisteestä $\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{w}+\overline{u}+\overline{v}$.



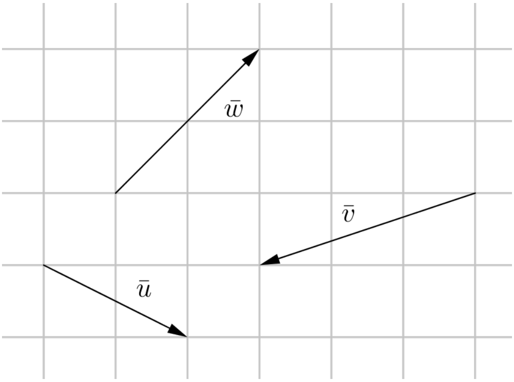
c) Asetetaan vektorit $\overline{u}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{u}$:n alkupisteestä $-\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{u}-\overline{v}$.



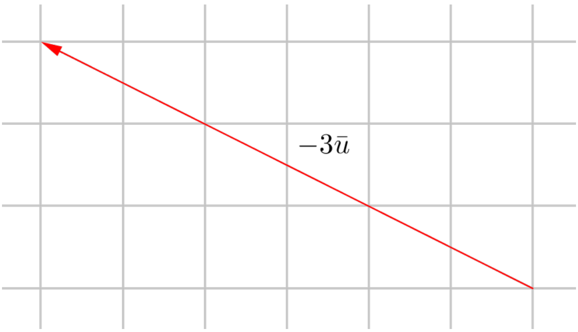

d) Asetetaan vektorit $-\overline{w}$, $\overline{u}$ ja $-\overline{v}$ peräkkäin. Piirretään vektori $-\overline{w}$:n alkupisteestä $-\overline{v}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $-\overline{w}+\overline{u}-\overline{v}$.



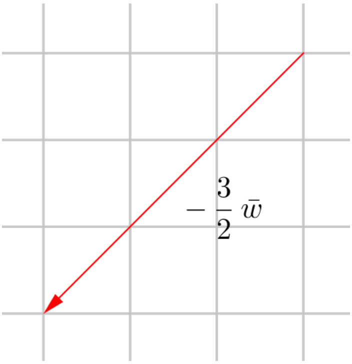
**51**



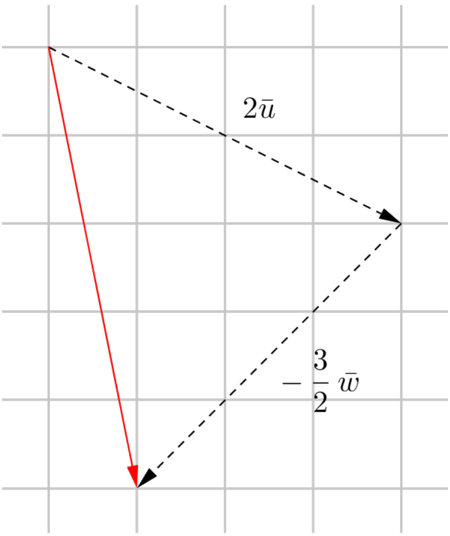

a) Vektori $-3\overline{u}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{u}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



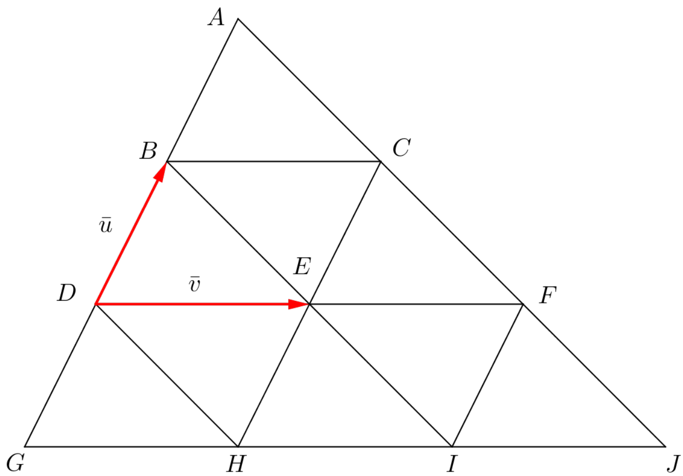
b) Vektori $-\frac{3}{2}\overline{w}$ on $\frac{3}{2}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{w}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.




c) Vektori $2\overline{u}-\frac{3}{2}\overline{w}$ on vektorien $2\overline{u}$ ja $-\frac{3}{2}\overline{w}$ summavektori.



## 52




Kirjoitetaan kussakin tapauksessa kysytyt vektorit kahden tai useamman vektorin summana.

a) $\overline{HF} = \overline{HI} + \overline{IF} = \overline{v} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{v}$

b) $\overline{HB} = \overline{HD} + \overline{DB} = \overline{HG} + \overline{GD} + \overline{DB} = -\overline{v} + \overline{u} + \overline{u} = 2\overline{u} - \overline{v}$

c) $\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = -\overline{u} + \overline{v}$

d) $\overline{AJ} = \overline{AG} + \overline{GJ} = -3\overline{u} + 3\overline{v}$

Vastaus
a) $\overline{HF} = \overline{u} + \overline{v}$
b) $\overline{HB} = 2\overline{u} - \overline{v}$
c) $\overline{BE} = -\overline{u} + \overline{v}$
d) $\overline{AJ} = -3\overline{u} + 3\overline{v}$

**53**

a) Ratkaistaan yhtälöstä $\overline{a} - 5(\overline{b} - 12\overline{a}) = \overline{0}$ vektori $\overline{b}$. Vektorilausekkeita voidaan sieventää samaan tapaan kuin polynomilausekkeita.

$$\begin{aligned}
\overline{a} - 5(\overline{b} - 12\overline{a}) &= \overline{0} \\
\overline{a} - 5\overline{b} - 5\cdot(-12\overline{a}) &= \overline{0} \\
\overline{a} - 5\overline{b} + 60\overline{a} &= \overline{0} \\
61\overline{a} - 5\overline{b} &= \overline{0} \\
-5\overline{b} &= -61\overline{a} \\
\overline{b} &= \frac{61}{5}\overline{a}
\end{aligned}$$

Koska kerroin $\frac{61}{5}$ on positiivinen, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset.

b) Yhtälöstä $\overline{b} = \frac{61}{5}\overline{a}$ nähdään, että vektori $\overline{b}$ on $\frac{61}{5}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$.

Vastaus a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset.

b) Vektori $\overline{b}$ on $\frac{61}{5}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$.

**54**

Tehdään vastaoletus: $-4\overline{a}+9\overline{b}$ on nollavektori eli $-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$.

Tällöin saadaan

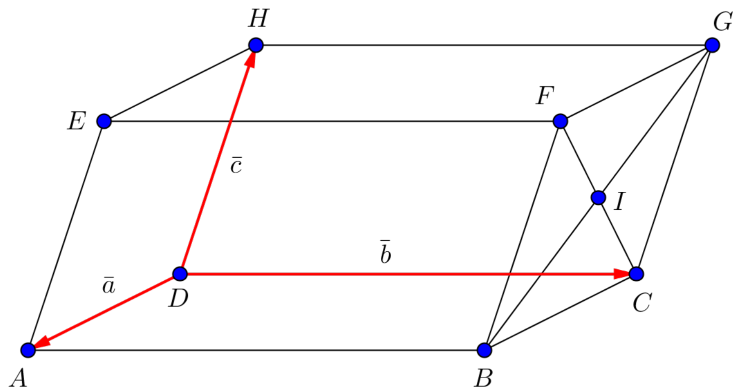
$$-4\overline{a}+9\overline{b}=\overline{0}$$

$$-4\overline{a}=-9\overline{b}$$

$$\overline{a}=\frac{9}{4}\overline{b}$$

eli vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset. On päädytty ristiriitaan, sillä tehtävänannon mukaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat erisuuntaiset. Siten vastaoletus ei voi pitää paikkaansa eli vektori $-4\overline{a}+9\overline{b}$ ei voi olla nollavektori.

**55**



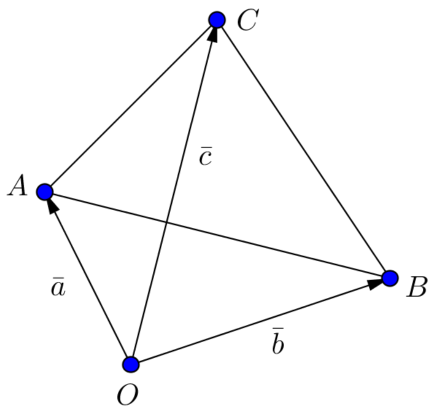

a) Kirjoitetaan vektori $\overline{BG}$ kahden vektorin summana:
$\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG}$. Kuvasta nähdään, että $\overline{BC} = -\overline{a}$ ja $\overline{CG} = \overline{c}$.
Siten $\overline{BG} = \overline{BC} + \overline{CG} = -\overline{a} + \overline{c}$.

b) Piste $I$ on pisteiden $B$ ja $G$ puolivälissä, joten
$\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BG} = \frac{1}{2}(-\overline{a} + \overline{c}) = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c}$.

c) $\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI} = \overline{b} + -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$

Vastaus
a) $\overline{BG} = -\overline{a} + \overline{c}$
b) $\overline{BI} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c}$
c) $\overline{AI} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$

**56**




Kirjoitetaan kussakin tapauksessa kysytyt vektorit ensin kahden vektorin summana.

a) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{a} + \overline{b}$

b) $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = -\overline{a} + \overline{c}$

c) $\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = -\overline{b} + \overline{c}$

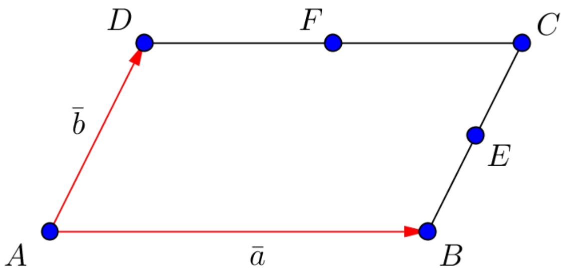
Vastaus

a) $\overline{AB} = -\overline{a} + \overline{b}$

b) $\overline{AC} = -\overline{a} + \overline{c}$

c) $\overline{BC} = -\overline{b} + \overline{c}$

**57**




a) $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{a} + \overline{b}$ ja

$$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{b} - \frac{1}{2}\overline{a} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}.$$

b) a-kohdan perusteella nähdään, että $\overline{BD} = 2\overline{EF}$. Siten vektori $\overline{BD}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{EF}$ ja sen kanssa samansuuntainen.

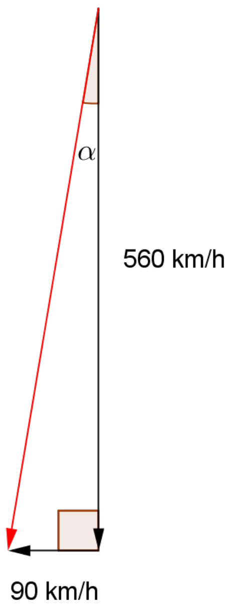
Vastaus a) $\overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{EF} = -\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$

b) Vektori $\overline{BD}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{EF}$ ja sen kanssa samansuuntainen.

**58**

Tuulen nopeus on $25\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \cdot \dfrac{\dfrac{1}{1000}\text{km}}{\dfrac{1}{3600}\text{h}} = 25 \cdot \dfrac{3600}{1000}\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Lentokone lentäisi tyynessä ilmassa nopeudella 560 km/h suoraan etelään. Nyt kuitenkin idästä puhaltava tuuli kuljettaa konetta samanaikaisesti länteen päin nopeudella 90 km/h. Lentokoneen todellinen nopeus on näiden kahden nopeuden vektorisumma. Kuvassa lentokoneen todellinen siirtymä (tunnin aikana) on esitetty kahden siirtymävektorin summana punaisella.




Lasketaan todellisen lentosuunnan ja eteläsuunnan välinen kulma $\alpha$.

$$\tan\alpha = \frac{90}{560}$$

$$\alpha \approx 9{,}1°$$

Siis lentosuunta poikkeaa eteläsuunnasta $9{,}1°$ lounaaseen.

b) Lentokoneen todellinen nopeus $v$ saadaan Pythagoraan lauseella.

$$v = \sqrt{560^2 + 90^2} \approx 570 \text{ (km/h)}$$

c) Tilannetta havainnollistaa oheinen kaavakuva. Jos halutaan todellisen lentosuunnan olevan suoraan etelään (kuvassa punainen vektori), lentokoneen keula tulee suunnata eteläsuunnasta jonkin verran kaakkoon päin.

Lasketaan kokeen keulan suunnan ja eteläsuunnan välinen kulma $\beta$.

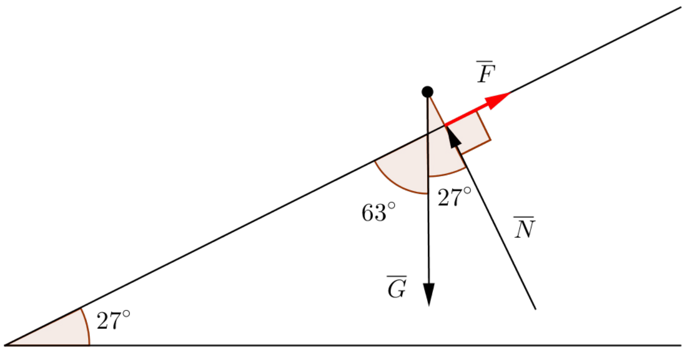
$$\sin\beta = \frac{90}{560}$$

$$\beta \approx 9{,}2°$$

Siis kokeen keulan suunnan tulisi olla eteläsuunnasta $9{,}2°$ kaakkoon.

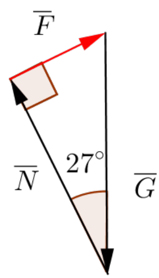

Vastaus
a) eteläsuunnasta $9{,}1°$ lounaaseen
b) 570 km/h
c) eteläsuunnasta $9{,}2°$ kaakkoon

**59**




Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 27° = 63°$. ”Ylimääräinen” $27°$:n kulma on merkitty näkyviin seuraavia laskuja varten.

a) Tehtävänannon mukaan vektorien $\overline{G}$, $\overline{N}$ ja $\overline{F}$ summa on nollavektori eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$. Piirtämällä saadaan:




Koska muodostuu suljettu silmukka (tässä tapauksessa kolmio), summavektori typistyy pisteeksi eli se on nollavektori. Siis tosiaan $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$.

($27°$:n kulma on merkitty kuvaan näkyviin b-kohdan laskuja varten.)

b) Tiedetään, että Saara-saukon paino on 48 N, joten
$G = |\overline{G}| = 48\text{ N}$.

Voimien $\overline{N}$ ja $\overline{F}$ suuruudet $N$ ja $F$ (eli $|\overline{N}|$ ja $|\overline{F}|$) saadaan laskettua a-kohdan kuvan avulla.

$$\cos 27° = \frac{N}{G} = \frac{N}{48} \qquad\qquad \sin 27° = \frac{F}{G} = \frac{F}{48}$$

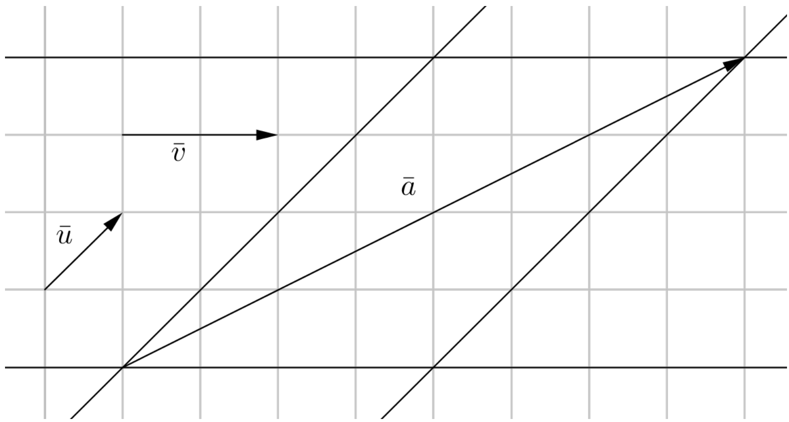
$$N \approx 43\ (\text{N}) \qquad\qquad F \approx 22\ (\text{N})$$

Siis $N \approx 43\text{ N}$ ja $F \approx 22\text{ N}$.

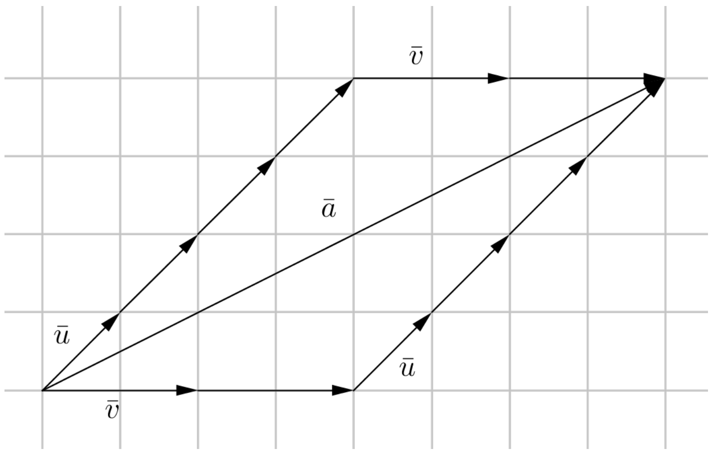
Vastaus a) $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F} = \overline{0}$
b) $N \approx 43\text{ N}$ ja $F \approx 22\text{ N}$

# 60

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



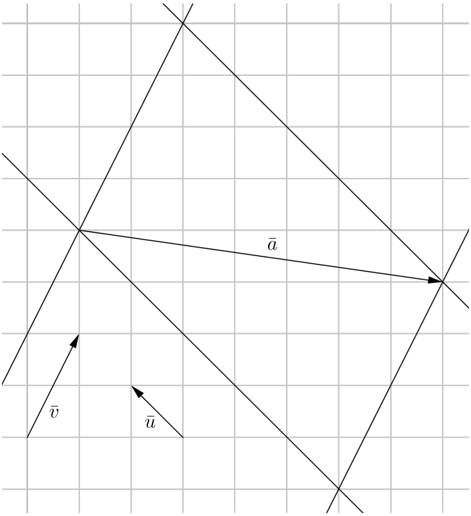

Ruudukosta nähdään, että $\overline{a} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$ .



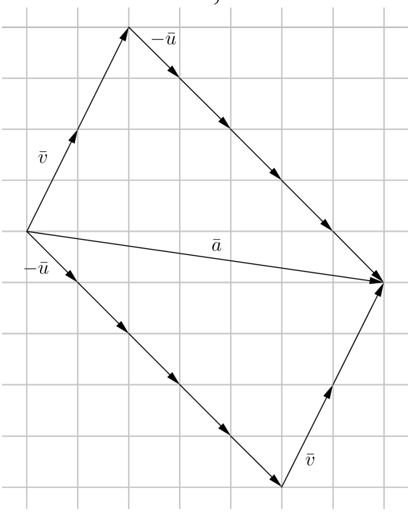

Vastaus $\overline{a} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$

**61**

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



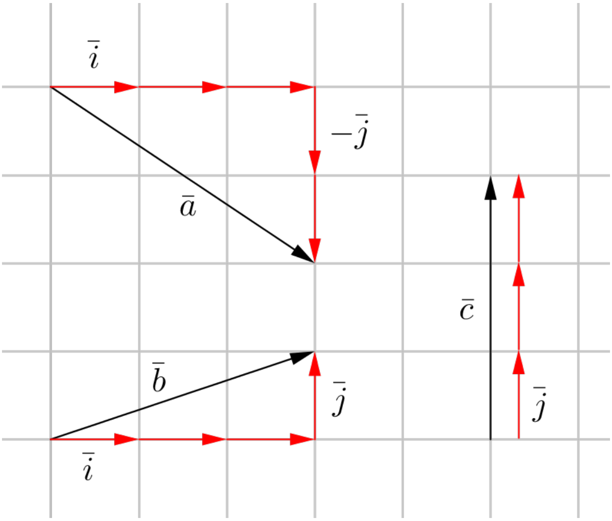

Ruudukosta nähdään, että $\overline{a} = 2\overline{v} - 5\overline{u} = -5\overline{u} + 2\overline{v}$ .




Vastaus $\overline{a} = -5\overline{u} + 2\overline{v}$

**62**

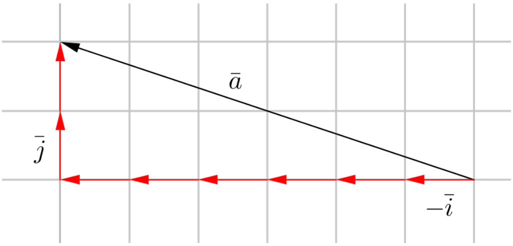
Kuviosta nähdään, että $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{j}$.



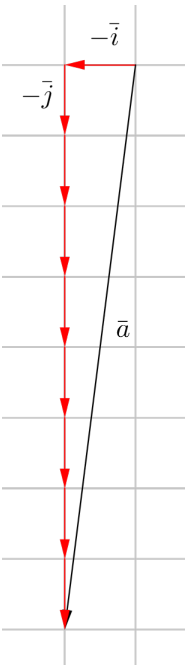

Vastaus $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = 3\overline{j}$

**63**

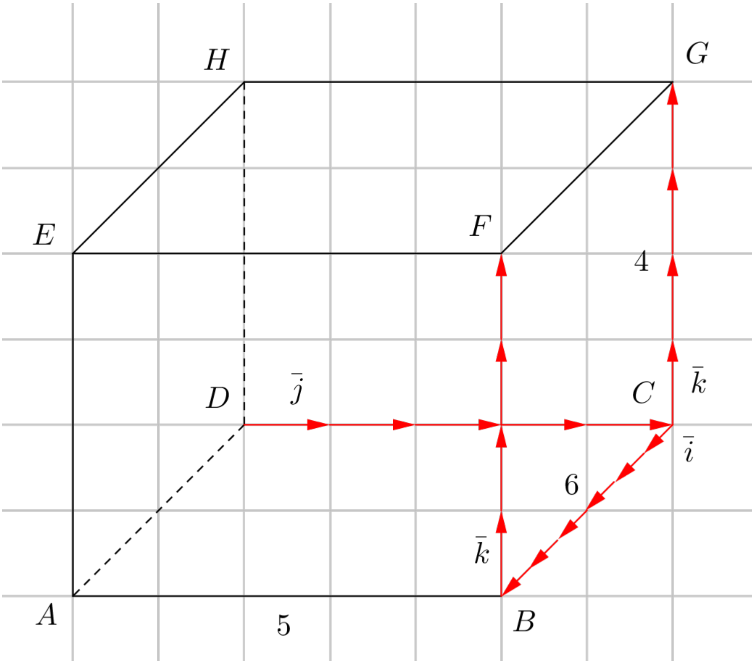
a) Kuvioon on piirretty vektori $\overline{a} = -6\overline{i} + 2\overline{j}$ .




b) Kuvioon on piirretty vektori $\overline{a} = -\overline{i} - 8\overline{j}$ .



**64**




a) Kuviosta nähdään, että $\overline{DG} = \overline{DC} + \overline{CG} = 5\overline{j} + 4\overline{k}$ .

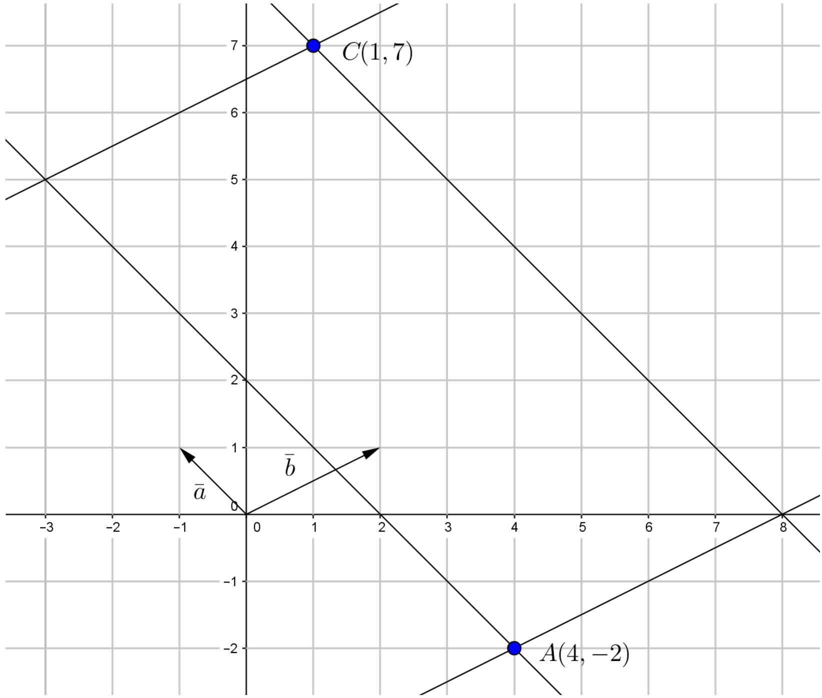
b) Kuviosta nähdään, että $\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} = 5\overline{j} + 6\overline{i} = 6\overline{i} + 5\overline{j}$ .

c) Kuviosta nähdään, että
$\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CB} + \overline{BF} = 5\overline{j} + 6\overline{i} + 4\overline{k} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}$ .

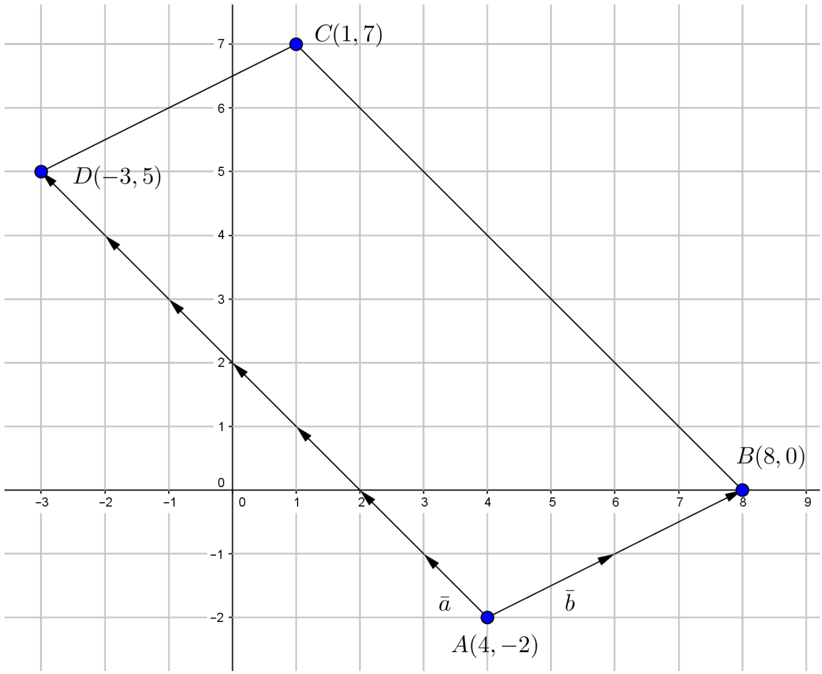
Vastaus a) $\overline{DG} = 5\overline{j} + 4\overline{k}$
b) $\overline{DB} = 6\overline{i} + 5\overline{j}$
c) $\overline{DF} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}$

**65**

Piirretään pisteiden $A$ ja $C$ kautta vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaiset suorat.



Täydennetään kuvioon kärkipisteet $B$ ja $D$ sekä sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.




a) Sivuvektorit ovat $\overline{AB} = 2\overline{b}$ ja $\overline{AD} = 7\overline{a}$.

b) Kärkipisteet ovat $B(8,0)$ ja $D(-3,5)$.

Vastaus a) $\overline{AB} = 2\overline{b}$ ja $\overline{AD} = 7\overline{a}$

b) $B(8,0)$ ja $D(-3,5)$

**66**

On etsittävä sellaiset luvut $r$ ja $s$, että $-3\overline{a}+9\overline{b}=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}$ .

Muokataan yhtälöä.

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}$$

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r\overline{a}-r\overline{b}+s\overline{b}$$

$$-3\overline{a}+9\overline{b}=r\overline{a}+(-r+s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r \qquad = -3 \\ -r+s=9 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä nähdään suoraan, että $r=-3$.

Ratkaistaan $s$ alemmasta yhtälöstä.

$$-r+s=9$$

$$s=9+r=9-3=6$$

Siis

$$\begin{aligned} -3\overline{a}+9\overline{b}&=r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b} \\ &=-3(\overline{a}-\overline{b})+6\overline{b}. \end{aligned}$$

Vastaus $\quad -3\overline{a}+9\overline{b}=-3(\overline{a}-\overline{b})+6\overline{b}$

**67**

On etsittävä sellaiset luvut $r$ ja $s$, että $14\overline{a}-9\overline{b}=r\overline{a}+s(\overline{b}-\overline{a})$.

Muokataan yhtälöä.

$$14\overline{a}-9\overline{b}=r\overline{a}+s(\overline{b}-\overline{a})$$

$$14\overline{a}-9\overline{b}=r\overline{a}+s\overline{b}-s\overline{a}$$

$$14\overline{a}-9\overline{b}=(r-s)\overline{a}+s\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r-s=14 \\ \quad s=-9 \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä nähdään suoraan, että $s=-9$.

Ratkaistaan $r$ ylemmästä yhtälöstä.

$$r-s=14$$

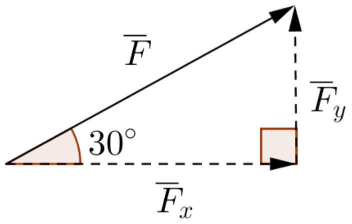
$$r=14+s=14-9=5$$

Siis

$$\begin{aligned} 14\overline{a}-9\overline{b}&=r\overline{a}+s(\overline{b}-\overline{a}) \\ &=5\overline{a}-9(\overline{b}-\overline{a}). \end{aligned}$$

Vastaus $\quad 14\overline{a}-9\overline{b}=5\overline{a}-9(\overline{b}-\overline{a})$

**68**




Voiman $\overline{F}$ suuruus $F = 115$ N.

Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 30° = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F\cos 30° = 115\text{ N} \cdot \cos 30° = 99{,}59...\text{ N} \approx 100\text{ N}$$

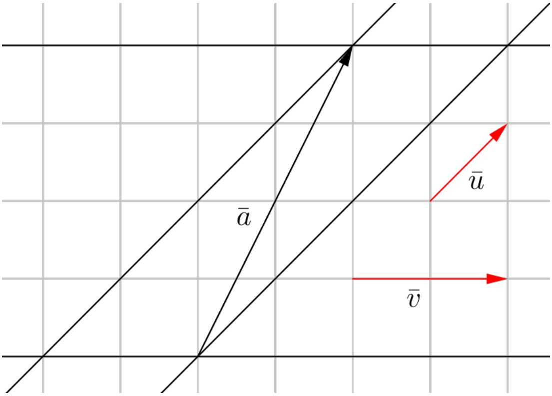
$$\sin 30° = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F\sin 30° = 115\text{ N} \cdot \sin 30° = 57{,}5\text{ N} \approx 58\text{ N}$$

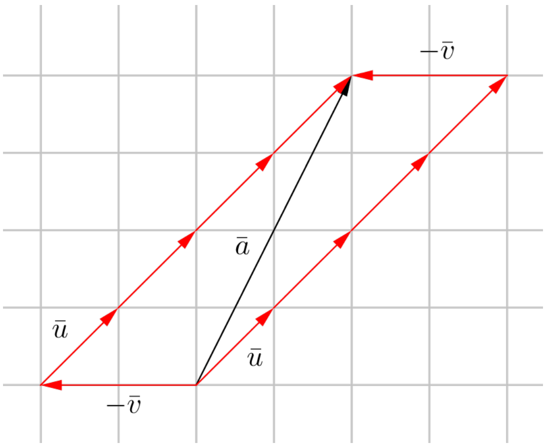
Vastaus $F_x \approx 100$ N ja $F_y \approx 58$ N

**69**

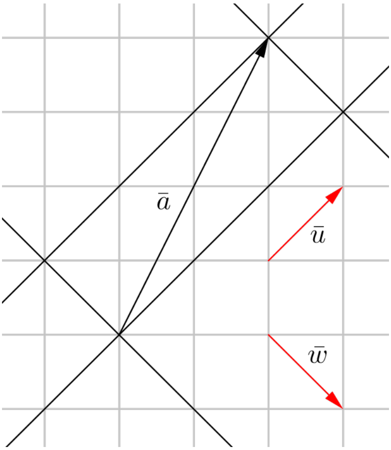
a) Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



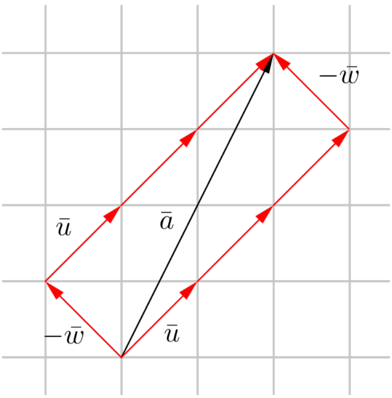

Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 4\overline{u} - \overline{v}$.



b) Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ suuntaiset suorat.



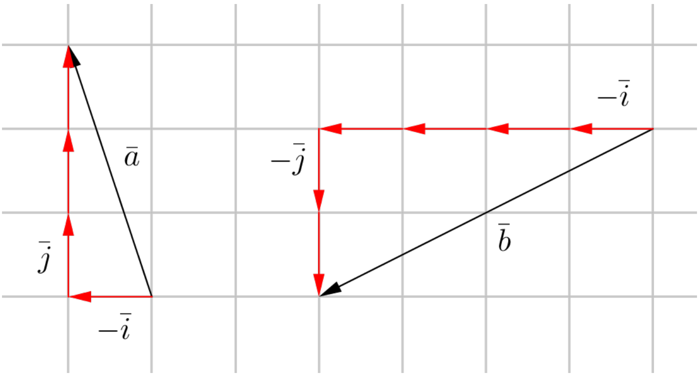

Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 3\overline{u} - \overline{w}$.




Vastaus a) $\overline{a} = 4\overline{u} - \overline{v}$
b) $\overline{a} = 3\overline{u} - \overline{w}$

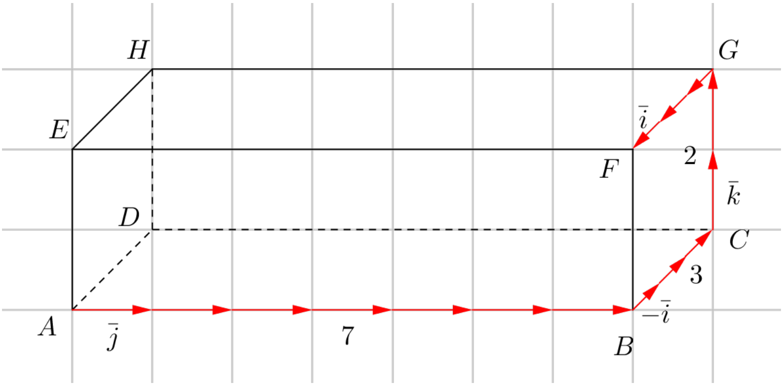
**70**

Kuviosta nähdään, että $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$ .




Vastaus $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$

**71**




a) Kuviosta nähdään, että $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 7\overline{j} - 3\overline{i} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$ .

b) Kuviosta nähdään, että
$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = 7\overline{j} - 3\overline{i} + 2\overline{k} = -3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k}$ .

c) Kuviosta nähdään, että $\overline{CF} = \overline{CG} + \overline{GF} = 2\overline{k} + 3\overline{i} = 3\overline{i} + 2\overline{k}$ .

Vastaus
a) $\overline{AC} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$
b) $\overline{AG} = -3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k}$
c) $\overline{CF} = 3\overline{i} + 2\overline{k}$

**72**

On etsittävä sellaiset luvut $r$ ja $s$, että
$6\overline{a}+20\overline{b}=r(\overline{a}+\overline{b})+s(\overline{a}-\overline{b})$.

Muokataan yhtälöä.

$$6\overline{a}+20\overline{b}=r(\overline{a}+\overline{b})+s(\overline{a}-\overline{b})$$

$$6\overline{a}+20\overline{b}=r\overline{a}+r\overline{b}+s\overline{a}-s\overline{b}$$

$$6\overline{a}+20\overline{b}=(r+s)\overline{a}+(r-s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r+s=6 \\ r-s=20 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja $s$ ja ratkaistaan muuttuja $r$.

$$+\begin{cases} r+s=6 \\ r-s=20 \end{cases}$$

$$2r \quad =26$$

$$r=13$$

Sijoitetaan $r = 13$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja $s$.

$$r + s = 6$$

$$s = 6 - r = 6 - 13 = -7$$

Siis

$$6\overline{a} + 20\overline{b} = r(\overline{a} + \overline{b}) + s(\overline{a} - \overline{b})$$

$$= 13(\overline{a} + \overline{b}) - 7(\overline{a} - \overline{b}).$$

Vastaus $\quad 6\overline{a} + 20\overline{b} = 13(\overline{a} + \overline{b}) - 7(\overline{a} - \overline{b})$

**73**

On etsittävä sellaiset luvut $r$ ja $s$, että
$17\overline{a} - 14\overline{b} = r(\overline{a} - 2\overline{b}) + s(\overline{b} - 3\overline{a})$ .

Muokataan yhtälöä.

$$17\overline{a} - 14\overline{b} = r(\overline{a} - 2\overline{b}) + s(\overline{b} - 3\overline{a})$$

$$17\overline{a} - 14\overline{b} = r\overline{a} - 2r\overline{b} + s\overline{b} - 3s\overline{a}$$

$$17\overline{a} - 14\overline{b} = (r - 3s)\overline{a} + (-2r + s)\overline{b}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r - 3s = 17 \\ -2r + s = -14 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja $r$ ja ratkaistaan muuttuja $s$.

$$\begin{cases} r - 3s = 17 & | \cdot 2 \\ -2r + s = -14 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2r - 6s = 34 \\ -2r + s = -14 \end{cases}$$

$$-5s = 20$$

$$s = -4$$

Sijoitetaan $s = -4$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja $r$.

$$r - 3s = 17$$

$$r = 17 + 3s = 17 + 3 \cdot (-4) = 17 - 12 = 5$$

Siis

$$\begin{aligned} 17\overline{a} - 14\overline{b} &= r(\overline{a} - 2\overline{b}) + s(\overline{b} - 3\overline{a}) \\ &= 5(\overline{a} - 2\overline{b}) - 4(\overline{b} - 3\overline{a}). \end{aligned}$$

Vastaus $17\overline{a} - 14\overline{b} = 5(\overline{a} - 2\overline{b}) - 4(\overline{b} - 3\overline{a})$

## 74

Ratkaistaan ensin vektori $\overline{c}$ yhtälöstä $6\overline{a}-8\overline{b}-4\overline{c}=\overline{0}$.

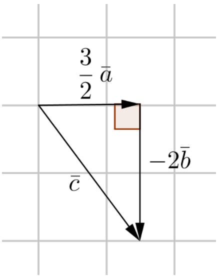
$$6\overline{a}-8\overline{b}-4\overline{c}=\overline{0}$$

$$6\overline{a}-8\overline{b}=4\overline{c}$$

$$4\overline{c}=6\overline{a}-8\overline{b}$$

$$\overline{c}=\frac{6}{4}\overline{a}-\frac{8}{4}\overline{b}=\frac{3}{2}\overline{a}-2\overline{b}$$

Koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, vektorit muodostavat esim. oheisen suorakulmaisen kolmion.




Lisäksi koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yksikkövektoreita, suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $\frac{3}{2}$ ja $2$.

Vektorin $\overline{c}$ pituus $|\overline{c}|$ saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$|\overline{c}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

Vastaus $\quad |\overline{c}|=\frac{5}{2}$

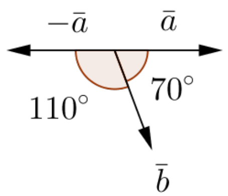
**75**

Ratkaistaan ensin vektori $\overline{c}$ yhtälöstä $12\overline{a}-5\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$.

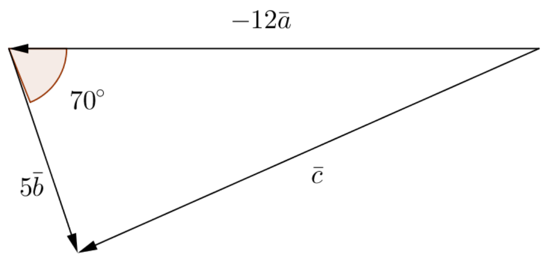
$$12\overline{a}-5\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$$

$$\overline{c}=-12\overline{a}+5\overline{b}$$

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $70°$. Vektorien $-\overline{a}$ ja $\overline{b}$ (sekä $-12\overline{a}$ ja $5\overline{b}$) välinen kulma on $180°-70°=110°$.




Vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ muodostavat esim. oheisen kolmion.



Koska vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yksikkövektoreita, kolmion kahden sivun pituudet ovat $12$ ja $5$. Vektorin $\overline{c}$ pituus $|\overline{c}|$ saadaan laskettua kosinilauseella.

$$|\overline{c}|^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \cos 70°$$

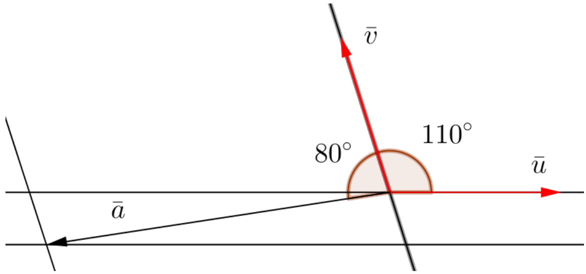
$$|\overline{c}|^2 = 127{,}957...$$

$$|\overline{c}| = 11{,}3118... \approx 11{,}31$$

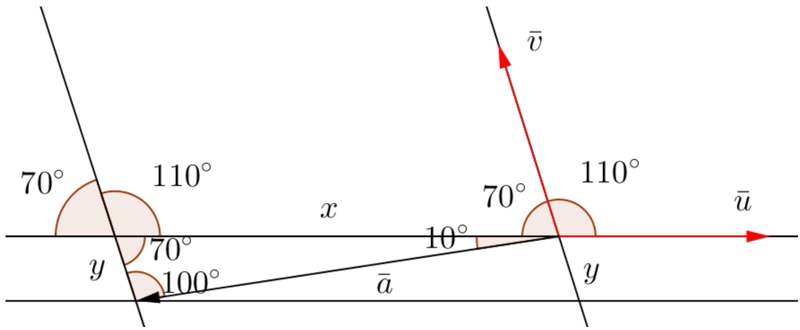
Vastaus $|\overline{c}| \approx 11{,}31$

**76**

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.




Täydennetään kuvioon kulmia. (Alla) kuviossa ylhäällä oikealla näkyvä 70°:n kulma saadaan vähentämällä oikokulmasta 180° annettu kulma 110°. Kaksi muuta 70°:n kulmaa saadaan samankohtaisena kulmana ja ristikulmana. Vektorin $\overline{a}$ yläpuolella olevan kolmion kulma 10° saadaan vähentämällä 70° vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{v}$ välisestä kulmasta: $80° - 70° = 10°$. Saman kolmion kolmas kulma on $180° - 70° - 10° = 100°$.




Lisäksi vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituutta on merkitty kirjaimella $x$ ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituutta kirjaimella $y$.

Vektorin $\overline{a}$ pituus on 15. Pituudet $x$ ja $y$ saadaan laskettua sinilauseella vektorin $\overline{a}$ yläpuolella olevasta kolmiosta.

$$\frac{15}{\sin 70°} = \frac{x}{\sin 100°} \qquad \frac{15}{\sin 70°} = \frac{y}{\sin 10°}$$

$$x \approx 15,72 \qquad y \approx 2,77$$

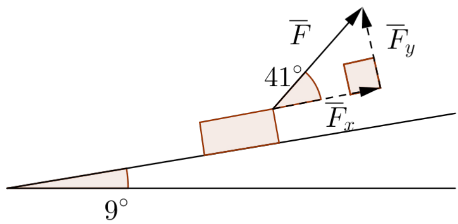
Siis vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituus on noin 15,72 ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituus noin 2,77.

Vastaus Vektorin $\overline{u}$ suuntaisen komponentin pituus on 15,72 ja vektorin $\overline{v}$ suuntaisen komponentin pituus 2,77.

**77**

Rinteen kaltevuuskulma ei vaikuta vetävän voiman $\overline{F}$ rinteen suuntaisen ja rinnettä vastaan kohtisuoran komponentin suuruuteen.

Voiman $\overline{F}$ suuruus $F = 190$ N.




Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 41° = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F\cos 41° = 190\text{ N} \cdot \cos 41° = 143{,}3... \text{ N} \approx 140 \text{ N}$$

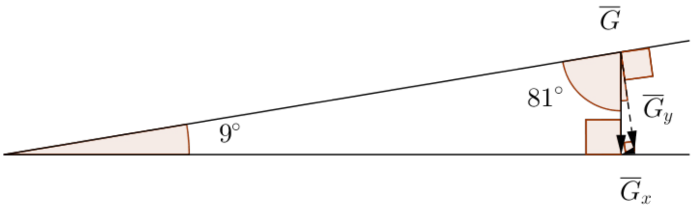
$$\sin 41° = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F\sin 41° = 190\text{ N} \cdot \sin 41° = 124{,}6... \text{ N} \approx 120 \text{ N}$$

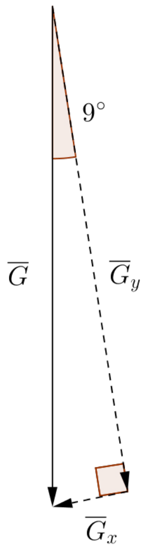
Pulkan ja lapsen yhteinen massa on $m = 32$ kg. Painon $\overline{G}$ suuruus saadaan, kun massa kerrotaan putoamiskiihtyvyydellä $g$:

$$G = mg = 32\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 313{,}92\ \text{N}.$$

Tilannetta havainnollistaa oheinen pelkistetty kaavakuva. Vasemmalle hahmottuvan kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan $180° - 90° - 9° = 81°$.




”Zoomataan” sisään kuvan oikeanpuoliseen suorakulmaiseen kolmioon ja lasketaan vektorin $\overline{G}$ komponenttien suuruudet sen avulla.




$$\sin 9° = \frac{G_x}{G}$$

$$G_x = G \sin 9° = 313{,}92 \text{ N} \cdot \sin 9° = 49{,}10... \text{ N} \approx 49 \text{ N}$$

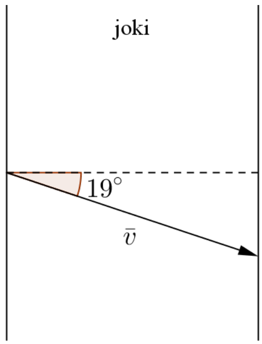
$$\cos 9° = \frac{G_y}{G}$$

$$G_y = G \cos 9° = 313{,}92 \text{ N} \cdot \cos 9° = 310{,}0... \text{ N} \approx 310 \text{ N}$$

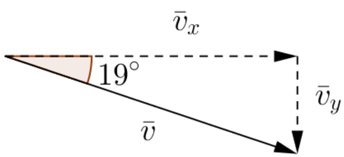
Vastaus $F_x \approx 140 \text{ N}$ ja $F_y \approx 120 \text{ N}$; $G_x \approx 49 \text{ N}$ ja $G_y \approx 310 \text{ N}$

**78**

Tilannetta kuvaa oheinen kaavakuva. Skootterin todellinen nopeus on $v = 42$ km/h.




a) Merkitään vektorin $\bar{v}$ virtaa vastaan kohtisuoran komponentin suuruutta $\bar{v}_x$ ja virran suuntaisen komponentin suuruutta $\bar{v}_y$. Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisen kolmion avulla.




$$\cos 19° = \frac{v_x}{v}$$

$$v_x = v\cos 19° = 42\ \text{km/h} \cdot \cos 19° = 39{,}71...\ \text{km/h} \approx 40\ \text{km/h}$$

$$\sin 19° = \frac{v_y}{v}$$

$$v_y = v\sin 19° = 42\ \text{km/h} \cdot \sin 19° = 13{,}67...\ \text{km/h} \approx 14\ \text{km/h}$$

b) Joen leveys on $s = 500$ m. Laskussa on käytettävä nopeuden virtaa vastaan kotisuoran komponentin suuruutta.

Aika = matka / nopeus, joten joen ylitys kestää

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{500\text{ m}}{39{,}71\text{ km/h}} = \frac{0{,}5\text{ km}}{39{,}71\text{ km/h}}$$

$$= 0{,}01259...\text{ h} = 45{,}32...\text{ s} \approx 45\text{ s}.$$

c) Merkitään kirjaimella $l$ matkaa, jonka skootteri kulkeutuu myötävirtaan joen ylityksen aikana. Laskussa on käytettävä nopeuden virran suuntaisen komponentin suuruutta.

$$l = v_y t = 13{,}67\text{ km/h} \cdot 0{,}01259\text{ h} = 0{,}1721...\text{ km} \approx 170\text{ m}$$

Siis joki kuljettaa skootteria myötävirtaan noin 170 m.

Vastaus
a) virtaa vastaan kohtisuora komponentti 40 km/h ja virran suuntainen komponentti 14 km/h
b) 45 s
c) 170 m