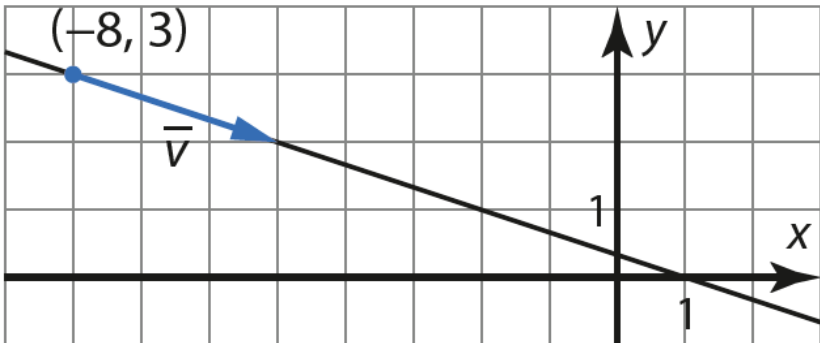


212



Suoran pisteitä ovat esimerkiksi $(-5, 2)$, $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(4, -1)$ ja $(-11, 4)$.

Vastaus esimerkiksi $(-5, 2)$, $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(4, -1)$ ja $(-11, 4)$

213

Merkitään pistettä $(5, -1, -2)$ kirjaimella B . Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{OB} , jonka lauseke on

$$\overline{OB} = 5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}.$$

Suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = t\overline{OB} = t(5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

Vastaus $\overline{OP} = t(5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k})$, missä t on reaaliluku.

- a) Muodostetaan vektorin \overline{OA} lauseke.

$$\overline{OA} = 6\bar{i} - \bar{j} + 0\bar{k} = 6\bar{i} - \bar{j}$$

Suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v} = 6\bar{i} - \bar{j} + t(-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}),$$

missä t on reaaliluku.

- b) Suoralla oleva piste saadaan määritettyä, kun suoran vektoriyhtälössä luvulle t valitaan jokin arvo. Voidaan valita esimerkiksi $t = 1$ ja $t = 2$.

Kun $t = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 6\bar{i} - \bar{j} + 1 \cdot (-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) \\ &= 6\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k} \\ &= 4\bar{i} + 3\bar{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(4, 0, 3)$.

Kun $t = 2$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 6\bar{i} - \bar{j} + 2 \cdot (-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) \\ &= 6\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k} \\ &= 2\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(2, 1, 6)$.

- Vastaus a) $\overline{OP} = 6\bar{i} - \bar{j} + t(-2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k})$, missä t on reaaliluku.
b) esimerkiksi $(4, 0, 3)$ ja $(2, 1, 6)$

- a) Suoran suuntavektoriksi \vec{v} voidaan valita vektori \overline{AB} .
Muodostetaan vektorin \overline{AB} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4-1)\vec{i} + (-11-(-7))\vec{j} + (14-9)\vec{k} \\ &= 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \quad (= \vec{v})\end{aligned}$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 1$, $y_0 = -7$ ja $z_0 = 9$ sekä $v_x = 3$, $v_y = -4$ ja $v_z = 5$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -7 - 4t \\ z = 9 + 5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

- b) Sijoitetaan pisteen $P(-5,0,-1)$ koordinaatit $x = -5$, $y = 0$ ja $z = -1$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t .

$$\begin{cases} -5 = 1 + 3t \\ 0 = -7 - 4t \\ -1 = 9 + 5t \end{cases} \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = -\frac{7}{4} \\ t = -2 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, piste $P(-5,0,-1)$ ei ole suoralla.

Sijoitetaan sitten pisteen $Q(31,-47,59)$ koordinaatit $x = 31$, $y = -47$ ja $z = 59$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t .

$$\begin{cases} 31 = 1 + 3t \\ -47 = -7 - 4t \\ 59 = 9 + 5t \end{cases} \quad \begin{cases} t = 10 \\ t = 10 \\ t = 10 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $Q(31,-47,59)$ on suoralla.

- Vastaus a) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -7 - 4t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku} \\ z = 9 + 5t \end{cases}$
- b) piste P ei ole suoralla, piste Q on

216

Määritetään ensin suoran parametriesitys. Esitys on muotoa

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 6$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 8$ sekä $v_x = 1$, $v_y = 3$ ja $v_z = -4$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 3t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku.} \\ z = 8 - 4t \end{cases}$$

Suoran ja yz -tason leikkauspisteen x -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(0, y, z)$. Ratkaistaan parametri t .

$$x = 6 + t$$

$$0 = 6 + t$$

$$t = -6$$

Lasketaan leikkauspisteen y - ja z -koordinaatit.

$$y = 3t = 3 \cdot (-6) = -18$$

$$z = 8 - 4t = 8 - 4 \cdot (-6) = 32$$

Leikkauspiste on $(0, -18, 32)$.

Vastaus $(0, -18, 32)$

Suoran suuntavektoriksi \vec{v} voidaan valita vektori \overline{AB} .
Muodostetaan vektorin \overline{AB} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5 - (-7))\vec{i} + (-8 - 13)\vec{j} + (9 - (-9))\vec{k} \\ &= 12\vec{i} - 21\vec{j} + 18\vec{k} \quad (= \vec{v})\end{aligned}$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = -7$, $y_0 = 13$ ja $z_0 = -9$ sekä $v_x = 12$, $v_y = -21$ ja $v_z = 18$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = -7 + 12t \\ y = 13 - 21t \\ z = -9 + 18t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan pisteen $P(1,-1,3)$ koordinaatit $x=1$, $y=-1$ ja $z=3$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t .

$$\begin{cases} 1 = -7 + 12t \\ -1 = 13 - 21t \\ 3 = -9 + 18t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $P(1,-1,3)$ on suoralla.

Vastaus on suoralla

Pisteen $A(2, -1, 0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\bar{u} = \bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteen $B(6, 12, 11)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6 + 2s \\ y = 12 - s \\ z = 11 + 5s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suoran leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2 + t = 6 + 2s \\ -1 + 7t = 12 - s \\ 3t = 11 + 5s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = 2$ ja $s = -1$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $t = 2$ pisteen A kautta kulkevan suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 + 2 = 4 \\ y = -1 + 7t = -1 + 14 = 13 \\ z = 3t = 6 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(4, 13, 6)$.

Vastaus $(4, 13, 6)$

Muodostetaan pisteiden $A(7, -5, 4)$ ja $B(9, -7, -2)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (9 - 7)\overline{i} + (-7 - (-5))\overline{j} + (-2 - 4)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} - 2\overline{j} - 6\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -5 - 2t \\ z = 4 - 6t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(0, 0, 15)$ ja $D(6, -3, 12)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (6 - 0)\overline{i} + (-3 - 0)\overline{j} + (12 - 15)\overline{k} \\ &= 6\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 6s \\ y = -3s \\ z = 15 - 3s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z) , niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 7 + 2t = 6s \\ -5 - 2t = -3s \\ 4 - 6t = 15 - 3s \end{cases}$$

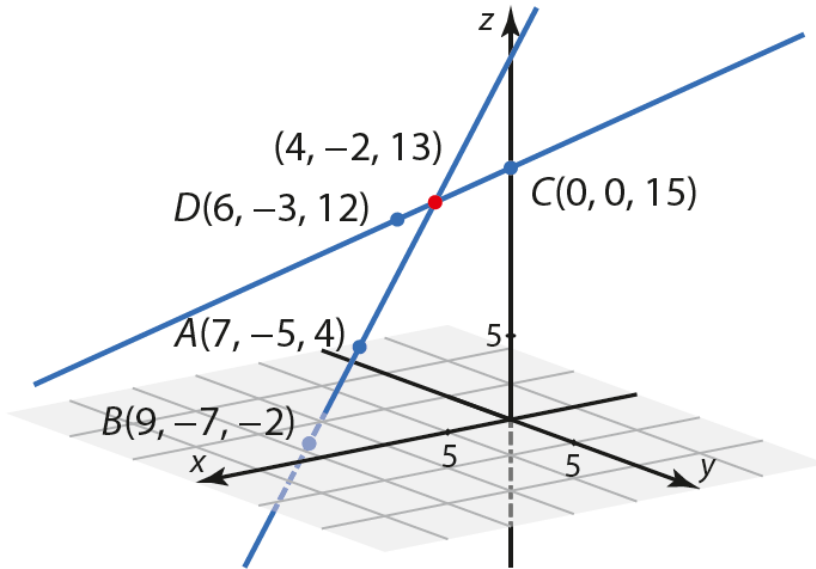
Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = -\frac{3}{2}$ ja $s = \frac{2}{3}$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suorat leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $s = \frac{2}{3}$ suoran CD parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 6s = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \\ y = -3s = -3 \cdot \frac{2}{3} = -2 \\ z = 15 - 3s = 15 - 2 = 13 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(4, -2, 13)$.

Tehtävän tarkistus piirtämällä geometriaohjelmalla:



Vastaus Suorat leikkaavat pisteessä $(4, -2, 13)$.

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \\ &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right) = 96,26\dots^\circ \approx 96^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on tylppä, kysytty suorien välinen kulma on sen vieruskulma

$$180^\circ - 96^\circ = 84^\circ.$$

Vastaus 84°

221

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (3 - (-5))\overline{i} + (1 - 1)\overline{j} + (4 - 10)\overline{k} \\ &= 8\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k} = 8\overline{i} - 6\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (3 - 0)\overline{i} + (1 - (-3))\overline{j} + (4 - 4)\overline{k} \\ &= 3\overline{i} + 4\overline{j} + 0\overline{k} = 3\overline{i} + 4\overline{j}\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{CD} &= (8\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 4\overline{j} + 0\overline{k}) \\ &= 8 \cdot 3 + 0 \cdot 4 - 6 \cdot 0 = 24\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| |\overline{CD}|} = \frac{24}{10 \cdot 5} = \frac{12}{25}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{25}\right) = 61,31\dots^\circ \approx 61^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on terävä, kysytty suorien välinen kulma on myös 61° .

Vastaus 61°

Suorat l ja m ovat sama suora, jos ne kulkevat saman pisteen kautta ja jos niillä on yhdensuuntaiset suuntavektorit.

Osoitetaan ensin, että suorat kulkevat saman pisteen kautta. Osoitetaan esimerkiksi, että suora l kulkee suoralla m sijaitsevan pisteen $B(-21, 7, 14)$ kautta.

Suoran l suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{OA} , jonka lauseke on $\overline{OA} = 15\overline{i} - 5\overline{j} - 10\overline{k}$. Suora kulkee origon kautta, joten sen parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = -5t \\ z = -10t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Tutkitaan, sijaitseeko piste $B(-21, 7, 14)$ suoralla l . Sijoitetaan pisteen $B(-21, 7, 14)$ koordinaatit $x = -21$, $y = 7$ ja $z = 14$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t .

$$\begin{cases} -21 = 15t \\ 7 = -5t \\ 14 = -10t \end{cases} \quad \begin{cases} t = -\frac{7}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \\ t = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $B(-21, 7, 14)$ on suoralla l . Siten molemmat suora kulkevat saman pisteen kautta.

Osoitetaan sitten, että suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

Suoran m suuntavektori on $\vec{v} = -9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Edellä todettiin, että suoran l suuntavektori on $\vec{OA} = 15\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}$.

Vektorit \vec{v} ja \vec{OA} ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r , että $\vec{v} = r\vec{OA}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\vec{v} = r\vec{OA}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\vec{v} = r\vec{OA}$$

$$-9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} = r(15\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k})$$

$$-9\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} = 15r\vec{i} - 5r\vec{j} - 10r\vec{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

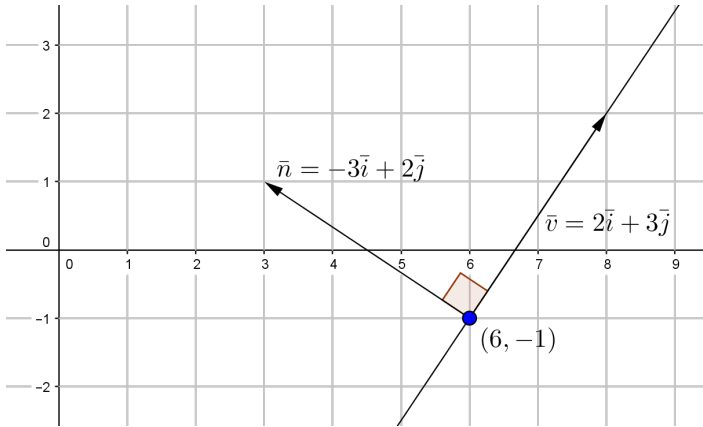
$$\begin{cases} -9 = 15r \\ 3 = -5r \\ 6 = -10r \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r .

$$\begin{cases} r = -\frac{3}{5} \\ r = -\frac{3}{5} \\ r = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $r = -\frac{3}{5}$, joten $\bar{v} = -\frac{3}{5}\overline{OA}$. Siten molempien suorien l ja m suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

On osoitettu, että molemmat suorat kulkevat saman pisteen kautta ja suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset. Suorat ovat siten sama suora. \square



- a) Normaalivektori \bar{n} on kohtisuorassa suoraa vastaan. Kuvan perusteella näyttää siltä, että suoran suuntavektoriksi voidaan valita esimerkiksi vektori $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$. Vahvistetaan havainto laskemalla vektorien $\bar{n} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$ ja \bar{v} pistetulo.

$$\begin{aligned}\bar{n} \cdot \bar{v} &= (-3\bar{i} + 2\bar{j}) \cdot (2\bar{i} + 3\bar{j}) \\ &= -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\bar{n} \cdot \bar{v} = 0$, vektorit \bar{n} ja \bar{v} ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten vektori $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ käy suoran suuntavektoriksi.

Suora kulkee pisteen $(6, -1)$ kautta ja sen suuntavektori on $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + 3t, \end{cases} \text{ missä } t \text{ on reaaliluku.}$$

b) Suoran ja x -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0)$. Ratkaistaan parametri t .

$$y = -1 + 3t$$

$$0 = -1 + 3t$$

$$t = \frac{1}{3}$$

Lasketaan leikkauspisteen x -koordinaatti.

$$x = 6 + 2t = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

Suora leikkaa x -akselin pisteessä $(\frac{20}{3}, 0)$.

Suoran ja y -akselin leikkauspisteen x -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(0, y)$. Ratkaistaan parametri t .

$$x = 6 + 2t$$

$$0 = 6 + 2t$$

$$t = -3$$

Lasketaan leikkauspisteen y -koordinaatti.

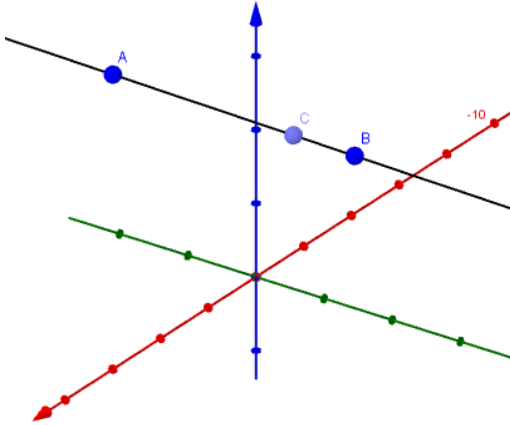
$$y = -1 + 3t = -1 + 3 \cdot (-3) = -10$$

Suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -10)$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + 3t, \end{cases}$ missä t on reaaliluku

b) pisteissä $(\frac{20}{3}, 0)$ ja $(0, -10)$

- a) Sijoitetaan koordinaatistoon pisteet $A(6,0,8)$ ja $B(3,5,6)$ ja piirretään niiden kautta kulkeva suora. Lisätään suoralle AB kolmas piste (kuvassa C), jota liikutellaan suoralla ja jonka koordinaattien arvoja luetaan.



Suoran ja yz -tason leikkauspisteessä x -koordinaatti on nolla. Liikutetaan piste C sellaiseen kohtaan, jossa sen x -koordinaatti on nolla. Piste on $(0,10,4)$.

- b) Suoran ja xy -tason leikkauspisteessä z -koordinaatti on nolla. Liikutetaan piste C sellaiseen kohtaan, jossa sen z -koordinaatti on nolla. Piste on $(-6,20,0)$.

Vastaus a) $(0,10,4)$
 b) $(-6,20,0)$

- a) Muodostetaan vektorin \overline{OA} lauseke.

$$\overline{OA} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = 3\overline{i} + 8\overline{j}$$

Lentosuoran vektoryhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + t(-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku. Fysikaalisesti tulkittuna luku t on aika sekunneissa, joka on kulunut raketin laukaisusta.

- b) Raketti räjähtää, kun $t = 3$. Määritetään kysytty piste lentosuoran vektoryhtälön avulla.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 3\overline{i} + 8\overline{j} + 3 \cdot (-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k}) \\ &= 3\overline{i} + 8\overline{j} - 6\overline{i} - 15\overline{j} + 117\overline{k} \\ &= -3\overline{i} - 7\overline{j} + 117\overline{k}\end{aligned}$$

Raketti räjähtää pisteessä $(-3, -7, 117)$. Raketti on tuolloin 117 metrin korkeudella (z -koordinaatin arvo).

- Vastaus a) $\overline{OP} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + t(-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k})$, missä t on reaaliluku.
b) 117 metrin korkeudella pisteessä $(-3, -7, 117)$

a) Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x t \\ y = y_0 + u_y t \\ z = z_0 + u_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ ja $z_0 = 0$ sekä $u_x = 1$, $u_y = 7$ ja $u_z = 3$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

b) Suoran ja xz -tason leikkauspisteen y -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0, z)$. Ratkaistaan parametri t .

$$y = -1 + 7t$$

$$0 = -1 + 7t$$

$$-7t = -1$$

$$t = \frac{1}{7}$$

Lasketaan leikkauspisteen x - ja z -koordinaatit.

$$x = 2 + t = 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$z = 3t = \frac{3}{7}$$

Leikkauspiste on $(\frac{15}{7}, 0, \frac{3}{7})$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku} \\ z = 3t \end{cases}$

b) $(\frac{15}{7}, 0, \frac{3}{7})$

Suoran suuntavektoriksi \bar{v} voidaan valita vektori \overline{AB} .
Muodostetaan vektorin \overline{AB} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (0-3)\bar{i} + (4-3)\bar{j} + (5-0)\bar{k} \\ &= -3\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k} \quad (= \bar{v})\end{aligned}$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 3$, $y_0 = 3$ ja $z_0 = 0$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 1$ ja $v_z = 5$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 + t \\ z = 5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan pisteen $C(9,1,-9)$ koordinaatit $x=9$, $y=1$ ja $z=-9$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t .

$$\begin{cases} 9 = 3 - 3t \\ 1 = 3 + t \\ -9 = 5t \end{cases} \quad \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, piste $C(9,1,-9)$ ei ole suoralla.

Vastaus ei ole suoralla

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

Suoran $\overline{OP} = 2\bar{i} - \bar{k} + t(\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k})$ lausekkeesta voidaan suoraan lukea, että suoran suuntavektori on $\bar{u} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Vastaavasti suoran $\begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = 6s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat

luettavissa parametrin s kertoimista, joten suuntavektoriksi saadaan $\bar{v} = -2\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}$.

Vektorit \bar{u} ja \bar{v} ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r , että $\bar{u} = r\bar{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\bar{u} = r\bar{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu. Voitaisiin muodostaa yhtälö ja ratkaista saatava yhtälöryhmä, mutta voidaan myös huomata suoraan, että $\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k} = -\frac{1}{2} \cdot (-2\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k})$ eli

$\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{v}$. Siten suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset, joten myös suorat ovat yhdensuuntaiset. \square

Muodostetaan pisteiden $A(2, -1, 8)$ ja $B(5, -1, -7)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-2)\overline{i} + (-1-(-1))\overline{j} + (-7-8)\overline{k} \\ &= 3\overline{i} + 0\overline{j} - 15\overline{k} = 3\overline{i} - 15\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 8 - 15t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(0, -13, 3)$ ja $D(2, -5, 3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (2-0)\overline{i} + (-5-(-13))\overline{j} + (3-3)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = 2\overline{i} + 8\overline{j}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = -13 + 8s \\ z = 3, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suoran leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2 + 3t = 2s \\ -1 = -13 + 8s \\ 8 - 15t = 3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = \frac{1}{3}$ ja $s = \frac{3}{2}$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $t = \frac{1}{3}$ suoran AB parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + 3t = 2 + 1 = 3 \\ y = -1 \\ z = 8 - 15t = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(3, -1, 3)$.

Vastaus $(3, -1, 3)$

Pisteestä $A(-1,0,4)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku.} \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Pisteestä $B(3,2,-6)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 2 - s, \text{ missä } s \text{ on reaaliluku.} \\ z = -6 + 4s \end{cases}$$

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z) , niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} -1 + t = 3 - 2s \\ 3t = 2 - s \\ 4 - t = -6 + 4s \end{cases}$$

Osoittautuu, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Siten lasersäteitä vastaavat suorat eivät leikkaa toisiaan.

Vastaus eivät leikkaa

231

Pisteen P paikkavektori on suoran vektoriyhtälö, joten pisteet P piirtävät suoran, kun parametri t käy läpi kaikki reaalityöt.

Suoran $\overline{OP} = (2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}) + t(-\bar{i} + 10\bar{j} + 3\bar{k})$ parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -4 + 10t \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaalityö.

Muodostetaan pisteiden $A(-2, -8, 2)$ ja $B(4, 12, 4)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (4 - (-2))\bar{i} + (12 - (-8))\bar{j} + (4 - 2)\bar{k} \\ &= 6\bar{i} + 20\bar{j} + 2\bar{k} \end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = -2 + 6s \\ y = -8 + 20s \\ z = 2 + 2s, \end{cases}$$

missä s on reaalityö.

Piste P on suoralla AB , jos suorat leikkaavat toisensa. Tutkitaan, onko suorilla jollakin parametrin t arvolla leikkauspiste (x, y, z) , jolloin pisteen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2 - t = -2 + 6s \\ -4 + 10t = -8 + 20s \\ 1 + 3t = 2 + 2s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = \frac{7}{10}$ ja $s = \frac{11}{20}$.

Siten suorat leikkaavat toisensa (ja piste P on suoralla AB), kun $t = \frac{7}{10}$.

Vastaus $t = \frac{7}{10}$

232

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-3 - (-2))\overline{i} + (0 - (-1))\overline{j} + (4 - 5)\overline{k} \\ &= -\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (1 - (-3))\overline{i} + (-4 - 0)\overline{j} + (8 - 5)\overline{k} \\ &= 4\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{41}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{CD} &= (-\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}) \cdot (4\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= -1 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 = -11\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| |\overline{CD}|} = \frac{-11}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{41}}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \cos^{-1}\left(-\frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{41}}\right) = 172,67\dots^\circ \approx 173^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on tylppä, kysytty suorien välinen kulma on sen vieruskulma $180^\circ - 173^\circ = 7^\circ$.

Vastaus 7°

Suora AB leikkaa suoran CD kohtisuorasti, jos suorat leikkaavat toisensa ja jos niiden suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Osoitetaan ensin, että suorien suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-3)\overline{i} + (4-5)\overline{j} + (1-(-2))\overline{k} \\ &= 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (9-9)\overline{i} + (5-(-1))\overline{j} + (8-6)\overline{k} \\ &= 0\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k} = 6\overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{CD} &= (2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (0\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}) \\ &= 2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Osoitetaan sitten, että suorat leikkaavat toisensa.

Pisteiden $A(3, 5, -2)$ ja $B(5, 4, 1)$ kautta kulkevan suoran parametriesitys on (suuntavektori \overline{AB} laskettiin jo edellä)

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteiden $C(9, -1, 6)$ ja $D(9, 5, 8)$ kautta kulkevan suoran parametriesitys on (suuntavektori \overline{CD} laskettiin jo edellä)

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -1 + 6s \\ z = 6 + 2s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z) , niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 3 + 2t = 9 \\ 5 - t = -1 + 6s \\ -2 + 3t = 6 + 2s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = 3$ ja $s = \frac{1}{2}$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suorat leikkaavat toisensa.

On osoitettu, että suorien suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja suorat leikkaavat toisensa. Siten suora AB leikkaa suoran CD kohtisuorasti. \square

234

Pisteestä $A(-2,12,0)$ lähtevän lentosuoran suuntavektori on $\bar{v} = -2\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$, joten lentosuoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 12 - 5t \\ z = \quad \quad t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Lentokone on x -akselin yläpuolella silloin, kun lentosuora leikkaa xz -tason. Suoran ja xz -tason leikkauspisteen y -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0, z)$. Ratkaistaan parametri t .

$$y = 12 - 5t$$

$$0 = 12 - 5t$$

$$t = \frac{12}{5}$$

Lasketaan leikkauspisteen x - ja z -koordinaatit.

$$x = -2 - 2t = -2 - \frac{24}{5} = -\frac{34}{5} = -6,8$$

$$z = t = \frac{12}{5} = 2,4$$

Siten lentokone ylittää rautatien pisteessä $(-6,8; 0; 2,4)$. Lentokone on tällöin 2,4 kilometrin korkeudella (z -koordinaatin arvo).

Vastaus 2,4 km korkeudella pisteessä $(-6,8; 0; 2,4)$

- a) Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AP} .
Muodostetaan vektorin \overline{AP} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= (x-1)\overline{i} + (y-(-1))\overline{j} \\ &= (x-1)\overline{i} + (y+1)\overline{j}\end{aligned}$$

Normaalivektori $\overline{n} = -3\overline{i} + 5\overline{j}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan. Siten vektorien \overline{n} ja \overline{AP} pistetulon täytyy olla nolla. Ehdosta saadaan yhtälö pisteen $P(x, y)$ koordinaateille x ja y .

$$\overline{n} \cdot \overline{AP} = 0$$

$$(-3\overline{i} + 5\overline{j}) \cdot ((x-1)\overline{i} + (y+1)\overline{j}) = 0$$

$$-3 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y+1) = 0$$

$$-3x + 3 + 5y + 5 = 0$$

$$-3x + 5y + 8 = 0$$

- b) Suoran ja x -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti on nolla. Ratkaistaan leikkauspisteen x -koordinaatti a-kohdassa johdetun yhtälön avulla.

$$-3x + 5y + 8 = 0$$

$$-3x + 0 + 8 = 0$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Suora leikkaa x -akselin pisteessä $(\frac{8}{3}, 0)$.

Suoran ja y -akselin leikkauspisteen x -koordinaatti on nolla. Ratkaistaan leikkauspisteen y -koordinaatti a-kohdassa johdetun yhtälön avulla.

$$-3x + 5y + 8 = 0$$

$$0 + 5y + 8 = 0$$

$$y = -\frac{8}{5}$$

Suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -\frac{8}{5})$.

Vastaus a) $-3x + 5y + 8 = 0$

b) $(\frac{8}{3}, 0)$ ja $(0, -\frac{8}{5})$

236

On määritettävä jokin vektori $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{b} = \bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ vastaan. Näin on täsmälleen silloin, kun molemmat pistetulot $\bar{a} \cdot \bar{c}$ ja $\bar{b} \cdot \bar{c}$ ovat nollia.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvät kaksi yhtälöä eli yhtälöpari.

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 0$$

$$(3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) \cdot (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = 0$$

$$3x - y + z = 0$$

$$\bar{b} \cdot \bar{c} = 0$$

$$(\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}) \cdot (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = 0$$

$$x + 5y + z = 0$$

Päädettiin siis yhtälöpariin

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

Poistetaan saadusta yhtälöparista muuttuja z ja ratkaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 & | \cdot (-1) \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$-2x + 6y = 0$$
$$y = \frac{1}{3}x$$

Sijoitetaan $y = \frac{1}{3}x$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja z muuttujan x avulla.

$$3x - y + z = 0$$
$$3x - \frac{1}{3}x + z = 0$$
$$z = -\frac{8}{3}x$$

On siis saatu $y = \frac{1}{3}x$ ja $z = -\frac{8}{3}x$. Jos valitaan esimerkiksi $x = -3$, saadaan $y = -1$ ja $z = 8$, joten vektoriksi \bar{c} saadaan $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = -3\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}$. Siis vihreä lasersäde lähetetään suuntaan $-3\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}$.

Vastaus suuntaan $-3\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}$

HUOM 1. Kannattaa vielä tarkistaa suoralla laskulla, että yhtälöt $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ja $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ toteutuvat, kun $\vec{c} = -3\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.

HUOM 2. Jos muuttujan x arvoksi olisi valittu positiivinen luku, muuttuja z olisi ollut negatiivinen. Tällöin vektorin $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ z -akselin suuntainen komponentti osoittaisi alaspäin eli vihreä lasersäde ammuttaisiin kohti maata, mikä tuskin on järkevää. Siksi muuttujan x arvoksi on valittava negatiivinen luku.

Pisteen $A(20, 0, 8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\bar{u} = -4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 20 - 4t \\ y = 3t \\ z = 8 + 2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteen $B(-4, 32, 0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\bar{v} = -6\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -4 - 6s \\ y = 32 + s \\ z = 7s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Tutkitaan ensin, leikkaavatko suorat (lasersäteet) toisensa.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z) , niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 20 - 4t = -4 - 6s \\ 3t = 32 + s \\ 8 + 2t = 7s \end{cases}$$

Osoittautuu, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten suorat eivät leikkaa toisiaan.

Määritetään sitten suorien (lasersäteiden) risteämiskohta, kun säteitä katsotaan alhaalta. Risteämiskohdassa suorien x - ja y -koordinaatit ovat yhtä suuret, joten kyseisen kohdan (x, y) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöpari (edellisen yhtälöryhmän ensimmäinen ja toinen yhtälö) ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 20 - 4t = -4 - 6s \\ 3t = 32 + s \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $t = 12$ ja $s = 4$.

Selvitetään lopuksi, kumpi risteävistä suorista (lasersäteistä) on ylempänä. Lasketaan suorien z -koordinaatti sijoittamalla $t = 12$ pisteen A kautta kulkevan suoran parametriesitykseen ja $s = 4$ pisteen B kautta kulkevan suoran parametriesitykseen.

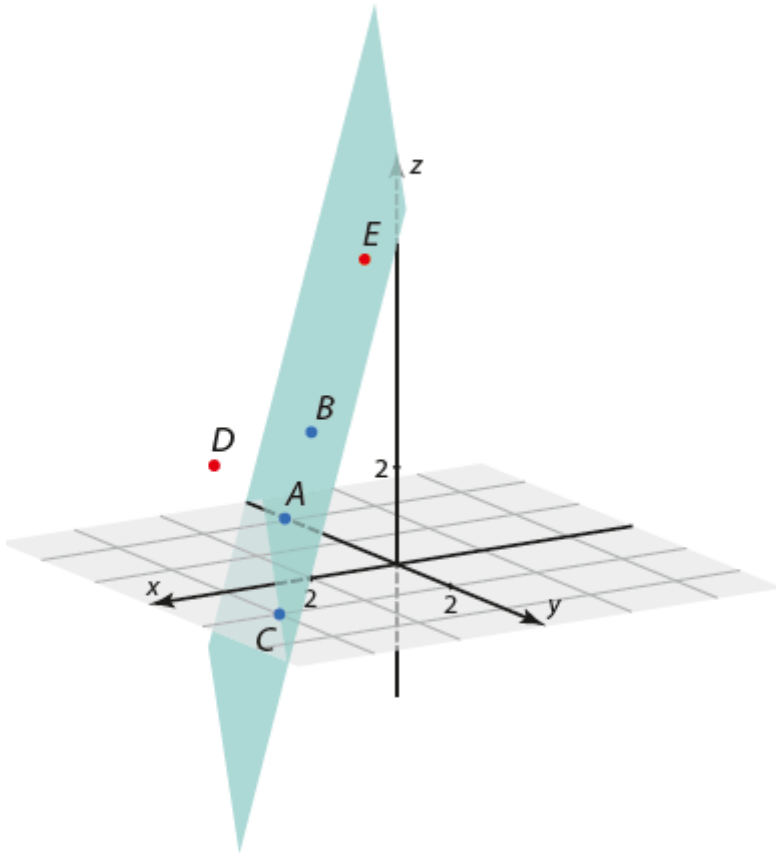
$$z = 8 + 2t = 8 + 2 \cdot 12 = 32$$

$$z = 7s = 7 \cdot 4 = 28$$

Siis pisteen A kautta kulkeva säde on $32 - 28 = 4$ metriä ylempänä.

Vastaus Säteet eivät leikkaa. Punainen lasersäde on 4 metriä ylempänä.

238



- a) Kuvan perusteella piste $D(3, -2, 2)$ ei voi olla tasossa.
b) Kuvan perusteella piste $E(2, 2, 7)$ voi olla tasossa.

Vastaus a) ei voi
b) voi

239

- a) Pisteeseen $A(2, -1, 3)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$. Pisteeseen A kautta kulkevan tason suuntavektorit ovat $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ ja $\bar{v} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$. Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + s(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + t(4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}),$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

- b) Voidaan valita esimerkiksi $s = 1$ ja $t = 0$ sekä $s = 0$ ja $t = 1$.

Kun $s = 1$ ja $t = 0$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + 1 \cdot (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 0 \cdot (4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \\ &= 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + \bar{i} + \bar{j} - \bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 2\bar{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(3, 0, 2)$.

Kun $s = 0$ ja $t = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + 0 \cdot (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 1 \cdot (4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \\ &= 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + 4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} \\ &= 6\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(6, -3, 4)$.

- Vastaus a) $\overline{OP} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + s(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + t(4\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$,
missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja
b) esimerkiksi $(3, 0, 2)$ ja $(6, -3, 4)$

- a) Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} . Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-5 - (-3))\overline{i} + (2 - (-1))\overline{j} + (1 - 2)\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (-2 - (-3))\overline{i} + (3 - (-1))\overline{j} + (-4 - 2)\overline{k} \\ &= \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}\end{aligned}$$

- b) Pisteeseen $A(-3, -1, 2)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$. Tason vektoriyhhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Vastaus a) $\overline{AB} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{AC} = \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$

b) $\overline{OP} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja

a) Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 1$ sekä $u_x = 1$, $u_y = -2$ ja $u_z = 1$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 1$ ja $v_z = -2$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = -2s + t \\ z = 1 + s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

- b) Sijoitetaan pisteen $P(11, -8, 8)$ koordinaatit $x = 11$, $y = -8$ ja $z = 8$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 11 = 2 + s - 3t \\ -8 = -2s + t \\ 8 = 1 + s - 2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s = 3$ ja $t = -2$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $P(11, -8, 8)$ on tasossa. \square

Vastaus a) $\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = -2s + t, \text{ missä } s \text{ ja } t \text{ ovat reaalilukuja} \\ z = 1 + s - 2t \end{cases}$

- a) Tason suuntavektoreiksi \bar{u} ja \bar{v} voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} . Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4-1)\bar{i} + (3-0)\bar{j} + (0-4)\bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k} \quad (= \bar{u})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (-1-1)\bar{i} + (-2-0)\bar{j} + (3-4)\bar{k} \\ &= -2\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} \quad (= \bar{v})\end{aligned}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt esimerkiksi $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 4$ sekä $u_x = 3$, $u_y = 3$ ja $u_z = -4$ sekä $v_x = -2$, $v_y = -2$ ja $v_z = -1$.

Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 1 + 3s - 2t \\ y = 3s - 2t \\ z = 4 - 4s - t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Sijoitetaan pisteen $D(4, 3, \frac{7}{4})$ koordinaatit $x = 4$, $y = 3$ ja

$z = \frac{7}{4}$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko

yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 4 = 1 + 3s - 2t \\ 3 = 3s - 2t \\ \frac{7}{4} = 4 - 4s - t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s = \frac{15}{22}$ ja $t = -\frac{21}{44}$. Koska

yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $D(4, 3, \frac{7}{4})$ on tasossa.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 1 + 3s - 2t \\ y = 3s - 2t, \text{ missä } s \text{ ja } t \text{ ovat reaalilukuja} \\ z = 4 - 4s - t \end{cases}$
b) on

- a) Merkitään pistettä $(4, 0, -2)$ kirjaimella A . Parametriesitystä varten tarvitaan pisteen A lisäksi kaksi muuta tason pistettä B ja C . Määritetään annetulta suoralta kaksi pistettä sijoittamalla parametrille r kaksi arvoa, esimerkiksi arvot 0 ja 1.

Sijoitetaan $r = 0$.

$$\begin{cases} x = 1 - 4r = 1 - 4 \cdot 0 = 1 \\ y = -1 - 3r = -1 - 3 \cdot 0 = -1 \\ z = 1 - r = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

Saadaan piste $B(1, -1, 1)$.

Sijoitetaan $r = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 - 4r = 1 - 4 \cdot 1 = -3 \\ y = -1 - 3r = -1 - 3 \cdot 1 = -4 \\ z = 1 - r = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $C(-3, -4, 0)$.

Muodostetaan tasolle kaksi suuntavektoria.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (1 - 4)\overline{i} + (-1 - 0)\overline{j} + (1 - (-2))\overline{k} \\ &= -3\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= (-3 - 4)\overline{i} + (-4 - 0)\overline{j} + (0 - (-2))\overline{k} \\ &= -7\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k} \end{aligned}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 4 - 3s - 7t \\ y = -s - 4t \\ z = -2 + 3s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

- b) Tason ja z -akselin leikkauspiste on muotoa $(0, 0, z)$.
Määritetään parametrien s ja t arvot sijoittamalla parametriesityksen kahteen ensimmäiseen yhtälöön $x = 0$ ja $y = 0$ ja ratkaisemalla yhtälöpari laskimella.

$$\begin{cases} 0 = 4 - 3s - 7t \\ 0 = -s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{16}{5}$ ja $t = -\frac{4}{5}$.

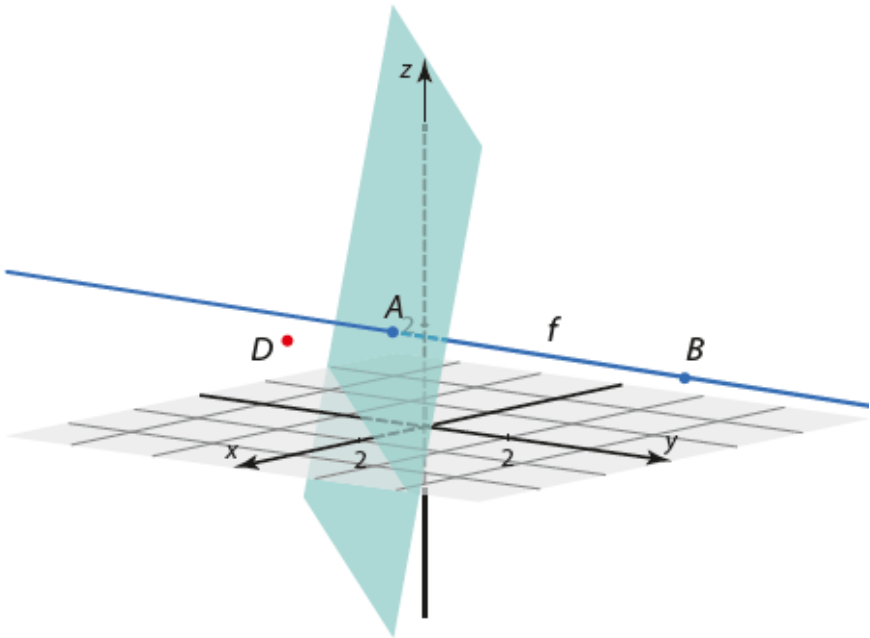
Lasketaan leikkauspisteen z -koordinaatti parametriesityksen viimeisen yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} z &= -2 + 3s + 2t \\ &= -2 + 3 \cdot \frac{16}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0, 0, 6)$.

Vastaus a)
$$\begin{cases} x = 4 - 3s - 7t \\ y = -s - 4t, \text{ missä } s \text{ ja } t \text{ ovat reaalilukuja} \\ z = -2 + 3s + 2t \end{cases}$$

b) $(0, 0, 6)$



Kuvan perusteella piste $D(3,-1,2)$ ei ole tasossa.

Vastaus ei ole

a) Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

missä nyt pisteen koordinaatit $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ ja $z_0 = -1$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 5$, $b = -2$ ja $c = 3$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$5 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - (-1)) = 0$$

$$5x - 10 - 2y + 2 + 3z + 3 = 0$$

$$5x - 2y + 3z - 5 = 0$$

b) Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $P(2, 4, 1)$ koordinaatit tason yhtälön.

$$5x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 5 = 0$$

$$0 = 0$$

tosi

Pisteen P koordinaatit toteuttavat tason yhtälön, joten piste on tasossa.

Vastaus a) $5x - 2y + 3z - 5 = 0$

b) on

246

Muodostetaan vektorin \overline{AB} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-2 - 5)\overline{i} + (5 - 0)\overline{j} + (-1 - (-4))\overline{k} \\ &= -7\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

Koska taso on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, vektori \overline{AB} voidaan valita tason normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

missä nyt pisteen P koordinaatit $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ ja $z_0 = 5$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = -7$, $b = 5$ ja $c = 3$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned}a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ -7 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - (-2)) + 3 \cdot (z - 5) &= 0 \\ -7x + 7 + 5y + 10 + 3z - 15 &= 0 \\ -7x + 5y + 3z + 2 &= 0\end{aligned}$$

Vastaus $-7x + 5y + 3z + 2 = 0$

HUOM. Yhtälö on matemaattisesti identtinen kirjassa vastauksena annetun yhtälön $7x - 5y - 3z - 2 = 0$ kanssa. Jälkimmäiseen muotoon päädyttäisiin suoraan, jos normaalivektoriksi olisi valittu $-\overline{AB} = \overline{BA}$.

247

Suoran ja tason leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran parametriesityksen että tason yhtälön. Sijoitetaan suoran parametriesityksestä koordinaattien lausekkeet $x = 5 + 3t$,

$$y = -\frac{1}{2} - 2t \text{ ja } z = -\frac{7}{2} - 3t \text{ tason yhtälöön } 7x + y - 2z = 4.$$

$$7 \cdot (5 + 3t) + \left(-\frac{1}{2} - 2t\right) - 2 \cdot \left(-\frac{7}{2} - 3t\right) = 4$$

$$25t + \frac{83}{2} = 4$$

$$t = -\frac{3}{2}$$

Koska parametrille t saadaan ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit sijoittamalla arvo

$t = -\frac{3}{2}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 5 + 3t = 5 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} - 2t = -\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{7}{2} - 3t = -\frac{7}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$.

Vastaus pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$

Suoran ja tason leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 13 - 2t = 1 + 3r + 2s \\ -21 + 3t = 5r - s \\ 14 - t = 2 + 8r + 14s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = -\frac{6}{13}$, $s = \frac{9}{13}$ ja $t = 6$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo $t = 6$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} 13 - 2t = 13 - 2 \cdot 6 = 1 \\ -21 + 3t = -21 + 3 \cdot 6 = -3 \\ 14 - t = 14 - 6 = 8 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(1, -3, 8)$.

Vastaus $(1, -3, 8)$

$$\text{a) Suoran } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -8 - 3t \\ z = 11 + 7t \end{cases} \text{ suuntavektorin komponentit ovat}$$

luettavissa parametrin t kertoimista, joten (erääksi) suuntavektoriksi saadaan $\bar{v} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}$.

xy -tason normaalivektoriksi voidaan valita $\bar{n} = \bar{k}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{62}$$

$$|\bar{n}| = 1$$

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \bar{n} &= (2\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}) \cdot \bar{k} \\ &= 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$

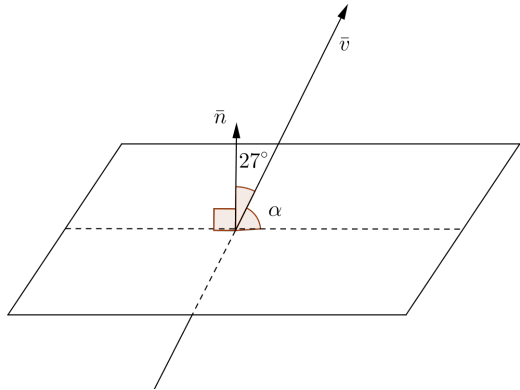
Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\bar{v}, \bar{n}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{v}| |\bar{n}|} = \frac{7}{\sqrt{62} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\bar{v}, \bar{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{62}}\right) = 27,25\dots^\circ \approx 27^\circ$$

Kuvan perusteella
suora leikkaa tason
kulmassa
 $\alpha = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

(Kuva
havainnollistaa
kulmia, mutta
vektorien
pituuksien suhteet
ovat kuvassa
väärin.)



b) yz -tason normaalivektoriksi voidaan valita $\bar{n} = \bar{i}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo ($|\bar{v}|$ laskettiin jo
a-kohdassa).

$$|\bar{n}| = 1, \quad \bar{v} \cdot \bar{n} = (2\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}) \cdot \bar{i} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

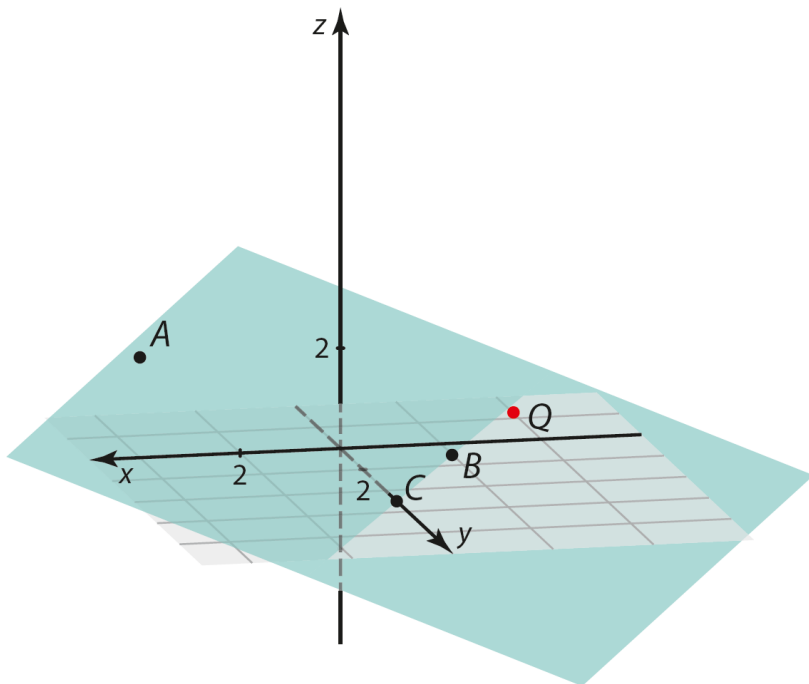
$$\cos(\bar{v}, \bar{n}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{v}| |\bar{n}|} = \frac{2}{\sqrt{62} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\bar{v}, \bar{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{62}}\right) = 75,28\dots^\circ \approx 75^\circ$$

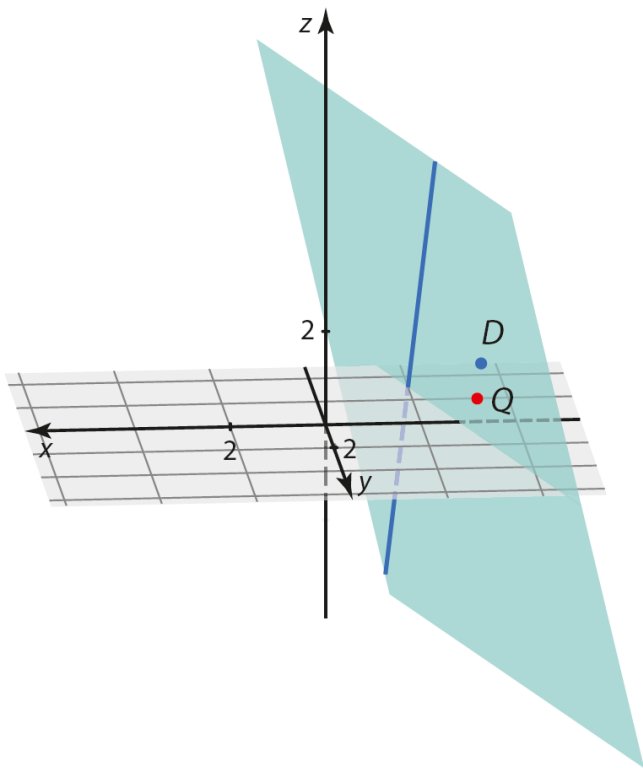
a-kohdan tapaan voidaan päätellä, että suora leikkaa tason
kulmassa $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Vastaus a) 63° b) 15°

a) Kuvan perusteella piste $Q(-3,2,1)$ ei voi olla tasossa.



b) Kuvan perusteella piste $Q(-3,2,1)$ voi olla tasossa.



Vastaus a) ei voi
b) voi

- a) Määritetään ensin tason suuntavektorit. Suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-2)\overline{i} + (-1-(-3))\overline{j} + (1-6)\overline{k} \\ &= 0\overline{i} + 2\overline{j} - 5\overline{k} = 2\overline{j} - 5\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (3-2)\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} + (0-6)\overline{k} \\ &= \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}\end{aligned}$$

Pisteen $A(2, -3, 6)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$.

Tason vektoriyhälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + s(2\overline{j} - 5\overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

- b) Voidaan valita esimerkiksi $s=1$ ja $t=1$ sekä $s=1$ ja $t=-1$.

Kun $s=1$ ja $t=1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 1 \cdot (2\overline{j} - 5\overline{k}) + 1 \cdot (\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}) \\ &= 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 2\overline{j} - 5\overline{k} + \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k} \\ &= 3\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(3, 3, -5)$.

Kun $s = 1$ ja $t = -1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k} + 1 \cdot (2\bar{j} - 5\bar{k}) - 1 \cdot (\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}) \\ &= 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k} + 2\bar{j} - 5\bar{k} - \bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k} \\ &= \bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(1, -5, 7)$.

- Vastaus a) $\overline{OP} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k} + s(2\bar{j} - 5\bar{k}) + t(\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja
b) esimerkiksi $(3, 3, -5)$ ja $(1, -5, 7)$

- a) Pisteeseen $A(2,1,-1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Pisteeseen A kautta kulkevan tason suuntavektorit ovat $\bar{u} = \bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$. Tason vektoryhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k} + s(\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}) + t(-3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

- b) Määritetään ensin tason parametriesitys. Esitys on muotoa

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ ja $z_0 = -1$ sekä $u_x = 1$, $u_y = -5$ ja $u_z = 3$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 4$ ja $v_z = -2$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = 1 - 5s + 4t \\ z = -1 + 3s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja. (Parametriesitys voidaan myös lukea suoraan vektoryhtälöstä.)

Sijoitetaan pisteen $Q(1, -5, 3)$ koordinaatit $x = 1$, $y = -5$ ja $z = 3$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 1 = 2 + s - 3t \\ -5 = 1 - 5s + 4t \\ 3 = -1 + 3s - 2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s = 2$ ja $t = 1$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $Q(1, -5, 3)$ on tasossa. \square

Vastaus a) $\overline{OP} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} + s(\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}) + t(-3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja

- a) Tason suuntavektoreiksi \bar{u} ja \bar{v} voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} . Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (8-6)\bar{i} + (-1-(-2))\bar{j} + (-3-1)\bar{k} \\ &= 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k} \quad (= \bar{u})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (2-6)\bar{i} + (1-(-2))\bar{j} + (2-1)\bar{k} \\ &= -4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k} \quad (= \bar{v})\end{aligned}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt esimerkiksi $x_0 = 6$, $y_0 = -2$ ja $z_0 = 1$ sekä $u_x = 2$, $u_y = 1$ ja $u_z = -4$ sekä $v_x = -4$, $v_y = 3$ ja $v_z = 1$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 6 + 2s - 4t \\ y = -2 + s + 3t \\ z = 1 - 4s + t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

- b) Tason ja z -akselin leikkauspiste on muotoa $(0,0,z)$.
Määritetään parametrien s ja t arvot sijoittamalla parametriesityksen kahteen ensimmäiseen yhtälöön $x = 0$ ja $y = 0$ ja ratkaisemalla yhtälöpari laskimella.

$$\begin{cases} 0 = 6 + 2s - 4t \\ 0 = -2 + s + 3t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -1$ ja $t = 1$.

Lasketaan leikkauspisteen z -koordinaatti parametriesityksen viimeisen yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} z &= 1 - 4s + t \\ &= 1 - 4 \cdot (-1) + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0,0,6)$.

Vastaus

a) $\begin{cases} x = 6 + 2s - 4t \\ y = -2 + s + 3t \\ z = 1 - 4s + t \end{cases}$, missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja

b) pisteessä $(0,0,6)$

- a) Parametriesitystä varten tarvitaan pisteen $A(5, 2, -1)$ lisäksi kaksi muuta tason pistettä B ja C . Määritetään annetulta suoralta kaksi pistettä sijoittamalla parametrille t kaksi arvoa, esimerkiksi arvot 0 ja 1.

Sijoitetaan $t = 0$.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 0 = 2 \\ y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ z = -1 + t = -1 + 0 = -1 \end{cases}$$

Saadaan piste $B(2, 1, -1)$.

Sijoitetaan $t = 1$.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\ z = -1 + t = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $C(1, 3, 0)$.

Muodostetaan tasolle kaksi suuntavektoria.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (2 - 5)\bar{i} + (1 - 2)\bar{j} + (-1 - (-1))\bar{k} \\ &= -3\bar{i} - \bar{j} + 0\bar{k} = -3\bar{i} - \bar{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= (1 - 5)\bar{i} + (3 - 2)\bar{j} + (0 - (-1))\bar{k} \\ &= -4\bar{i} + \bar{j} + \bar{k} \end{aligned}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 5 - 3r - 4s \\ y = 2 - r + s \\ z = -1 + s, \end{cases}$$

missä r ja s ovat reaalityyppisiä lukuja.

- b) Sijoitetaan pisteen $P(-9, 2, 1)$ koordinaatit $x = -9$, $y = 2$ ja $z = 1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} -9 = 5 - 3r - 4s \\ 2 = 2 - r + s \\ 1 = -1 + s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 2$ ja $s = 2$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $P(-9, 2, 1)$ on tasossa.

- c) Sijoitetaan pisteen $Q(2, 4, -1)$ koordinaatit $x = 2$, $y = 4$ ja $z = -1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 2 = 5 - 3r - 4s \\ 4 = 2 - r + s \\ -1 = -1 + s \end{cases}$$

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten piste $Q(2, 4, -1)$ ei ole tasossa.

Vastaus a)
$$\begin{cases} x = 5 - 3r - 4s \\ y = 2 - r + s, \text{ missä } r \text{ ja } s \text{ ovat reaalilukuja} \\ z = -1 + s \end{cases}$$

b) on
c) ei ole

Määritetään ensin parametriesitys tasolle, joka kulkee pisteiden $A(-1, 2, -2)$, $B(4, 0, 2)$ ja $C(3, -4, 0)$ kautta.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} . Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4 - (-1))\overline{i} + (0 - 2)\overline{j} + (2 - (-2))\overline{k} \\ &= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (3 - (-1))\overline{i} + (-4 - 2)\overline{j} + (0 - (-2))\overline{k} \\ &= 4\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Tason parametriesitys on esimerkiksi

$$\begin{cases} x = -1 + 5s + 4t \\ y = 2 - 2s - 6t \\ z = -2 + 4s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

Tutkitaan seuraavaksi, sijaitseeko piste D tasossa. Sijoitetaan pisteen $D(2,3,1)$ koordinaatit $x=2$, $y=3$ ja $z=1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 2 = -1 + 5s + 4t \\ 3 = 2 - 2s - 6t \\ 1 = -2 + 4s + 2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s=1$ ja $t=-\frac{1}{2}$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste D on tasossa, joka kulkee pisteiden A , B ja C kautta. Siten kaikki neljä pistettä ovat samassa tasossa.

Vastaus ovat

a) Muodostetaan vektorin \overline{BA} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{BA} &= (12 - 7)\overline{i} + (-15 - (-3))\overline{j} + (4 - (-3))\overline{k} \\ &= 5\overline{i} - 12\overline{j} + 7\overline{k}\end{aligned}$$

Koska taso on kohtisuorassa janaa AB vastaan, vektori \overline{BA} voidaan valita tason normaalivektoriksi. (Voitaisiin valita myös vektori \overline{AB} . Valinta johtaa matemaattisesti identtiseen tulokseen.)

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

missä nyt tasossa sijaitsevan pisteen B koordinaatit $x_0 = 7$, $y_0 = -3$ ja $z_0 = -3$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 5$, $b = -12$ ja $c = 7$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$5 \cdot (x - 7) - 12 \cdot (y - (-3)) + 7 \cdot (z - (-3)) = 0$$

$$5x - 35 - 12y - 36 + 7z + 21 = 0$$

$$5x - 12y + 7z - 50 = 0$$

- b) Tason ja x -akselin leikkauspiste on muotoa $(x,0,0)$.
Määritetään leikkauspisteen x -koordinaatti sijoittamalla normaalimuotoiseen yhtälöön $y = 0$ ja $z = 0$ ja ratkaisemalla yhtälö.

$$5x - 12y + 7z - 50 = 0$$

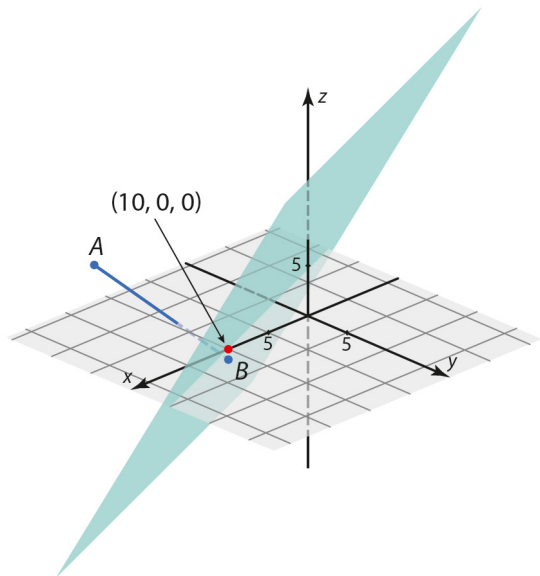
$$5x - 12 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 50 = 0$$

$$5x - 50 = 0$$

$$x = 10$$

Leikkauspiste on $(10,0,0)$.

Tarkistus piirtämällä
(leikkauspiste merkitty
punaisella):



- Vastaus a) $5x - 12y + 7z - 50 = 0$
b) pisteessä $(10,0,0)$

Koska taso T ja taso $x - 30y + 12z - 7 = 0$ ovat yhdensuuntaiset, myös niiden normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset.

Muuttujien kertoimista voidaan suoraan lukea, että yksi tason $x - 30y + 12z - 7 = 0$ normaalivektori on $\vec{i} - 30\vec{j} + 12\vec{k}$. Kyseinen vektori voidaan valita myös tason T normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

missä nyt pisteen A koordinaatit $x_0 = 5$, $y_0 = -17$ ja $z_0 = 3$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 1$, $b = -30$ ja $c = 12$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$1 \cdot (x - 5) - 30 \cdot (y - (-17)) + 12 \cdot (z - 3) = 0$$

$$x - 5 - 30y - 510 + 12z - 36 = 0$$

$$x - 30y + 12z - 551 = 0$$

Tason T yhtälö on siis $x - 30y + 12z - 551 = 0$.

Vastaus $x - 30y + 12z - 551 = 0$

Pisteestä $P(-1, 9, -3)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 9 - 2s \\ z = -3 + s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Määritetään suoran ja tason $x - y + z - 2 = 0$ leikkauspiste A .

Suoran ja tason leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran parametriesityksen että tason yhtälön. Sijoitetaan suoran parametriesityksestä koordinaattien lausekkeet $x = -1 + s$, $y = 9 - 2s$ ja $z = -3 + s$ tason yhtälöön $x - y + z - 2 = 0$.

$$(-1 + s) - (9 - 2s) + (-3 + s) - 2 = 0$$

$$-1 + s - 9 + 2s - 3 + s - 2 = 0$$

$$4s - 15 = 0$$

$$s = \frac{15}{4}$$

Koska parametrille s saadaan ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen A koordinaatit sijoittamalla arvo $s = \frac{15}{4}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -1 + s = -1 + \frac{15}{4} = \frac{11}{4} \\ y = 9 - 2s = 9 - 2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{2} \\ z = -3 + s = -3 + \frac{15}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Leikkauspiste on $A\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Määritetään sitten suoran ja tason $\begin{cases} x = 1 + r + 3t \\ y = 5 - 3r + 3t \\ z = -1 + r - 6t \end{cases}$ leikkauspiste B .

Suoran ja tason leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} -1 + s = 1 + r + 3t \\ 9 - 2s = 5 - 3r + 3t \\ -3 + s = -1 + r - 6t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 0$, $s = 2$ ja $t = 0$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen B koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo $s = 2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -1 + s = -1 + 2 = 1 \\ y = 9 - 2s = 9 - 2 \cdot 2 = 5 \\ z = -3 + s = -3 + 2 = -1 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $B(1, 5, -1)$.

On siis saatu selvitettyä molemmat leikkauspisteet $A(\frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ ja $B(1, 5, -1)$.

Määritetään lopuksi vektori \overline{AB} ja sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (1 - \frac{11}{4})\overline{i} + (5 - \frac{3}{2})\overline{j} + (-1 - \frac{3}{4})\overline{k} \\ &= -\frac{7}{4}\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j} - \frac{7}{4}\overline{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-\frac{7}{4})^2 + (\frac{7}{2})^2 + (-\frac{7}{4})^2} = \sqrt{\frac{147}{8}} = \frac{7\sqrt{6}}{4}$$

Vastaus $\frac{7\sqrt{6}}{4}$

- a) Määritetään ensin lentokoneen lentosuora. Merkitään pistettä $(14,5; 14,5; 1)$ kirjaimella A ja pistettä $(12; 12; 0,8)$ kirjaimella B .

Muodostetaan pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (12 - 14,5)\overline{i} + (12 - 14,5)\overline{j} + (0,8 - 1)\overline{k} \\ &= -2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan lentosuoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 14,5 - 2,5t \\ y = 14,5 - 2,5t \\ z = 1 - 0,2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste, jossa lentokone koskettaa kiitorataa, on lentosuoran ja xy -tason leikkauspiste. Leikkauspisteen z -koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, y, 0)$. Ratkaistaan parametri t .

$$z = 1 - 0,2t$$

$$0 = 1 - 0,2t$$

$$t = 5$$

Lasketaan leikkauspisteen x - ja y -koordinaatit.

$$x = 14,5 - 2,5t = 14,5 - 2,5 \cdot 5 = 2$$

$$y = 14,5 - 2,5t = 2$$

Lentokone koskettaa kiitorataa pisteessä $(2, 2, 0)$.

b) On laskettava lentosuoran ja xy -tason välinen kulma.

Lentosuoran suuntavektoriksi laskettiin jo a-kohdassa

$$\overline{AB} = -2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}.$$

xy -tason normaalivektoriksi voidaan valita $\overline{n} = \overline{k}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2,5)^2 + (-2,5)^2 + (-0,2)^2} = \sqrt{12,54}$$

$$|\overline{n}| = 1$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{n} = (-2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}) \cdot \overline{k}$$

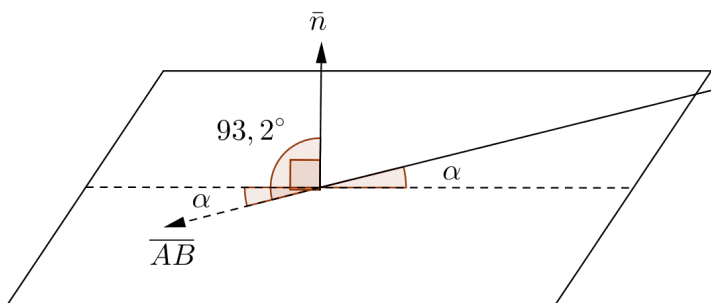
$$= -2,5 \cdot 0 - 2,5 \cdot 0 - 0,2 \cdot 1 = -0,2$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{n}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{n}}{|\overline{AB}| |\overline{n}|} = \frac{-0,2}{\sqrt{12,54} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{n}) = \cos^{-1}\left(-\frac{0,2}{\sqrt{12,54}}\right) = 93,237\dots^\circ \approx 93,2^\circ$$

Suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma on tylppä. Kuvan perusteella lentosuoran ja tason välinen kulma $\alpha = 93,2^\circ - 90^\circ = 3,2^\circ$.



(Kulmien ja vektorien pituuksien mittasuhteet ovat kuvassa väärin.)

- Vastaus a) pisteessä $(2, 2, 0)$
b) $3,2^\circ$

Jos halutaan muodostaa normaalimuotoinen yhtälö tasolle

$$\begin{cases} x = 1 - s + t & (1) \\ y = 3 - 2s + 4t & (2) \\ z = 4 + s + 3t & (3) \end{cases}$$

on päästävä eroon parametreista s ja t . Ratkaistaan ensin parametri t yhtälöstä 1.

$$x = 1 - s + t$$

$$x - 1 + s = t$$

$$t = x - 1 + s$$

Sijoitetaan saatu lauseke yhtälöihin 2 ja 3 ja sievennetään yhtälöparia.

$$\begin{cases} y = 3 - 2s + 4t = 3 - 2s + 4 \cdot (x - 1 + s) \\ z = 4 + s + 3t = 4 + s + 3 \cdot (x - 1 + s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2s + 4x - 4 + 4s = -1 + 2s + 4x \\ z = 4 + s + 3x - 3 + 3s = 1 + 4s + 3x \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöparin ylemmästä yhtälöstä parametri s .

$$y = -1 + 2s + 4x$$

$$y + 1 - 4x = 2s$$

$$2s = y + 1 - 4x = 1 - 4x + y$$

$$s = \frac{1}{2} - 2x + \frac{1}{2}y$$

Sijoitetaan saatu lauseke yhtälöparin alempaan yhtälöön ja sievennetään yhtälöä.

$$z = 1 + 4s + 3x$$

$$z = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2x + \frac{1}{2}y \right) + 3x$$

$$z = 1 + 2 - 8x + 2y + 3x$$

$$z = 3 - 5x + 2y$$

$$5x - 2y + z - 3 = 0$$

Huomataan, että on päädytty normaalimuotoiseen yhtälöön, jossa ei esiinny parametreja s ja t .

Vastaus $5x - 2y + z - 3 = 0$

Annettu suora on tason $3x + 2y - 4z + 7 = 0$ suuntainen silloin, kun suoran suuntavektori on kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan. Suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin pistetulon pitää siis olla nolla.

$$\text{Suoran } \begin{cases} x = 3a + 4t \\ y = -2 - at \\ z = 7 + 2at \end{cases} \text{ suuntavektorin komponentit ovat luettavissa}$$

parametrin t kertoimista, joten (erääksi) suuntavektoriksi saadaan $\bar{v} = 4\bar{i} - a\bar{j} + 2a\bar{k}$.

Vastaavasti muuttujien kertoimista voidaan nähdä suoraan, että yksi tason $3x + 2y - 4z + 7 = 0$ normaalivektori on $\bar{n} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$.

Nyt siis vektorien \bar{v} ja \bar{n} pistetulon täytyy olla nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$$

$$(4\bar{i} - a\bar{j} + 2a\bar{k}) \cdot (3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}) = 0$$

$$4 \cdot 3 - a \cdot 2 + 2a \cdot (-4) = 0$$

$$12 - 10a = 0$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Annettu suora on tason $3x + 2y - 4z + 7 = 0$ suuntainen vakion arvolla $a = \frac{6}{5}$.

$$\text{Vastaus } a = \frac{6}{5}$$

262

- a) Muuttujien kertoimista nähdään suoraan, että yksi tason $-2x + y - z + 3 = 0$ normaalivektori on $\vec{n} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Vastaavasti tason $x + 2y + 3z - 8 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Lasketaan normaalivektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = (-2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$= -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -3$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

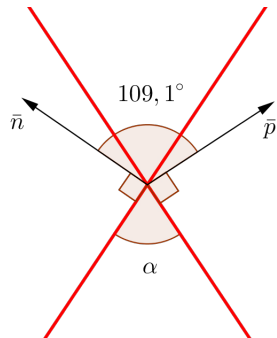
$$\cos(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| |\vec{p}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\sphericalangle(\vec{n}, \vec{p}) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) = 109,106\dots^\circ \approx 109,1^\circ$$

Normaalivektorien välinen kulma on tylppä. Kysytty tasojen välinen kulma on kuvan perusteella

$$\alpha = 360^\circ - 109,1^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 70,9^\circ.$$

(Kuva havainnollistaa kulmia, mutta vektorien pituudet ovat kuvassa väärin. Tasoja on merkitty punaisilla viivoilla.)



b) Muuttujien kertoimista nähdään, että yksi tason $x - 2y + 4z + 3 = 0$ normaalivektori on $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Vastaavasti tason $7x - 2y - 4z - 35 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{p} = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

Lasketaan normaalivektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{69}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{p} &= (\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (7\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) = -5\end{aligned}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| |\vec{p}|} = \frac{-5}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{69}} = -\frac{5}{3\sqrt{161}}$$

$$\sphericalangle(\vec{n}, \vec{p}) = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{3\sqrt{161}}\right) = 97,547\dots^\circ \approx 97,5^\circ$$

Koska saatu normaalivektorien välinen kulma on tylppä, a-kohdan tapaan voidaan päätellä, että kysytty tasojen välinen kulma on

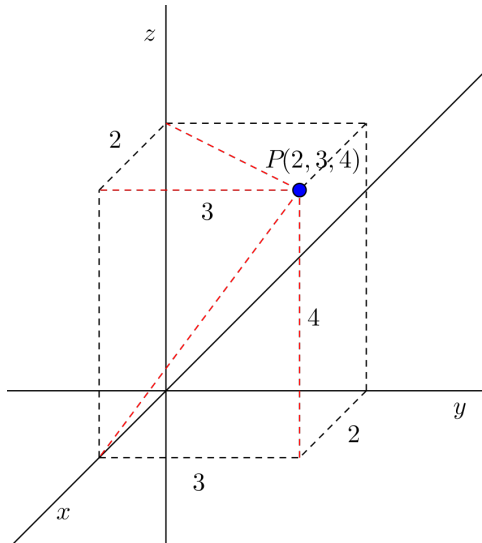
$$360^\circ - 97,5^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 82,5^\circ.$$

Vastaus a) $70,9^\circ$

b) $82,5^\circ$

263

- a) Kuvan perusteella pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys xy -tasosta on 4 (z -koordinaatin arvo).
- b) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys xz -tasosta on 3 (y -koordinaatin arvo).
- c) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys x -akselista saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.



$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

- d) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys z -akselista saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

- Vastaus a) 4
 b) 3
 c) 5
 d) $\sqrt{13}$

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Suoran suuntavektori on $\bar{s} = 4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ ja suora kulkee pisteen $A(8,0,1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$$

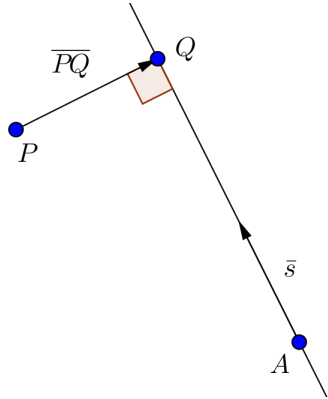
missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (8 + 4t, -t, 1 + 2t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (8 + 4t - (-1))\bar{i} + (-t - 4)\bar{j} + (1 + 2t - 0)\bar{k} \\ &= (9 + 4t)\bar{i} + (-4 - t)\bar{j} + (1 + 2t)\bar{k} \end{aligned}$$



Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{s} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{s} = 0$$

$$((9 + 4t)\overline{i} + (-4 - t)\overline{j} + (1 + 2t)\overline{k}) \cdot (4\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) = 0$$

$$(9 + 4t) \cdot 4 + (-4 - t) \cdot (-1) + (1 + 2t) \cdot 2 = 0$$

$$21t + 42 = 0$$

$$t = -2$$

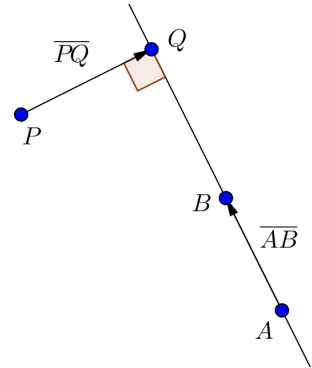
Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 8 + 4t = 8 + 4 \cdot (-2) = 0 \\ y = -t = -(-2) = 2 \\ z = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot (-2) = -3 \end{cases}$$

Siten piste $(0, 2, -3)$ on suoran pisteistä lähimpänä pistettä P .

Vastaus $(0, 2, -3)$

- a) Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.



Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AB} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (6 - (-2))\bar{i} + (-1 - 3)\bar{j} + (4 - (-2))\bar{k} \\ &= 8\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(-2, 3, -2)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2 + 8t \\ y = 3 - 4t \\ z = -2 + 6t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB , joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2 + 8t, 3 - 4t, -2 + 6t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-2 + 8t - 4)\bar{i} + (3 - 4t - 2)\bar{j} + (-2 + 6t - (-1))\bar{k} \\ &= (-6 + 8t)\bar{i} + (1 - 4t)\bar{j} + (-1 + 6t)\bar{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{AB} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((-6 + 8t)\bar{i} + (1 - 4t)\bar{j} + (-1 + 6t)\bar{k}) \cdot (8\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}) = 0$$

$$(-6 + 8t) \cdot 8 + (1 - 4t) \cdot (-4) + (-1 + 6t) \cdot 6 = 0$$

$$116t - 58 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{1}{2}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -2 + 8t = -2 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y = 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ z = -2 + 6t = -2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(2, 1, 1)$.

- b) Pisteiden P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (2-4)\bar{i} + (1-2)\bar{j} + (1-(-1))\bar{k} \\ &= -2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}\end{aligned}$$

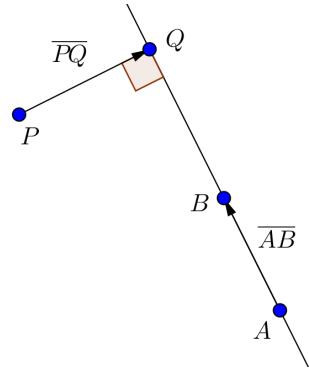
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteiden P etäisyys suorasta AB on 3.

- Vastaus a) (2,1,1)
 b) 3

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AB} .



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-3 - 12)\vec{i} + (5 - (-5))\vec{j} + (-4 - 6)\vec{k} \\ &= -15\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(12, -5, 6)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 12 - 15t \\ y = -5 + 10t \\ z = 6 - 10t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB , joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (12 - 15t, -5 + 10t, 6 - 10t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (12 - 15t - 1)\bar{i} + (-5 + 10t - 0)\bar{j} + (6 - 10t - 2)\bar{k} \\ &= (11 - 15t)\bar{i} + (-5 + 10t)\bar{j} + (4 - 10t)\bar{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{AB} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((11 - 15t)\bar{i} + (-5 + 10t)\bar{j} + (4 - 10t)\bar{k}) \cdot (-15\bar{i} + 10\bar{j} - 10\bar{k}) = 0$$

$$(11 - 15t) \cdot (-15) + (-5 + 10t) \cdot 10 + (4 - 10t) \cdot (-10) = 0$$

$$425t - 255 = 0$$

$$t = \frac{3}{5}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{3}{5}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 12 - 15t = 12 - 15 \cdot \frac{3}{5} = 3 \\ y = -5 + 10t = -5 + 10 \cdot \frac{3}{5} = 1 \\ z = 6 - 10t = 6 - 10 \cdot \frac{3}{5} = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(3,1,0)$.

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (3-1)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (0-2)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

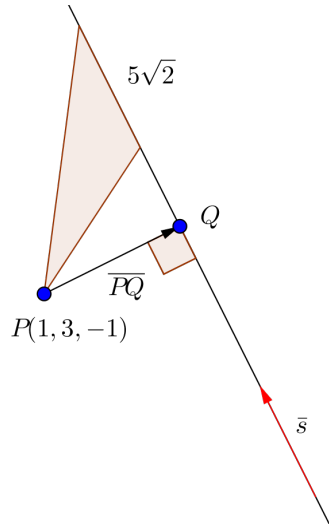
Pisteen P etäisyys suorasta AB on 3.

Vastaus 3

Merkitään kolmion huippua eli pistettä $(1, 3, -1)$ kirjaimella P .

Kolmion pinta-ala on puolet kannan pituuden ja korkeuden tulosta. Koska kannan pituus tunnetaan, on selvitetävä korkeus eli pisteen P etäisyys annetusta suorasta.

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan.



Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku. Esityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\bar{s} = -\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (2 - t, 3 - t, 1 - t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (2-t-1)\bar{i} + (3-t-3)\bar{j} + (1-t-(-1))\bar{k} \\ &= (1-t)\bar{i} - t\bar{j} + (2-t)\bar{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \bar{s} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \bar{s} = 0$$

$$((1-t)\bar{i} - t\bar{j} + (2-t)\bar{k}) \cdot (-\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}) = 0$$

$$(1-t) \cdot (-1) - t \cdot (-1) + (2-t) \cdot (-1) = 0$$

$$3t - 3 = 0$$

$$t = 1$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = 1$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - t = 3 - 1 = 2 \\ z = 1 - t = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Siten piste $Q(1, 2, 0)$ on suoran pisteistä lähimpänä kolmion huippua P .

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (1-1)\bar{i} + (2-3)\bar{j} + (0-(-1))\bar{k} \\ &= 0\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} = -\bar{j} + \bar{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Pisteen P etäisyys suorasta on $\sqrt{2}$. Kyseessä on siis myös tutkittavan kolmion korkeus.

Lasketaan lopuksi kolmion pinta-ala kolmion kannan pituuden ja korkeuden tulo puolikkaana:

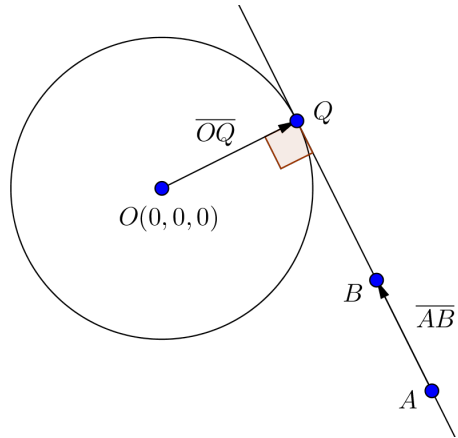
$$A = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5.$$

Vastaus 5

Merkitään suoran pisteitä $(-7, 7, 0)$ ja $(5, 1, 3)$ kirjaimilla A ja B . Ympyrän keskipiste on origossa $O(0, 0, 0)$.

On määritettävä ympyrän säde eli origon O etäisyys suorasta AB .

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä O . Tällöin vektori \overline{OQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.



Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AB} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5 - (-7))\bar{i} + (1 - 7)\bar{j} + (3 - 0)\bar{k} \\ &= 12\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(-7, 7, 0)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -7 + 12t \\ y = 7 - 6t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB , joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-7 + 12t, 7 - 6t, 3t).$$

Vektori \overline{OQ} on pisteen Q paikkavektori, joten

$$\overline{OQ} = (-7 + 12t)\bar{i} + (7 - 6t)\bar{j} + 3t\bar{k}.$$

Koska vektori \overline{OQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{AB} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{OQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((-7 + 12t)\bar{i} + (7 - 6t)\bar{j} + 3t\bar{k}) \cdot (12\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}) = 0$$

$$(-7 + 12t) \cdot 12 + (7 - 6t) \cdot (-6) + 3t \cdot 3 = 0$$

$$189t - 126 = 0$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{2}{3}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -7 + 12t = -7 + 12 \cdot \frac{2}{3} = 1 \\ y = 7 - 6t = 7 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 3 \\ z = 3t = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(1, 3, 2)$.

Ympyrän säde on origon etäisyys suorasta AB eli origon ja pisteen Q välinen etäisyys. Vektori \overline{OQ} on paikkavektorina $\overline{OQ} = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$. Lasketaan sen pituus.

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Siis ympyrän säde on $\sqrt{14}$.

Vastaus $\sqrt{14}$

Merkitään pistettä $(4, 3, -5)$ kirjaimella A .

Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Taso sisältää pisteen $A(4, 3, -5)$ ja sillä on suuntavektorit $\bar{u} = -2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 4 - 2s + t \\ y = 3 - s + 2t \\ z = -5 + s - 3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (4 - 2s + t, 3 - s + 2t, -5 + s - 3t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (4 - 2s + t - 3)\bar{i} + (3 - s + 2t - (-13))\bar{j} + (-5 + s - 3t - (-2))\bar{k} \\ &= (1 - 2s + t)\bar{i} + (16 - s + 2t)\bar{j} + (-3 + s - 3t)\bar{k} \end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\bar{u} = -2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \bar{u} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \bar{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((1-2s+t)\bar{i} + (16-s+2t)\bar{j} + (-3+s-3t)\bar{k}) \cdot (-2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = 0 \\ ((1-2s+t)\bar{i} + (16-s+2t)\bar{j} + (-3+s-3t)\bar{k}) \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2s+t) \cdot (-2) + (16-s+2t) \cdot (-1) + (-3+s-3t) \cdot 1 = 0 \\ (1-2s+t) \cdot 1 + (16-s+2t) \cdot 2 + (-3+s-3t) \cdot (-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6s - 7t - 21 = 0 \\ -7s + 14t + 42 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = 0$ ja $t = -3$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = 0$ ja $t = -3$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 4 - 2s + t = 4 - 2 \cdot 0 - 3 = 1 \\ y = 3 - s + 2t = 3 - 0 + 2 \cdot (-3) = -3 \\ z = -5 + s - 3t = -5 + 0 - 3 \cdot (-3) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1, -3, 4)$.

Vastaus $(1, -3, 4)$

- a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-1)\overline{i} + (-1-0)\overline{j} + (0-(-1))\overline{k} \\ &= \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (2-1)\overline{i} + (2-0)\overline{j} + (2-(-1))\overline{k} \\ &= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

Taso sisältää pisteen $A(1, 0, -1)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = -s + 2t \\ z = -1 + s + 3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1 + s + t, -s + 2t, -1 + s + 3t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (1 + s + t - 8)\overline{i} + \left(-s + 2t - \frac{3}{2}\right)\overline{j} + (-1 + s + 3t - (-1))\overline{k} \\ &= (-7 + s + t)\overline{i} + \left(-\frac{3}{2} - s + 2t\right)\overline{j} + (s + 3t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{AB} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{AC} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-7 + s + t)\overline{i} + (-\frac{3}{2} - s + 2t)\overline{j} + (s + 3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = 0 \\ ((-7 + s + t)\overline{i} + (-\frac{3}{2} - s + 2t)\overline{j} + (s + 3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-7 + s + t) \cdot 1 + (-\frac{3}{2} - s + 2t) \cdot (-1) + (s + 3t) \cdot 1 = 0 \\ (-7 + s + t) \cdot 1 + (-\frac{3}{2} - s + 2t) \cdot 2 + (s + 3t) \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3s + 2t - \frac{11}{2} = 0 \\ 2s + 14t - 10 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{3}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{3}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 1 + s + t = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ y = -s + 2t = -\frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ z = -1 + s + 3t = -1 + \frac{3}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(3, -\frac{1}{2}, 2)$.

- b) Pisteiden P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (3-8)\bar{i} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\bar{j} + (2 - (-1))\bar{k} \\ &= -5\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{38}$$

Pisteiden P etäisyys tasosta on $\sqrt{38}$.

Vastaus a) $(3, -\frac{1}{2}, 2)$ b) $\sqrt{38}$

- a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x + y + z - 2 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(2, -2, -1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x + y + z - 2 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$(2 + t) + (-2 + t) + (-1 + t) - 2 = 0$$

$$3t - 3 = 0$$

$$t = 1$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=1$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 + 1 = 3 \\ y = -2 + t = -2 + 1 = -1 \\ z = -1 + t = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Pisteeksi Q saadaan $(3, -1, 0)$.

- b) Pisteiden P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (3-2)\bar{i} + (-1-(-2))\bar{j} + (0-(-1))\bar{k} \\ &= \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Pisteiden P etäisyys tasosta on $\sqrt{3}$.

- Vastaus a) $(3, -1, 0)$
 b) $\sqrt{3}$

Merkitään kartion huippua eli pistettä $(2, -1, 3)$ kirjaimella P .

Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta. Koska pohjan pinta-ala tunnetaan, on selvitettävä kartion korkeus eli pisteen P etäisyys annetusta tasosta.

Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x - y + 3z + 10 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(2, -1, 3)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x - y + 3z + 10 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$(2 + t) - (-1 - t) + 3 \cdot (3 + 3t) + 10 = 0$$

$$11t + 22 = 0$$

$$t = -2$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -2$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 - 2 = 0 \\ y = -1 - t = -1 - (-2) = 1 \\ z = 3 + 3t = 3 + 3 \cdot (-2) = -3 \end{cases}$$

Siten piste $Q(0, 1, -3)$ on tason pisteistä lähimpänä kartion huippua P .

Huipun P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (0 - 2)\bar{i} + (1 - (-1))\bar{j} + (-3 - 3)\bar{k} \\ &= -2\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

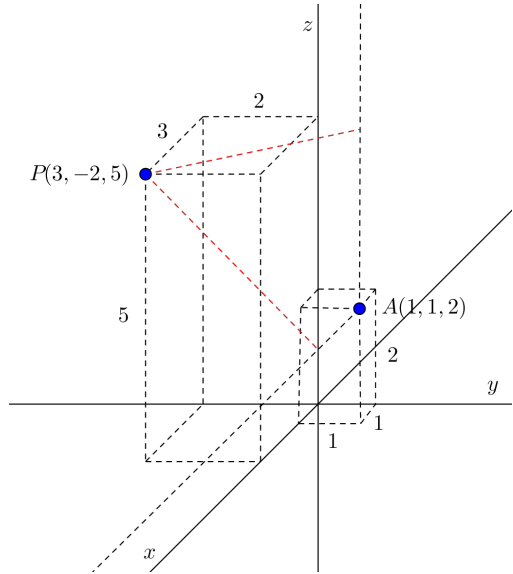
Pisteen P etäisyys tasosta on $2\sqrt{11}$. Kyseessä on siis myös tutkittavan kartion korkeus.

Lasketaan lopuksi kartion tilavuus jakamalla pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulo luvulla 3:

$$V = \frac{6\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{11}}{3} = 44.$$

Vastaus 44

- a) Piste $P(3, -2, 5)$ etäisyys pisteeseen $A(1, 1, 2)$ kautta kulkevästä xy -tason suuntaisesta tasosta on $5 - 2 = 3$ (z -koordinaattien erotus).



- b) Piste $P(3, -2, 5)$ etäisyys pisteeseen $A(1, 1, 2)$ kautta kulkevästä yz -tason suuntaisesta tasosta on $3 - 1 = 2$ (x -koordinaattien erotus).

- c) Piste $P(3, -2, 5)$ etäisyys pisteeseen $A(1, 1, 2)$ kautta kulkevästä x -akselin suuntaisesta suorasta saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

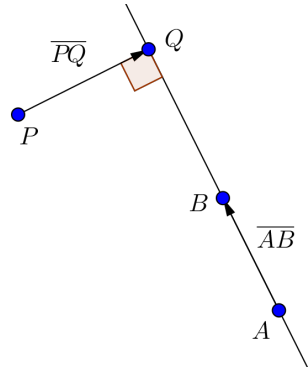
- d) Piste $P(3, -2, 5)$ etäisyys pisteeseen $A(1, 1, 2)$ kautta kulkevästä z -akselin suuntaisesta suorasta saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Vastaus a) 3 b) 2 c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{13}$

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AB} .



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-1-1)\bar{i} + (-7-(-4))\bar{j} + (2-3)\bar{k} \\ &= -2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(1, -4, 3)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -4 - 3t \\ z = 3 - t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB , joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1 - 2t, -4 - 3t, 3 - t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (1 - 2t - (-1))\overline{i} + (-4 - 3t - 2)\overline{j} + (3 - t - 3)\overline{k} \\ &= (2 - 2t)\overline{i} + (-6 - 3t)\overline{j} - t\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{AB} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ ((2 - 2t)\overline{i} + (-6 - 3t)\overline{j} - t\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) &= 0 \\ (2 - 2t) \cdot (-2) + (-6 - 3t) \cdot (-3) - t \cdot (-1) &= 0 \\ 14t + 14 &= 0 \\ t &= -1\end{aligned}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -1$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \\ y = -4 - 3t = -4 - 3 \cdot (-1) = -1 \\ z = 3 - t = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(3, -1, 4)$.

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (3 - (-1))\overline{i} + (-1 - 2)\overline{j} + (4 - 3)\overline{k} \\ &= 4\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

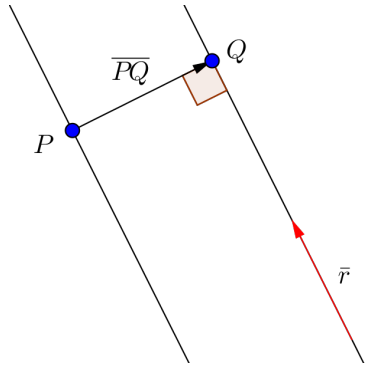
Pisteen P etäisyys suorasta AB on $\sqrt{26}$.

Vastaus $\sqrt{26}$

On laskettava kahden annetun suoran välinen etäisyys. Määritetään ensin esimerkiksi ensimmäiseltä suoralta jokin piste ja lasketaan sen etäisyys jälkimmäisestä suorasta.

$$\text{Suoralla } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ on esimerkiksi}$$

piste $(1, 2, 1)$, joka saadaan, kun esitykseen sijoitetaan parametrin arvo $t = 0$. Merkitään tätä pistettä kirjaimella P .



Olkoon Q se jälkimmäisen suoran

$$\begin{cases} x = -2 - 2s \\ y = 1 - 3s \\ z = -4 - s \end{cases} \text{ piste, joka on}$$

lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Jälkimmäisen suoran parametriesityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2 - 2s, 1 - 3s, -4 - s).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-2 - 2s - 1)\overline{i} + (1 - 3s - 2)\overline{j} + (-4 - s - 1)\overline{k} \\ &= (-3 - 2s)\overline{i} + (-1 - 3s)\overline{j} + (-5 - s)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{r} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin s arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{r} = 0$$

$$((-3 - 2s)\overline{i} + (-1 - 3s)\overline{j} + (-5 - s)\overline{k}) \cdot (2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) = 0$$

$$(-3 - 2s) \cdot 2 + (-1 - 3s) \cdot 3 + (-5 - s) \cdot 1 = 0$$

$$-14s - 14 = 0$$

$$s = -1$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $s = -1$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -2 - 2s = -2 - 2 \cdot (-1) = 0 \\ y = 1 - 3s = 1 - 3 \cdot (-1) = 4 \\ z = -4 - s = -4 - (-1) = -3 \end{cases}$$

Siten piste $Q(0, 4, -3)$ on jälkimmäisen suoran pisteistä lähimpänä ensimmäisen suoran pistettä P .

Suorien välinen etäisyys on sama kuin pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (0-1)\bar{i} + (4-2)\bar{j} + (-3-1)\bar{k} \\ &= -\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

Siis suorien välinen etäisyys on $\sqrt{21}$.

Vastaus $\sqrt{21}$

- a) On laskettava pisteen $P(1700, 1450, 0)$ etäisyys annetusta lentosuorasta.

$$\text{Olkoon } Q \text{ se lentosuoran } \begin{cases} x = 100 + 50t \\ y = 50 + 2t \\ z = 16t \end{cases} \text{ piste, joka on}$$

lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Suoran parametriesityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\bar{s} = 50\bar{i} + 2\bar{j} + 16\bar{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (100 + 50t, 50 + 2t, 16t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (100 + 50t - 1700)\bar{i} + (50 + 2t - 1450)\bar{j} + (16t - 0)\bar{k} \\ &= (-1600 + 50t)\bar{i} + (-1400 + 2t)\bar{j} + 16t\bar{k} \end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{s} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{s} = 0$$

$$((-1600 + 50t)\overline{i} + (-1400 + 2t)\overline{j} + 16t\overline{k}) \cdot (50\overline{i} + 2\overline{j} + 16\overline{k}) = 0$$

$$(-1600 + 50t) \cdot 50 + (-1400 + 2t) \cdot 2 + 16t \cdot 16 = 0$$

$$2760t - 82\,800 = 0$$

$$t = 30$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = 30$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 100 + 50t = 100 + 50 \cdot 30 = 1600 \\ y = 50 + 2t = 50 + 2 \cdot 30 = 110 \\ z = 16t = 16 \cdot 30 = 480 \end{cases}$$

Siten piste $Q(1600, 110, 480)$ on lentosuoran pisteistä lähimpänä pistettä P .

Pisteen P etäisyys lentosuorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (1600 - 1700)\overline{i} + (110 - 1450)\overline{j} + (480 - 0)\overline{k} \\ &= -100\overline{i} - 1340\overline{j} + 480\overline{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-100)^2 + (-1340)^2 + 480^2} = \sqrt{2036000} = 20\sqrt{5090} \approx 1400$$

Siis lentokone lensi 1,4 km päästä Aavasta.

- b) Lentokone oli lähimmillään Aavaa pisteessä $(1600, 110, 480)$.
Lentokone oli tuolloin 480 metrin korkeudella (z -koordinaatin arvo).

Vastaus a) 1,4 km päästä Aavasta
 b) 480 m korkeudella

Merkitään suoran pisteitä $(-7, -2, 6)$ ja $(3, 8, -9)$ kirjaimilla A ja B ja ympyrän keskipistettä kirjaimella P .

Lasketaan ensin ympyrän säde eli keskipisteen P etäisyys suorasta AB .

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P .

Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

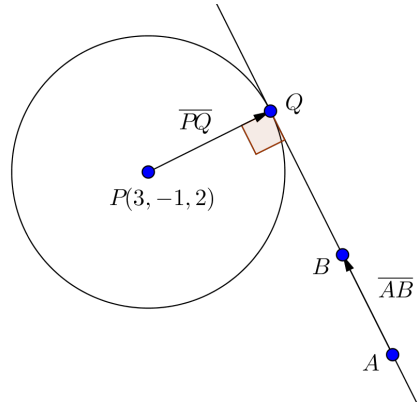
Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori \overline{AB} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (3 - (-7))\bar{i} + (8 - (-2))\bar{j} + (-9 - 6)\bar{k} \\ &= 10\bar{i} + 10\bar{j} - 15\bar{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(-7, -2, 6)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -7 + 10t \\ y = -2 + 10t \\ z = 6 - 15t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.



Piste Q on suoralla AB , joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-7 + 10t, -2 + 10t, 6 - 15t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-7 + 10t - 3)\overline{i} + (-2 + 10t - (-1))\overline{j} + (6 - 15t - 2)\overline{k} \\ &= (-10 + 10t)\overline{i} + (-1 + 10t)\overline{j} + (4 - 15t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria \overline{AB} vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((-10 + 10t)\overline{i} + (-1 + 10t)\overline{j} + (4 - 15t)\overline{k}) \cdot (10\overline{i} + 10\overline{j} - 15\overline{k}) = 0$$

$$(-10 + 10t) \cdot 10 + (-1 + 10t) \cdot 10 + (4 - 15t) \cdot (-15) = 0$$

$$425t - 170 = 0$$

$$t = \frac{2}{5}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{2}{5}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -7 + 10t = -7 + 10 \cdot \frac{2}{5} = -3 \\ y = -2 + 10t = -2 + 10 \cdot \frac{2}{5} = 2 \\ z = 6 - 15t = 6 - 15 \cdot \frac{2}{5} = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(-3, 2, 0)$.

Ympyrän säde on keskipisteen P etäisyys suorasta AB eli pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (-3 - 3)\bar{i} + (2 - (-1))\bar{j} + (0 - 2)\bar{k} \\ &= -6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Siten ympyrän säde on 7 ja ympyrän kehän pituus

$$2\pi r = 2\pi \cdot 7 = 14\pi .$$

Vastaus 14π

- a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{AB} ja \overline{AC} .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-2 - 2)\overline{i} + (-2 - (-1))\overline{j} + (2 - 4)\overline{k} \\ &= -4\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (4 - 2)\overline{i} + (2 - (-1))\overline{j} + (6 - 4)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Taso sisältää pisteen $A(2, -1, 4)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - 4s + 2t \\ y = -1 - s + 3t \\ z = 4 - 2s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (2 - 4s + 2t, -1 - s + 3t, 4 - 2s + 2t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{PQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (2 - 4s + 2t - 3)\bar{i} + (-1 - s + 3t - 2)\bar{j} + (4 - 2s + 2t - (-1))\bar{k} \\ &= (-1 - 4s + 2t)\bar{i} + (-3 - s + 3t)\bar{j} + (5 - 2s + 2t)\bar{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{PQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita

$$\overline{AB} = -4\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k} \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k} \quad \text{vastaan.}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-1 - 4s + 2t)\bar{i} + (-3 - s + 3t)\bar{j} + (5 - 2s + 2t)\bar{k}) \cdot (-4\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}) = 0 \\ ((-1 - 4s + 2t)\bar{i} + (-3 - s + 3t)\bar{j} + (5 - 2s + 2t)\bar{k}) \cdot (2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1 - 4s + 2t) \cdot (-4) + (-3 - s + 3t) \cdot (-1) + (5 - 2s + 2t) \cdot (-2) = 0 \\ (-1 - 4s + 2t) \cdot 2 + (-3 - s + 3t) \cdot 3 + (5 - 2s + 2t) \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21s - 15t - 3 = 0 \\ -15s + 17t - 1 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 - 4s + 2t = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ y = -1 - s + 3t = -1 - \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ z = 4 - 2s + 2t = 4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1, 0, 4)$.

Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (1 - 3)\bar{i} + (0 - 2)\bar{j} + (4 - (-1))\bar{k} \\ &= -2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\sqrt{33}$.

- b) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $2x - y + z + 1 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(3, 2, -1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $2x - y + z + 1 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$2 \cdot (3 + 2t) - (2 - t) + (-1 + t) + 1 = 0$$

$$6t + 4 = 0$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -\frac{2}{3}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \\ y = 2 - t = 2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \\ z = -1 + t = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Pisteeksi Q saadaan $\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \left(\frac{5}{3} - 3\right)\bar{i} + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\bar{j} + \left(-\frac{5}{3} - (-1)\right)\bar{k} \\ &= -\frac{4}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k} \end{aligned}$$

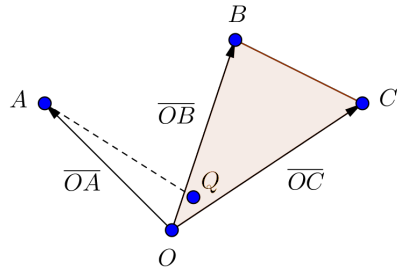
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vastaus a) $\sqrt{33}$

b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$, joten piste A on $(3, -2, -1)$. On laskettava pisteen A etäisyys pisteiden O (origo), B ja C määäämästä tasosta OBC .



Olkoon Q se tason OBC piste, joka on lähimpänä pistettä A .

Tällöin vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{OB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ ja $\overline{OC} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Taso sisältää pisteen $O(0,0,0)$ ja sillä on edellä mainitut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 3s + t \\ z = 4s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (s + 2t, 3s + t, 4s - 2t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{AQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (s + 2t - 3)\overline{i} + (3s + t - (-2))\overline{j} + (4s - 2t - (-1))\overline{k} \\ &= (s + 2t - 3)\overline{i} + (3s + t + 2)\overline{j} + (4s - 2t + 1)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{OB} = \overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{OC} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{OB} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{OC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((s + 2t - 3)\overline{i} + (3s + t + 2)\overline{j} + (4s - 2t + 1)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}) = 0 \\ ((s + 2t - 3)\overline{i} + (3s + t + 2)\overline{j} + (4s - 2t + 1)\overline{k}) \cdot (2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s + 2t - 3) \cdot 1 + (3s + t + 2) \cdot 3 + (4s - 2t + 1) \cdot 4 = 0 \\ (s + 2t - 3) \cdot 2 + (3s + t + 2) \cdot 1 + (4s - 2t + 1) \cdot (-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26s - 3t + 7 = 0 \\ -3s + 9t - 6 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -\frac{1}{5}$ ja $t = \frac{3}{5}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = -\frac{1}{5}$ ja $t = \frac{3}{5}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = s + 2t = -\frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = 1 \\ y = 3s + t = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5} = 0 \\ z = 4s - 2t = 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 2 \cdot \frac{3}{5} = -2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1, 0, -2)$.

Pisteen A etäisyys tasosta OBC on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{AQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= (1-3)\bar{i} + (0-(-2))\bar{j} + (-2-(-1))\bar{k} \\ &= -2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteen A etäisyys tasosta OBC on 3.

Vastaus 3

Merkitään kartion huippua eli pistettä $(9, -2, -7)$ kirjaimella A .

Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, missä r on pohjaympyrän säde ja h kartion korkeus. Lasketaan ensin kartion korkeus eli pisteen A etäisyys annetusta tasosta.

Olkoon Q se tason

$\overline{OP} = \bar{i} - \bar{j} - 6\bar{k} + s(-\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}) + t(\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k})$ piste, joka on lähimpänä kartion huippua A . Tällöin vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\bar{u} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$ ja $\bar{v} = \bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$, jotka voidaan lukea suoraan tason vektoriyhtälöstä. Lisäksi taso sisältää vektoriyhtälön mukaan pisteen $(1, -1, -6)$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = -1 + 2s + 4t \\ z = -6 + 6s + 3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja. (Esitys voidaan myös lukea suoraan vektoriyhtälöstä.)

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1 - s + t, -1 + 2s + 4t, -6 + 6s + 3t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{AQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (1-s+t-9)\overline{i} + (-1+2s+4t-(-2))\overline{j} + (-6+6s+3t-(-7))\overline{k} \\ &= (-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{u} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{u} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}) \cdot (-\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}) = 0 \\ ((-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-8-s+t) \cdot (-1) + (1+2s+4t) \cdot 2 + (1+6s+3t) \cdot 6 = 0 \\ (-8-s+t) \cdot 1 + (1+2s+4t) \cdot 4 + (1+6s+3t) \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41s + 25t + 16 = 0 \\ 25s + 26t - 1 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -1$ ja $t = 1$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = -1$ ja $t = 1$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 1 - s + t = 1 - (-1) + 1 = 3 \\ y = -1 + 2s + 4t = -1 + 2 \cdot (-1) + 4 = 1 \\ z = -6 + 6s + 3t = -6 + 6 \cdot (-1) + 3 = -9 \end{cases}$$

Siten piste $Q(3, 1, -9)$ on tason pisteistä lähimpänä kartion huippua A .

Huipun A etäisyys tasosta on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{AQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{AQ} = (3 - 9)\vec{i} + (1 - (-2))\vec{j} + (-9 - (-7))\vec{k} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Pisteen A etäisyys tasosta on 7 . Kyseessä on siis myös tutkittavan kartion korkeus h .

Koska pohjaympyrän säteen r ja kartion korkeuden suhde on $3 : 1$, ympyrän säteeksi saadaan

$$\frac{r}{h} = \frac{3}{1}$$

$$r = 3h = 3 \cdot 7 = 21.$$

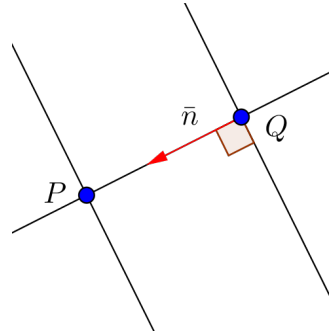
Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 21^2 \cdot 7 = 1029\pi$.

Vastaus 1029π

On laskettava kahden annetun tason välinen etäisyys. Määritetään ensin esimerkiksi ensimmäiseltä tasolta jokin piste ja lasketaan sen etäisyys jälkimmäisestä tasosta.

Tasolla $2x + y - 5z = 1$ on esimerkiksi piste $(0, 1, 0)$, sillä pisteen koordinaatit toteuttavat tason yhtälön. Merkitään tätä pistettä kirjaimella P .

Olkoon Q se jälkimmäisen tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ normaalisuoran ja tason leikkauspiste.



Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ yksi normaalivektori on $\bar{n} = 2\bar{i} + \bar{j} - 5\bar{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(0, 1, 0)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $2x + y - 5z + 71 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$2 \cdot 2t + (1 + t) - 5 \cdot (-5t) + 71 = 0$$

$$30t + 72 = 0$$

$$t = -\frac{12}{5}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -\frac{12}{5}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2t = 2 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{24}{5} \\ y = 1 + t = 1 + \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{7}{5} \\ z = -5t = -5 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = 12 \end{cases}$$

Siten piste $Q\left(-\frac{24}{5}, -\frac{7}{5}, 12\right)$ on jälkimmäisen tason pisteistä lähimpänä ensimmäisen tason pistettä P .

Tasojen välinen etäisyys on sama kuin pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

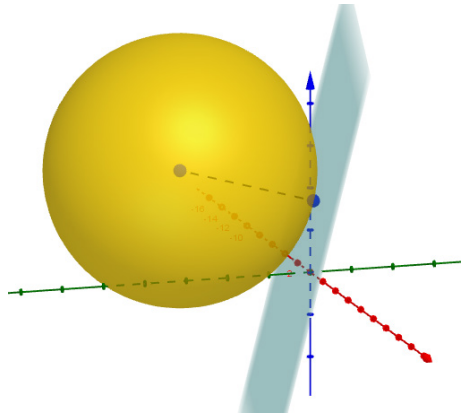
$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \left(-\frac{24}{5} - 0\right)\bar{i} + \left(-\frac{7}{5} - 1\right)\bar{j} + (12 - 0)\bar{k} \\ &= -\frac{24}{5}\bar{i} - \frac{12}{5}\bar{j} + 12\bar{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{24}{5}\right)^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{4320}{25}} = \frac{12\sqrt{30}}{5}$$

Siis tasojen välinen etäisyys on $\frac{12\sqrt{30}}{5}$.

Vastaus $\frac{12\sqrt{30}}{5}$

Merkitään pallon keskipistettä kirjaimella P . Lasketaan ensin pallon säde eli keskipisteen P etäisyys tasosta $x + 4y - z + 3 = 0$.



Olkoon Q se tason $x + 4y - z + 3 = 0$ piste, joka on lähimpänä pistettä P . Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason $x + 4y - z + 3 = 0$ normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x + 4y - z + 3 = 0$ yksi normaalivektori on $\vec{n} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.

Normaalisuora kulkee pallon keskipisteen $P(-1, -6, 5)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -6 + 4t \\ z = 5 - t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x + 4y - z + 3 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$(-1 + t) + 4 \cdot (-6 + 4t) - (5 - t) + 3 = 0$$

$$18t - 27 = 0$$

$$t = \frac{3}{2}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{3}{2}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -1 + t = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -6 + 4t = -6 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 0 \\ z = 5 - t = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2})$.

Pallon säde on keskipisteen P etäisyys tasosta $x + 4y - z + 3 = 0$ eli pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{PQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \left(\frac{1}{2} - (-1)\right)\bar{i} + (0 - (-6))\bar{j} + \left(\frac{7}{2} - 5\right)\bar{k} \\ &= \frac{3}{2}\bar{i} + 6\bar{j} - \frac{3}{2}\bar{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

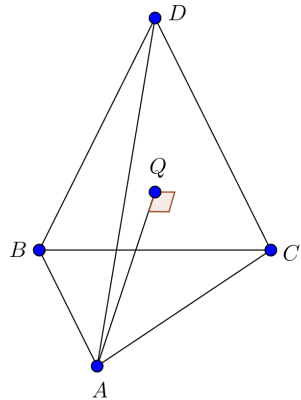
Siten pallon säde on $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ja pinta-ala

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 162\pi.$$

Vastaus 162π

On laskettava pisteen A etäisyys pisteiden B , C ja D määräämästä tasosta BCD .

Olkoon Q se tason BCD piste, joka on lähimpänä pistettä A . Tällöin vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan.



Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit \overline{BC} ja \overline{BD} .

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (-3 - (-2))\overline{i} + (3 - (-5))\overline{j} + (0 - 0)\overline{k} \\ &= -\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = -\overline{i} + 8\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= (0 - (-2))\overline{i} + (0 - (-5))\overline{j} + (10,5 - 0)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 5\overline{j} + 10,5\overline{k}\end{aligned}$$

Taso sisältää pisteen $B(-2, -5, 0)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2 - s + 2t \\ y = -5 + 8s + 5t \\ z = 10,5t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalityyppisiä lukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2 - s + 2t; -5 + 8s + 5t; 10, 5t).$$

Muodostetaan vektorin \overline{AQ} lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (-2 - s + 2t - 6)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t - 0)\overline{j} + (10, 5t - 0)\overline{k} \\ &= (-8 - s + 2t)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t)\overline{j} + 10,5t\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori \overline{AQ} on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$ ja $\overline{BD} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 10,5\overline{k}$ vastaan.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{BD} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-8 - s + 2t)\bar{i} + (-5 + 8s + 5t)\bar{j} + 10,5t\bar{k}) \cdot (-\bar{i} + 8\bar{j}) = 0 \\ ((-8 - s + 2t)\bar{i} + (-5 + 8s + 5t)\bar{j} + 10,5t\bar{k}) \cdot (2\bar{i} + 5\bar{j} + 10,5\bar{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-8 - s + 2t) \cdot (-1) + (-5 + 8s + 5t) \cdot 8 + 10,5t \cdot 0 = 0 \\ (-8 - s + 2t) \cdot 2 + (-5 + 8s + 5t) \cdot 5 + 10,5t \cdot 10,5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 65s + 38t - 32 = 0 \\ 38s + 139,25t - 41 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{8}{21}$ ja $t = \frac{4}{21}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{8}{21}$ ja $t = \frac{4}{21}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -2 - s + 2t = -2 - \frac{8}{21} + 2 \cdot \frac{4}{21} = -2 \\ y = -5 + 8s + 5t = -5 + 8 \cdot \frac{8}{21} + 5 \cdot \frac{4}{21} = -1 \\ z = 10,5t = 10,5 \cdot \frac{4}{21} = 2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(-2, -1, 2)$.

Pisteen A etäisyys tasosta BCD on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori \overline{AQ} ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= (-2 - 6)\vec{i} + (-1 - 0)\vec{j} + (2 - 0)\vec{k} \\ &= -8\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{69} \approx 8,3$$

Pisteen A etäisyys tasosta BCD on $\sqrt{69} \approx 8,3$. Siten poratun reiän pituus on 8,3 cm.

Vastaus 8,3 cm