MFKA:n Lyhyen matematiikan preliminääri kevät 2019 - RATKAISUT

1. A-osa

a) Sievennä $5-2(3x-1)$.

b) Sievennä lauseke $\left(\frac{2x}{3}\right)^2-\frac{2x^2}{9}$.

c) Ratkaise yhtälö $\frac{3x+5}{3}=1$.

(12 p)

Ratkaisu:

a) $5-2(3x-1)$

$=5-6x+2$ 2p (sulkeet avattu)

$=-6x+7$ 2p (sievennetty)

(myös $7-6x$ käy vastaukseksi)

b) $\left(\frac{2x}{3}\right)^2-\frac{2x^2}{9}$

$=\frac{(2x)^2}{3^2}-\frac{2x^2}{9}$

$=\frac{4x^2}{9}-\frac{2x^2}{9}$ 2p (ensimmäisen termin osoittaja 1p, nimittäjä 1p)

$=\frac{4x^2-2x^2}{9}=\frac{2x^2}{9}$ 2p

c) $\frac{3x+5}{3}=1$

$\frac{3x+5}{3}=\frac{3}{3}\quad |\cdot 3$ 1p

$3x+5=3$ 1p

$3x=3-5$

$3x=-2$ 1p

$x=-\frac{2}{3}$ 1p

2. A-osa

Monivalinta. Automaattinen tarkistus.

2. **A/2**

Laske ja valitse oikea vaihtoehto (käytä tarvittaessa KCalc-sovellusta). Kohdissa 2.4, 2.5 ja 2.6 anna vastauksena merkinnän lukuarvo.
(12 p)

2.1. Määritä $f(0)$, kun $f(x) = x^2 - 5x + 4$

- (x) 4
- ( ) 0
- ( ) x = 1 tai x = 4
- ( ) x = −1 tai x = −4
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

2.2. Geometrisen lukujonon $5;\ 1{,}2 \cdot 5;\ 1{,}2^2 \cdot 5;\ \ldots$ kahdeksantoista ensimmäisen jäsenen summa on

- (x) noin 640
- ( ) noin 0
- ( ) noin −130
- ( ) noin 134
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

2.3. Suoran neliöpohjaisen pyramidin tilavuus, kun pohjasärmän pituus on $\sqrt{3}$ cm ja korkeus on 4 cm, on

- (x) 4 cm^3
- ( ) 12 cm^3
- ( ) noin 12,6 cm^3
- ( ) noin 2,3 cm^3
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

2.4. $\binom{15}{7}$

- (x) = 6435
- ( ) ≈ 2,1
- ( ) = 32 432 400
- ( ) ≈ 0,27
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

2.5. $\log_5 124$

- (x) ≈ 2,995
- ( ) ei voida ratkaista
- ( ) ≈ 4,8
- ( ) ≈ 2,1
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

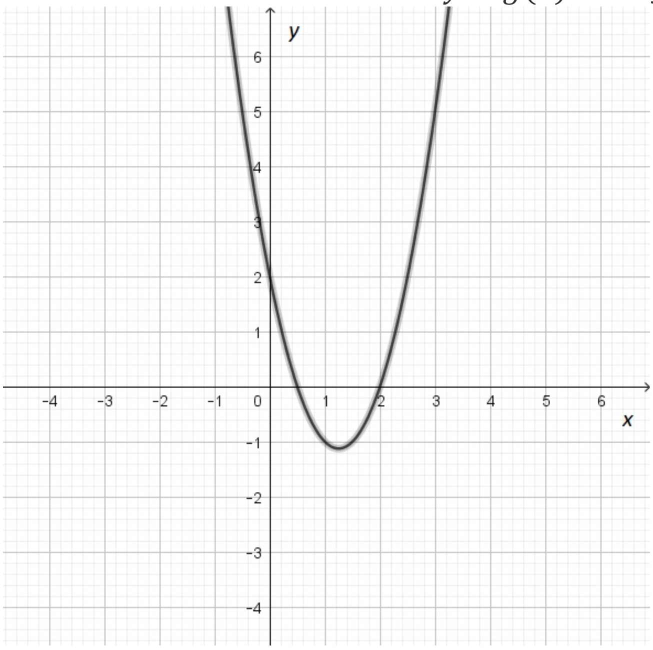
2.6. $\sqrt[6]{1000000}$

- (x) = 10
- ( ) = ±10
- ( ) ≈ 1,0000002
- ( ) = 6000
- ( ) yksikään muista vaihtoehdoista ei ole oikein

(12 p)

3. A-osa

Alla olevassa kuvassa on funktion $y = g(x)$ kuvaaja.



a) Lataa kuva Tehtava_3 tästä ja tallenna se työpöydälle. Avaa kuva valitsemassasi kuvankäsittelyohjelmassa. Piirrä haluamallasi ohjelmalla koordinaatistoon suora $y = 3x + 2$ ja palauta vastaukseksi kuvankaappaus. Vinkki: voit lisätä suoran viivana haluamassasi kuvankäsittelyohjelmassa. (3 p)

Kohtiin b) - c) voit antaa vastauksen yllä olevan kuvan perusteella.

b) Määritä kaikki funktion $g(x)$ mahdolliset nollakohdat. (3 p)

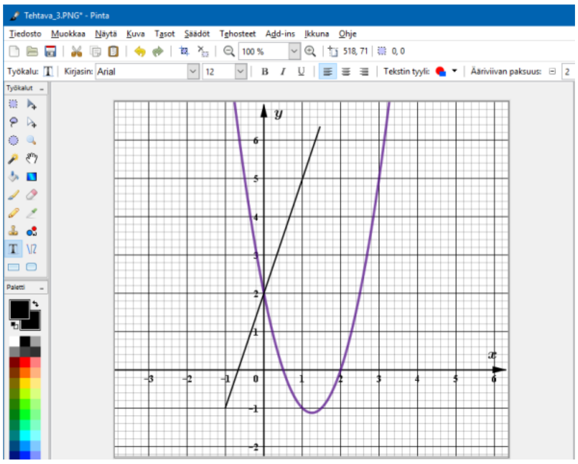
c) Milloin $g(x) < 0$? (3 p)

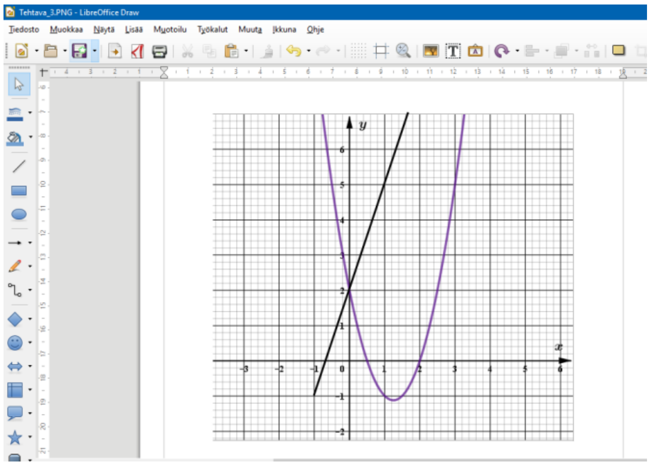
d) Kirjoita matemaattinen merkintä, jonka avulla saat määriteltyä funktion $y = g(x)$ ja suoran $y = 3x + 2$ leikkauspisteet. (3 p)

(12 p)

Ratkaisu:

a) Kuvaaja Pinta-ohjelmalla tai kuvaaja LibreOfficeDraw'lla





Suora kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta 1p

Kuvassa olevan suoran kulmakerroin on 3 1p

Suorassa ei ole alun ja lopun kohdalla pistettä (täplää tai muuta merkkiä) 1p

b) $x \approx 0{,}5$ (tai $\frac{1}{2}$) ja $x = 2$ 2p +1p

Jos edellä mainittujen lisäksi annettu piste (0, 2), niin −1p.

c) $g(x) > 0$,

Kun $x < 0{,}5$ tai $x > 2$. 2p+1p

Jos yhtäsuuruus mukana, vain 2p.

Jos vain todettu "Kun sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella", 1p.

d) Voidaan siis merkitä

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$ 3p

Pelkkä maininta yhtälöparista. 1p

Tai

$g(x) = 3x + 2$ 1p

Selitetty lisäksi, miten saadaan y-koordinaatti. 2p

Jos on jokin teksti, jossa viitataan yhtälöpariin tai yhtälön muodostamiseen, niin 1p.

4. A-osa

a) Tarkastellaan lukujonoa $2, 5, 8, \ldots$ Perustele laskuin, voiko lukujono olla aritmeettinen tai geometrinen. (4 p)

b) Tarkastelleen lukujonoa $a_n = -3 + 2a_{n-1}$, jossa $a_1 = 3, n = 2, 3, \ldots$. Määritä lukujonon toinen ja kolmas jäsen. (2 p)

c) Anna esimerkit tilanteista, jossa mallina voidaan käyttää aritmeettista lukujonoa ja jossa voidaan käyttää geometrista lukujonoa. Kummastakin riittää yksi esimerkki. (2 p)

d) Ylioppilastutkintolautakunnan bittinikkarit käyttivät vahingossa kreikkalaisia aakkosia, kun he kirjoittivat kaavoja Abitin koeympäristöön. Opiskelijan tarkastellessa geometrisen lukujonon yleisen jäsenen lauseketta sen muoto oli seuraava: $y = \sigma \cdot \lambda^{\Psi-1}$. Auta opiskelijaa ja selitä, mitä tässä lausekkeessa symbolit y, σ, λ ja ψ tarkoittavat. (4 p)

(12 p)

Ratkaisu:

a) Peräkkäisten jäsenten erotus $5 - 2 = 3$ ja $8 - 5 = 3$ ja todettu sen olevan vakio. 1p

Todettu, että lukujono on aritmeettinen. 1p

Peräkkäisten jäsenten suhteet laskettu ja todettu, ettei pysy vakiona (murtoluvut $\frac{5}{2}$ ja $\frac{8}{5}$). 1p

Todettu, että lukujono ei ole geometrinen. 1p

b) $a_n = -3 + 2a_{n-1}$, jossa $a_1 = 3$ ja $n = 2, 3, \ldots$.

$a_2 = -3 + 2 \cdot 3 = -3 + 6 = 3$ 1p

$a_3 = -3 + 2 \cdot 3 = -3 + 6 = 3$ 1p

c) Aritmeettinen lukujono:

Jokin esimerkki, jossa on alkuarvo ja lisätään aina sama luku. 1p

- Tölkkien, yms. lukumäärä pinoissa.
- Istuinten lukumäärä konserttisalissa.
- Yksinkertainen korko, kun talletuksia tehdään useita vuodessa

Geometrinen lukujono:

Jokin esimerkki, jossa on alkuarvo ja yhtä suuri prosentuaalinen muutos. 1p

- Yrityksen liikevaihto, kun kasvu prosentteina ja tarkastelu vain vuosittain (puolivuosittain, neljännesvuosittain, jne.)
- Tilillä oleva rahasumma, kun tietty summa talletetaan aina vuoden alussa ja tilillä olevaa rahasummaa tarkastellaan usean vuoden kuluttua.

d) $y = \sigma \cdot \lambda^{\Psi-1}$

y merkitsee lukujonon yleistä jäsentä (tai on jäsenen arvo). 1p

σ merkitsee lukujonon ensimmäistä jäsentä. 1p

λ merkitsee lukujonon suhdelukua (tai peräkkäisten termien suhdetta). 1p

Ψ merkitsee lukujonon jäsenen järjestysnumeroa (tai on n:n arvo). 1p

5. B1-osa

Aukkomonivalinta. Automaattinen tarkistus. Punaisella merkitty oikeat vastaukset.

Valitse jokaisessa kohdassa alasvetovalikosta oikea vaihtoehto. Voit käyttää laskuissa apunasi paperia. Kaikki paperit tulkitaan suttupapereiksi, eikä niitä arvostella. Oikean vastausvaihtoehdon valitseminen riittää ratkaisuksi. (6 · 2 p = 12 p)

Kauppias haluaa myydä 250 euron hintaisen kodinkoneen 199 eurolla. Tällöin hänen pitää alentaa myyntihintaa ___1___ prosentilla. Kodinkoneiden myyntihinnat sisältävät arvolisäveron. ALV suuruus euroina saadaan, kun ___2__. Tällöin alennetun tuotteen veroton myyntihinta on ___3___ euroa.
Kauppias lanseeraa alennuskampanjan, jossa kauppa lupaa antaa alennusta arvonlisäveron verran jokaisesta kodinkoneesta. Alennus annetaan myös tarjoustuotteista ja se lasketaan tarjoushinnasta.

Uuden alennuksen innoittamana asiakas lähtee ostoksille. Asiakas ajattelee, että hänen ei tarvitse tämän alennuskampanjan aikana maksaa lainkaan arvonlisäveroa. Hän on ___4___, koska ___5___. Tämän alennuskampanjan aikana tuotteesta, jonka normaalihinta oli 250 euroa, asiakkaan saama kokonaisalennusprosentti molempien alennusten jälkeen on noin ___6___ prosenttia.

1	2
20,4	myyntihinta kerrotaan n. 19.4 %:lla
79,6	veroton hinta kerrotaan luvulla 1,24
25,6	myyntihintaan lisätään 24 euroa
74,4	verottomaan hintaan lisätään 24 euroa
4,9	myyntihinta kerrotaan 24 %:lla

3	4
160,48	väärässä
151,24	oikeassa
199	
175	
38,52	

5

ALV on kuluttajavero, jonka kuluttaja maksaa aina kokonaisuudessaan

kauppias maksaa ALV:n hänen puolestaan

kauppiaan myöntämä alennus on ALV:n suuruinen

kauppias on maksanut ALV:n silloin kun on ostanut tuotteen myyntiin

6

35,8 / 64,2 / 44,4 / 49,6 / 39,8

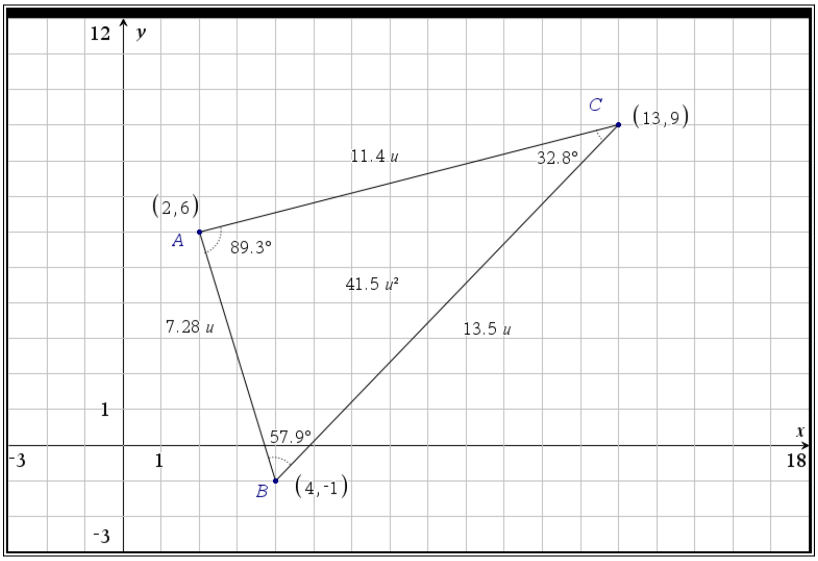
6. B1-osa
Suorakulmaisen kolmion kärjet ovat pisteissä A$(2, 6)$, B$(4, -1)$ ja C$(13, 9)$. Tällöin kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella on $41{,}5$ pinta-alayksikköä.

a) Kolmion kärkipisteiden paikat johdantotekstissä ovat oikein, mutta jotakin muuta siinä on vialla. Piirrä kuva sopivan ohjelman avulla ja etsi ohjelman avulla virhe väitteestä.
b) Osoita Pythagoraan lausetta hyödyntäen johdantotekstin virheellisyys.

(12 p)

Ratkaisu:

a) Kuva TI-Nspirellä.



Mittaamalla kolmion kulmat huomataan, että kolmio ei ole suorakulmainen.

Pisteytys:
Kolmion kärjet oikeissa paikoissa 1p
Kärkipisteet nimetty tai koordinaatit näkyvissä 1p
Piirretty kolmio 1p
Mitattu kolmion pinta-ala 1p
Todettu, että kolmio ei ole suorakulmainen, koska siinä ei ole 90 asteen kulmaa 2p

b) Lasketaan sivujen pituudet.

sivu AC: $\sqrt{(13-2)^2+(9-6)^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ 1p
sivu BC: $\sqrt{(13-4)^2+(9-(-1))^2} = \sqrt{181} \approx 13{,}4$ 1p
sivu AB: $\sqrt{(4-2)^2+(-1-6)^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}3$ 1p
Muodostetaan Pythagoraan lause: $\left(\sqrt{181}\right)^2 = \left(\sqrt{130}\right)^2 + \left(\sqrt{53}\right)^2$ 1p
$$181 = 130 + 53$$
$$181 = 183$$
Pythagoraan lause ei toteudu, joten kolmio ei ole suorakulmainen. 2p
Jos Pythagoraan lause on laskettu vain likiarvoilla, max 4p.

7. B1-osa

Oheisessa taulukossa on lukiokoulutuksen opiskelijamäärät Suomessa vuosina 2001-2016.
Lähde: https://www.stat.fi/til/lop/2016/lop_2016_2017-06-13_fi.pdf <Luettu 2.10.2018>

a) Piirrä sopivalla ohjelmalla oheisen tilaston kuvaaja vuosilta 2001-2016 ja sovita kuvaan lineaarinen malli, eksponentiaalinen malli ja 2. asteen polynomiaalinen malli. Palauta kuvaaja annetulta väliltä ja perustele, mikä malleista mallintaa tilastoa parhaiten vuosina 2001-2016. Ohje: voit käyttää muuttujana aikaa vuosina vuodesta 2000. (8 p)

b) Jos malleja käytettäisiin tulevaisuuden ennustamiseen, mikä malleista mielestäsi ennustaisi parhaiten tilannetta vuonna 2020. Palauta kuva tilanteesta ja perustele. (2 p)

c) Jos ennustettaisiin 50-60 vuotta pidemmälle, mikä malleista ennustaisi parhaiten? Palauta kuva tilanteesta ja kommentoi jokaisen mallin sopivuutta. (2 p)

vuosi	opiskelijoita yhteensä
2001	128642
2002	124644
2003	121816
2004	120531
2005	118111
2006	117260
2007	115253
2008	114240
2009	112088
2010	111778
2011	109046
2012	107412
2013	105898
2014	103914
2015	104060
2016	103550

https://www.stat.fi/til/lop
/2016/lop_2016_2017-06-
13_fi.pdf 2.10.2018

Aineisto

Jokainen aineisto sisältää samat tiedot. Tallenna tiedosto, käynnistä valitsemasi ohjelmisto ja avaa tallentamasi tiedosto ohjelmiston valikosta.

Tehtava_7.ods (LibreOfficeCalc)
Tehtava_7.ggb (GeoGebra)
Tehtava_7.tns (TI-Nspire)
Tehtava_7.vcp (Casio ClassPad Manager)

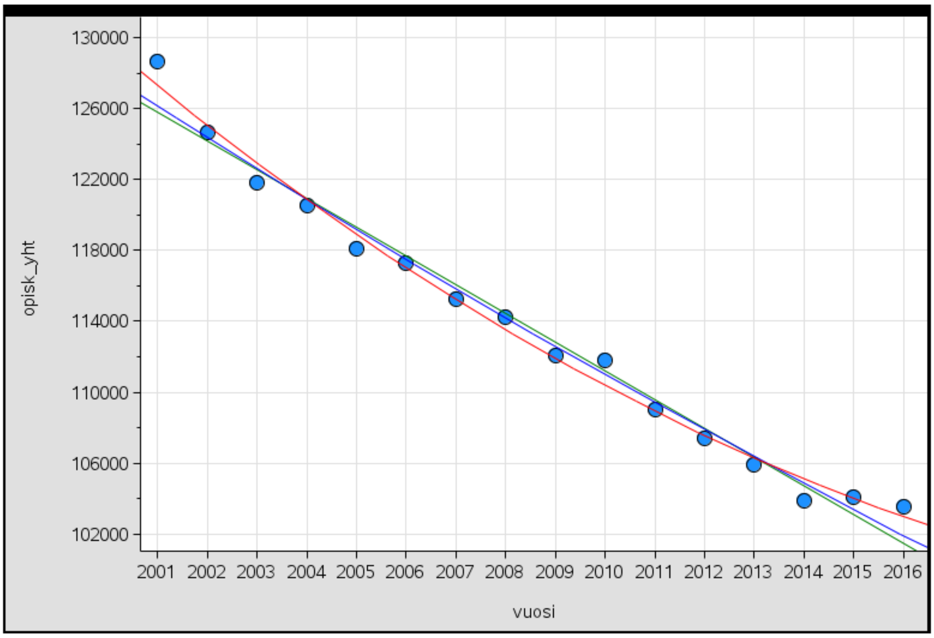
Voit käyttää aineistoa myös CSV-muodossa.

Tehtava_7.csv (CSV-tiedosto, (UTF-8), desimaalierotin piste, kentän erotin pilkku)

Ohjeet CSV-tiedostojen avaamiseen löytyvät sovellukset-valikon kohdasta "Koeympäristön ohjeet" tai napsauttamalla näytön oikean yläreunan i-symbolia.

(12 p)

Ratkaisu:

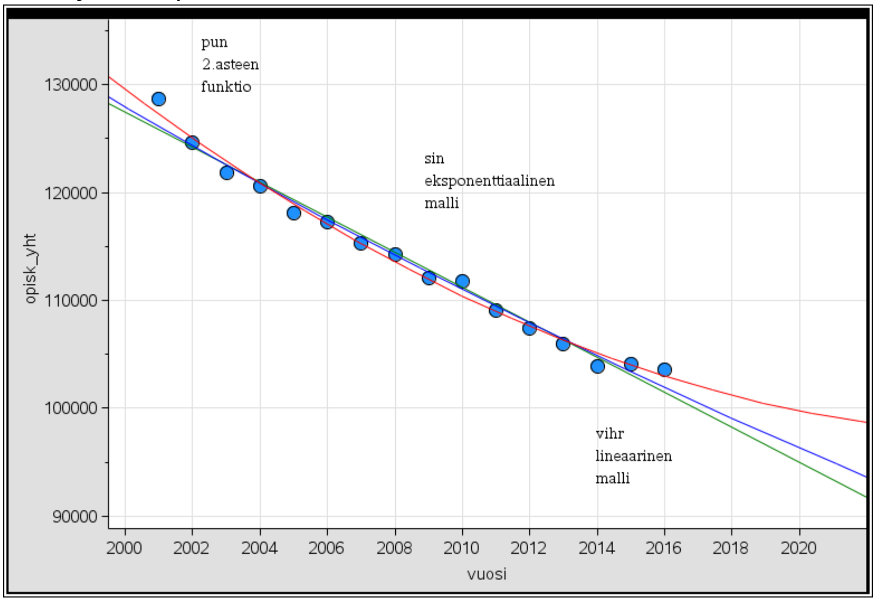


a) Kuvaaja TI-Nspirellä.
Kuvassa punainen käyrä on 2. asteen polynomifunktion kuvaaja, sininen käyrä on eksponenttifunktion kuvaaja ja vihreä suora kuvaa lineaarista mallia.
Malleista parhaiten näyttäisi sopivan 2.asteen polynomifunktion tuottama malli, koska se näyttäisi kulkevan tarkimmin annettujen pisteiden kautta ja/tai 2. asteen malli näyttäisi ottavan parhaiten huomioon tilaston alun ja lopun muutokset.

Pisteytys:

Akselit nimetty	1p	
Kerrottu mikä käyrä vastaa mitäkin mallia	1p	
vuosiakseli rajattu tarkasteluvälille näkyvissä vuodet min 2000 ja max 2017	1p	
Mallinnettu suora	1p	
Mallinnettu 2. asteen polynomifunktio	1p	
Mallinnettu eksponenttifunktio	1p	
Perusteltu parhaiten sopiva malli	2p	(yht. 8p)

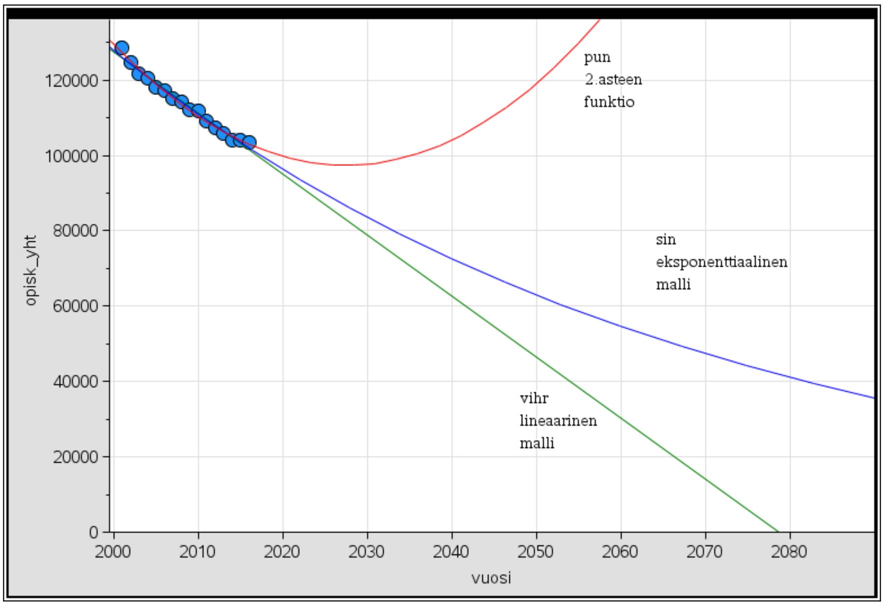
b) Kuvaaja TI-Nspirellä.



2. asteen polynomifunktio ottaa parhaiten huomioon tilastossa tapahtuvan opiskelijoiden vähenemisen hidastumisen.

Pisteytys: 2. asteen polynomifunktio ja perustelu 2p

c) Kuvaaja TI-Nspirellä.



2. asteen polynomi ennustaisi, että lukumäärä lähtisi rajuun kasvuun. Tämä ei varmasti toteudu.

Lineaarinen malli menee nollaan, mikä ei myöskään ole todennäköistä

Eksponentiaalinen malli voisi täten ennustaa tulevaisuutta parhaiten.

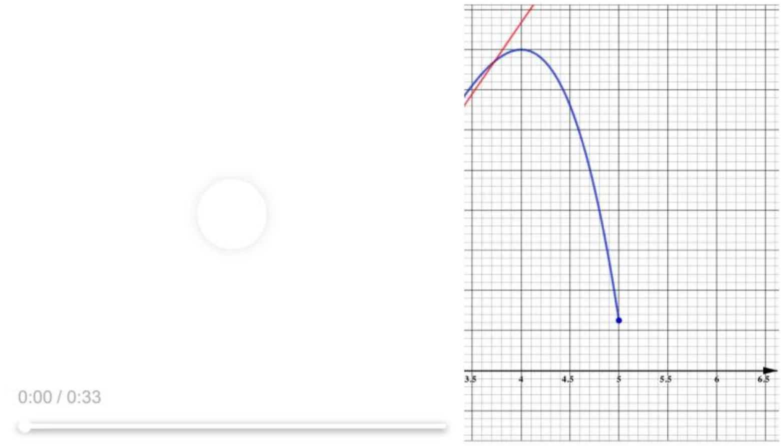
Pisteytys:

Todettu 2.asteen polynomin tuottaman mallin voimakas opiskelijamäärän kasvaminen 1p

Todettu lineaarisen mallin mukainen opiskelijoiden loppuminen 1p

8. B1-osa

Olkoon polynomifunktio $f(x)$ määritelty välillä $0 \leq x \leq 5$. Oheisessa videossa on funktion $y = f(x)$ kuvaaja annetulla välillä ja kuvaajalle on piirretty tangentti pisteeseen A. Vastaa videon avulla alla oleviin kysymyksiin.



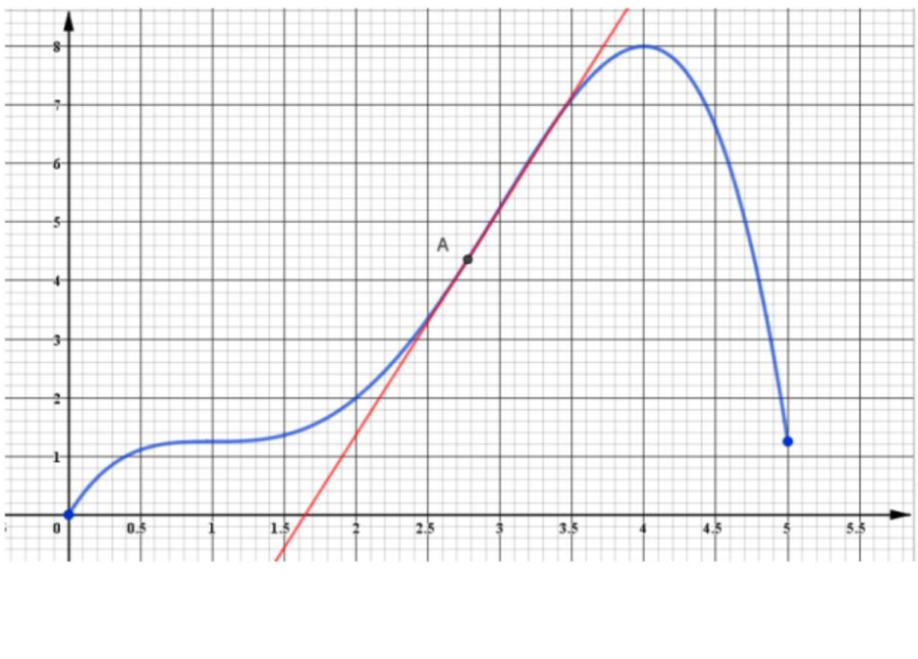
Voit myös avata videon Aineistot -välilehdeltä klikkaamalla tästä.

a) Mitä funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin kuvaa? (2 p)
b) Tee selkoa derivaatan merkeistä välillä $0 < x < 5$. (3 p)
c) Selitä sanallisesti, miten suljetulla välillä olevan polynomifunktion suurin ja pienin arvo voidaan määrittää. Määritä lisäksi videon perusteella annetun funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo. (4 p)
d) Tarkastellaan funktion kulkua kohdassa $x = 1$. Millä matematiikan termillä tällaista funktion kohtaa kutsutaan? Tee lyhyesti selkoa funktion ja sen derivaattafunktion kulusta tässä kohdassa. (3 p)

(12 p)

Ratkaisu:

Pysäytyskuva videolta tarkastelua varten.



a)

Tangentin kulmakerroin kuvaa funktion
- hetkellistä muutosnopeutta ko. kohdassa 1p
- derivaatan arvoa ko. kohdassa 1p (yht. 2p)

b) **Vaihtoehto 1:**
Funktion derivaatta saa epänegatiivisia arvoja, kun $0 < x \leq 4$ ja negatiivisia, kun $4 < x < 5$.

2p+1p

Jos derivaatan nollakohtaa kohdassa x = 1 ei ole huomioitu max 2p

Vaihtoehto 2:
Derivaatan merkit voi ilmoittaa myös kulkukaavion tai merkkikaavion avulla. Alla esimerkkinä Abitti-editorilla tehty versio, jossa mukana myös funktion kulku (ei tarvita b) kohdassa).

	0		1		4		5
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	ei ä a.	$\nearrow$	max	$\searrow$	

3p (yht. 3p)

Muiden osittain oikeiden vastausten pisteytysehdotuksia:

- Positiivisia, kun $x < 4$ ja negatiivisia kun $x > 4$. 2p (Jos vain toinen 1p.)
- Positiivisia, kun $x \leq 4$ ja negatiivisia kun $x > 4$. 2p (Jos vain toinen 1p.)
- Arvo nolla, kun $x = 1$ tai kun $x = 4$. 1p

c) Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa, joissa derivaatan merkki muuttuu. 2p

(Videon perusteella $f(0) = 0$; $f(1) \approx 1{,}2$; $f(4) = 8$ ja $f(5) \approx 1{,}2$.)

Vastaus em. perustelun lisäksi. Funktion suurin arvo on 8. 1p

Funktion pienin arvo on 0. 1p (yht. 4p)

d)

- Kyseinen kohta on terassikohta. 1p
- Derivaatan nollakohta. 1p
- Kohta ei ole funktion ääriarvokohta.
  (Tai derivaatan merkki ei vaihdu ko. kohdassa.) 1p (yht. 3p)

9. B1-osa

Asuinalueiden asuntojen neliöhintojen muodostumiseen vaikuttavat kysynnän ja tarjonnan ohella monet tekijät, kuten alueiden vetovoimaisuus, asuntokannan ikä ja tehdyt investoinnit. Liitteenä on Tilastokeskuksen keräämä taulukko vanhojen osakehuoneistojen velattomista neliöhinnoista elokuussa 2018.

	A	B	C	D	E	F
1	Alue	Kauppojen lukumäärä 2018	Neliöhinta 2018 eur/m²	Indeksi 2018, kun 2015=100	Indeksin kuukausi-muutos, %	Indeksin vuosi-muutos, %
2	Koko maa	3267	2090	102	-1,1	-0,1
3	Etelä-Suomi	2011	2525	105,4	-0,1	2
4	Länsi-Suomi	557	1673	95,3	-4,1	-5,9
5	Itä-Suomi	384	1396	87,9	-3,4	-6,8
6	Pohjois-Suomi	297	1455	95,9	-2,1	-1,3
7	Helsinki	638	4113	110,8	0,1	3,6
8	Espoo-Kauniainen	249	3351	102,5	-0,3	-2,3
9	Vantaa	160	2721	104	0,1	3,7
10	Tampere	133	2425	102,8	-4,6	-1,2
11	Turku	159	2119	109,2	-2	4,5
12	Oulu	140	1826	99,3	-1,8	-0,4

Taulukko: Suomen virallinen tilasto (SVT): Osakeasuntojen hinnat [verkkojulkaisu]. ISSN=2323-878X. elokuu 2018, Liitetaulukko 1. Vanhojen osakehuoneistojen velattomat neliöhinnat, elokuu 2018 1). Helsinki: Tilastokeskus [luettu: 10.10.2018]. http://www.stat.fi/til/ashi/2018/08/ashi_2018_08_2018-09-27_tau_001_fi.html

a) Oletetaan neliöhintojen muuttuneen samassa suhteessa kuin indeksin. Muodosta yhtälö, jonka avulla voidaan määrittää koko maan elokuun 2015 osakehuoneistojen velaton neliöhinta. Ratkaise muodostamasi yhtälö ja anna vastaus euron tarkkuudella. (2 p)

b) Mikä olisi pitänyt olla Turun osakehuoneistojen velaton neliöhinta elokuussa 2015, jos hinta olisi muuttunut vuoden 2018 elokuusta samassa suhteessa kuin indeksi? (2 p)

c) Turussa vuoden 2015 elokuussa toteutunut todellinen osakehuoneistojen velaton neliöhinta oli $1919\ €/m^2$ (lähde Tilastokeskus). Kuinka monta prosenttia Turussa indeksin avulla laskettu osakehuoneistojen velaton neliöhinta vuoden 2015 elokuussa on suurempi kuin toteutunut osakehuoneistojen velaton neliöhinta vuoden 2015 elokuussa promillen tarkkuudella? (2 p)

d) Kuinka monta prosenttia korkeampi oli indeksi elokuussa 2017 Länsi-Suomessa verrattuna Itä-Suomeen? (6 p)

Aineisto

Tehtava_9.png (tilasto kuvana)

Jokainen tiedosto sisältää saman materiaalin. Tallenna tiedosto ja avaa sulkeissa mainittuun ohjelmaan.

Tehtava_9.ods (LibreOffice Calc)
Tehtava_9.ggb (GeoGebra)
Tehtava_9.tns (TI-Nspire) Huom! Sarakkeiden otsikot ovat ohjelmassa lyhennetyt, joten katso ylläolevasta kuvasta pidemmät otsikot.
Tehtava_9.vcp (Casio ClassPad Manager)

Voit käyttää aineistoa myös CSV-muodossa.

Tehtava_9.csv (CSV-tiedosto, desimaalierotin piste, kentän erotin pilkku)

Ohjeet CSV-tiedostojen avaamiseen löytyvät sovellukset-valikon kohdasta "Koeympäristön ohjeet" tai napsauttamalla näytön oikean yläreunan i-symbolia.

Ratkaisu:

a) Merkitään neliöhintaa vuonna 2015 muuttujalla x ja saadaan verrantomuotoiseksi yhtälöksi

$$\frac{x}{2090} = \frac{100}{102}.$$

Vaihtoehtoisesti yhtälö voi olla

$$102 \cdot x = 100 \cdot 2090.$$

Saadaan muuttujalle $x = \frac{2090 \cdot 100}{102} = 2049{,}02\ (\frac{€}{m^2})$.

Ratkaisuksi euron tarkkuudella $2049\ €/m^2$.

yhtälö + vastaus yht. 2p

Pyöristysvirhe tai pyöristämättä jättäminen -1p.

b) Merkitään tuntematonta velatonta neliöhintaa elokuussa 2015 muuttujalla y ja muodostetaan verrantomuotoinen yhtälö.

$$\frac{y}{2119} = \frac{100}{109{,}2}$$

$$\rightarrow y = 1940{,}476 \ldots \approx 1940{,}48 \frac{€}{m^2}$$

tai $1940\ €/m^2$.

yhtälö + vastaus yht. 2p

c) Turussa vuoden 2015 elokuussa toteutunut todellinen osakehuoneistojen velaton neliöhinta oli $1919\,\frac{€}{m^2}$.
Kuinka monta prosenttia Turussa indeksin avulla laskettu osakehuoneistojen velaton neliöhinta vuoden 2015 elokuussa on suurempi kuin toteutunut osakehuoneistojen velaton neliöhinta vuoden 2015 elokuussa promillen tarkkuudella? Verrataan siis b-kohdan tulosta arvoon 1919.

$$\frac{1940-1919}{1919}=\frac{21}{1919}=0{,}010943\ldots\approx 1{,}1\ \%$$

vertailu + pyöristetty vastaus 2p

d) Itä-Suomessa indeksi 87,9 vuonna 2018 elokuussa ja laskenut vuodessa elokuusta 2017 6,8 %.
Länsi-Suomessa indeksi 95,3 vuonna 2018 elokuussa ja laskenut vuodessa elokuusta 2017 5,9 %.
Määritetään ensin indeksit vuodelle 2017.
Itä-Suomen indeksi vuonna 2017 elokuussa on muuttuja x.

$$x\cdot(1-0{,}068)=87{,}9$$
$$x\cdot 0{,}932=87{,}9\rightarrow x=94{,}31$$

2p

Länsi-Suomen indeksi vuonna 2017 elokuussa on muuttuja y.

$$y\cdot(1-0{,}059)=95{,}3$$
$$y\cdot 0{,}941=95{,}3\rightarrow y=101{,}28$$

2p

Lasketaan prosentuaalinen ero.

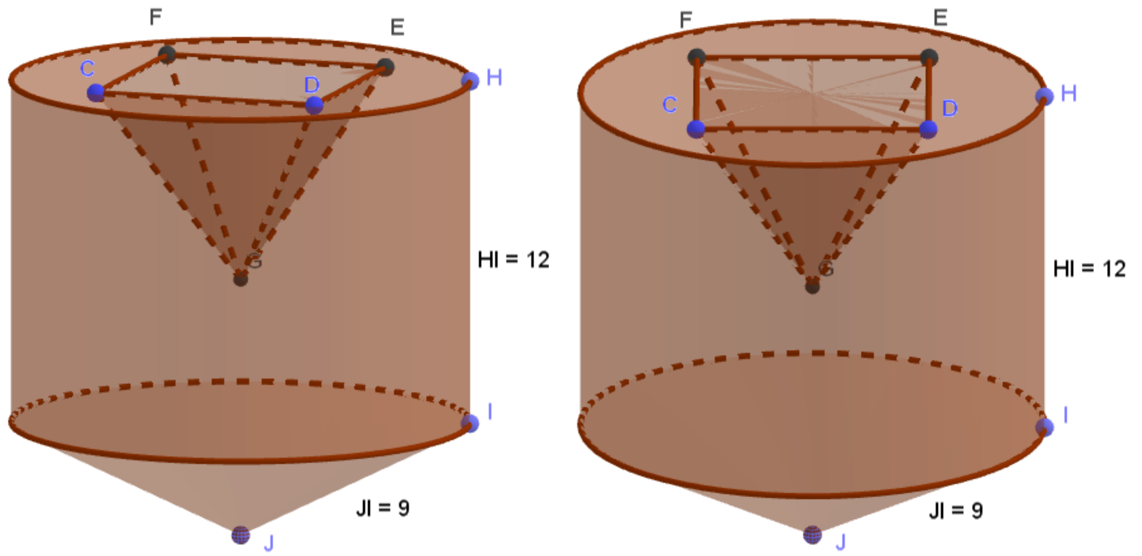
$$\frac{101{,}28-94{,}31}{94{,}31}=\frac{6{,}97}{94{,}31}=0{,}0739\ldots\approx 7{,}4\ \%$$

2p

10. B2-osa

Matti päättää valmistaa ylioppilasjuhliinsa suklaakonvehteja erikoisen malliseen suppiloa muistuttavaan muottiin, joka koostuu suorasta ympyräpohjaisesta lieriöstä ja suorasta ympyräpohjaisesta kartiosta. Suklaata valutetaan muottiin ja lopuksi muottiin asetetaan neliöpohjaisen pyramidin muotoinen toffeesydän, jonka jokaisen särmän pituus on 8 mm. Matti haluaa määrittää yhden konvehdin tilavuuden ja hahmottelee GeoGebra-ohjelmalla kuvaa suklaakonvehdista. Koko konvehdin leveys on 16 mm ja suoran ympyräpohjaisen lieriön korkeus 12 mm. Ympyräpohjaisen kartion sivujanan pituus on 9 mm.

Määritä laskemalla suklaakonvehdissa olevan suklaan tilavuus, kun oletetaan muotin olevan ihan täynnä suklaata silloin, kun toffeesydän on asetettu paikoilleen. Kuvat alla esittävät samaa suklaakonvehtia, mutta ovat vain eri suunnista.



Aineisto

Tehtava_10_1.png Matin hahmotelma suklaakonvehdista png-kuvatiedostona.

Tehtava_10_2.ggb Matin hahmotelma suklaakonvehdista GeoGebra-tiedostona ilman koordinaatistoa (ei täysin mittakaavassa).

Tehtava_10_3.ggb Matin hahmotelma suklaakonvehdista GeoGebra-tiedostona, jossa koordinaatisto ja kuvan tiedot ovat näkyvissä. Appletissa pystyt pyörittämään kappaletta ja mittaamaan tilavuuden likiarvon, mutta appletti on laadittu siten, että se ei anna oikeaa arvoa. *Tätä ggb-tiedostoa ei ole välttämätöntä hyödyntää vastaamisessa. Tämän takia muita tiedostomuotoja ei ole tarjolla. Mikäli muokkaat GeoGebra-tiedostoa ja haluat palata alkuperäiseen, poista ladattu tiedosto ja tallenna alkuperäinen tiedosto uudestaan.*

Ratkaisu:

Tarkastellaan suoraa ympyräkartiota, jonka halkaisija on 16 mm, joten säde on 8 mm ja sivujanan pituus on 9 mm.

$$V(suklaan\ tilavuus) = V(ympyrälieriö) + V(kartio) - V(pyramidi)$$

hyvä alku 1p

Merkitään kartion korkeutta muuttujalla x. Ratkaistaan Pythagoraan lauseella suoran ympyräkartion korkeus.

$$9^2 = 8^2 + x^2$$
$$\rightarrow\ x = 4{,}1231\ldots (mm)$$

1p

Suoran ympyräkartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} \cdot A(pohjan\ pinta - ala) \cdot korkeus$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 4{,}1231\ldots$$
$$= 276{,}3331\ldots (mm^3)$$

2p

Suoran ympyrälieriön tilavuus on

$$V = A(pohjan\ pinta - ala) \cdot korkeus$$
$$= \pi \cdot 8^2 \cdot 12$$
$$= 2412{,}7431\ldots (mm^3)$$

2p

Neliöpohjainen pyramidi, jonka särmät ovat 8 mm, on puolikas oktaedrista, jonka tilavuuden kaava löytyy MAOL:ista (MATEMATIIKKA > Geometria > Avaruuskappaleita > Säännölliset monitahokkaat). Särmän pituus on kaavassa $a = 8$ mm.

$$V(neliöpohj\ pyramidi)$$
$$= \frac{V(oktaedri)}{2}$$
$$= \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{2}$$
$$= \frac{\frac{8^3\sqrt{2}}{3}}{2}$$

tähän asti olevista päätelmistä 2p

$$= 120{,}6795\ldots (mm^3)$$

2p (pyramidin tilavuudesta yht. 4p)

TAI Vaihtoehtoisesti neliöpohjaisen pyramidin tilavuuden laskemiseksi
voidaan ratkaista pyramidin korkeus käyttämällä kahdesti Pythagoraan lausetta.
Selvitetään ensin pohjaneliön lävistäjä y yhtälöstä

$$8^2 + 8^2 = y^2$$
$$\rightarrow y = 11{,}3137 \ldots (mm)$$

(+1p)

Puolet lävistäjästä on 5,6568 … mm.
Ratkaistaan pyramidin korkeus z Pythagoraan lausetta käyttäen yhtälöstä

$$5{,}6568^2 + z^2 = 8^2$$
$$\rightarrow z = 5{,}6568 \ldots (mm)$$

(+1p)

Tilavuus neliöpohjaiselle pyramidille lasketaan

$$V(pyramidi) = \frac{1}{3} \cdot A(neliö) \cdot korkeus$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5{,}6568 \ldots$$
$$= 120{,}6795 \ldots (mm^3)$$

(laskuperiaate +1p, vastaus +1p)

yht. 4p pyramidista

Lasketaan lopuksi suklaakonvehdin suklaan tilavuus

$$V(suklaan\ tilavuus) = V(ympyrälieriö) + V(kartio) - V(pyramidi)$$
$$= 2412{,}7431 \ldots + 276{,}3331 \ldots - 120{,}6795 \ldots = 2568{,}396 \ldots (mm^3)$$

Vastaus:

Suklaakonvehdissa olevan suklaan tilavuus on n. 2600 mm^3 tai 2,6 cm^3 tai 2,6 ml.

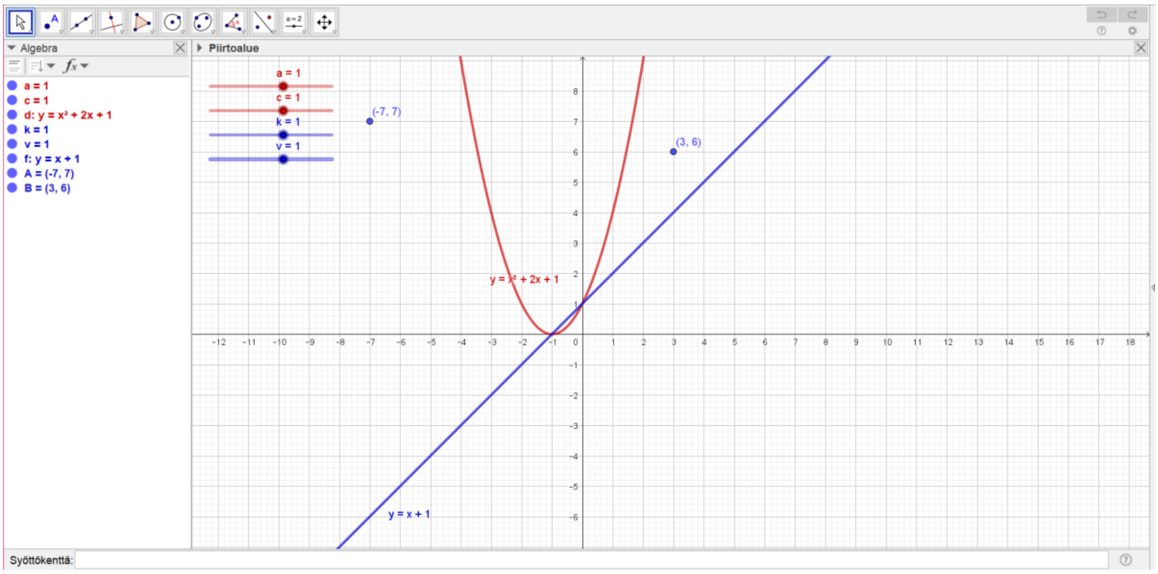
2p

11. B2-osa

Paraabeli on muotoa $y = ax^2 + 2x + c$. Paraabelista tiedetään, että se aukeaa ylöspäin, kulkee pisteen $(-7, 7)$ kautta ja sivuaa suoraa $y = kx + v$ origossa. Tästä suorasta tiedetään, että se kulkee pisteen $(3, 6)$ kautta. Avaa appletti tästä ja etsi sen avulla kertoimille a, c, k ja v likiarvot (4 p). Määritä lisäksi laskemalla tai jollakin muulla tavalla perustellen tarkat arvot kertoimille (8 p).

Ratkaisu:

Appletin lähtötilanne:



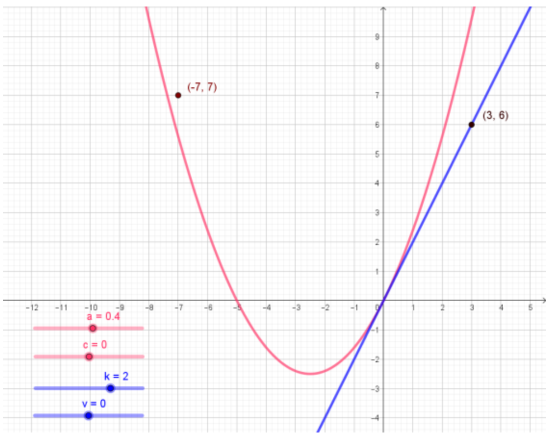
Liukukytkimiä säätämällä saadaan, että

$$c = 0,$$
$$v = 0$$
$$k = 2.$$

1p /kerroin

Kuvasta saadaan selville, että paraabelin lausekkeessa oleva kerroin a on lukujen 0,4 ja 0,5 välillä. Likiarvoksi käy kumpikin arvo. 1p (yht. 4p)

Lopputilanteen kuva, kun $a = 0{,}4$:



Laskemalla: 2p / yhden kertoimen perustelut, yht 8p

Suoran $y = kx + v$ vakiotermi saadaan sijoittamalla suoralla olevan origon koordinaatit $(0, 0)$ suoran lausekkeeseen (suoran yhtälön pitää tällöin toteutua).

$$0 = k \cdot 0 + v$$
$$\rightarrow v = 0$$

TAI ratkaisuksi käy myös, että ”koska suora kulkee pisteen $(0, 0)$ kautta, on vakion oltava 0”.

2p

Koska suora kulkee sekä origon että pisteen $(3, 6)$ kautta, voidaan laskea kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x2 - x_1} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$

2p

Koska paraabeli kulkee origon $(0, 0)$ kautta, voidaan sijoittaa koordinaatit paraabelin lausekkeeseen

$$0 = a \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c$$

$$\rightarrow c = 0$$

2p

Paraabeli kulkee pisteen $(-7, 7)$ kautta, joten saadaan yhtälö

$$7 = a \cdot (-7)^2 + 2 \cdot (-7)$$

$$\rightarrow a = \frac{3}{7}$$

2p (yht. 8p)

12. B2-osa

Kuva: Pertti Jarla, Fingerpori. Stripin numero on 162 ja se on ilmestynyt ensimmäisen kerran Helsingin Sanomissa vuonna 2007. Copyright Jarla/ PIB.

Yhdellä bitillä voi olla kaksi vaihtoehtoista tilaa; bitti voi olla joko 0 tai 1. Kahdella bitillä voidaan esittää neljä vaihtoehtoista tilaa: 00, 01, 10, 11 ja kolmella bitillä voidaan esittää jo kahdeksan eri tilaa: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 ja 111. Bittien lisääntyessä kasvaa vaihtoehtoisten tilojen lukumäärä eksponentiaalisesti.

Binäärilukujärjestelmässä kantalukuna on 2 ja lukuja kirjoitettaessa käytetään vain numeroita 0 ja 1, esimerkkeinä binääriluvut 1011 ja 010010. Binäärijärjestelmän viimeinen (oikeanpuoleisin) numero ilmaisee kantaluvun potenssin 2^0 lukumäärän, toiseksi viimeinen numero ilmaisee kantaluvun potenssin 2^1 lukumäärän, kolmanneksi viimeinen potenssin 2^2 lukumäärän, jne.

Binäärilukujärjestelmän luku 1 muunnetaan kymmenjärjestelmän luvuksi laskemalla $1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Binäärijärjestelmän luku 10 muunnetaan kymmenjärjestelmään laskemalla $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$. Binäärijärjestelmän luku 11 on vastaavasti kymmenjärjestelmässä $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3$. Binäärijärjestelmän luku 110 tarkoittaa kymmenjärjestelmässä $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6$.

Tehtävä:

a) Muunna binäärijärjestelmän luku 10101 kymmenjärjestelmään käyttäen esiteltyä teoriaa. (8 p)
b) Kuinka monta prosenttia pienempi on binäärijärjestelmän luku 10101 kuin kymmenjärjestelmän luku 10101 promillen tarkkuudella? (2 p)
c) Kuinka monta prosenttia binäärijärjestelmän luku 10 on pienempi kuin binäärijärjestelmän luku 11 promillen tarkkuudella? (2 p)

Ratkaisu:

a) Muunnetaan binäärijärjestelmän luku 10101 kymmenjärjestelmään seuraavalla laskulla
$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ 6p
$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
$= 16 + 0 + 4 + 0 + 1$
$= 21$ 2p (yht. 8p)

Jos opiskelija kirjoittanut ilman perusteluja vain vastauksen, annetaan 0p.

b) Hyödynnetään vertailussa a-kohdan tulosta.
$\frac{10101-21}{10101} = 0{,}997920997 \ldots$
$\approx 99{,}8\ \%$
TAI
$\frac{21}{10101} = 0{,}002079002079\ = 0{,}207900 \ldots \%$
$(tai\ 2{,}079002079E - 3)$
$100\ \% - 0{,}207900 \ldots \% = 99{,}7920997 \ldots \%$
$\approx 99{,}8\ \%$ 2p

c) Binäärijärjestelmän lukujen 10 ja 11 kymmenjärjestelmässä oleva esitysmuoto on annettu johdantotekstissä.
Binääriluku 10 vastaa kymmenjärjestelmässä lukua 2.
Binääriluku 11 vastaa kymmenjärjestelmässä lukua 3.
1p (muunnokset poimittu tehtävänannosta)
Verrataan erotusta lukuun 3.
$\frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots \approx 33{,}3\ \%$ 1p (yht. 2p)

13. B2-osa

Kouluterveyskysely 2017
Kysymys: Aamupalan syöminen kouluviikon aikana.
Vastaajat lukion 1. ja 2. vuoden opiskelijat, vastanneiden lukumäärä 34 678.
Vastaus: Ei syö aamupalaa joka arkiaamu, osuus 30,1 %.
Lähde: https://thl.fi/fi/web/lapset-nuoret-ja-perheet/tutkimustuloksia 26.9.2018

Terveystiedon kurssilla teet vastaavanlaista tutkimusta omassa lukiossasi. Valitset tutkimukseesi koulustasi satunnaiset 30 opiskelijaa.

a) Arvioi, kuinka moni opiskelija tutkimuksessasi tulisi vastaamaan, että syö aamupalan joka arkipäivä. Perustele arviosi sanallisesti.

b) Muodosta joka arkipäivä aamupalaa syövien opiskelijoiden lukumäärän todennäköisyysjakauma 30 opiskelijan otoksessasi ja esitä se pylväskaaviona. Palauta tehtävässä kaavio ja todennäköisyydet lukumäärille 20, 21 ja 22.

c) Binomitodennäköisyyttä voidaan arvioida eli approksimoida likimäärin normaalijakauman avulla, jonka odotusarvo (keskiarvo) on $E(X) = np$ ja keskihajonta $D(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Binomitodennäköisyydellä tapahtumalle "20, 21 tai 22 syö aamupalan joka arkipäivä" saadaan todennäköisyydeksi P(20, 21 tai 22 syö aamupalan joka arkipäivä) = 0,448924133 ja normaalijakauman avulla on $P(20 < X < 22) = 0{,}3093720902$. Arvio on melko huono, koska normaalijakauman approksimaatiossa ei ole otettu huomioon ns. jatkuvuuskorjausta.

Mitä jatkuvuuskorjaus tarkoittaa? Laske normaalijakauma-approksimaatio jatkuvuuskorjauksella.
(12 p)

Ratkaisu:

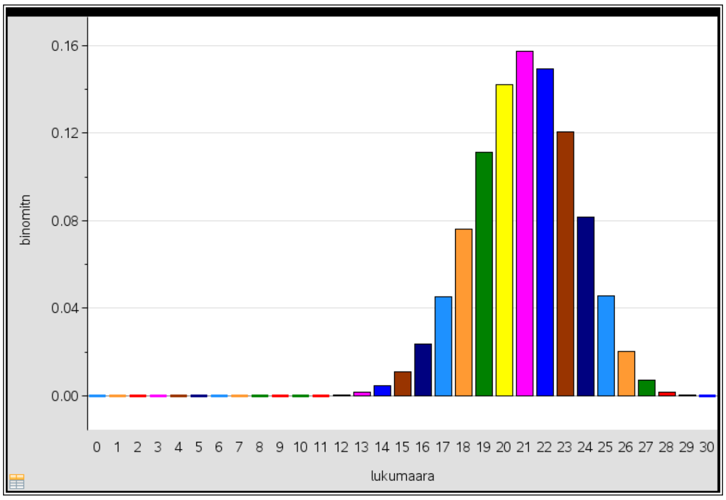
a) Arvio perustuu kouluterveyskyselyyn. Sen perusteella $1 - 0{,}301 = 0{,}699$ eli 69,9 % syö aamupalan joka arkipäivä. Tämän perusteella voidaan laskea odotusarvo vastaajien lukumäärälle. Odotettavissa $30 \cdot 0{,}699 = 20{,}97$ eli 21 opiskelijaa syö aamupalan joka arkipäivä.

Pisteytys:
Arvio perustuu kouluterveyskyselyyn 1p
Käytetty vastatapahtumaa ja saatu aamupalan syömiselle todennäköisyys 69,9 % 2p
Laskettu odotusarvo 21 opiskelijaa 1p (yht. 4p)

b) Taulukossa binomitodennäköisyydet kaikille lukumäärille.
Keltaisella pohjalla ovat pyydetyt todennäköisyydet.
Alla on pyydetty pylväskuvaaja binomijakauman arvoista.

Pisteytys:
Kaikki kolme arvoa oikein 2p
Pylväskuvaaja 2p (yht. 4p)

lukumäärä	binomitodennäköisyys
0	2.2750705454403 E-16
1	1.584991007903 E-14
2	5.337101780931 E-13
3	1.1567857813552 E-11
4	1.8132905358403 E-10
5	2.1896838670008 E-9
6	2.1187555689835 E-8
7	1.6869598208478 E-7
8	1.1262978837115 E-6
9	6.3935802346677 E-6
10	3.1179855237437 E-5
11	1.3165037034714 E-4
12	4.84066602597 E-4
13	0.0015564850482687
14	0.0043891105430888
15	0.010872162195771
16	0.02366997936517
17	0.04526762127566
18	0.075922272892567
19	0.1113544369685
20	0.14222662223435
21	0.15727955852209
22	0.14941795570258
23	0.12069120443287
24	0.081747240211806
25	0.045561186106087
26	0.02034709244068
27	0.0070001809356641
28	0.0017417393713916
29	2.7894966676656 E-4
30	2.1593113739737 E-5



c) Binomijakauma on diskreettijakauma, mutta normaalijakauma on jatkuva eli binomijakaumassa lasketaan todennäköisyyksiä vain yksittäisille arvoille ja jatkuvassa jakaumassa on muuttujalla arvoja myös jokaisen yksittäisen arvon välissä. Jatkuvuuskorjauksessa lukumäärän 20 arvot ovat välillä $19{,}5 - 20{,}5$ ja lukumäärän 22 välillä $21{,}5 - 22{,}5$. Joten normaalijakauma approksimaatiossa käytetään alarajana lukua 19.5 ja ylärajana lukua 22.5. Tällöin approksimaatioksi saadaan laskinohjelmaa hyödyntäen normCdf(19.5,22.5,20.97,2.5123634291241) ▸ 0.4494959382, missä
19,5 on alaraja,
22,5 on yläraja,
20,97 on keskiarvo, koska $30 \cdot 0{,}699 = 20{,}97$ ja
2,512… on keskihajonta koska $\sqrt{30 \cdot 0{,}699 \cdot (1 - 0{,}699)} = 2{,}51236\ldots$

Pisteytys:

Selitetty jatkuvan ja diskreetin jakauman eroja	2p	
Laskettu keskiarvo ja keskihajonta oikein	1p	
Laskettu approksimaatio 0,449	1p	(yht. 4p)