

1 Lausekkeilla laskeminen

1.1 Lauseke ja laskutoimitukset

1.

a) Sijoitetaan muuttujan x paikalle luku 3 ja lasketaan lausekkeen arvo:

$$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

b) Sijoitetaan muuttujan x paikalle luku 3 ja lasketaan lausekkeen arvo:

$$-(3)^3 + 3 = -9 + 3 = -6.$$

2.

a) $Q(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 = 9 + 15 = 24$

b) $Q(-1) = (-1)^2 + 5 \cdot (-1) = 1 - 5 = -4$

c) $Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1}{4} + \frac{10}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

3.

a) Sijoitetaan -1 muuttujan a paikalle ja lasketaan merkityt laskutoimitukset.

$$Q(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + (-1) = -3 \cdot 1 - 1 = -3 - 1 = -4$$

b) Lausekkeessa on kaksi muuttujaa. Sijoitetaan muuttujan x paikalle $-\frac{1}{2}$ ja muuttujan y paikalle -1 .

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{4} + \overset{2)}{3} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

4.

a) Sijoitetaan muuttujan x paikalle -2 .

$$6 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^3 = -12 - 3 \cdot (-8) = -12 + 24 = 12$$

b) Sijoitetaan $\frac{1}{3}$ muuttujan x paikalle ja lasketaan merkityt laskutoimitukset.

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{3}{18} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{3}{18} - \frac{24}{18} + 1 = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

5.

$$\begin{aligned}\text{a) } (2x+7)+(-5x-4) &= 2x+7-5x-4 \\ &= (2-5)x+7-4 \\ &= -3x+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (-3y+2)-(5y-7) &= -3y+2-5y+7 \\ &= (-3-5)y+2+7 \\ &= -8y+9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 2a-(-3a^2+6a-1) &= 2a+3a^2-6a+1 \\ &= 3a^2+(2-6)a+1 \\ &= 3a^2-4a+1\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 - 2x + 3) + (-4x + 6) &= x^2 - 2x + 3 - 4x + 6 \\ &= x^2 + (-2 - 4)x + 3 + 6 \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (5x^2 - 1) - (-3x^2 + x - 4) &= 5x^2 - 1 + 3x^2 - x + 4 \\ &= (5 + 3)x^2 - x - 1 + 4 \\ &= 8x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\text{a) } (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 2x - 3) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 + 4x^2 - 2x - 3 \\ &= x^3 + (-4 + 4)x^2 + (5 - 2)x - 2 - 3 \\ &= x^3 + 3x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } a^2 - (-a^2 + 3) - (5a^2 + a) &= a^2 + a^2 - 3 - 5a^2 - a \\ &= (1 + 1 - 5)a^2 - a - 3 \\ &= -3a^2 - a - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 2x - (3x + y - 5) + (y - 3) &= 2x - 3x - y + 5 + y - 3 \\ &= (2 - 3)x + (-1 + 1)y + 5 - 3 \\ &= -x + 2\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}P(x) - R(x) &= (x^2 - 5) - (-3x^2 + x - 1) \\&= x^2 - 5 + 3x^2 - x + 1 \\&= (1 + 3)x^2 - x - 5 + 1 \\&= 4x^2 - x - 4\end{aligned}$$

9.

a) $5 \cdot 3a = (5 \cdot 3)a = 15a$

b) $6 \cdot 3 \text{ kg} = (6 \cdot 3) \text{ kg} = 18 \text{ kg}$

c) $7m^2 \cdot (-2) = (7 \cdot (-2))m^2 = -14m^2$

10.

a) $(-5) \cdot (-7a) = (-5) \cdot (-7)a = 35a$

b) $(4 - 6x) \cdot 3 = 4 \cdot 3 - 6x \cdot 3 = 12 - (6 \cdot 3)x = 12 - 18x$

c) $3(-a^2 + 6a - 1) = 3 \cdot (-a^2) + 3 \cdot 6a + 3 \cdot (-1) = -3a^2 + 18a - 3$

11.

a) $2(-5t + 3) = 2 \cdot (-5t) + 2 \cdot 3 = -10t + 6$

b) $-(5t^2 - 3t + 1) = -5t^2 + 3t - 1$

c) $(-2 + 3k) \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} + 3k \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} + \frac{3}{2}k = \frac{3}{2}k - 1$

12.

$$\begin{aligned}\text{a) } -3(5-4x) + (6x-9) &= -3 \cdot 5 + (-3) \cdot (-4x) + (6x-9) \\ &= -15 + 12x + 6x - 9 \\ &= (12+6)x + (-15-9) \\ &= 18x - 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 7x - 4(3-5x) &= 7x + (-4) \cdot 3 + (-4) \cdot (-5x) \\ &= 7x - 12 + 20x \\ &= (7+20)x - 12 \\ &= 27x - 12\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\text{a) } 8(3x - 4) - 6(-x - 5) &= 8 \cdot 3x + 8 \cdot (-4) + (-6) \cdot (-x) + (-6) \cdot (-5) \\ &= 24x - 32 + 6x + 30 \\ &= (24 + 6)x + (-32 + 30) \\ &= 30x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } -9(2 - 7x) - 3(5x + 2) + 2(x - 4) \\ &= -9 \cdot 2 + (-9) \cdot (-7x) + (-3) \cdot 5x + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot x + 2 \cdot (-4) \\ &= -18 + 63x - 15x - 6 + 2x - 8 \\ &= (63 - 15 + 2)x - 18 - 6 - 8 \\ &= 50x - 32\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}\text{a) } P(x) - Q(x) &= (4 - x) - (x^2 - 2x) \\ &= 4 - x - x^2 + 2x \\ &= -x^2 + (-1 + 2)x + 4 \\ &= -x^2 + x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 2 \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x) &= 2(4 - x) + 3(x^2 - 2x) \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-x) + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot (-2x) \\ &= 8 - 2x + 3x^2 - 6x \\ &= 3x^2 + (-2 - 6)x + 8 \\ &= 3x^2 - 8x + 8\end{aligned}$$

15.

$$\text{a) } R(x) = 15P(x) - 16Q(x)$$

$$= 15(13x^2 - 25x) - 16(-5x^2 - 6x + 47)$$

$$= 15 \cdot 13x^2 + 15 \cdot (-25x) + (-16) \cdot (-5x^2) + (-16) \cdot (-6x) + (-16) \cdot 47$$

$$= 195x^2 - 375x + 80x^2 + 96x - 752$$

$$= (195 + 80)x^2 + (-375 + 96)x - 752$$

$$= 275x^2 - 279x - 752$$

$$\text{b) } P(-14) = 13 \cdot (-14)^2 - 25 \cdot (-14)$$

$$= 2898$$

$$Q(12) = -5 \cdot 12^2 - 6 \cdot 12 + 47$$

$$= -745$$

$$R(-9) = 275 \cdot (-9)^2 - 279 \cdot (-9) - 752$$

$$= 24\,034$$

16.

Sievennetään polynomit $R(x)$ ja $H(x)$.

$$\begin{aligned}R(x) &= -4 \cdot P(x) - 8 \cdot Q(x) \\ &= -4(-41x + 15) - 8(19x^2 - 15x + 20) \\ &= -152x^2 + 284x - 220\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(x) &= 6(P(x) - 7 \cdot Q(x)) \\ &= 6 \cdot P(x) - 42 \cdot Q(x) \\ &= 6 \cdot (-41x + 15) - 42 \cdot (19x^2 - 15x + 20) \\ &= -798x^2 + 384x - 750\end{aligned}$$

Lasketaan polynomien arvot annetuilla muuttujan x arvoilla.

$$P(-23) = -41 \cdot (-23) + 15 = 958$$

$$P\left(\frac{2}{5}\right) = -41 \cdot \frac{2}{5} + 15 = -\frac{7}{5}$$

$$P(35) = -41 \cdot 35 + 15 = -1420$$

$$Q(-23) = 19 \cdot (-23)^2 - 15 \cdot (-23) + 20 = 10\,416$$

$$Q\left(\frac{2}{5}\right) = 19 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 15 \cdot \frac{2}{5} + 20 = \frac{426}{25} = 17\frac{1}{25}$$

$$Q(35) = 19 \cdot 35^2 - 15 \cdot 35 + 20 = 22\,770$$

$$R(-23) = -152 \cdot (-23)^2 + 284 \cdot (-23) - 220 = -87\,160$$

$$R\left(\frac{2}{5}\right) = -152 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 284 \cdot \frac{2}{5} - 220 = -\frac{3268}{25} = -130\frac{18}{25}$$

$$R(35) = -152 \cdot 35^2 + 284 \cdot 35 - 220 = -176\,480$$

$$H(-23) = -798 \cdot (-23)^2 + 384 \cdot (-23) - 750 = -431\,724$$

$$H\left(\frac{2}{5}\right) = -798 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 384 \cdot \frac{2}{5} - 750 = -\frac{18\,102}{25} = -724\frac{2}{25}$$

$$H(35) = -798 \cdot 35^2 + 384 \cdot 35 - 750 = -964\,860$$

Nyt voidaan täydentää taulukko.

Polynomien lauseke sievennettynä	$x = -23$	$x = \frac{2}{5}$	$x = 35$
$P(x) = -41x + 15$	958	$-\frac{7}{5}$	-1420
$Q(x) = 19x^2 - 15x + 20$	10 416	$17\frac{1}{25}$	22 770
$R(x) = -152x^2 + 284x - 220$	-87 160	$-130\frac{18}{25}$	-176 480
$H(x) = -798x^2 + 384x - 750$	-431724	$-724\frac{2}{25}$	-964 860

17.

$$\text{a) nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{matka} = \text{nopeus} \cdot \text{aika} & \text{nopeus} = 85, \text{ aika} = x \\ = 85x & \end{array}$$

b) Sijoittamalla matkan lausekkeeseen muuttujan x paikalle 1,5, saadaan 1,5 tunnissa ajettu matka.

$$\text{matka} = 85 \cdot 1,5 = 127,5 \text{ km}$$

Autolla päästään 127,5 kilometrin päähän.

18.

a) Posti- ja käsittelykulut on 5,90 €. Lisäksi kuvien kappalehintaa on 0,19 €.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishintaa erilaisilla kuvien määrillä.

Kuvien lukumäärä	Kokonaishinta (€)
1	$5,90 + 0,19 \cdot 1$
2	$5,90 + 0,19 \cdot 2$
5	$5,90 + 0,19 \cdot 5$
x	$5,90 + 0,19 \cdot x$

Jos kuvia on x kappaletta, kokonaishinta on $K(x) = 5,90 + 0,19x$.

b) Lili teettää 120 valokuvaa, joten $x = 120$. Kokonaishinta saadaan sijoittamalla $x = 120$ polynomiin K .

$$K(120) = 5,90 + 0,19 \cdot 120 = 28,7$$

120 valokuvan teettäminen maksaa 28,7 €.

19.

a) Auton vuorokausimaksu on 69,80 €/vrk. Kolariturva lisää kustannuksia 3,57 €/vrk ja navigointilaitteesta veloitetaan 25,50 €:n kertamaksu.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishintaa erilaisilla vuokrauksen vuorokausimäärillä.

Vuorokausien lukumäärä	Kokonaishinta (€)
1	$25,50 + (69,80 + 3,57) \cdot 1$
2	$25,50 + (69,80 + 3,57) \cdot 2$
10	$25,50 + (69,80 + 3,57) \cdot 10$
x	$25,50 + (69,80 + 3,57) \cdot x = 73,37x + 25,50$

Jos autoa vuokrataan x vuorokautta, kokonaishinta on
 $R(x) = 73,37x + 25,50$.

b) Otso vuokraa autoa viideksi vuorokaudeksi, joten $x = 5$. Kokonaishinta saadaan sijoittamalla $x = 5$ polynomiin R .

$$R(5) = 73,37 \cdot 5 + 25,50 = 392,35.$$

Otsolle tulee kustannettavaa 392,35€.

20.

a) Lumilautasetti vuokraaminen päiväksi maksaa 40 €. Lisäpäivät maksavat 28 €/vrk.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishinta erilaisilla vuokrauksen päivien määrillä.

Päivien lukumäärä	kokonaishinta (€)
1	40
2	$40 + 28 \cdot 1$
10	$40 + 28 \cdot 9$
x	$40 + 28 \cdot (x - 1) = 28x + 12$

Jos lumilautasettiä vuokrataan x päiväksi, kokonaishinta on $40 + 28 \cdot (x - 1) = 28x + 12$.

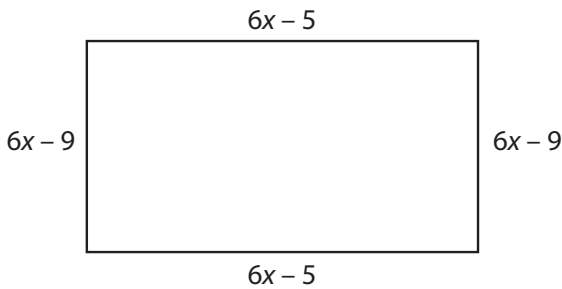
b) Viiden päivän välinevuokran kokonaiskustannukset saadaan sijoittamalla $x = 5$ a-kohdassa saatuun lausekkeeseen: $28 \cdot 5 + 12 = 152$.

Viiden päivän välinevuokran maksaa 152 €.

21.

a) Lasketaan suorakulmion korkeus: $(6x - 5) - 4 = 6x - 9$.

Piirretään kyseinen suorakulmio.



Nyt voidaan laskea piiri: $P(x) = 6x - 5 + 6x - 9 + 6x - 5 + 6x - 9 = 24x - 28$.

b) Sijoitetaan piirin lausekkeeseen $x = 3$.

$$P(3) = 24 \cdot 3 - 28 = 44$$

Piirin pituus on 44 pituusyksikköä, kun $x = 3$.

22.

Puolukkarasia maksaa 5,50 €. Santeri myy keskimäärin 40 rasiaa päivässä. Joten keskimäärin Santeri saa myytyä $5,50 \text{ €} \cdot 40 = 220 \text{ €}$:n edestä puolukoita.

Tutkitaan taulukoimalla myyntituloja, kun Santeri saa myytyä keskimääräistä enemmän puolukoita.

Myytyjä puolukkarasioita (keskimääräistä enemmän)	Myyntitulot
1	$220 + 5,5 \cdot 1$
2	$220 + 5,5 \cdot 2$
10	$220 + 5,5 \cdot 10$
x	$220 + 5,5 \cdot x = 5,5x + 220$

Jos Santeri saa myytyä x kpl enemmän kuin keskimäärin, myyntitulot ovat $5,5x + 220$.

b) Sijoittamalla a-kohdassa saatuun lausekkeeseen $x = 11$, saadaan myyntitulot, kun Santeri saa myytyä 11 rasiaa keskimääräistä enemmän.

$$5,5 \cdot 11 + 220 = 280,5$$

Myyntitulot ovat tuolloin 280,50 €.

23.

$$\begin{aligned} \text{a) } R(-4) &= -3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 1 \\ &= -3 \cdot 16 + 3 \cdot (-4) - 1 \\ &= -48 - 12 - 1 \\ &= -61 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{3}\right) &= -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 1 \\ &= -3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \\ &= -\frac{3}{9} + \frac{3}{3} - 1 \\ &= -\frac{3^{\cancel{3}}}{9} + 1 - 1 \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} \text{a) } y - (3y + 8) + (-2y + 4) &= y - 3y - 8 - 2y + 4 \\ &= y - 3y - 2y - 8 + 4 \\ &= -4y - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2a + (a - 3) - (3a + 9) &= 2a + a - 3 - 3a - 9 \\ &= 2a + a - 3a - 3 - 9 \\ &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5(2x + 1) + (-3x + 2) &= 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + (-3x) + 2 \\ &= 10x + 5 - 3x + 2 \\ &= 10x - 3x + 5 + 2 \\ &= 7x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -2(x - 1) - (6x - 3) &= -2 \cdot x + (-2) \cdot (-1) - 6x + 3 \\ &= -2x + 2 - 6x + 3 \\ &= -2x - 6x + 2 + 3 \\ &= -8x + 5 \end{aligned}$$

25.

Ensin sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} & 3(x-1) + (x^2 + 3x - 5) - 2(x^2 - 4) \\ &= 3 \cdot x + 3 \cdot (-1) + x^2 + 3x - 5 + (-2) \cdot x^2 + (-2) \cdot (-4) \\ &= 3x - 3 + x^2 + 3x - 5 - 2x^2 + 8 \\ &= x^2 - 2x^2 + 3x + 3x - 3 - 5 + 8 \\ &= -x^2 + 6x \end{aligned}$$

Sitten lasketaan lausekkeen arvo, kun $x = -1$.

$$\begin{aligned} -(-1)^2 + 6 \cdot (-1) &= -1 + 6 \cdot (-1) \\ &= -1 - 6 \\ &= -7 \end{aligned}$$

26.

a) Kuntoklubin BG vuosijäsensyys maksaa 85 €. Lisäksi käyntimaksu on 5,50 €/kerta.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishintaa erilaisilla käyntikertojen määrällä.

Käyntikertojen määrä	Kokonaishinta (€)
1	$85 + 5,50 \cdot 1$
2	$85 + 5,50 \cdot 2$
9	$85 + 5,50 \cdot 9$
x	$85 + 5,50 \cdot x$

Jos käyntikertoja on x kpl, kokonaishinta on $85 + 5,50x$ (€).

CityTeamin vuosimaksu on 25 €. Lisäksi käyntimaksu on 7,50 €/kerta.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishintaa erilaisilla käyntikertojen määrällä.

Käyntikertojen määrä	Kokonaishinta (€)
1	$25 + 7,50 \cdot 1$
2	$25 + 7,50 \cdot 2$
9	$25 + 7,50 \cdot 9$
x	$25 + 7,50 \cdot x$

Jos käyntikertoja on x kpl, kokonaishinta on $25 + 7,50x$ (€).

b) Lasketaan, kuinka paljon Kuntoklubi BG:n vuosikustannukset ovat, kun $x = 32$.

$$85 + 5,50 \cdot 32 = 261$$

Lasketaan, kuinka paljon CityTeamin vuosikustannukset ovat, kun $x = 32$.

$$25 + 7,50 \cdot 32 = 265$$

Kuntoklubi BG:a on edullisempi käyttää, jos käyntikertoja on vuodessa 32.

27.

a)

$$\frac{(\text{naisen maksimisyke}) - (\text{miehen maksimisyke})}{(\text{miehen maksimisyke})} = \frac{(226 - 18) - (220 - 18)}{(220 - 18)}$$
$$= 0,029702970297$$
$$\approx 0,030$$
$$= 3,0\%$$

b) 30-vuotiaan maksimisyke on: $226 - 30 = 196$.

60 % 30-vuotiaan maksimisykkeestä on

$$196 \cdot 60\% = 196 \cdot 0,60 = 117,6 \approx 118.$$

70 % 30-vuotiaan maksimisykkeestä on

$$196 \cdot 70\% = 196 \cdot 0,70 = 137,2 \approx 137.$$

30-vuotiaan naisen harjoittelusyke tulisi olla 118–137.

1.2 Polynomien tulo

28.

$$\text{a) } 3x^3 \cdot 2x^2 = 3 \cdot 2 \cdot x^{3+2} = 6x^5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -3x^3(4x^2 + 3x - 5) &= -3x^3 \cdot 4x^2 + (-3x^3) \cdot 3x + (-3x^3) \cdot (-5) \\ &= -3 \cdot 4 \cdot x^{3+2} + (-3) \cdot 3 \cdot x^{3+1} + (-3) \cdot (-5) \cdot x^3 \\ &= -12x^5 - 9x^4 + 15x^3 \end{aligned}$$

29.

$$\text{a) } 2x \cdot 3x^2 \cdot 7x^5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x^{1+2+5} = 42x^8$$

$$\text{b) } -4x^2 \cdot 2x \cdot 5x^3 = -4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x^{2+1+3} = -40x^6$$

$$\text{c) } -6x^3 \cdot x \cdot (-3x^6) = -6 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot x^{3+1+6} = 18x^{10}$$

$$\text{d) } \frac{1}{3}x^2 \cdot 6x \cdot 2x^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 \cdot x^{2+1+2} = 4x^5$$

30.

$$\begin{aligned} \text{a) } 5x(x^2 - 6x + 2) &= 5x \cdot x^2 + 5x \cdot (-6x) + 5x \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 1 \cdot x^{1+2} + 5 \cdot (-6) \cdot x^{1+1} + 5 \cdot 2 \cdot x \\ &= 5x^3 - 30x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -x^2(6x^2 - 3x - 2) &= -x^2 \cdot 6x^2 + (-x^2) \cdot (-3x) + (-x^2) \cdot (-2) \\ &= -1 \cdot 6 \cdot x^{2+2} + (-1) \cdot (-3) \cdot x^{2+1} + (-1) \cdot (-2) \cdot x^2 \\ &= -6x^4 + 3x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (2x^3 - x + 1) \cdot (-3x^4) &= 2x^3 \cdot (-3x^4) + (-x) \cdot (-3x^4) + 1 \cdot (-3x^4) \\ &= 2 \cdot (-3) \cdot x^{3+4} + (-1) \cdot (-3) \cdot x^{1+4} + 1 \cdot (-3) \cdot x^4 \\ &= -6x^7 + 3x^5 - 3x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{2}x^3(4x^2 - 6x + 2) &= \frac{1}{2}x^3 \cdot 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 \cdot (-6x) + \frac{1}{2}x^3 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^{3+2} + \frac{1}{2} \cdot (-6) \cdot x^{3+1} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^3 \\ &= 2x^5 - 3x^4 + x^3 \end{aligned}$$

31.

$$\text{a) } \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{3+1+2} = \frac{6}{36} x^6 = \frac{1}{6}x^6$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{4}x^3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right) &= \frac{3}{4}x^3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) + \frac{3}{4}x^3 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{3+2} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{3+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot x^3 \\ &= \frac{3}{12} x^5 - \frac{6}{12} x^4 + \frac{3}{24} x^3 \\ &= \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^3 \end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned}\text{a) } (2x+3)(4x+5) &= 2x \cdot 4x + 2x \cdot 5 + 3 \cdot 4x + 3 \cdot 5 \\ &= 8x^2 + 10x + 12x + 15 \\ &= 8x^2 + 22x + 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (2-x)(5x^2+3x-2) &= 2 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 3x + 2 \cdot (-2) + (-x) \cdot 5x^2 + (-x) \cdot 3x + (-x) \cdot (-2) \\ &= 10x^2 + 6x - 4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= -5x^3 + 7x^2 + 8x - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (3x-4)^2 &= (3x-4)(3x-4) \\ &= 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-4) + (-4) \cdot 3x + (-4) \cdot (-4) \\ &= 9x^2 - 12x - 12x + 16 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } (2x-6)(2x+6) &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 6 + (-6) \cdot 2x + (-6) \cdot 6 \\ &= 4x^2 + 12x - 12x - 36 \\ &= 4x^2 - 36\end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned}\text{a) } (3x+2)(4+6x) &= 3x \cdot 4 + 3x \cdot 6x + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6x \\ &= 12x + 18x^2 + 8 + 12x \\ &= 18x^2 + 24x + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (x^2+3)(2x+1) &= x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \\ &= 2x^3 + x^2 + 6x + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (2x-7)(1+x) &= 2x \cdot 1 + 2x \cdot x + (-7) \cdot 1 + (-7) \cdot x \\ &= 2x + 2x^2 - 7 - 7x \\ &= 2x^2 - 5x - 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } (x^2-2)(x^2-5) &= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-5) + (-2) \cdot x^2 + (-2) \cdot (-5) \\ &= x^4 - 5x^2 - 2x^2 + 10 \\ &= x^4 - 7x^2 + 10\end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned}\text{a) } (4x-3)(5-2x) &= 4x \cdot 5 + 4x \cdot (-2x) + (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-2x) \\ &= 20x - 8x^2 - 15 + 6x \\ &= -8x^2 + 26x - 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (2-3x^2)(4+x^2) &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot x^2 + (-3x^2) \cdot 4 + (-3x^2) \cdot x^2 \\ &= 8 + 2x^2 - 12x^2 - 3x^4 \\ &= -3x^4 - 10x^2 + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (7x^2-2)(3-x) &= 7x^2 \cdot 3 + 7x^2 \cdot (-x) + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-x) \\ &= 21x^2 - 7x^3 - 6 + 2x \\ &= -7x^3 + 21x^2 + 2x - 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } \left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+2\right) &= \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x \cdot 2 + (-1) \cdot \frac{2}{3}x + (-1) \cdot 2 \\ &= \frac{2}{6}x^2 + x - \frac{2}{3}x - 2 \\ &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2\end{aligned}$$

35.

a) $(3x - 5)(6x^2 - 2x - 1)$

$$= 3x \cdot 6x^2 + 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-1) + (-5) \cdot 6x^2 + (-5) \cdot (-2x) + (-5) \cdot (-1)$$

$$= 18x^3 - 6x^2 - 3x - 30x^2 + 10x + 5$$

$$= 18x^3 - 36x^2 + 7x + 5$$

b)

$$\left(\frac{1}{4}x + 2\right)\left(2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x \cdot 2x^2 + \frac{1}{4}x \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{4}x \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2^{(2)}}{4} x^3 - \frac{2^{(2)}}{12} x^2 + \frac{1^{(3)}}{8} x + 4x^2 - \frac{4^{(8)}}{3} x + 1$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{24}x - \frac{32}{24}x + 1$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + 3\frac{5}{6}x^2 - 1\frac{5}{24}x + 1$$

36.

$$\begin{aligned}\text{a) } (4x+2)^2 &= (4x+2)(4x+2) \\ &= 4x \cdot 4x + 4x \cdot 2 + 2 \cdot 4x + 2 \cdot 2 \\ &= 16x^2 + 8x + 8x + 4 \\ &= 16x^2 + 16x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (2x+3)(2x-3) &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-3) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-3) \\ &= 4x^2 - 6x + 6x - 9 \\ &= 4x^2 - 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (8-x^2)^2 &= (8-x^2)(8-x^2) \\ &= 8 \cdot 8 + 8 \cdot (-x^2) + (-x^2) \cdot 8 + (-x^2) \cdot (-x^2) \\ &= 64 - 8x^2 - 8x^2 + x^4 \\ &= x^4 - 16x^2 + 64\end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} \text{a) } 6x^2 - (x+3)(2x-4) &= 6x^2 - (x \cdot 2x + x \cdot (-4) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-4)) \\ &= 6x^2 - (2x^2 - 4x + 6x - 12) \\ &= 6x^2 - 2x^2 + 4x - 6x + 12 \\ &= 4x^2 - 2x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x(x+2)(x^2-4x) &= (3x \cdot x + 3x \cdot 2)(x^2 - 4x) \\ &= (3x^2 + 6x)(x^2 - 4x) \\ &= 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot (-4x) + 6x \cdot x^2 + 6x \cdot (-4x) \\ &= 3x^4 - 12x^3 + 6x^3 - 24x^2 \\ &= 3x^4 - 6x^3 - 24x^2 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned}\text{a) } 7x + (x+5)(3x-1) &= 7x + (x \cdot 3x + x \cdot (-1) + 5 \cdot 3x + 5 \cdot (-1)) \\ &= 7x + (3x^2 - x + 15x - 5) \\ &= 7x + 3x^2 - x + 15x - 5 \\ &= 3x^2 + 21x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } -2x^2 - (5x-4)(x-8) &= -2x^2 - (5x \cdot x + 5x \cdot (-8) + (-4) \cdot x + (-4) \cdot (-8)) \\ &= -2x^2 - (5x^2 - 40x - 4x + 32) \\ &= -2x^2 - 5x^2 + 40x + 4x - 35 \\ &= -7x^2 + 44x - 35\end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned}\text{a) } 3x \cdot 2x^2 - 5x(3x^2 - 3) &= 3x \cdot 2x^2 - (5x \cdot 3x^2 + 5x \cdot (-3)) \\ &= 6x^3 - (15x^3 - 15x) \\ &= 6x^3 - 15x^3 + 15x \\ &= -9x^3 + 15x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (2x+3)(x-6) - (3-x)(9-x) \\ &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-6) + 3 \cdot x + 3 \cdot (-6) - (3 \cdot 9 + 3 \cdot (-x) + (-x) \cdot 9 + (-x) \cdot (-x)) \\ &= 2x^2 - 12x + 3x - 18 - (27 - 3x - 9x + x^2) \\ &= 2x^2 - 9x - 18 - 27 + 3x + 9x - x^2 \\ &= x^2 + 3x - 45\end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned}\text{a) } 2x(4x+7)(x-1) &= (2x \cdot 4x + 2x \cdot 7)(x-1) \\ &= (8x^2 + 14x)(x-1) \\ &= 8x^2 \cdot x + 8x^2 \cdot (-1) + 14x \cdot x + 14x \cdot (-1) \\ &= 8x^3 - 8x^2 + 14x^2 - 14x \\ &= 8x^3 + 6x^2 - 14x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (x+5)(6-3x) \cdot 3x &= (x \cdot 6 + x \cdot (-3x) + 5 \cdot 6 + 5 \cdot (-3x)) \cdot 3x \\ &= (6x - 3x^2 + 30 - 15x) \cdot 3x \\ &= 6x \cdot 3x + (-3x^2) \cdot 3x + 30 \cdot 3x + (-15x) \cdot 3x \\ &= 18x^2 - 9x^3 + 90x - 45x^2 \\ &= -9x^3 - 27x^2 + 90x\end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned} \text{a) } x^m(x^{2m-3} + x^{3m}) - x^{m-1}(x^{-m+2}) &= x^m \cdot x^{2m-3} + x^m \cdot x^{3m} - (x^{m-1} \cdot x^{-m+2}) \\ &= x^{3m-3} + x^{4m} - (x^1) \\ &= x^{4m} + x^{3m-3} - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x^{n+2}(4x^{1-n} - 8x^{3n-2}) + 16^{4n} &= 2x^{n+2} \cdot 4x^{1-n} + 2x^{n+2} \cdot (-8x^{3n-2}) + 16x^{4n} \\ &= 8x^3 - 16x^{4n} + 16x^{4n} \\ &= 8x^3 \end{aligned}$$

42.

a) Muodostetaan polynomin lauseke taulukon avulla.

Muuttunut lipunhinta (€)	Kävijämäärä	Myyntitulot (€) (hinta · kävijämäärä)
0	6500	$10 \cdot 6500$
1	$6500 - 150$	$(10 + 1)(6500 - 150)$
2	$6500 - 150 \cdot 2$	$(10 + 2)(6500 - 150 \cdot 2)$
x	$6500 - 150 \cdot x$	$(10 + x)(6500 - 150 \cdot x)$

Teatterin viikoittaista myyntituloa kuvaa polynomi

$$\begin{aligned} M(x) &= (10 + x)(6500 - 150x) \\ &= -150x^2 + 5000x + 65\,000 \end{aligned}$$

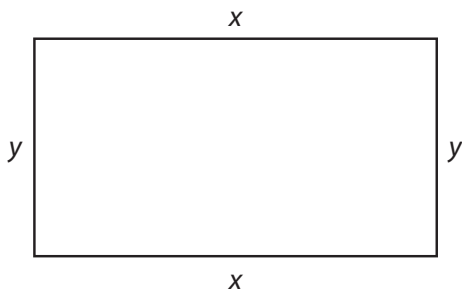
b) Sijoittamalla polynomiin $x = 13,20 - 10 = 3,20$ saadaan myyntitulot, kun lipun hinta on 13,20 €.

$$M(3,2) = -150 \cdot 3,2^2 + 5000 \cdot 3,2 + 65\,000 = 79\,464$$

Kun lipun hinta on 13,20 €, viikon myyntitulot ovat 79 464 €.

43.

a)



Suorakulmion toisen sivun pituus on x ja ympärysmitta on 500 m, joten toisen sivun pituus on

$$500 = 2x + 2y$$

$$y = 250 - x$$

Lauseke $250 - x$ kuvaa toisen sivun pituutta.

b) Suorakulmion pinta-alaa kuvaava polynomi on

$$\begin{aligned} A(x) &= (250 - x) \cdot x \\ &= -x^2 + 250x \end{aligned}$$

c) Sijoittamalla pinta-alaa kuvaavaan polynomiin $x = 67,5$, saadaan suorakulmion pinta-ala, jonka toinen sivu on $67,5$ m pitkä.

$$\begin{aligned} A(67,5) &= -(67,5)^2 + 250 \cdot 67,5 \\ &\approx 12\,300 \end{aligned}$$

Suorakulmion pinta-ala on $12\,300 \text{ m}^2$.

44.

a) Muodostetaan polynomin lauseke taulukon avulla.

Makkaran hinnan korotus (€)	Makkaran kappalehinta (€)	Myytyjä makkaroita	Myyntitulot (hinta · myydyt makkarat)
0	2	1800	$2 \cdot 1800$
$0,20 \cdot 1$	$2 + 0,20 \cdot 1$	$1800 - 110$	$(2 + 0,20 \cdot 1)(1800 - 110 \cdot 1)$
$0,20 \cdot 2$	$2 + 0,20 \cdot 2$	$1800 - 110 \cdot 2$	$(2 + 0,20 \cdot 2)(1800 - 110 \cdot 2)$
$0,20 \cdot x$	$2 + 0,20 \cdot x$	$1800 - 110 \cdot x$	$(2 + 0,20 \cdot x)(1800 - 110 \cdot x)$

Makkaran myyntituloja kuvaava polynomi

$$\begin{aligned} H(x) &= (2 + 0,20x)(1800 - 110x) \\ &= -22x^2 + 140x + 3600 \end{aligned}$$

b) Kun makkaran kappalehinta on 3,20 €, hinnan korotus on $3,20 - 2 = 1,20 = 0,20 \cdot 6$. Joten sijoittamalla $x = 6$ polynomiin H , saadaan myyntitulot, kun makkaran hinta on 3,20 €.

$$\begin{aligned} H(6) &= -22 \cdot 6^2 + 140 \cdot 6 + 3600 \\ &= 3648 \end{aligned}$$

Makkaroitten myynnistä saatavat myyntitulot ovat 3648,00 €.

45.

$$\begin{aligned} \text{a) } -4x^2 \cdot x \cdot 3x^5 &= -4 \cdot 3 \cdot x^{2+1+5} \\ &= -12x^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 9x^2(2x^3 - 3x^2 + 6x) &= 9x^2 \cdot 2x^3 + 9x^2 \cdot (-3x^2) + 9x^2 \cdot 6x \\ &= 9 \cdot 2 \cdot x^{2+3} + 9 \cdot (-3) \cdot x^{2+2} + 9 \cdot 6 \cdot x^{2+1} \\ &= 18x^5 - 27x^4 + 54x^3 \end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}\text{a) } (6+5x)(3x+8) &= 6 \cdot 3x + 6 \cdot 8 + 5x \cdot 3x + 5x \cdot 8 \\ &= 18x + 48 + 15x^2 + 40x \\ &= 15x^2 + 40x + 18x + 48 \\ &= 15x^2 + 58x + 48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (2x-5)(3x+1) &= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 1 + (-5) \cdot 3x + (-5) \cdot 1 \\ &= 6x^2 + 2x - 15x - 5 \\ &= 6x^2 - 13x - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (x^2-7)(3-2x^2) &= x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot (-2x^2) + (-7) \cdot 3 + (-7) \cdot (-2x^2) \\ &= 3x^2 - 2x^4 - 21 + 14x^2 \\ &= -2x^4 + 3x^2 + 14x^2 - 21 \\ &= -2x^4 + 17x^2 - 21\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{4}{5}x-4\right) &= \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}x \cdot (-4) + 3 \cdot \frac{4}{5}x + 3 \cdot (-4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot x^{1+1} + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot x + 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot x + 3 \cdot (-4) \\ &= \frac{4}{10} x^2 - \frac{4}{2} x + \frac{12}{5} x - 12 \\ &= \frac{2}{5} x^2 - \frac{20}{10} x + \frac{24}{10} x - 12 \\ &= \frac{2}{5} x^2 + \frac{4}{10} x - 12 \\ &= \frac{2}{5} x^2 + \frac{2}{5} x - 12\end{aligned}$$

47.

$$\begin{aligned} \text{a) } -12x^2 - (5x+2)(4-9x) &= -12x^2 - (5x \cdot 4 + 5x \cdot (-9x) + 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-9x)) \\ &= -12x^2 - (20x - 45x^2 + 8 - 18x) \\ &= -12x^2 - 20x + 45x^2 - 8 + 18x \\ &= -12x^2 + 45x^2 - 20x + 18x - 8 \\ &= 33x^2 - 2x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -8x^3(x-2)(5x^2-x) &= -8x^3(x \cdot 5x^2 + x \cdot (-x) + (-2) \cdot 5x^2 + (-2) \cdot (-x)) \\ &= -8x^3(5x^3 - x^2 - 10x^2 + 2x) \\ &= -8x^3 \cdot 5x^3 + (-8x^3) \cdot (-x^2) + (-8x^3) \cdot (-10x^2) + (-8x^3) \cdot 2x \\ &= -40x^6 + 8x^5 + 80x^5 - 16x^4 \\ &= -40x^6 + 88x^5 - 16x^4 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned}\text{a) } (7x-1)^2 &= (7x-1)(7x-1) \\ &= 7x \cdot 7x + 7x \cdot (-1) + (-1) \cdot 7x + (-1) \cdot (-1) \\ &= 49x^2 - 7x - 7x + 1 \\ &= 49x^2 - 14x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (4-5x)(4+5x) &= 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5x + (-5x) \cdot 4 + (-5x) \cdot 5x \\ &= 16 + 20x - 20x - 25x^2 \\ &= -25x^2 + 16\end{aligned}$$

49.

a) Muodostetaan polynomin lauseke taulukon avulla.

Osakkeiden hinnanmuutos (€)	Osakkeiden määrä (kpl)	Osakkeen hinta	Osakkeiden yhteisarvo (€)
-1	$4700 - 400 \cdot (-1)$	$7,50 + (-1)$	$(4700 - 400 \cdot (-1))(7,50 + (-1))$
+1	$4700 - 400 \cdot 1$	$7,50 + 1$	$(4700 - 400 \cdot 1)(7,50 + 1)$
+5	$4700 - 400 \cdot 5$	$7,50 + 5$	$(4700 - 400 \cdot 5)(7,50 + 5)$
x	$4700 - 400 \cdot x$	$7,50 + x$	$(4700 - 400 \cdot x)(7,50 + x)$

Osakkeiden yhteisarvoa kuvaa polynomi

$$\begin{aligned} P(x) &= (4700 - 400 \cdot x)(7,50 + x) \\ &= -400x^2 + 1700x + 35\,250 \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan polynomiin x :n paikalle luku $11,50 - 7,50 = 4$.

$$\begin{aligned} P(4) &= -400 \cdot 4^2 + 1700 \cdot 4 + 35\,250 \\ &= 35\,650 \end{aligned}$$

c) Sijoitetaan polynomiin x :n paikalle luku $5,80 - 7,50 = -1,7$.

$$\begin{aligned} P(-1,7) &= -400 \cdot (-1,7)^2 + 1700 \cdot (-1,7) + 35\,250 \\ &= 31\,204 \end{aligned}$$