6 Kertaus: Lausekkeet ja yhtälöt

6.1 Kurssin keskeiset asiat

1.

a) $(2x^2+x)-3(x+2)=(2x^2+x)-(3\cdot x+3\cdot 2)$

$$\begin{aligned}&=2x^2+x-(3x+6)\\&=2x^2+x-3x-6\\&=2x^2-2x-6\end{aligned}$$

b) $-9(x+1)+5(x+2)=-9\cdot x+(-9)\cdot 1+5\cdot x+5\cdot 2$

$$\begin{aligned}&=-9x-9+5x+10\\&=-4x+1\end{aligned}$$

c) $(3x-2)(4-5x)=3x\cdot 4+3x\cdot(-5x)+(-2)\cdot 4+(-2)\cdot(-5x)$

$$\begin{aligned}&=12x-15x^2-8+10x\\&=-15x^2+22x-8\end{aligned}$$

d) $4x^2-(x-1)(7x-4)=4x^2-(x\cdot 7x+x\cdot(-4)+(-1)\cdot 7x+(-1)\cdot(-4))$

$$\begin{aligned}&=4x^2-(7x^2-4x-7x+4)\\&=4x^2-7x^2+4x+7x-4\\&=-3x^2+11x-4\end{aligned}$$

2.

a) $Q(x) = (2x - x^2) - (x^2 - 4x)$

$= 2x - x^2 - x^2 + 4x$

$= -2x^2 + 6x$

b) $Q(-3) = -2 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) = -2 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) = -18 - 18 = -36$

c)

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 0 \\
-2x^2 + 6x &= 0 \\
x \cdot (-2x) + x \cdot 6 &= 0 \\
x(-2x + 6) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad -2x + 6 &= 0 \\
2x &= 6 \qquad \big|: 2 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Joten $Q(x) = 0$, jos $x = 0$ tai $x = 3$.

3.

a)
$$
\begin{aligned}
3x+2 &= x-4(5x-1) \\
3x+2 &= x-20x+4 \\
3x-x+20x &= 4-2 \\
22x &= 2 \qquad \Big|:22 \\
x &= \frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
\frac{x}{10}+\frac{x}{15} &= x+1 \qquad \Big|\cdot 30 \\
3x+2x &= 30(x+1) \\
5x &= 30x+30 \\
25x &= -30 \qquad \Big|:25 \\
x &= -\frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

4.

a) $x^2+5x+4=0$

Käytetään ratkaisukaavaa

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm3}{2}$$

$$x=\frac{-5+3}{2}=-1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-5-3}{2}=-4$$

b)

$$\begin{aligned}
7x &= 3x^2 \\
3x^2-7x &= 0 \\
x\cdot3x-x\cdot7 &= 0 \\
x(3x-7) &= 0 \\
x &= 0 \qquad \text{tai} \qquad 3x-7=0 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad 3x=7 \qquad \big|:3 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x=\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

5.

a) $\dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{9}$

$$9k = 6 \qquad \Big|:9$$

$$k = \frac{2}{3}$$

b) $\dfrac{s}{2+s} = \dfrac{4}{5}$

$$4(2+s) = 5s$$

$$8 + 4s = 5s$$

$$s = 8$$

c) $\dfrac{x}{x^2+5} = \dfrac{3}{2x}$

$$2x \cdot x = 3(x^2+5)$$

$$2x^2 = 3x^2 + 15$$

$$x^2 = -15$$

$$x = \pm\sqrt{-15}$$

Koska juurrettavana on negatiivinen luku, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

6.

a) $$3x - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2} \qquad \bigg| \cdot 6$$

$$6 \cdot 3x - 2(x-2) = 3 \cdot 1$$

$$18x - 2x + 4 = 3$$

$$16x = -1 \qquad \big| : 16$$

$$x = -\frac{1}{16}$$

b) $$\frac{2}{2x+3} = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot 4 = 3(2x+3)$$

$$8 = 6x + 9$$

$$6x = -1 \qquad \big| : 6$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

7.

a) $-1(4\cdot(-1)-2)-3\cdot(-1)(-1-1)-(-1)=-1(-4-2)+3(-1-1)+1$

$$\begin{aligned}&=-1(-6)+3(-2)+1\\&=6-6+1\\&=1\end{aligned}$$

b) Esimerkiksi yhtälö $(x-1)(x+1)=0$.

c) Sijoitetaan annettu x:n arvo yhtälöön ja ratkaistaan a.

$$\begin{aligned}2(2-5)+a\cdot 2&=2\\ 2\cdot(-3)+2a&=2\\ -6+2a&=2\\ 2a&=8 \qquad |:2\\ a&=4\end{aligned}$$

8.

a)

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= x \\
2x^2 - x &= 0 \\
x \cdot 2x - x \cdot 1 &= 0 \\
x(2x-1) &= 0 \\
x &= 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad 2x = 1 \qquad \Big|:2 \\
& \qquad\qquad\qquad\ x = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) Sijoitetaan annetut a:n ja b:n arvot lausekkeeseen ja ratkaistaan se.

$$
\frac{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = {}^{(2}\frac{6}{4} = \frac{3}{2}
$$

c) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4}$

$$
\begin{aligned}
4 \cdot x &= 3(x-1) \\
4x &= 3x - 3 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

9.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} \qquad \Big| \cdot 4$$

$$x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-4}{2} = -3$$

10.

a)

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 &= 4 \\
x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 &= 4 \\
x^2 - 4x + 4 &= 4 \\
x\cdot x - x\cdot 4 &= 0 \\
x(x-4) &= 0 \\
x &= 0 \quad \text{tai} \quad x-4=0 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad x=4
\end{aligned}
$$

b) Merkataan lausekkeet saman suuruisiksi ja ratkaistaan *x*.

$$
\begin{aligned}
2x+3 &= -(x+3) \\
2x+3 &= -x-3 \\
3x &= -6 \qquad \Big|:3 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

c) Sijoitetaan annetut *a*:n ja *b*:n arvot lausekkeeseen ja lasketaan se.

$$
\begin{aligned}
2(-2-2)+(2-(-2))^2-(-2)(1-2) &= 2(-4)+(2+2)^2+2(-1) \\
&= -8+4^2-2 \\
&= -8+16-2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

11.

a) Kun $x = 1$ funktio saa arvon 4, joten $g(1) = 4$.

b) Funktio saa arvon 3, kun $x = 0$ tai $x = 2$, joten $g(x) = 3$, kun $x = 0$ tai $x = 2$.

c) Funktion g nollakohdat ovat pisteet, jossa funktio leikkaa x-akselin. Funktion nollakohdat ovat $x = -1$ tai $x = 3$.

d) $g(x) > 0$ tarkoittaa funktion positiiviset arvot. Funktion arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella. Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-1 < x < 3$.

12.

a) Sievennetään funktion *g* yhtälö.

$$\begin{aligned}-2x(-x+6) &= -2x\cdot(-x)+(-2x)\cdot 6\\ &= 2x^2-12x\end{aligned}$$

Funktio on ylöspäin aukeava, koska toisen asteen termin kerroin, 2, on positiivinen luku.

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 0\\ 2x^2-12x &= 0\\ x\cdot 2x - x\cdot 12 &= 0\\ x(2x-12) &= 0\\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad 2x-12=0\\ &\qquad\qquad\qquad 2x = 12 \qquad \Big|:2\\ &\qquad\qquad\qquad\ \ x = 6\end{aligned}$$

13.

Lasketaan funktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
3x^2 - 48 &= 0 \\
3x^2 &= 48 && \mid :3 \\
x^2 &= 16 \\
x &= \pm\sqrt{16} \\
x &= \pm 4
\end{aligned}
$$

Funktion huipun x-koordinaatti on funktion nollakohtien keskiarvo. Lasketaan huipun x-koordinaatti.

$$x_h = \frac{-4+4}{2} = 0$$

Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktion yhtälöön.

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 48 = 0 - 48 = -48$$

Huipun koordinaatit ovat (0, −48).

14.

a) Lasketaan funktion nollakohdat.

$$f(x)=0$$
$$x^2+4x-5=0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}$$
$$x=\frac{-4\pm 6}{2}$$
$$x=\frac{-4-6}{2}=-5 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-4+6}{2}=1$$

Funktion huipun x-koordinaatti on funktion nollakohtien keskiarvo.
Lasketaan huipun x-koordinaatti.

$$x_h=\frac{-5+1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla $x=-2$ funktion yhtälöön.

$$f(-2) = (-2)^2+4\cdot(-2)-5 = 4-8-5 = -9$$

Joten huipun koordinaatit ovat $(-2, -9)$.

b) Symmetria-akseli on y-akselin suuntainen suora, jossa x-koordinaatti pysyy aina vakiona, joten symmetria-akselin yhtälö saadaan selville huipun x-koordinaatin avulla. Symmetria-akselin yhtälö on $x = -2$.

15.

Funktioiden kuvaajat leikkauspisteessä funktioiden x-koordinaatti ja y-koordinaatti ovat samat. Joten tehdään yhtälöpari ja ratkaistaan y ja x.

$$\begin{cases} y = -4x + 3 \\ y = -6x + 7 \end{cases}$$

$$-4x + 3 = -6x + 7$$

Ratkaistaan yhtälöstä $-4x + 3 = -6x + 7$ muuttuja x.

$$\begin{aligned} -4x + 3 &= -6x + 7 \\ 2x &= 4 \qquad \qquad \Big| : 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x = 2$ alkuperäiseen yhtälöön, saadaan y-koordinaatti.

$$y = -4 \cdot 2 + 3 = -8 + 3 = -5$$

Joten kuvaajien leikkauspiste on (2, −5).

16.

Funktioiden kuvaajat leikkauspisteessä funktioiden x-koordinaatti ja y-koordinaatti ovat samat. Joten tehdään yhtälöpari ja ratkaistaan y ja x.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 1 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 1 = 5 - 2x$$

Ratkaistaan yhtälöstä $x^2 - 3x - 1 = 5 - 2x$ muuttuja x.

$$x^2 - 3x - 1 = 5 - 2x$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{2} = -2$$

Funktiot leikkaavat siis kahdessa pisteessä. Sijoittamalla $x=-2$ ja $x=3$ alkuperäiseen yhtälöön, saadaan y-koordinaatit.

Kun $x=-2$, $y=5-2\cdot(-2)=5+4=9$

Kun $x=3$, $y=5-2\cdot 3=5-6=-1$

Joten funktiot leikkaavat pisteissä (−2, 9) ja (3, −1).

17.

Tiedetään, että kuvaaja kulkee pisteen (−1, −9) kautta. Sijoitetaan $x = -1$ ja $y = -9$ yhtälöön ja ratkaistaan *k*.

$$
\begin{aligned}
-9 &= -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot k \cdot (-1) - k \\
-9 &= -3 - 2k - k \\
3k &= 6 \qquad \qquad \big| : 3 \\
k &= 2
\end{aligned}
$$

18.

$$\begin{cases} 5x-2y=3 & \Big| \cdot 3 \\ 2x-3y=-1 & \Big| \cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 15x-6y=9 \\ -4x+6y=2 \end{cases}$$

$$11x=11 \quad \Big| :11$$

$$x=1$$

Sijoitetaan $x=1$ alkuperäiseen yhtälöön, niin saadaan *y*.

$$5\cdot 1-2y=3$$

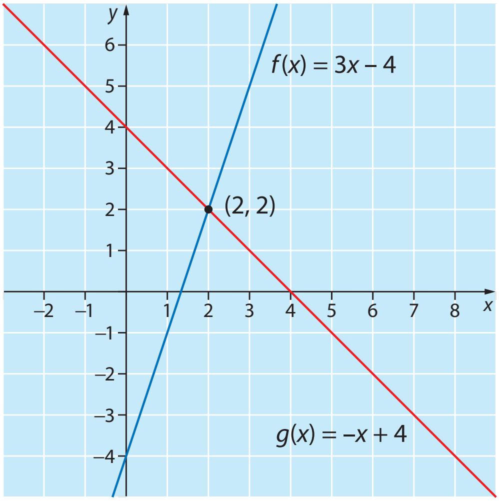
$$2y=2 \quad \Big| :2$$

$$y=1$$

Joten $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ on yhtälöparin ratkaisu.

19.

Piirretään funktioiden kuvaajat.



Funktiot leikkaavat toisensa pisteessä (2, 2).

20.

a) Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

a	b	b^2
1	3	9
x	4	16

Koska a on suoraan verrannollinen b neliöön, merkataan suureiden suhde yhtä suureksi ja ratkaistaan x.

$$\frac{1}{x} = \frac{9}{16}$$

$$9x = 16 \quad |:9$$

$$x = \frac{16}{9}$$

b) Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

a	b	b^2
1	3	9
4	x	x^2

Koska a on suoraan verrannollinen b neliöön, merkataan suureiden suhde yhtä suureksi ja ratkaistaan x.

$$\frac{1}{4} = \frac{9}{x^2}$$

$$x^2 = 36$$

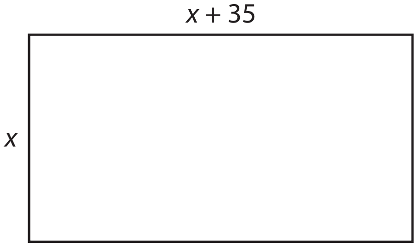
$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Koska suureet voivat saada vain positiivisia arvoja, ratkaisuksi käy vain $x = 6$.

21.

Koska jalkapallokentän pituus on 35 m pidempi kuin kentän leveys. Merkitään kentän leveyttä kirjaimella x.



Kentän piirin lauseke on $x + x + (x + 35) + (x + 35) = 4x + 70$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 4x + 70 &= 350 \\ 4x &= 280 \qquad \vert :4 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Kentän leveys on 70 m ja pituus on 70 m + 35 m = 105 m.

22.

Koska suomenkielisten ja ruotsinkielisten henkilöiden lukumäärien suhde on 5:3, merkitään suomenkielisten henkilöiden määräksi $5x$ ja ruotsinkielisten henkilöiden määräksi $3x$.

Kunnassa on asukkaita yhteensä $5x + 3x = 8x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 8x &= 1600 \qquad \big| :8 \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Nyt saadaan ruotsinkielisten henkilöiden määrä sijoittamalla $x = 200$ lausekkeeseen $3x$.

Ruotsinkielisiä asukkaita on $3 \cdot 200 = 600$.

23.

Merkitään kaupungin asukasmääräksi x, joten kunnan asukasmäärä on $\frac{1}{3}x$.

Liitoksen jälkeen kaupungissa on asukkaita $x+\frac{1}{3}x=\frac{4}{3}x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{4}{3}x=16\,000 \qquad \left| :\frac{4}{3} \right.$$

$$x=12\,000$$

Sijoittamalla $x=12\,000$ kunnan asukasmäärän lausekkeeseen $\frac{1}{3}x$,

saadaan kunnan asukasmäärä.

$$\frac{1}{3}\cdot 12\,000=4000$$

Kunnassa on 4000 asukasta.

24.

Koska sisäovien mittojen suhde on 2:5, merkitään oviaukon leveydeksi $2x$ ja korkeudeksi $5x$.

Oven pinta-alan lauseke on $2x \cdot 5x = 10x^2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 10x^2 &= 160 \qquad \qquad \qquad \qquad |:10 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivista, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 4$.

Oven sivujen pituudet lasketaan sijoittamalla saatu x:n arvo lausekkeisiin $2x$ ja $5x$.

Oven leveys on $2 \cdot 4 \text{ dm} = 8 \text{ dm} = 80 \text{ cm}$.

Oven korkeus on $5 \cdot 4 \text{ dm} = 20 \text{ dm} = 200 \text{ cm}$.

25.

Vanhan ilmoituksen mitat ovat 3 cm ja 5 cm. Koska uutta ilmoitusta suurennettiin kumpaakin sivua saman verran, uuden ilmoituksen mitat ovat $3+x$ cm ja $5+x$ cm.

Uuden ilmoituksen pinta-alan lauseke on $(3+x)(5+x)=15+8x+x^2$.

Muodostetaan lauseke ja ratkaistaan x.

$$15+8x+x^2=(3\cdot 5)+9$$
$$x^2+8x+15=24$$
$$x^2+8x-9=0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}$$
$$x=\frac{-8\pm 10}{2}$$
$$x=\frac{-8+10}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-8-10}{2}=-9$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, ratkaisuksi käy vain $x=1$.

Joten uuden ilmoituksen mitat saadaan sijoittamalla saatu x:n arvo mittojen lausekkeisiin.

Leveys on $3+1$ cm $=4$ cm.

Korkeus on $5+1$ cm $=6$ cm.

26.

Merkitään kaniinien määrää kirjaimella x ja fasaanien määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Päitä	Jalkoja
Kaniineja	x	$4x$
Fasaaneja	y	$2y$
Yhteensä	$x + y$	$4x + 2y$

Koska päitä on yhteensä 35, saadaan yhtälö $x + y = 35$.

Koska jalkoja on yhteensä 94, saadaan yhtälö $4x + 2y = 94$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x + y = 35 & \quad \big| \cdot(-2) \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x - 2y = -70 \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$$

$$2x = 24 \quad \big| :2$$

$$x = 12$$

Sijoitetaan $x = 12$ yhtälöön $x + y = 35$.

$$12 + y = 35$$

$$y = 23$$

Kaniineja on 12 ja fasaaneja on 23.

27.

Merkitään pöytien määrää kirjaimella x ja tuolien määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Ennen laajennusta	Laajennuksen jälkeen
Pöytiä	x	$2x$
Tuolia	y	$3y$
Yhteensä	$x + y$	$2x + 3y$

Koska ennen laajennusta pöytiä ja tuoleja valmistettiin 30, saadaan yhtälö $x+y=30$.

Koska laajennuksen jälkeen pöytiä ja tuoleja valmistetaan 80, saadaan yhtälö $2x+3y=80$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x+y=30 & |\cdot(-2) \\ 2x+3y=80 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x-2y=-60 \\ 2x+3y=80 \end{cases}$$

$$y=20$$

Sijoitetaan $y=20$ yhtälöön $x+y=30$.

$$x+20=30$$
$$x=10$$

Laajennuksen jälkeen pöytiä valmistetaan $2\cdot 10=20$ ja tuoleja $3\cdot 20=60$.

6.2 Matemaattisia malleja

28.

a) Asunnossa on asuttu x kuukautta. Tällöin vuokralla asumiskustannuksia olisi $600 \cdot x$.

Omistusasunnossa kustannuksia on kertynyt:

- Asunnon hankintahinta 85 000 €.
- Yhtiövastike $150 \cdot x$.

Eli omistusasunnossa kokonaiskustannukset ovat $150x + 85\,000$.

b) 10 vuotta $= 120$ kuukautta

Sijoitetaan $x = 120$ polynomeihin $600x$ ja $150x + 85\,000$.

10 vuotta vuokralla tulee kustantamaan $600 \cdot 120 = 72\,000$ €.

10 vuotta omistusasunnossa tulee kustantamaan
$150 \cdot 120 + 85\,000 = 103\,000$ €.

c) Lasketaan, millä x:n arvolla epäyhtälö $600x > 150x + 85\,000$ on tosi.

$$
\begin{aligned}
600x &> 150x + 85000 \\
450x &> 85000 \qquad \Big|:450 \\
x &> 188
\end{aligned}
$$

Seuraava kokonaisluku joka toteuttaa ehdon $x > 188$ on 189. Vastaus on 189 kuukautta, joka on 15 vuotta ja 9 kuukautta.

29.

a) Kun yritys valmistaa x kpl kännykkäkoteloita, valmistuskustannukset ovat $12{,}30 \cdot x$ €. Lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 12 000 €. Joten kokonaiskustannuksia kuvaa polynomi $K(x) = 12{,}3x + 12\,000$.

b) Sijoitetaan $x = 10\,000$ polynomiin $K(x)$.

$K(10\,000) = 12{,}3 \cdot 10\,000 + 12\,000 = 135\,000$

Joten 10 000 kännykkäkotelon kustannukset ovat 135 000 €.

c) Kun yritys myy x kpl kännykkäkoteloita, yritys tienaa $17{,}25 \cdot x$ €.

Kun yritys myy x kpl kännykkäkoteloita, yritys saa voittoa

$$\begin{aligned} 17{,}25x - (12{,}3x + 12000) &= 17{,}25x - 12{,}3x - 12000 \\ &= 4{,}95x - 12000 \end{aligned}$$

Lasketaan, millä x:n arvolla yrityksen voitto on 0.

$$\begin{aligned} 4{,}95x - 12000 &= 0 \\ 4{,}95x &= 12000 \quad \quad |: 4{,}95 \\ x &= 2424{,}242... \\ x &\approx 2425 \end{aligned}$$

Yrityksen pitää myydä vähintään 2425 kpl kännykkäkoteloa, jotta koteloiden valmistus kannattaa.

30.

a) Muutetaan yksikköhinta €/kWh.

Yhtiö	Perusmaksu €/kk	Yksikköhinta €/kWh
A	4,02	0,0662
B	3,75	0,0799

Kun sähköä kuluu x kWh yhdessä kuukaudessa, saadaan lausekkeet

$a(x) = 4,02 + 0,0662x$

$b(x) = 3,75 + 0,0799x$

b) Lasketaan, millä x:n arvolla $a(x) = b(x)$.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= b(x) \\
4,02 + 0,0662x &= 3,75 + 0,0799x \\
0,27 &= 0,0137x \qquad \qquad |: 0,0137 \\
x &= 19,7080... \\
x &\approx 19,7
\end{aligned}
$$

Sähkön kulutuksen pitäisi olla 19,7 kWh kuukausittain.

c) Vuodessa on 12 kuukautta, joten perusmaksut pitää kertoa luvulla 12.

Sähköä kuluu 2000 kWh vuodessa, joten $x = 2000$. Lasketaan $a(x)$ ja $b(x)$.

$$a(2000) = 12 \cdot 4,02 + 0,0662 \cdot 2000 = 180,64€$$

$$b(2000) = 3,75 \cdot 12 + 0,0799 \cdot 2000 = 204,8€$$

Kokonaishintojen välinen ero on

$b(x) - a(x) = 204{,}8\ € - 180{,}64\ € = 24{,}16\ €$.

31.

a) Merkitään pääomatuloja kirjaimella x (€). Veroihin menee tällöin

Pääomatulot	Verot (40 000 euroon saakka)	Verot (yli 40 000)
x	$0{,}3 \cdot 40\,000 = 12\,000$	$(x - 40\,000) \cdot 0{,}32$

Joten veroihin menee
$f(x) = 12\,000 + (x - 40\,000) \cdot 0{,}32 = 12\,000 + 0{,}32x - 12\,800 = 0{,}32x - 800$.

b) Lasketaan verojen määrä, kun $x = 41\,700{,}23$.

$f(41\,700{,}23) = 0{,}32 \cdot 41\,700{,}23 - 800 = 12\,544{,}0736 \approx 12\,544{,}07$

c) Osinkotuloista 85 % on verotettava. Lasketaan verotettava osuus 41 700,23 eurosta.

$41\,700{,}23 \cdot 0{,}85 = 35\,445{,}1955$

Koska 35445,1955 on alle 40000, veroprosentti tälle on 30. Lasketaan kuinka paljon veroihin menee.

$35\,445{,}1955€ \cdot 0{,}3 = 10\,633{,}55865€$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia verotettava määrä on koko osinkotuloista.

$$\frac{10\,633{,}55865}{41\,700{,}23} = 0{,}255 = 25{,}5\ \%$$

Henkilö joutuu maksamaan 25,5 % veroa osinkotuloistaan.

32.

Lasketan funktion $f(x) = -0{,}8x^2 + 0{,}8x + 4{,}8$ nollakohtien etäisyys toisistaan. Lasketaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -0{,}8x^2 + 0{,}8x + 4{,}8 &= 0 \qquad \Big| \cdot 1{,}25 \\ -x^2 + x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$x = \frac{-1+5}{-2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{-2} = 3$$

Nollakohtien etäisyys toisistaan on $|-2-3| = |-5| = 5$.

Tunneli on 5,0 metriä leveä.

b) Tunnelin korkein kohta on paraabelin huipussa, koska paraabeli on alaspäin aukeava. Paraabelin huipun x-koordinaatti saadaan funktion nollakohtien keskiarvosta. Lasketaan huipun x-koordinaatti.

$$x_h = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

Tunnelin korkeus saadaan sijoittamalla saatu x:n arvo funktion yhtälöön.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= -0{,}8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 4{,}8 \\
&= -0{,}8 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 4{,}8 \\
&= -\frac{0{,}8}{4} + \frac{0{,}8}{2} + 4{,}8 \\
&= \frac{0{,}8}{4} + 4{,}8 \\
&= 5{,}0
\end{aligned}$$

Joten tunnelin korkein kohta on 5,0 m korkea.

c) Symmetria-akseli on y-akselin suuntainen suora, jossa x-koordinaatti pysyy samana. Symmetria-akselin yhtälö saadaan selville huipun x-koordinaatin avulla. Symmetria-akselin yhtälö on $x = 0{,}5$.

d) Kun kuorma-auto ajaa keskeltä tunnelia sen reunojen x-koordinaatit ovat $x_v = 0,5 - 1,3 = -0,8$ ja $x_o = 0,5 + 1,3 = 1,8$. Sijoitetaan toinen saaduinta x:n arvoista paraabelin yhtälöön ja lasketaan, kuinka korkea tunneli on siinä kohdassa.

$$f(1,8) = -0,8 \cdot 1,8^2 + 0,8 \cdot 1,8 + 4,8 = 3,648$$

Tunnelin korkeus on rekan sivun kohdalla 3,648 m, joten 3,80 m korkea rekka ei mahdu tunnelista.

33.

a) Lasketaan funktion arvo, kun $x = 50$.

$s(50) = 0{,}25 \cdot 50 + 0{,}01 \cdot 50^2 = 37{,}5 \approx 38$

Jarrutusmatka on 38 m.

b) Lasketaan funktion arvo, kun $x = 100$.

$s(100) = 0{,}25 \cdot 100 + 0{,}01 \cdot 100^2 = 125$

Jarrutusmatka on 125 m.

Lasketaan, kuinka paljon jarrutusmatka pitenee.

$s(100) - s(50) = 125 - 37{,}5 = 87{,}5 \approx 88$

Jarrutusmatka pitenee 88 m.

c) Lasketaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=30$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 30 \\
0{,}25x + 0{,}01x^2 &= 30 \\
0{,}01x^2 + 0{,}25x - 30 &= 0 \qquad \Big| \cdot 100 \\
x^2 + 25x - 3000 &= 0
\end{aligned}
$$

Käytetään ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3000)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{12\,625}}{2}$$

$$x = \frac{-25 \pm 112{,}361...}{2}$$

$$x = \frac{-25 + 112{,}361...}{2} = 43{,}6805... \quad \text{tai} \quad x = \frac{-25 - 112{,}361...}{2} = -68{,}6805...$$

Koska nopeus ei voi olla negatiivista, ratkaisuksi käy vain
$x = 43{,}6805... \approx 44$

Auto voi ajaa korkeintaan 44 km/h.

34.

a) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Hinta (€)	Myytyjä tötteröitä (kpl)	Myyntitulot (€)
x	$443 - 42x$	$x(443 - 42x)$

Joten myyntitulon funktio on $f(x) = x(443 - 42x) = -42x^2 + 443x$.

Lasketaan funktion arvo, kun $x = 2{,}40$.

$f(2{,}4) = -42 \cdot 2{,}4^2 + 443 \cdot 2{,}4 = 821{,}28$

Myyntitulot ovat 821,28 €.

b) Lasketaan millä x:n arvolla funktio saa arvon 570.

$$f(x) = 570$$

$$-42x^2 + 443x = 570$$

$$-42x^2 + 443x - 570 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa

$$x = \frac{-443 \pm \sqrt{443^2 - 4 \cdot (-42) \cdot (-570)}}{2 \cdot (-42)}$$

$$x = \frac{-443 \pm \sqrt{100\,489}}{-84}$$

$$x = \frac{-443 \pm 317}{-84}$$

$$x = \frac{-443 + 317}{-84} = 1{,}50 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-443 - 317}{-84} = 9{,}047...$$

Koska Jäätelön enimmäishinta on 3 €, niin vastaukseksi käy vain $x = 1,50$.

Jäätelön hinta on oltava 1,50 €.

35.

Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Hinnan korotus (0,1€)	Myyty perunamäärä (kg)	Myyntihinta (€/kg)	Myyntitulot (€)
0	700	2,00	$700\cdot 2,00$
1	$700-40\cdot 1$	$2,00+0,1\cdot 1$	$(700-40\cdot 1)(2,00+0,1\cdot 1)$
2	$700-40\cdot 2$	$2,00+0,1\cdot 2$	$(700-40\cdot 2)(2,00+0,1\cdot 2)$
x	$700-40\cdot x$	$2,00+0,1\cdot x$	$(700-40\cdot x)(2,00+0,1\cdot x)$

Joten myyntituloa kuvaa funktio

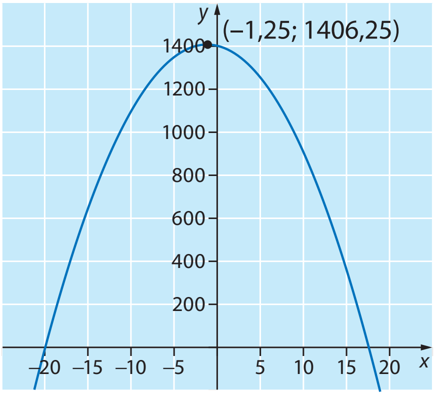
$$\begin{aligned} m(x) &= (700-40x)(2,00+0,1x) \\ &= 700\cdot 2+700\cdot 0,1x+(-40x)\cdot 2+(-40x)\cdot 0,1x \\ &= 1400+70x-80x-4x^2 \\ &= -4x^2-10x+1400 \end{aligned}$$

b) Lasketaan funktion arvo, kun $x=4$.

$$f(4)=-4\cdot 4^2-10\cdot 4+1400=1296$$

Myyntitulot ovat 1296 €.

c) Piirretään laskimella funktion kuvaaja.



Etsitään laskimella funktion huippu. Se on piste (−1,25; 1406,25). Joten $x = -1,25$.

Lasketaan perunan kilohinta.

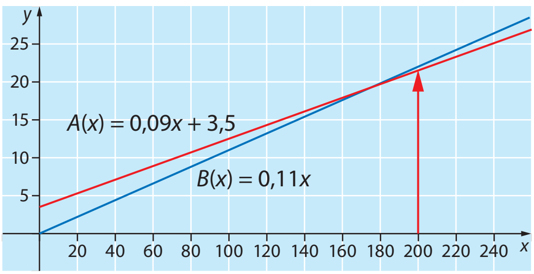
$2 + 0,1 \cdot (-1,25) = 1,875 \approx 1,88$ €

36.

a) Liittymän A kustannukset koostuvat 3,5 euron kuukausimaksusta sekä puhelumaksusta, joka on 0,09 € minuutilta. Liittymän A kustannusten riippuvuutta puheajasta x min kuvaa funktio $A(x) = 0,09x + 3,50$.

Liittymän B kustannukset koostuvat puhelumaksusta, joka on 0,11 € minuutilta. Liittymän B kustannusten riippuvuutta puheajasta x min kuvaa funktio $B(x) = 0,11x$.

b)



Kun puheaika $x = 200$, liittymä A on tällöin edullisempi.

c) Lasketaan, millä x:n arvolla funktiot $A(x)$ ja $B(x)$ ovat yhtä suuret.

$$A(x) = B(x)$$

$$0,09x + 3,5 = 0,11x$$

$$0,02x = 3,5 \qquad | : 0,02$$

$$x = 175$$

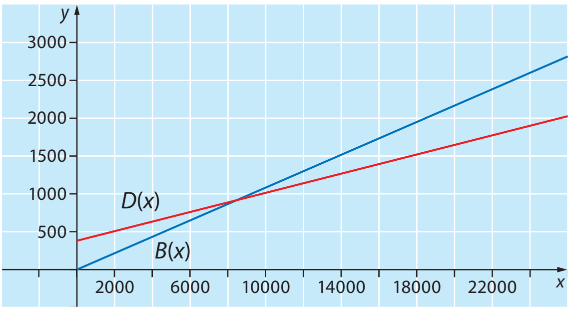
Kun puheaika on 175 min, niin liittymät ovat saman hintaisia.

37.

a) Bensiinikäyttöisen auton kulutus sadalla kilometrillä on 7,9 litraa, joten kilometrillä auton kulutus on 0,079 litraa. Bensiinin hinta on 1,371 €/litra. Bensiinikäyttöisen auton kustannusten riippuvuutta ajettujen satojen kilometrien määrästä x kuvaa funktio $B(x) = 0,079 \cdot x \cdot 1,371 = 0,108309x$.

Dieselkäyttöisen auton kulutus sadalla kilometrillä on 5,4 litraa, joten kilometrillä auton kulutus on 0,054 litraa. Dieselin hinta on 1,172 €/litra. Dieselvero on 381 € vuodessa. Dieselkäyttöisen auton kustannusten riippuvuutta ajettujen satojen kilometrien määrästä x kuvaa funktio
$\mathrm{D}(x) = 0,054 \cdot x \cdot 1,172 + 381 = 0,063288x + 381$.

Piirretään funktiot samaan koordinaatistoon.



b) Lasketaan, millä x:n arvolla $B(x) > D(x)$.

$$B(x) > D(x)$$
$$0,108309x > 0,063288x + 381$$
$$0,045021x > 381 \qquad \Big|: 0,045021$$
$$x > 8462,717... \approx 8500$$

Dieselautolla on ajettava vähintään 8500 km.

38.

Kootaan tehtävässä annetut arvot taulukkoon. Merkataan makean muffinin määrää kirjaimella x ja suolaisen muffinin määrää kirjaimella y.

	Jauhoja (dl)	Maitoa (dl)
Makea	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{12}x$
Suolainen	$\frac{1}{3}y$	$\frac{1}{6}y$
Yhteensä	$\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y$	$\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}y$

Koska jauhoja kuluu 39 dl, saadaan yhtälö $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=39$.

Koska maitoa kuluu 17 dl, saadaan yhtälö $\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}y=17$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=39 \\ \frac{1}{12}x+\frac{1}{6}y=17 & \quad \big| \cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=39 \\ -\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y=-34 \end{cases}$$

$$\frac{1}{12}x=5 \quad \big| \cdot 12$$

$$x=60$$

Sijoittamalla saatu x:n arvo alkuperäiseen yhtälöön, saadaan y:n arvo.

$$\frac{1}{4}\cdot 60+\frac{1}{3}y=39$$

$$15+\frac{1}{3}y=39$$

$$\frac{1}{3}y=24 \qquad \Big|\cdot 3$$

$$y=72$$

Makeita muffineja valmistetaan 60 kpl ja suolasia muffineja 72 kpl.

39.

Sijoitetaan annetut pisteet funktion yhtälöön ja muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -75 = a \cdot 3^2 + 3b - 48 \\ -63 = a \cdot 1^2 + b - 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27 = 9a + 3b \\ -15 = a + b - 48 \end{cases} \qquad \Big| \cdot (-3)$$

$$+\begin{cases} -27 = 9a + 3b \\ 45 = -3a - 3b \end{cases}$$

$$18 = 6a \qquad \Big| : 6$$

$$a = 3$$

Sijoitetaan saatu a:n arvo alkuperäiseen yhtälöön, niin saadaan b:n arvo.

$$-75 = 3 \cdot 3^2 + 3b - 48$$

$$-75 = 27 + 3b - 48$$

$$3b = -54 \qquad \Big| : 3$$

$$b = -18$$

40.

a) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Lampun teho (W)	Lampun valaistusvoimakkuus (lx)
40	75
x	130

Koska lampun teho ja valaistusvoimakkuus ovat suoraan verrannollisia. Merkitään suhteet yhtä suuriksi ja ratkaistaan x.

$$\frac{40}{x} = \frac{75}{130}$$

$$75x = 5200 \quad \Big|: 75$$

$$x = 69{,}333...$$

$$x \approx 69$$

Lampun teho oli 69 W.

b) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Lampun valaistusvoimakkuus (l*x*)	Etäisyys (m)	Etäisyys^2 (m^2)
2400	0,4	0,16
x	1,5	2,25

Koska lampun valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, merkitään tulot yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$2400 \cdot 0{,}16 = x \cdot 2{,}25 \qquad \Big|: 2{,}25$$

$$x = 170{,}666...$$

$$x \approx 170$$

Lampun valaistusvoimakkuus oli 170 l*x*.

c) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Lampun valaistusvoimakkuus (l*x*)	Etäisyys (m)	Etäisyys^2 (m^2)
2400	0,4	0,16
y	x	x^2

Koska lampun valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, merkitään tulot yhtä suuriksi ja ratkaistaan verrannollisuuskerroin.

$$2400 \cdot 0{,}16 = y \cdot x^2 \qquad \Big|: x^2$$

$$y = \frac{384}{x^2}$$

Verrannollisuuskerroin on 384.

41.

a) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Työtunnit (h)	Palkka (€)
3	65
x	y

Koska palkan määrä on suoraan verrannollinen työtunteihin, merkataan suhteet saman suuruiseksi ja lasketaan verrannollisuuskerroin.

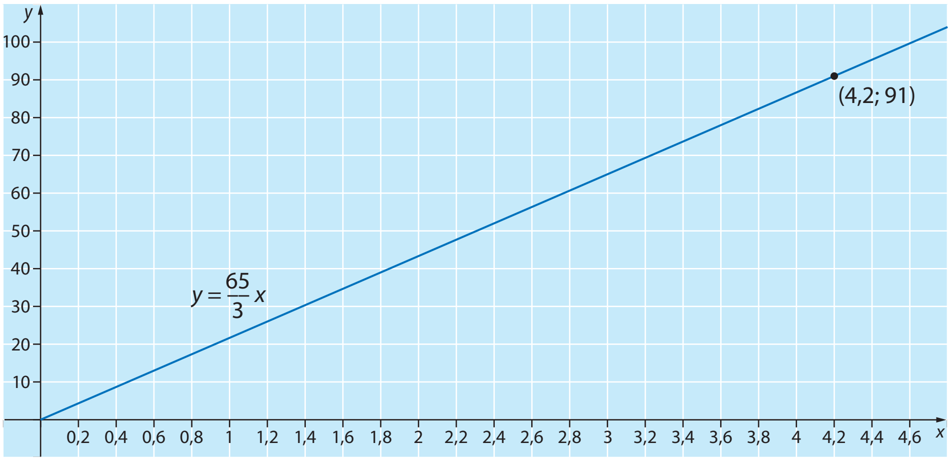
$$\frac{3}{x} = \frac{65}{y}$$

$$3y = 65x \qquad |:3$$

$$y = \frac{65}{3}x$$

Verrannollisuuskerroin on $\frac{65}{3}$.

b)



Kun työtunteja $x = 4,2$, palkka on 91 €.

42.

a) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Maalin määrä (l)	Seinäpinta-ala (m^2)
0,25	1
x	780

Koska maalin menekki on suoraan verrannollinen seinäpinta-alaan, merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$\frac{0,25}{x} = \frac{1}{780}$$
$$x = 195$$

Maalia kului 195 litraa.

b) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Maalin määrä (l)	Seinäpinta-ala (m^2)
0,25	1
y	x

Koska maalin menekki on suoraan verrannollinen seinäpinta-alaan, merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan y.

$$\frac{0,25}{y} = \frac{1}{x}$$
$$y = 0,25x$$

Verrannollisuuskerroin on 0,25.

43.

Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon. Merkataan painoa kirjaimella *a*.

	Painoindeksi	Pituus (m)	Pituus^2 (m^2)
Eemeli	23,1	1,8	3,24
Sameli	21,2	x	x^2

Painoindeksi on kääntäen verrannollinen pituuden neliöön, joten merkataan tulot yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$23{,}1 \cdot 3{,}24 = 21{,}2 \cdot x^2 \quad |: 21{,}2$$

$$x^2 = 3{,}5303...$$

$$x = \pm\sqrt{3{,}5303...}$$

$$x = \pm 1{,}878929...$$

$$x \approx \pm 1{,}88$$

Koska pituus ei voi olla negatiivista, ratkaisuksi kelpaa vain $x \approx 1{,}88$.

Sameli on 1,88 m pitkä.

44.

a) Sijoitetaan annetut arvot yhtälöön ja ratkaistaan ympyräradan säde *r*.

$$a = \frac{1}{r}v^2 \quad \Big| \cdot r$$

$$ar = v^2 \quad \Big| : a$$

$$r = \frac{v^2}{a} \quad \Bigg| \begin{array}{l} v = 16{,}7 \\ a = 1{,}26 \end{array}$$

$$r = \frac{16{,}7^2}{1{,}26}$$

$$r = 221{,}34126...$$

$$r \approx 221$$

Joten ympyräradan säde on 221 m.

b) Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

Keskeiskiihtyvyys (m/s^2)	Nopeus (m/s)	Nopeus^2 (m^2/s^2)
1,26	16,7	278,89
0,85	x	x^2

Keskeiskiihtyvyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.
Merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$\frac{1{,}26}{0{,}85} = \frac{278{,}89}{x^2}$$

$$1{,}26x^2 = 237{,}0565 \qquad |:1{,}26$$

$$x^2 = 188{,}140...$$

$$x = \pm\sqrt{188{,}140...}$$

$$x = \pm 13{,}7164...$$

$$x \approx \pm 14$$

Koska nopeus ei voi olla negatiivista, ratkaisuksi käy vain $x \approx 14$.

Nopeus on 14 m/s.

c) Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

Keskeiskiihtyvyys (m/s^2)	Nopeus (m/s)	Nopeus^2 (m^2/s^2)
1,26	16,7	278,89
y	x	x^2

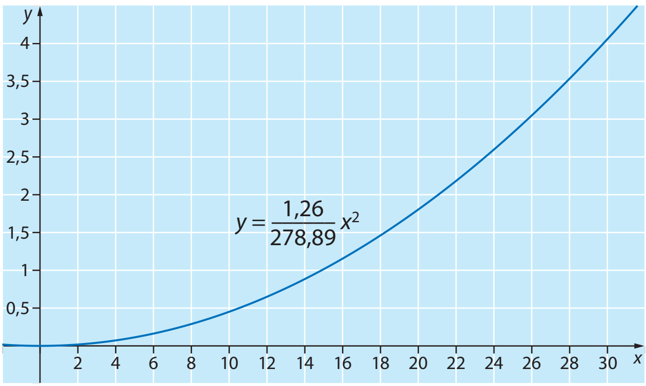
Keskeiskiihtyvyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.
Merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan y.

$$\frac{1,26}{y} = \frac{278,89}{x^2}$$

$$278,89y = 1,26x^2 \quad \Big|: 278,89$$

$$y = \frac{1,26}{278,89}x^2$$

Piirretään yhtälö koordinaatistoon.



45.

Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

Ulkolämpötila (°C)	Sisälämpötila (°C)	Sisä- ja ulkolämpötilojen erotus (°C)	Lämmitys-kustannukset
−2,0	22,0	24,0	x
−2,0	21,0	23,0	y

Koska lämmityskustannukset ovat suoraan verrannollisia sisä- ja ulkolämpötilojen erotukseen, merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan y.

$$\frac{24}{23}=\frac{x}{y}$$

$$24y = 23x \qquad |:24$$

$$y=\frac{24}{23}x$$

Nyt lasketaan, kuinka paljon pienempi y on x:stä.

$$\frac{x-y}{x}=\frac{x-\frac{23}{24}x}{x}=\frac{\frac{1}{24}x}{x}=\frac{1}{24}=0{,}04166... \approx 0{,}042 = 4{,}2\ \%$$

Lämmityskustannukset pienenevät 4,2 %.

46.

Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

	Aika (min)	Nopeus (km/h)
Talvi	15	x
Kesä	$15-3=12$	$x+20$

Aika on kääntäen verrannollinen nopeuteen, joten merkataan tulot yhtä suuriksi ja lasketaan x.

$$
\begin{aligned}
15\cdot x &= 12\cdot(x+20) \\
15x &= 12x+240 \\
3x &= 240 \qquad \vert :3 \\
x &= 80
\end{aligned}
$$

Talvinopeusrajoitus on 80 km/h.

47.

Koska Elmon matka on 7,5 km ja Axelin matka on 12,5 km, merkataan Elmon matkaa $7{,}5x$ ja Axelin matkaa $12{,}5x$.

Elmon ja Axelin matka on yhteensä $7{,}5x + 12{,}5x = 20x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 20x &= 36 \qquad \qquad \Big| :20 \\ x &= 1{,}8 \end{aligned}$$

Nyt saadaan maksuosuudet sijoittamalla saatu x:n arvo lausekkeisiin $7{,}5x$ ja $12{,}5x$.

Elmo maksaa taksista $7{,}5 \cdot 1{,}8 = 13{,}5€$.

Axel maksaa taksista $12{,}5 \cdot 1{,}8 = 22{,}5€$.

48.

Kootaan annetut tiedot taulukkoon. Merkataan meetvurstin painoa 100a:lla. Merkataan x:llä poistettua rasvan määrää.

	Meetvurstin paino	Rasvaa	Rasvaprosentti
Vanha	$100a$	$36a$	0,36
Uusi	$100a-x$	$36a-x$	0,30

Saadaan siis yhtälö $\frac{36a-x}{100a-x}=0,3$. Ratkaistaan siitä x.

$$\frac{36a-x}{100a-x}=\frac{30}{100}$$

$$100(36a-x)=30(100a-x)$$

$$3600a-100x=3000a-30x$$

$$70x=600a \qquad |:70$$

$$x=\frac{600a}{70}$$

$$x=\frac{60a}{7}$$

Nyt lasketaan, kuinka paljon pienempi x on kuin $36a$.

$$\frac{\frac{60a}{7}}{36a}=\frac{60a}{7}\cdot\frac{1}{36a}=\frac{60a}{252a}=0,238095...\approx 0,24=24\%.$$

Meetvurstista vähennetään 24 % rasvaa.

6.3 Monivalintatehtävät

1.

c-kohta ei ole lauseke, se on yhtälö, joten vastaus on c.

2.

Polynomin asteluku on x:n eksponentti eli vastaus on c.

3.

Lasketaan $P(-2)$.

$$P(-2) = -(-2)^2 - (-2) = -(4) - (-2) = -4 + 2 = -2$$

Joten vastaus on a.

4.

Sievennetään lauseke.

$$3x-(-2x+4)=3x+2x-4=5x-4$$

Joten vastaus on b.

5.

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

Joten vastaus on c.

6.

Vastaus on c.

Todistetaan sijoittamalla $x = -1$ yhtälöön.

$$
\begin{aligned}
(3 \cdot (-1) + 2)^2 - 1 &= 0 \\
(-3 + 2)^2 - 1 &= 0 \\
(-1)^2 - 1 &= 0 \\
1 - 1 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

7.

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua. Ne ovat $x = 0$ ja $4x - 1 = 0$

$$4x = 1 \qquad \Big|:4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Oikea vastaus on c.

8.

Suureet a ja b ovat kääntäen verrannollisia, koska suureiden tulot ovat yhtä suuret. Joten oikea vastaus on b.

9.

$$\frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}=1 \qquad \Big|\cdot 6$$

$$3x-2(x-1)=6\cdot 1$$

$$3x-2x+2=6$$

$$x=4$$

Vastaus on b.

10.

$$4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)^2 = -12 - 2 \cdot 9 = -12 - 18 = -30$$

Vastaus on a.

11.

Kun $x = -2$ funktion arvo on 0.

Vastaus on a.

12.

$g(x) = 2$, kun $x = 1$.

Oikea vastaus on c.

13.

Funktion arvo on 0, kun $x = -1$ tai $x = 3$.

Oikea vastaus on c.

14.

Oikea vastaus on b.

Todistetaan sijoittamalla $x = 3$ funktioon.

$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0.$

15.

Lasketaan funktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-4 - x^2 &= 0 \\
x^2 &= -4 \\
x &= \pm\sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

Ei ratkaisua, joten funktiolla ei ole nollakohtia.

Oikea vastaus on a.

16.

Lasketaan funktion nollakohta.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 8x + 24 &= 0 \\ 8x &= -24 \qquad\qquad |: -3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Ja y:n arvo on aina 0 x-akselissa, joten suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-3,0)$.

Oikea vastaus on c.

17.

Suureet ovat suoraan verrannollisia, merkataan suhteet yhtä suuriksi ja lasketaan kysytty y.

$$\frac{5}{2}=\frac{25}{y}$$

$$5y=50 \qquad |:5$$

$$y=10$$

Joten oikea vastaus on c.

18.

$g(1) = -1$, joten a ei ole totta.

19.

Ratkaisukaavasta nähdään, että $a = -4$, $b = 4$ ja $c = 1$, joten oikea vastaus on c.

20.

Koska puurima jaetaan suhteessa 1:3, merkataan pienempää osuutta x ja suurempaa $3x$. Rimat ovat yhteensä $x + 3x = 4x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
4x &= 30 \qquad \qquad \qquad \qquad \Big| :4 \\
x &= 7,5
\end{aligned}
$$

Oikea vastaus on b.

21.

Muutetaan kannan pituus senttimetreiksi. $12 \text{ dm} = 120 \text{ cm}$. Nyt kannan ja korkeuden pituuksien suhde on $\dfrac{120 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \dfrac{6}{1}$.

Oikea vastaus on c.

22.

Oikea vastaus on a.

Se voidaan todistaa sijoittamalla ne yhtälöpariin.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x - 5 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -3 = -2 - 1 \\ -3 = -(-2) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = -3 \\ -3 = -3 \end{cases}$$

23.

Kääntäen verrannollisuudessa suureiden välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = k \cdot \frac{1}{x}$, jossa k on verrannollisuuskerroin. Vastausvaihtoehto b voidaan muuttaa kyseiseen muotoon.

$$yx = 3 \quad \Big| : x$$

$$y = 3 \cdot \frac{1}{x}$$

Oikea vastaus on b.

24.

Koska bussifirma veloittaa päivässä vuokraa 200 € ja 0,50 € jokaiselta kilometriltä, sopisi funktion olla sellainen, joka olisi riippuvainen ajettujen kilometrien määrästä. Eli muuttujana olisi ajetut kilometrit, minkä kustannukset olisivat $0{,}5x$ €.

Bussia tuskin vuokrataan pitemmäksi ajaksi kuin 1 päiväksi. Joten päivän vuokra on 200 €.

Joten funktiona sopisi olla $200 + 0{,}5x$.

Oikea vastaus on c.

25.

Sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
(2x-1)^2 &= (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 \\
&= 4x^2 - 4x + 1
\end{aligned}
$$

Oikea vastaus on a.

26.

Funktion $f(x) = -x^2 - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska funktion asteluku on 2, mikä tarkoittaa, että kuvaaja on paraabeli. Toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, mikä tarkoittaa, että paraabeli on alaspäin aukeava.

Oikea vastaus on c.

27.

Kuvaaja leikkaa *y*-akselin, kun $x = 0$, joten lasketaan $f(0)$.

$f(0) = -4 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Joten funktio leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 1).

Oikea vastaus on b.

28.

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$+\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$2y = 2 \qquad \Big|:2$$

$$y = 1$$

Sijoitetaan saatu y:n arvo alkuperäiseen yhtälöön.

$$1 = -3x \qquad \Big|:(-3)$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Joten funktioiden kuvaajilla on yksi leikkauspiste, joka on (−1/3, 1).

Oikea vastaus on b.

29.

Suorakulmion pinta-ala on $\text{kanta} \cdot \text{korkeus}$, ja yhtälössä c muuttujana x on kannan pituus.

Oikea vastaus on c.

30.

Sijoitetaan tehtävässä annetut arvot ja lasketaan verrannollisuuskerroin.

$$y = \frac{c}{x} \qquad \Big| \cdot x$$

$$c = yx \qquad \begin{vmatrix} x = 10 \\ y = 120 \end{vmatrix}$$

$$c = 10 \cdot 120$$

$$c = 1200$$

Oikea vastaus on c.

31.

Funktio $g(x)$ saa arvon 2, kun $x = -2$.

Oikea vastaus on a.

32.

Kuvaaja leikkaa *y*-akselin, kun $x = 0$.

$f(0) = -2 \cdot 0 = 0$

Kuvaaja leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 0).

Oikea vastaus on c.

33.

Janan pituuksien suhde 3:4, se voidaan esittää myös $\frac{3}{4}$.

Vastausvaihtoehto b:n mitat voidaan myös esittää samassa suhteessa.

$$\frac{90\text{ cm}}{120\text{ cm}} = \frac{90}{120}^{(30} = \frac{3}{4}$$

Oikea vastaus on b.

34.

Oikea vastaus on a.

Se voidaan todistaa sijoittamalla pisteen koordinaatit funktion yhtälöön.

$$-3 = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1)$$
$$-3 = -(1) - 2$$
$$-3 = -1 - 2$$
$$-3 = -3$$

35.

Lasketaan, millä x:n arvolla $10 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \Big| \cdot 4 \\ 40 &= x + 10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Oikea vastaus on a.

36.

Huipun *x*-koordinaatti on nollakohtien keskiarvo. Lasketaan se.

$$x_h = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Sijoitetaan huipun *x*-koordinaatti funktioon, niin saadaan huipun *y*-koordinaatti.

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Oikea vastaus on b.

37.

c ei pidä paikkaansa, sillä vaikka myyjä ei soita yhtään puhelua kuukauden aikana, hän saa 650 € palkkaa.

38.

Funktio ei saa millään muuttujan x arvolla arvoa 2, joten yhtälöllä $f(x)=2$ ei ole ratkaisua.

Oikea vastaus on c.

39.

Sijoitetaan annettu x:n arvo yhtälöön ja ratkaistaan k.

$$
\begin{aligned}
2\cdot k\cdot 1-4&=6\\
2k&=10 \qquad |:2\\
k&=5
\end{aligned}
$$

Oikea vastaus on a.

40.

Epäyhtälö $f(x) < 0$ tarkoittaa funktion arvoja, jotka ovat pienempää kuin 0. Funktion arvot ovat pienempää kuin 0, kun kuvaaja on x-akselin alapuolella. Kuvaaja on x-akselin alapuolella, kun $1 < x < 4$.

Oikea vastaus on c.