1

a) Yhdistetään ja-sanalla lauseet A ja B.

$A \wedge B$: ”Järvi on tyyni ja lähden vesihiihtämään.”

b) Muodostetaan lauseiden A ja B negaatiot.

$\neg A$: ”järvi ei ole tyyni”
$\neg B$: ”en lähde vesihiihtämään”

Yhdistetään ja-sanalla lauseet $\neg A$ ja $\neg B$.

$\neg A \wedge \neg B$: ”Järvi ei ole tyyni ja en lähde vesihiihtämään” eli toisin sanoen: ”Järvi ei ole tyyni, enkä lähde vesihiihtämään.”

c) Yhdistetään tai-sanalla lauseet $\neg A$ ja B.

$\neg A \vee B$: ”Järvi ei ole tyyni tai lähden vesihiihtämään.”

Vastaus
a) Järvi on tyyni ja lähden vesihiihtämään.
b) Järvi ei ole tyyni ja en lähde vesihiihtämään.
c) Järvi ei ole tyyni tai lähden vesihiihtämään.

2

a) Muodostetaan implikaatio lauseiden C ja B välille.

$C \Rightarrow B$: ”Jos päässäsi on kypärä, niin voit ajaa pyörällä.”

b) Muodostetaan lauseen B negaatio.

$\neg B$: ”et voi ajaa pyörällä”

Muodostetaan implikaatio lauseiden A ja $\neg B$ välille.

$A \Rightarrow \neg B$: ”Jos tie on jäässä, niin et voi ajaa pyörällä.”

c) Muodostetaan lauseen A negaatio.

$\neg A$: ”tie ei ole jäässä”

Yhdistetään ja-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet $\neg A$ ja C.

$\neg A \wedge C$: ”Tie ei ole jäässä ja päässäsi on kypärä.”

Muodostetaan ekvivalenssi lauseiden B ja $\neg A \wedge C$ välille.

$B \Leftrightarrow (\neg A \wedge C)$: ”Voit ajaa pyörällä, jos ja vain jos tie ei ole jäässä ja päässäsi on kypärä.”

Vastaus a) Jos päässäsi on kypärä, niin voit ajaa pyörällä.
b) Jos tie on jäässä, niin et voi ajaa pyörällä.
c) Voit ajaa pyörällä, jos ja vain jos tie ei ole jäässä ja päässäsi on kypärä.

3

a) Yhdistetään tai-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet B ja C.

$B \vee C$: ”Rannalla voi pelata rantalentistä tai rannalla voi harjoitella uimahyppyjä” eli lyhemmin: ”Rannalla voi pelata rantalentistä tai harjoitella uimahyppyjä.”

Yhdistetään ja-sanalla lauseet A ja $B \vee C$.

$A \wedge (B \vee C)$: ”Rannalla tuulee, ja rannalla voi pelata rantalentistä tai harjoitella uimahyppyjä.”

b) Muodostetaan lauseen A negaatio.

$\neg A$: ”rannalla ei tuule”

Yhdistetään tai-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet $\neg A$ ja B.

$\neg A \vee B$: ”Rannalla ei tuule tai rannalla voi pelata rantalentistä.”

Muodostetaan implikaatio lauseiden C ja $\neg A \vee B$ välille.

$C \Rightarrow (\neg A \vee B)$: ”Jos rannalla voi harjoitella uimahyppyjä, niin rannalla ei tuule tai rannalla voi pelata rantalentistä.”

c) Muodostetaan lauseiden B ja C negaatiot.

$\neg B$: ”rannalla ei voi pelata rantalentistä”
$\neg C$: ”rannalla ei voi harjoitella uimahyppyjä”

Yhdistetään ja-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet $\neg B$ ja $\neg C$.

$\neg B \wedge \neg C$: ”Rannalla ei voi pelata rantalentistä ja rannalla ei voi harjoitella uimahyppyjä” eli lyhyemmin ”Rannalla ei voi pelata rantalentistä eikä harjoitella uimahyppyjä”.

Muodostetaan ekvivalenssi lauseiden A ja $\neg B \wedge \neg C$ välille.

$A \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$: ”Rannalla tuulee, jos ja vain jos rannalla ei voi pelata rantalentistä eikä harjoitella uimahyppyjä” eli toisin ”Rannalla tuulee täsmälleen silloin, kun rannalla ei voi pelata rantalentistä eikä harjoitella uimahyppyjä”.

Vastaus a) Rannalla tuulee, ja rannalla voi pelata rantalentistä tai harjoitella uimahyppyjä.
b) Jos rannalla voi harjoitella uimahyppyjä, niin rannalla ei tuule tai rannalla voi pelata rantalentistä.
c) Rannalla tuulee täsmälleen silloin, kun rannalla ei voi pelata rantalentistä eikä harjoitella uimahyppyjä.

4

a) Muodostetaan lauseiden A ja B konjunktio.

$A \wedge B$: ”Aurinko paistaa ja opiskellaan ulkona”.

b) Muodostetaan lauseiden A ja B disjunktio.

$A \vee B$: ”Aurinko paistaa tai opiskellaan ulkona.”

Muodostetaan lauseen $A \vee B$ negaatio.

$\neg(A \vee B)$: ”Ei pidä paikkaansa, että aurinko paistaa tai opiskellaan ulkona.”

c) Muodostetaan lauseiden A ja B negaatiot.

$\neg A$: ”aurinko ei paista”
$\neg B$: ”ei opiskella ulkona”

Muodostetaan lauseiden $\neg A$ ja $\neg B$ disjunktio.

$\neg A \vee \neg B$: ”Aurinko ei paista tai ei opiskella ulkona.”

Vastaus a) $A \wedge B$: ”Aurinko paistaa ja opiskellaan ulkona”.
b) $\neg(A \vee B)$: ”Ei pidä paikkaansa, että aurinko paistaa tai opiskellaan ulkona.”
c) $\neg A \vee \neg B$: ”Aurinko ei paista tai ei opiskella ulkona.”

5

a) ”Ei sada vettä ja naapuri leikkaa nurmikkoa” voidaan formalisoida lauseiden $\neg A$ ja B konjunktiona.

Muodostetaan lause $\neg A$ eli lauseen A negaatio.

$\neg A$: ”ei sada vettä”

Muodostetaan lauseiden $\neg A$ ja B konjunktio.

$\neg A \wedge B$.

b) ”Sataa vettä tai naapuri leikkaa nurmikkoa” voidaan formalisoida lauseiden A ja B disjunktiona.

$A \vee B$

c) ”Ei pidä paikkaansa, että sataa vettä ja naapuri leikkaa nurmikkoa” voidaan formalisoida lauseiden A ja B konjunktion negaationa.

Muodostetaan lauseiden A ja B konjunktio.

$A \wedge B$: ”Sataa vettä ja naapuri leikkaa nurmikkoa.”

Muodostetaan lauseen $A \wedge B$ negaatio.

$\neg(A \wedge B)$

Vastaus
a) $\neg A \wedge B$
b) $A \vee B$
c) $\neg(A \wedge B)$

6

a) Lause ”on perjantai, pyykkikori on täynnä ja lattialla on pölypalloja” voidaan kirjoittaa muotoon: ”on perjantai ja pyykkikori on täynnä ja lattialla on pölypalloja”.

Tämä lause voidaan formalisoida lauseiden A, B ja C konjunktiona.

$A \wedge B \wedge C$

b) Lause ”jos lattialla on pölypalloja tai pyykkikori on täynnä, niin on perjantai” voidaan formalisoida implikaationa lauseiden C ja B disjunktion ja lauseen A välillä.

Muodostetaan lauseiden C ja B disjunktio.

$C \vee B$: ”Lattialla on pölypalloja tai pyykkikori on täynnä”.

Muodostetaan implikaatio lauseiden $C \vee B$ ja A välille.

$(C \vee B) \Rightarrow A$

c) Lause ”lattialla on pölypalloja, jos on perjantai ja pyykkikori on täynnä, jos ei ole perjantai” voidaan kirjoittaa muotoon: ”jos on perjantai, niin lattialla on pölypalloja, ja jos ei ole perjantai, pyykkikori on täynnä”.

Tämä lause voidaan formalisoida lauseiden A ja C implikaation ja lauseiden $\neg A$ ja B implikaation välisenä konjunktiona.

Muodostetaan implikaatiot.

$A \Rightarrow C$: ”Jos on perjantai, niin lattialla on pölypalloja.”
$\neg A \Rightarrow B$: ”Jos ei ole perjantai, niin pyykkikori on täynnä.”

Muodostetaan lauseiden $A \Rightarrow C$ ja $\neg A \Rightarrow B$ konjunktio.

$(A \Rightarrow C) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

Vastaus a) $A \wedge B \wedge C$
b) $(C \vee B) \Rightarrow A$
c) $(A \Rightarrow C) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

7

Olkoon A: ”Uppo-Nallelle tulee nälkä”, B: ”repussa on leipää” ja C: ”repussa on hedelmiä”.

a) Lause ”Uppo-Nallelle ei tule nälkä, jos repussa on leipää tai hedelmiä” voidaan kirjoittaa muotoon: ” jos repussa on leipää tai repussa on hedelmiä, niin Uppo-Nallelle ei tule nälkä”.

Tämä lause voidaan formalisoida implikaationa lauseiden B ja C disjunktion ja lauseen A negaation välillä.

$(B \vee C) \Rightarrow \neg A$

b) Lause ”Uppo-Nallelle tulee nälkä ja repussa on leipää ja hedelmiä” voidaan kirjoittaa muotoon: ”Uppo-Nallelle tulee nälkä ja repussa on leipää ja repussa on hedelmiä”.

Tämä lause voidaan formalisoida lauseiden A, B ja C konjunktiona.

$A \wedge B \wedge C$

c) Lause ”Uppo-Nallelle ei tule nälkä ja repussa on leipää täsmälleen silloin, kun repussa on hedelmiä” voidaan kirjoittaa muotoon ”Uppo-Nallelle ei tule nälkä ja repussa on leipää, jos ja vain jos repussa on hedelmiä”.

Tämä lause voidaan formalisoida ekvivalenssina lauseiden $\neg A$ ja B konjunktion ja lauseen C välillä.

$(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow C$

Vastaus a) $(B \vee C) \Rightarrow \neg A$

b) $A \wedge B \wedge C$

c) $(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow C$

8

a) Lause ”molemmilla heitoilla saadaan parillinen luku” voidaan kirjoittaa muotoon: ”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla saadaan parillinen luku”.

Tämä voidaan formalisoida lauseiden A ja B konjunktiona.

$A \wedge B$

b) Lause ”ainakin toisella heitolla saadaan parillinen luku” voidaan kirjoittaa muotoon: ”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku tai toisella heitolla saadaan parillinen luku”.

Tämä voidaan formalisoida lauseiden A ja B disjunktiona.

$A \vee B$

c) Lause ”molemmilla heitoilla saadaan pariton luku” voidaan kirjoittaa muotoon ”ensimmäisellä heitolla ei saada parillista lukua ja toisella heitolla ei saada parillista lukua”.

Tämä voidaan formalisoida lauseiden $\neg A$ ja $\neg B$ konjunktiona.

$\neg A \wedge \neg B$

d) Lause ”toisella heitoista saadaan parillinen luku ja toisella pariton” voidaan kirjoittaa muotoon: ”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla saadaan pariton luku tai ensimmäisellä heitolla saadaan pariton luku ja toisella heitolla saadaan parillinen luku”.

Tämä voidaan formalisoida lauseiden A ja $\neg B$ konjunktion sekä lauseiden $\neg A$ ja B konjunktion disjunktiona.

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Vastaus
a) $A \wedge B$
b) $A \vee B$
c) $\neg A \wedge \neg B$
d) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

9

a) Lause ”luku a on positiivinen” voidaan kirjoittaa muotoon: ”luku a on suurempi kuin nolla”.

Tämä voidaan formalisoida lauseella A.

b) Lause ”luku a on negatiivinen” voidaan kirjoittaa muotoon: ”luku a ei ole positiivinen ja luku a ei ole nolla” tai vaihtoehtoisesti ”ei pidä paikkaansa, että luku a on positiivinen tai luku a on nolla.”

Nämä voidaan formalisoida joko lauseiden $\neg A$ ja $\neg B$ konjunktiona: $\neg A \wedge \neg B$

tai lauseiden A ja B disjunktion negaationa: $\neg(A \vee B)$

c) Lause ”luku a on epänegatiivinen” voidaan kirjoittaa muotoon: ”luku a on positiivinen tai luku on nolla”.

Tämä voidaan formalisoida lauseiden A ja B disjunktiona: $A \vee B$

d) Lause ”luku a on epäpositiivinen” voidaan kirjoittaa muotoon: ”luku a ei ole positiivinen”.

Tämä voidaan formalisoida lauseen A negaationa: $\neg A$.

Vastaus
a) A
b) $\neg A \wedge \neg B$ eli $\neg(A \vee B)$
c) $A \vee B$
d) $\neg A$

10

a) Yhdistetään tai-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet A ja B.

$A \vee B$: ”Ajattelen ystävää tai ajattelen hunajaa” eli lyhemmin ”Ajattelen ystävää tai hunajaa.”

Yhdistetään ja-sanalla lauseet $A \vee B$ ja C.

$(A \vee B) \wedge C$: ”Ajattelen ystävää tai hunajaa, ja suupielet venyvät korvia kohti.”

b) Muodostetaan implikaatio lauseesta C lauseeseen $A \vee B$.

$C \Rightarrow (A \vee B)$: ”Jos suupielet venyvät korvia kohti, niin ajattelen ystävää tai hunajaa.”

c) Yhdistetään ja-sanalla lauseet B ja C.

$B \wedge C$: ”Ajattelen hunajaa ja suupielet venyvät korvia kohti.”

Muodostetaan ekvivalenssi lauseiden $\neg A$ ja $B \wedge C$ välille.

$\neg A \Leftrightarrow (B \wedge C)$: ”En ajattele ystävää, jos ja vain jos ajattelen hunajaa ja suupielet venyvät korvia kohti.”

Vastaus
a) Ajattelen ystävää tai hunajaa, ja suupielet venyvät korvia kohti.
b) Jos suupielet venyvät korvia kohti, niin ajattelen ystävää tai hunajaa.
c) En ajattele ystävää, jos ja vain jos ajattelen hunajaa ja suupielet venyvät korvia kohti.

11

a) Yhdistetään ja-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet A ja B sekä tai-sanalla toisten sulkeiden sisällä olevat lauseet C ja D.

$A \wedge B$: ”Hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja.”

$C \vee D$: ”Hän puhuu järkeviä asioita tai on hyvä kuuntelija.”

Muodostetaan implikaatio lauseesta $A \wedge B$ lauseeseen $C \vee D$.

$(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$: ”Jos hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja, niin hän puhuu järkevistä asioista tai on hyvä kuuntelija.”

b) Yhdistetään ja-sanalla sulkeiden sisällä olevat lauseet A ja B sekä ja-sanalla toisten sulkeiden sisällä olevat lauseet C ja D.

$A \wedge B$: ”Hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja.”

$C \wedge D$: ”Hän puhuu järkeviä asioita ja on hyvä kuuntelija.”

Yhdistetään tai-sanalla lauseet $A \wedge B$ ja $C \wedge D$.

$(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$: ”Hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja, tai hän puhuu järkevistä asioista ja on hyvä kuuntelija.”

c) Muodostetaan $\neg B$ ja $\neg D$.

$\neg B$: ”Hän ei käytä helppoja sanoja.”

$\neg D$: ”Hän ei ole hyvä kuuntelija.”
Yhdistetään tai-sanalla lauseet A, $\neg B$, C ja $\neg D$.

$A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$: ”Hän on mukava keskustelukumppani tai hän ei käytä helppoja sanoja tai hän puhuu järkevistä asioista tai hän ei ole hyvä kuuntelija.”

Vastaus a) Jos hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja, niin hän puhuu järkevistä asioista tai on hyvä kuuntelija.
b) Hän on mukava keskustelukumppani ja käyttää helppoja sanoja, tai hän puhuu järkevistä asioista ja on hyvä kuuntelija
c) Hän on mukava keskustelukumppani tai hän ei käytä helppoja sanoja tai hän puhuu järkevistä asioista tai hän ei ole hyvä kuuntelija.

12

a) Luku on epänegatiivinen.

Luku on negatiivinen tai nolla.

b) Luku on korkeintaan 3.

Luku on pienempi tai yhtä suuri kuin 3.

c) Ei pidä paikkaansa, että koulussa on kolme matematiikan opettajaa.

Koulussa on enemmän kuin kolme matematiikan opettajaa tai koulussa on vähemmän kuin kolme matematiikan opettajaa.

d) Kukaan opiskelijoista ei ollut ajoissa.

Ei pidä paikkaansa, että ainakin yksi opiskelija oli ajoissa.

e) $12+3\neq 15$

13

a) $A \Leftrightarrow B$: ”Vesi muuttuu vaapukkamehuksi, jos ja vain jos myrsky on tuonut rantaan aarteita.”

b) Muodostetaan lauseen B negaatio.

$\neg B$: ”Myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita.”

Muodostetaan lauseiden $\neg B$ ja A implikaatio.

$\neg B \Rightarrow A$: ”Jos myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita, niin vesi muuttuu vaapukkamehuksi.”

c) Muodostetaan lauseiden A ja B konjunktio.

$A \wedge B$: ”Vesi muuttuu vaapukkamehuksi ja myrsky on tuonut rantaan aarteita.”

Muodostetaan lauseen B negaatio.

$\neg B$: ”Myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita.”

Muodostetaan lauseiden $A \wedge B$ ja $\neg B$ disjunktio.

$(A \wedge B) \vee \neg B$: ”Vesi muuttuu vaapukkamehuksi ja myrsky on tuonut rantaan aarteita, tai myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita.”

Vastaus
a) $A \Leftrightarrow B$: ”Vesi muuttuu vaapukkamehuksi, jos ja vain jos myrsky on tuonut rantaan aarteita.”
b) $\neg B \Rightarrow A$: ”Jos myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita, niin vesi muuttuu vaapukkamehuksi.”
c) $(A \wedge B) \vee \neg B$: ”Vesi muuttuu vaapukkamehuksi ja myrsky on tuonut rantaan aarteita, tai myrsky ei ole tuonut rantaan aarteita.”

14

Olkoon A: ”käytän kännykkää”, B: ”sivu aukeaa” ja C: ”nettiyhteys toimii”.

a) Muodostetaan lauseiden B ja C konjunktio.

$B \wedge C$: ” Sivu aukeaa ja nettiyhteys toimii.”

Muodostetaan lauseen $B \wedge C$ negaatio.

$\neg(B \wedge C)$: ”Ei pidä paikkaansa, että sivu aukeaa ja nettiyhteys toimii.”

Lause ”käytän kännykkää ja ei pidä paikkaansa, että sivu aukeaa ja nettiyhteys toimii” voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A ja $\neg(B \wedge C)$ konjunktio.

$A \wedge \neg(B \wedge C)$

b) Muodostetaan lauseiden A ja B konjunktio.

$A \wedge B$: ”Käytän kännykkää ja sivu aukeaa.”

Lause ”jos käytän kännykkää ja sivu aukeaa, niin nettiyhteys toimii” voidaan nyt formalisoida muodostamalla implikaatio lauseiden $A \wedge B$ ja C välille.

$(A \wedge B) \Rightarrow C$

c) Lause ”sivu aukeaa, kun käytän kännykkää” voidaan kirjoittaa ”jos käytän kännykkää, niin sivu aukeaa”.

Muodostetaan lauseiden A ja B implikaatio

$A \Rightarrow B$: ”Jos käytän kännykkää, niin sivu aukeaa.”

Lause ”jos sivu aukeaa, kun käytän kännykkää, niin nettiyhteys toimii” voidaan nyt formalisoida muodostamalla implikaatio lauseiden $A \Rightarrow B$ ja C välille.

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

Vastaus
a) $A \wedge \neg(B \wedge C)$
b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

15

a) Olkoon A: ”Matti jää kotivahdiksi”, B: ”Ville lähtee elokuviin” ja C: ”Noora lähteen elokuviin”.

Muodostetaan lauseiden B ja C konjunktio.

$(B \wedge C)$: ”Ville lähtee elokuviin ja Noora lähtee elokuviin” eli ”Ville ja Noora lähtevät elokuviin”.

Lause ”jos Matti jää kotivahdiksi, niin Ville ja Noora lähtevät elokuviin” voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A ja $(B \wedge C)$ implikaatio.

$A \Rightarrow (B \wedge C)$

b) Olkoon A: ”Sauli herää unesta”, B: ”naapuri huutaa” ja C: ”naapuri mekastaa”.

Lause ”Sauli herää unesta, jos naapuri huutaa tai mekastaa” voidaan kirjoittaa toisin: ”jos naapuri huutaa tai mekastaa, Sauli herää unesta”.

Muodostetaan lauseiden B ja C disjunktio.

$B \vee C$: ”Naapuri huutaa tai naapuri mekastaa” eli ”Naapuri huutaa tai mekastaa”

Lause ”jos naapuri huutaa tai mekastaa, Sauli herää unesta” voidaan formalisoida muodostamalla implikaatio lauseiden $B \vee C$ ja A välille.

$(B \vee C) \Rightarrow A$

Vastaus a) $A \Rightarrow (B \wedge C)$

b) $(B \vee C) \Rightarrow A$

16

a) Lause ”Kasper ja Jesper ovat syyttömiä, mutta Joonatan on syyllinen” voidaan kirjoittaa toisin: ”Kasper on syytön ja Jesper on syytön ja Joonatan ei ole syytön.”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja $\neg C$ konjunktio.

$A \wedge B \wedge \neg C$

b) Lause ”Kasper on syyllinen, jos ja vain jos Jesper ja Joonatan ovat syyttömiä” voidaan kirjoittaa toisin: ”Kasper ei ole syytön, jos ja vain jos Jesper on syytön ja Joonatan on syytön”.

Muodostetaan lauseiden B ja C konjunktio.

$B \wedge C$: ”Jesper on syytön ja Joonatan on syytön.”

Alkuperäinen lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla ekvivalenssi lauseiden $\neg A$ ja $B \wedge C$ välille.

$\neg A \Leftrightarrow (B \wedge C)$

c) Lause ”Joonatan on syytön ja Jesper on syyllinen, jos Kasper on syytön” voidaan kirjoittaa toisin: ”Jos Kasper on syytön, niin Joonatan on syytön ja Jesper ei ole syytön”.

Muodostetaan lauseiden C ja $\neg B$ konjunktio.

$C \wedge \neg B$: ”Joonatan on syytön ja Jesper ei ole syytön.”

Alkuperäinen lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla implikaatio lauseiden A ja $C \wedge \neg B$ välille.

$A \Rightarrow (C \wedge \neg B)$

Vastaus a) $A \wedge B \wedge \neg C$
b) $\neg A \Leftrightarrow (B \wedge C)$
c) $A \Rightarrow (C \wedge \neg B)$

17

a) Lause ”saadaan kolme parillista lukua”

voidaan kirjoittaa toisin: ”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla saadaan parillinen luku ja kolmannella heitolla saadaan parillinen luku”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C konjunktio.

$A \wedge B \wedge C$

b) Lause ”saadaan ainakin yksi parillinen luku”

voidaan kirjoittaa toisin: ”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku tai toisella heitolla saadaan parillinen luku tai kolmannella heitolla saadaan parillinen luku”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C disjunktio.

$A \vee B \vee C$

c) Lause ”saadaan ainakin yksi pariton luku” eli

”saadaan ainakin yksi epäparillinen luku”

voidaan kirjoittaa toisin: ”ensimmäisellä heitolla ei saada parillista lukua tai toisella heitolla ei saada parillista lukua tai kolmannella heitolla ei saada parillista lukua”

tai vaihtoehtoisesti

”ei pidä paikkaansa, että ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla saadaan parillinen luku ja kolmannella heitolla saadaan parillinen luku”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden $\neg A$, $\neg B$ ja $\neg C$ disjunktio.

$$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$$

Vaihtoehtoisesti lause voidaan formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C konjunktion negaatio.

$$\neg(A \wedge B \wedge C)$$

d) Lause ”saadaan tasan kaksi parillista lukua” voidaan kirjoittaa toisin:

”ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla saadaan parillinen luku ja kolmannella heitolla ei saada parillista lukua TAI ensimmäisellä heitolla saadaan parillinen luku ja toisella heitolla ei saada parillista lukua ja kolmannella heitolla saadaan parillinen luku TAI ensimmäisellä heitolla ei saada parillista lukua ja toisella heitolla saadaan parillinen luku ja kolmannella heitolla saadaan parillinen luku”

Lause voidaan nyt formalisoida seuraavasti:

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Vastaus
a) $A \wedge B \wedge C$
b) $A \vee B \vee C$
c) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ tai vaihtoehtoisesti $\neg(A \wedge B \wedge C)$
d) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

18

a) Lause ”kukaan kolmesta lukiolaisesta ei tykkää energiajuomista”

voidaan kirjoittaa toisin: ”Matias ei tykkää energiajuomista ja Liisa ei tykkää energiajuomista ja Niina ei tykkää energiajuomasta ”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C negaatioiden konjunktio.

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

b) Lause ”kaikki kolme lukiolaista eivät tykkää energiajuomista”

voidaan kirjoittaa toisin: ”Matias ei tykkää energiajuomista tai Liisa ei tykkää energiajuomista tai Niina ei tykkää energiajuomasta ” tai

”ei pidä paikkaansa, että kaikki kolme lukiolaista tykkäävät energiajuomista”.

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C negaatioiden disjunktio.

$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

Toinen tapa formalisoida on muodostaa lauseiden A, B ja C konjunktioiden negaatio.

$\neg(A \wedge B \wedge C)$

c) Lause ”ainakin yksi näistä lukiolaisista tykkää energiajuomasta.” voidaan kirjoittaa toisin: ”Matias tykkää energiajuomasta tai Liisa tykkää energiajuomasta tai Niina tykkää energiajuomasta”

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden A, B ja C disjunktio.

$$A \vee B \vee C$$

d) Lause ” ainakin kaksi näistä lukiolaisista tykkää energiajuomasta” voidaan kirjoittaa toisin:

”Matias tykkää energiajuomasta ja Liisa tykkää energiajuomasta TAI Matias tykkää energiajuomasta ja Niina tykkää energiajuomasta TAI Liisa tykkää energiajuomasta ja Niina tykkää energiajuomasta”

Lause voidaan nyt formalisoida seuraavasti:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Vastaus
a) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
b) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ tai vaihtoehtoisesti $\neg(A \wedge B \wedge C)$
c) $A \vee B \vee C$
d) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

19

a) Lause ”$a \geq 2$” tarkoittaa samaa kuin

”a ei ole pienempi kuin 2”.

Lause voidaan formalisoida muodostamalla lauseen A negaatio.

$\neg A$

b) Lause ”$a > 2$” tarkoittaa samaa kuin

”a ei ole pienempi kuin 2 ja a ei ole yhtä suuri kuin 2”

tai vaihtoehtoisesti

”ei pidä paikkaansa, että a on pienempi kuin 2 tai yhtä suuri kuin 2”.

Lause voidaan formalisoida muodostamalla lauseiden A ja B negaatioiden konjunktio.

$\neg A \wedge \neg B$

Toinen tapa formalisoida on muodostaa lauseiden A ja B disjunktion negaatio.

$\neg(A \vee B)$

c) Lause ”$a = 5$” tarkoittaa samaa kuin

”a ei ole suurempi kuin 5 ja a ei ole pienempi kuin 5”

tai vaihtoehtoisesti

”ei pidä paikkaansa, että a on suurempi kuin 5 tai a on pienempi kuin 5”.

Lause voidaan nyt formalisoida muodostamalla lauseiden C ja D negaatioiden konjunktio.

$\neg C \wedge \neg D$

Toinen tapa formalisoida on muodostaa lauseiden C ja D disjunktion negaatio.

$\neg(C \vee D)$

d) Lause ”$2 < a < 5$” tarkoittaa samaa kuin ”a ei ole pienempi kuin 2 ja a ei ole yhtä suuri kuin kaksi ja a on pienempi kuin 5”.

Lause voidaan formalisoida muodostamalla lauseiden lauseiden $\neg A$, $\neg B$ ja D konjuktio.

$\neg A \wedge \neg B \wedge D$

e) Lause ”$a \leq 2$ tai $a \geq 5$” tarkoittaa samaa kuin

”a on pienempi kuin 2 tai a on yhtä suuri kuin kaksi, tai a ei ole pienempi kuin 5”.

Lause voidaan formalisoida muodostamalla lauseiden A ja B disjunktion ja lauseen D negaation disjunktio.

$(A \vee B) \vee \neg D$

Vastaus
a) $\neg A$
b) $\neg A \wedge \neg B$ (tai vaihtoehtoisesti $\neg(A \vee B)$)
c) $\neg C \wedge \neg D$ (tai vaihtoehtoisesti $\neg(C \vee D)$)
d) $\neg A \wedge \neg B \wedge D$
e) $(A \vee B) \vee \neg D$

20

a) epätosi

b) tosi

c) tosi

d) epätosi

21

a) Laaditaan lauseille totuustaulut.

Totuustaulu lauseelle $\neg A \wedge \neg B$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
1	**1**	0	0	0
1	**0**	0	1	0
0	**1**	1	0	0
0	**0**	1	1	1

Totuustaulu lauseelle $\neg(A \vee B)$.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	**1**	1	0
1	**0**	1	0
0	**1**	1	0
0	**0**	0	1

Havaitaan, että lauseiden $\neg A \wedge \neg B$ ja $\neg(A \vee B)$ totuusarvot ovat samat, joten lauseet ovat loogisesti ekvivalentit (eli tarkoittavat loogisessa mielessä samaa).

b) Lause $\neg A \wedge \neg B$ suomeksi: ”Mortti ei ole syyllinen ja Vertti ei ole syyllinen” eli toisin sanoen: ”Mortti on syytön ja Vertti on syytön”.

Lause $\neg(A \vee B)$ suomeksi: ”Ei pidä paikkaansa, että Mortti on syyllinen tai Vertti on syyllinen.”

Vastaus a) Lauseiden totuusarvot ovat samat.

b) $\neg A \wedge \neg B$: ”Mortti on syytön ja Vertti on syytön”.
$\neg(A \vee B)$: ”Ei pidä paikkaansa, että Mortti on syyllinen tai Vertti on syyllinen.”

22

a) Laaditaan lauseille totuustaulut.

Totuustaulu lauseelle $A \vee (B \wedge C)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
1	**1**	**1**	1	1
1	**1**	**0**	0	1
1	**0**	**1**	0	1
1	**0**	**0**	0	1
0	**1**	**1**	1	1
0	**1**	**0**	0	0
0	**0**	**1**	0	0
0	**0**	**0**	0	0

Lause on tosi, kun A on tosi tai B ja C ovat yhtä aikaa tosia.

Totuustaulu lauseelle $(A \vee B) \vee (A \wedge \neg C)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\neg \boldsymbol{C}$	$(A \vee B)$	$(A \wedge \neg C)$	$(A \vee B) \vee (A \wedge \neg C)$
1	**1**	**1**	0	1	0	1
1	**1**	**0**	1	1	1	1
1	**0**	**1**	0	1	0	1
1	**0**	**0**	1	1	1	1
0	**1**	**1**	0	1	0	1
0	**1**	**0**	1	1	0	1
0	**0**	**1**	0	0	0	0
0	**0**	**0**	1	0	0	0

Lause on tosi, kun A on tosi tai B on tosi.

Vastaus a) Lause on tosi, kun A on tosi tai B ja C ovat yhtä aikaa tosia.

b) Lause on tosi, kun A on tosi tai B on tosi.

23

a) Laaditaan lauseille totuustaulut.

Totuustaulu lauseelle $A \vee (B \Rightarrow A)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$(B \Rightarrow A)$	$A \vee (B \Rightarrow A)$
1	**1**	1	1
1	**0**	1	1
0	**1**	0	0
0	**0**	1	1

Totuustaulu lauseelle $(A \vee B) \Rightarrow A$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow A$
1	**1**	1	1
1	**0**	1	1
0	**1**	1	0
0	**0**	0	1

Lauseiden totuusarvot ovat samat. Lauseet ovat ekvivalentit.

b) $A \vee (B \Rightarrow A)$: ”Pidän sushista, tai jos pidän pitsasta, niin pidän sushista.”

$(A \vee B) \Rightarrow A$: ”Jos pidän sushista tai pizzasta, niin pidän pizzasta.”

Vastaus a) Lauseiden totuusarvot ovat samat.

b) $A \vee (B \Rightarrow A)$: ”Pidän sushista, tai jos pidän pitsasta, niin pidän sushista.”

$(A \vee B) \Rightarrow A$: ”Jos pidän sushista tai pizzasta, niin pidän pizzasta.”

24

Olkoon A: ”Jemina rakastaa Verneriä” ja B: ”Jemina rakastaa Tuomasta”.

a) Lause ”jos Jemina rakastaa Verneriä tai Tuomasta, niin Jemina rakastaa heitä molempia” voidaan kirjoittaa muotoon:

”jos Jemina rakastaa Verneriä tai Jemina rakastaa Tuomasta, niin Jemina rakastaa Verneriä ja Jemina rakastaa Tuomasta”.

Tämä lause voidaan formalisoida seuraavasti:

$$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$$

Tutkitaan lausetta totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$
1	**1**	1	1	1
1	**0**	1	0	0
0	**1**	1	0	0
0	**0**	0	0	1

Lause on tosi, kun lauseet A ja B ovat molemmat tosia tai ovat molemmat epätosia. Eli lause on tosi, kun Jemina rakastaa molempia tai kun Jemina ei rakasta kumpaakaan.

b) Lause ”Jemina rakastaa Verneriä ja Tuomasta, jos ja vain jos Jemina ei rakasta kumpaakaan” voidaan kirjoittaa muotoon:

”Jemina rakastaa Verneriä ja Jemina rakastaa Tuomasta, jos ja vain jos Jemina ei rakasta Verneriä ja Jemina ei rakasta Tuomasta.”

Tämä lause voidaan formalisoida seuraavasti:

$(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Tutkitaan lausetta totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
1	**1**	0	0	1	0	0
1	**0**	0	1	0	0	1
0	**1**	1	0	0	0	1
0	**0**	1	1	0	1	0

Lause on tosi, kun joko lause A on tosi tai lause B on tosi, mutta eivät molemmat yhtä aikaa. Eli lause on tosi, kun Jemina rakastaa Verneriä tai Tuomasta, mutta ei molempia yhtä aikaa.

Vastaus a) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$

Lause on tosi, jos Jemina rakastaa molempia tai jos Jemina ei rakasta kumpaakaan.

b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Lause on tosi, jos Jemina rakastaa vain joko Verneriä tai Tuomasta.

25

Viesti $L \wedge (\neg L \Leftrightarrow O)$ oli luotettavalta taholta eli voidaan olettaa, että se on totta.

Tutkitaan lauseen $L \wedge (\neg L \Leftrightarrow O)$ totuutta totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{O}$	$\neg L$	$\neg L \Leftrightarrow O$	$L \wedge (\neg L \Leftrightarrow O)$
1	**1**	0	0	0
1	**0**	0	1	1
0	**1**	1	1	0
0	**0**	1	0	0

Lause on tosi vain, kun lause L on tosi ja lause O epätosi eli syyllinen on lehtori Lehikoinen.

Vastaus Syyllinen on lehtori Lehikoinen.

26

Olkoon A: “Jukka on syytön”, B: “Paavo on syytön”, C: “Mika on syytön”.

Formalisoidaan lauseet.

”Jos Jukka on syytön tai Paavo on syyllinen, niin Mika on syyllinen.”

$(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C$

”Jos Jukka on syytön, niin Mika on syytön.”

$A \Rightarrow C$

“Jukka ja Mika eivät rötöstele yhdessä” eli ainakin toinen heistä on syytön.

$\neg(\neg A \wedge \neg C)$ eli $A \vee C$

Koska todistajien lausunnot olivat luotettavia, ja rehtori tietää todeksi viimeisen väitteen, voidaan tutkia totuustaulun avulla, milloin lauseet ovat totta.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C$	$A \Rightarrow C$	$A \vee C$
1	**1**	**1**	0	0	1	0	1	1
1	**1**	**0**	0	1	1	1	0	1
1	**0**	**1**	1	0	1	0	1	1
1	**0**	**0**	1	1	1	1	0	1
0	**1**	**1**	0	0	0	1	1	1
0	**1**	**0**	0	1	0	1	1	0
0	**0**	**1**	1	0	1	0	1	1
0	**0**	**0**	1	1	1	1	1	0

Lauseet $(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg C$, $A \Rightarrow C$ ja $A \vee C$ ovat yhtä aikaa tosia vain, kun lause A on epätosi ja lauseet B ja C ovat tosia. Eli Jukka on syyllinen, Mika ja Paavo ovat syyttömiä.

Vastaus Jukka on syyllinen.

27

Olkoon A: “Aino on ritari” ja B: “Björn on ritari”

Formalisoidaan Ainon väite ”molemmat ovat kelmejä” eli ”Aino on kelmi ja Björn on kelmi”.

$$\neg A \wedge \neg B$$

Tutkitaan lausetta totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
1	**1**	0	0	0
1	**0**	0	1	0
0	**1**	1	0	0
0	**0**	1	1	1

Mikäli Aino on ritari, hän puhuu totta. Mikäli Aino on kelmi, hän valehtelee. Hyväksyttäviä rivejä ovat ne, joissa Ainon väitteellä on sama totuusarvo, kuin lauseella A: ”Aino on ritari”.

Ehdon täyttäviä rivejä on ainoastaan yksi. Tällä rivillä lause A on epätosi ja lause B tosi.

Tällöin Aino on kelmi ja Björn on ritari.

Vastaus Aino on kelmi, Björn on ritari.

28

Olkoon A: "Auvo on ritari" ja B: "Bobi on ritari"

Formalisoidaan lauseet.

Auvo: "Toinen meistä on kelmi ja toinen ritari."

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Bobi: "Olemme molemmat kelmejä tai molemmat ritareita."

$(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Tutkitaan lauseita totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
1	**1**	0	0	0	1	0	0	1	0
1	**0**	0	1	0	0	1	0	0	1
0	**1**	1	0	0	0	0	1	0	1
0	**0**	1	1	1	0	0	0	1	0

Ritarit puhuvat aina totta ja kelmit valehtelevat. Hyväksyttäviä ovat ne rivit, joissa Auvon väitteellä on sama totuusarvo kuin lauseella A, ja Bobin väitteellä on sama totuusarvo kuin lauseella B. Ehdon täyttäviä rivejä on ainoastaan yksi. Tällä rivillä lause A on tosi ja lause B on epätosi.

Tällöin Auvo on ritari ja Bobi on kelmi.

Vastaus Auvo on ritari, Bobi on kelmi.

29

Laaditaan lauseen $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ eli poissulkevan disjunktion $A \veebar B$ totuustaulu.

A	**B**	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	**1**	1	1	0	0
1	**0**	1	0	1	1
0	**1**	1	0	1	1
0	**0**	0	0	1	0

30

a) Laaditaan lauseille totuustaulut.

Totuustaulu lauseelle $\neg A \vee \neg B$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	**1**	0	0	0
1	**0**	0	1	1
0	**1**	1	0	1
0	**0**	1	1	1

Totuustaulu lauseelle $\neg(A \wedge B)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
1	**1**	1	0
1	**0**	0	1
0	**1**	0	1
0	**0**	0	1

Havaitaan, että lauseiden $\neg A \vee \neg B$ ja $\neg(A \wedge B)$ totuusarvot ovat samat, joten lauseet ovat loogisesti ekvivalentit (eli tarkoittavat loogisessa mielessä samaa).

b) Lause $\neg A \vee \neg B$ suomeksi: ”Mortti ei ole syyllinen tai Vertti ei ole syyllinen” eli toisin sanoen: ”Mortti on syytön tai Vertti on syytön”.

Lause $\neg(A \wedge B)$ suomeksi: ”Ei pidä paikkaansa, että Mortti on syyllinen ja Vertti on syyllinen.”

Vastaus a) Lauseiden totuusarvot ovat samat.

b) $\neg A \vee \neg B$: ”Mortti on syytön tai Vertti on syytön”.
$\neg(A \wedge B)$: ”Ei pidä paikkaansa, että Mortti on syyllinen ja Vertti on syyllinen.”

31

Olkoon A: ”lähtee Tampereelle”, B: ”menee elokuviin” ja C: ”käy museossa”

a) Formalisoidaan lause: ”Vuokko lähtee Tampereelle ja käy siellä elokuvissa tai taidemuseossa”.

$A \wedge (B \vee C)$

Laaditaan totuustaulu

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	rivinumero
1	**1**	**1**	1	1	1
1	**1**	**0**	1	1	2
1	**0**	**1**	1	1	3
1	**0**	**0**	0	0	4
0	**1**	**1**	1	0	5
0	**1**	**0**	1	0	6
0	**0**	**1**	1	0	7
0	**0**	**0**	0	0	8

b) Formalisoidaan lause: ”Vuokko lähtee Tampereelle ja menee elokuviin, tai Vuokko käy taidemuseossa”.

$(A \wedge B) \vee C$

Laaditaan totuustaulu.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	rivinumero
1	**1**	**1**	1	1	1
1	**1**	**0**	1	1	2
1	**0**	**1**	0	1	3
1	**0**	**0**	0	0	4
0	**1**	**1**	0	1	5
0	**1**	**0**	0	0	6
0	**0**	**1**	0	1	7
0	**0**	**0**	0	0	8

c) b-kohdan totuustaulu poikkeaa a-kohdan totuustaulusta riveillä 5 ja 7.

Sepon ymmärtämällä tavalla Vuokolla on enemmän vaihtoehtoja toimia: Vuokko voi käydä sekä elokuvissa ja museossa menemättä Tampereelle ja Vuokko voi käydä pelkästään museossa jossakin kaupungissa.

Vastaus

a) $A \wedge (B \vee C)$

b) $(A \wedge B) \vee C$

c) Totuustaulut eroavat riveillä 5 ja 7. Sepon ymmärtämällä tavalla Vuokko voi käydä sekä elokuvissa ja museossa menemättä Tampereelle ja Vuokko voi käydä pelkästään museossa jossakin kaupungissa.

32

a) Laaditaan totuustaulu.

A	**B**	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
1	**1**	1	1	1	1
1	**0**	0	1	0	0
0	**1**	1	0	0	0
0	**0**	1	1	1	1

Havaitaan, että lauseiden $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ja $A \Leftrightarrow B$ totuusarvot ovat samat eli lauseet tarkoittavat loogisessa mielessä samaa (ovat loogisesti ekvivalentit).

b) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$: ”Jos pidän sushista, niin pidän pitsasta, ja jos pidän pitsasta, niin pidän sushista.”

$A \Leftrightarrow B$: ”Pidän sushista, jos ja vain jos pidän pitsasta.”

Vastaus a) Lauseiden totuusarvot ovat samat.
b) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$: ”Jos pidän sushista, niin pidän pitsasta, ja jos pidän pitsasta, niin pidän sushista.”

$A \Leftrightarrow B$: ”Pidän sushista, jos ja vain jos pidän pitsasta.”

33

Olkoon *A:* ”matkustetaan junalla” ja *B*: ”ostetaan evästä”.

a) Formalisoidaan lauseet.

Markus: ”Jos matkustetaan junalla, niin ostetaan evästä”.

$A \Rightarrow B$

Iitu: ”Jos matkustetaan junalla, niin ei osteta evästä”.

$A \Rightarrow \neg B$

Koska molempien vaatimusten pitää toteutua, tutkitaan totuustaulun avulla, milloin kumpikin lause on yhtä aikaa tosi.

A	**B**	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$
1	**1**	0	1	0
1	**0**	1	0	1
0	**1**	0	1	1
0	**0**	1	1	1

Lauseet ovat tosia silloin, kun lause *A* on epätosi. Eli toiveet voidaan toteuttaa, jos matkustetaan muulla kuin junalla. Tällöin evästä voidaan ostaa tai jättää ostamatta.

b) Formalisoidaan lause.

Heidi: ”Jos matkustetaan junalla, niin ostetaan evästä ja jos ei matkusteta junalla, niin ostetaan evästä.”

$$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$$

Koska kaikkien vaatimusten pitää toteutua, tutkitaan totuustaulun avulla, milloin kaikki lauseet ovat yhtä aikaa tosia.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	**1**	0	0	1	0	1	1
1	**0**	0	1	0	1	1	0
0	**1**	1	0	1	1	1	1
0	**0**	1	1	1	1	0	0

Heidinkin toive on mahdollista toteuttaa. Tällöin ei mennä junalla ja ostetaan evästä mukaan.

Vastaus

a) Toiveet voidaan toteuttaa, jos matkustetaan muulla kuin junalla. Tällöin evästä voidaan ostaa tai jättää ostamatta.

b) Heidin toive on mahdollista toteuttaa. Tällöin ei mennä junalla ja ostetaan evästä mukaan.

34

Tutkitaan lausetta $(P \wedge \neg M) \vee J$ totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{J}$	$\neg M$	$P \wedge \neg M$	$(P \wedge \neg M) \vee J$
1	**1**	**1**	0	0	1
1	**1**	**0**	0	0	0
1	**0**	**1**	1	1	1
1	**0**	**0**	1	1	1
0	**1**	**1**	0	0	1
0	**1**	**0**	0	0	0
0	**0**	**1**	1	0	1
0	**0**	**0**	1	0	0

Koska tehtävänannossa todettiin, että viesti on epätosi, keskitytään epätosiin riveihin. Näiden rivien perusteella voidaan sulkea pois Jukan syyllisyys eli Jukka on syytön. Paavo ja Mika voivat olla molemmat syyttömiä tai syyllisiä tai Paavo voi olla syytön ja Mika syyllinen.

Vastaus Jukka on syytön.

35

Olkoon A: ”Ari on kelmi”, B: ”Brädi on kelmi” ja C: ”Credo on kelmi”.

Formalisoidaan lauseet.

Ari väittää: ”Olemme kaikki kelmejä” eli ”Ari on kelmi ja Brädi on kelmi ja Credo on kelmi”.

$$A \wedge B \wedge C$$

Brädi väittää: ”Vain yksi meistä on ritari” eli ”Ari on ritari ja Brädi on kelmi ja Credo on kelmi TAI Ari on kelmi ja Brädi on ritari ja Credo on kelmi TAI Ari on kelmi ja Brädi on kelmi ja Credo on ritari”

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Laaditaan totuustaulu, jonka avulla tutkitaan lauseita $A \wedge B \wedge C$ ja $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$. Merkitään jälkimmäistä lausetta kirjaimella L, jotta se on helpompi mahduttaa totuustauluun.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge B \wedge C$	$\neg A \wedge B \wedge C$	$A \wedge \neg B \wedge C$	$A \wedge B \wedge \neg C$	L
1	**1**	**1**	0	0	0	1	0	0	0	0
1	**1**	**0**	0	0	1	0	0	0	1	1
1	**0**	**1**	0	1	0	0	0	1	0	1
1	**0**	**0**	0	1	1	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	1	0	0	0	1	0	0	1
0	**1**	**0**	1	0	1	0	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	0	0	0	0	0
0	**0**	**0**	1	1	1	0	0	0	0	0

Muistetaan, että kelmit valehtelevat aina, ja ritarit puhuvat aina totta.

Keskitytään ensin Arin väittämään. Jos Ari on kelmi, hänen väitteensä ei ole totta, joten rivit 2, 3, ja 4 ovat mahdollisia. Näillä riveillä Arin väittämän totuusarvo on epätosi.

Jos Ari on ritari, hänen väitteensä on totta. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska hän väitti kaikkien olevan kelmejä. Siten ainoastaan rivit 2, 3 ja 4 ovat mahdollisia.

Keskitytään nyt riveihin 2, 3 ja 4.

Jos Brädi on kelmi, hänen väitteensä ei ole totta, joten rivi 2 on mahdoton.

Jos Brädi on ritari, hänen väitteensä on totta ja tällöin ainoastaan rivi 3 on mahdollinen.

Joten Ari on kelmi, Brädi on ritari ja Credo on kelmi.

Vastaus Ari on kelmi, Brädi on ritari ja Credo on kelmi.

36

Tehtävässä riittää tutkia vain Birgittaa ja Ceciliaa, sillä Aaro ei väitä mitään itsestään.

Olkoon B: ”Birgitta on ritari” ja C: ”Cecilia on ritari”.

Formalisoidaan Aaron väitteet.

”Birgitta ja Cecilia ovat ritareita”.

$B \wedge C$

”Birgitta on kelmi”.

$\neg B$

Laaditaan totuustaulu, jonka avulla tutkitaan lauseita.

$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\neg B$	$B \wedge C$
1	**1**	0	1
1	**0**	0	0
0	**1**	1	0
0	**0**	1	0

Muistetaan, että kelmit valehtelevat aina, ja ritarit puhuvat aina totta. Koska Aaron väitteet ovat ristiriidassa keskenään, hänen on pakko valehdella, joten hän on kelmi.

Ainoa rivi, jossa molemmat Arin väitteistä ovat epätosia, on rivi 2. Tämän perusteella Cecilia on kelmi.

Vastaus Cecilia on kelmi.

37

Olkoon D: ”Daniel on ritari”, E: ”Emil on ritari” ja F: ”Fanni on ritari”.

Formalisoidaan väitteet.

Daniel: ”Minä olen ritari ja Fanni on kelmi.” $D \wedge \neg F$

Emil: ”Daniel on kelmi.” $\neg D$

Fanni: ”Daniel on kelmi tai Emil on kelmi.” $\neg D \vee \neg E$

Laaditaan totuustaulu, jonka avulla tutkitaan lauseita.

D	E	F	$\neg D$	$\neg E$	$\neg D$	$D \wedge \neg F$	$\neg D \vee \neg E$	Daniel	Emil	Fanni
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	ei käy	ei käy	ei käy
1	**1**	**0**	0	0	1	1	0	käy	ei käy	käy
1	**0**	**1**	0	1	0	0	1	ei käy	käy	käy
1	**0**	**0**	0	1	1	1	1	käy	käy	ei käy
0	**1**	**1**	1	0	0	0	1	**käy**	**käy**	**käy**
0	**1**	**0**	1	0	1	0	1	käy	käy	ei käy
0	**0**	**1**	1	1	0	0	1	käy	ei käy	käy
0	**0**	**0**	1	1	1	0	1	käy	ei käy	ei käy

Muistetaan, että kelmit valehtelevat aina, ja ritarit puhuvat aina totta. Hyväksyttäviä ovat ne rivit, joissa Danielin väitteellä on sama totuusarvo kuin lauseella D, Emilin väitteellä on sama totuusarvo kuin lauseella E ja Fannin väitteellä on sama totuusarvo kuin lauseella F. Kaikki ehdot täyttyvät ainoastaan rivillä 5.

Tämän perusteella Daniel on kelmi ja Emil ja Fanni ovat ritareita.

Vastaus Daniel on kelmi, Emil ja Fanni ovat ritareita.

38

Olkoon T: ”Tauno on syyllinen”, P: ”Pietari on syyllinen” .

Formalisoidaan Taunon väite.

”Minä olen syyllinen tai Pietari on syyllinen.”

$$T \vee P$$

Laaditaan totuustaulu.

T	P	$T \vee P$
1	**1**	1
1	**0**	1
0	**1**	1
0	**0**	0

Muistetaan, että syylliset valehtelevat aina, ja syyttömätkin joskus.

Jos Tauno on syyllinen, hänen väitteensä on epätosi. Tämä ei toteudu millään rivillä.

Jos Tauno on syytön, hänen väitteensä on joko totta tai epätotta. Tällä perusteella rivit 3 ja 4 ovat molemmat mahdollisia.

Kun huomioidaan tieto, että palkinnon ovat varastaneet veljekset Tauno ja Pietari joko yksinään tai yhdessä, ainoa mahdollinen rivi on rivi 3.

Tämän perusteella Tauno on syytön ja Pietari syyllinen.

Vastaus Tauno on syytön ja Pietari syyllinen.

39

Olkoon T: ”Tauno on syyllinen”, P: ”Pietari on syyllinen” .

a) Formalisoidaan Taunon väite.

”Minä olen syytön tai Pietari on syyllinen.”

$\neg T \vee P$

T	P	$\neg T$	$\neg T \vee P$
1	**1**	0	1
1	**0**	0	0
0	**1**	1	1
0	**0**	1	1

Muistetaan, että syylliset valehtelevat aina, ja syyttömätkin joskus.

Jos Tauno on syyllinen, hänen väitteensä on epätosi. Tämä toteutuu rivillä 2.

Jos Tauno on syytön, hänen väitteensä on joko totta tai epätotta. Tällä perusteella rivit 3 ja 4 ovat molemmat mahdollisia.

Kun huomioidaan tieto, että palkinnon ovat varastaneet veljekset Tauno ja Pietari joko yksinään tai yhdessä, mahdolliset rivit ovat 2 ja 3.

Tämän perusteella Tauno on syyllinen ja Pietari on syytön tai Tauno on syytön ja Pietari on syyllinen.

b) Formalisoidaan Taunon väite.

”Minä olen syytön tai Pietari on syytön.”

$\neg T \lor \neg P$

T	**P**	$\neg T$	$\neg P$	$\neg T \lor \neg P$
1	**1**	0	0	0
1	**0**	0	1	1
0	**1**	1	0	1
0	**0**	1	1	1

Muistetaan, että syylliset valehtelevat aina, ja syyttömätkin joskus.

Jos Tauno on syyllinen, hänen väitteensä on epätosi. Tämä toteutuu rivillä 1.

Jos Tauno on syytön, hänen väitteensä on joko totta tai epätotta. Tällä perusteella rivit 3 ja 4 ovat molemmat mahdollisia.

Kun huomioidaan tieto, että palkinnon ovat varastaneet veljekset Tauno ja Pietari joko yksinään tai yhdessä, mahdolliset rivit ovat 1 ja 3.

Tämän perusteella Tauno ja Pietari ovat molemmat syyllisiä tai Tauno on syytön ja Pietari on syyllinen.

Vastaus

a) Tauno on syyllinen ja Pietari on syytön tai Tauno on syytön ja Pietari on syyllinen.

b) Tauno ja Pietari ovat molemmat syyllisiä tai Tauno on syytön ja Pietari on syyllinen.

40

Formalisoidaan lauseet

a) ”Riittävä ehto sille, että monikulmio on nelikulmio on, että monikulmio on neliö.”

$B \Rightarrow A$

B on riittävä ehto A:lle, koska jos monikulmio on neliö, se on myös nelikulmio.

b) ”Välttämätön ehto sille, että monikulmio on neliö, on että monikulmio on nelikulmio.”

$B \Rightarrow A$

A on välttämätön ehto B:lle, koska monikulmio voi olla neliö vain, kun se on nelikulmio.

c) ”Välttämätön ja riittävä ehto sille, että monikulmio on nelikulmio on, että monikulmio kulmien summa on 360°.”

$A \Leftrightarrow C$

A on riittävä ehto C:lle, koska jos monikulmio on nelikulmio, sen kulmien summa on 360°.

A on välttämätön ehto C:lle, koska monikulmion kulmien summa on 360° vain, kun monikulmio on nelikulmio.

Vastaus a) $B \Rightarrow A$
b) $B \Rightarrow A$
c) $A \Leftrightarrow C$

41

a) Muodostetaan lauseen $(A \vee B) \vee \neg A$ totuustaulu

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee \neg A$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	0	1	1
0	**1**	1	1	1
0	**0**	1	0	1

Lause on tautologia, koska se on tosi atomilauseiden A ja B totuusarvoista riippumatta. Toisin sanoen se on tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

$(A \vee B) \vee \neg A$: ”Rauli on lomalla tai ulkomailla tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Muodostetaan lauseen $B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$ totuustaulu

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \vee \neg A$	$B \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$
1	**1**	0	0	0	0
1	**0**	0	1	1	1
0	**1**	1	0	1	1
0	**0**	1	1	1	1

Lause ei ole tautologia, koska se ei ole tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

$B \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$: ”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”

Vastaus a) On tautologia.
$(A \vee B) \vee \neg A$: ”Rauli on lomalla tai ulkomailla tai Rauli ei ole lomalla”.

b) Ei ole tautologia.
$B \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$: ”Jos Rauli on ulkomailla, niin Rauli ei ole ulkomailla tai ei ole lomalla.”

42

Olkoon A: “huomenna sataa lunta” ja B: “huomenna on pakkasta”.

Formalisoidaan lauseet.

a) ”Huomenna sataa lunta tai on pakkasta, tai sitten huomenna ei sada lunta ja ei ole pakkasta.”

$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Muodostetaan lauseen $(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	**1**	0	0	1	0	1
1	**0**	0	1	1	0	1
0	**1**	1	0	1	0	1
0	**0**	1	1	0	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi atomilauseiden A ja B totuusarvoista riippumatta. Toisin sanoen se on tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

b) ”Huomenna ei ole pakkasta, tai jos on pakkasta, niin sataa lunta.“

$\neg B \vee (B \Rightarrow A)$

Muodostetaan lauseen $\neg B \vee (B \Rightarrow A)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg B$	$B \Rightarrow A$	$\neg B \vee (B \Rightarrow A)$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	1	1	1
0	**1**	0	0	0
0	**0**	1	1	1

Lause ei ole tautologia, koska se ei ole tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

c) ”Huomenna sataa lunta ja on pakkasta, tai jos sataa lunta, niin ei ole pakkasta”

$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$

Muodostetaan lauseen $(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow \neg B)$
1	**1**	0	1	0	1
1	**0**	1	0	1	1
0	**1**	0	0	1	1
0	**0**	1	0	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi atomilauseiden A ja B totuusarvoista riippumatta. Toisin sanoen se on tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla

Vastaus a) On tautologia.
b) Ei ole tautologia.
c) On tautologia.

43

a) Muodostetaan lauseen $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \vee B$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$
1	**1**	0	0	1	1
1	**0**	1	1	1	1
0	**1**	0	0	1	1
0	**0**	1	0	0	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$: ”Jos ostan arvan ja en saa päävoittoa, niin ostan arvan tai saan päävoiton.”

b) Muodostetaan lauseen $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$
1	**1**	0	0	1	0	0
1	**0**	0	1	1	0	0
0	**1**	1	0	0	1	0
0	**0**	1	1	1	0	0

Lause on kontradiktio, koska se on epätosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$: ”Ostan arvan tai en saa päävoittoa, ja en ostaa arvan ja saan päävoiton.”

c) Muodostetaan lauseen $\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$ totuustaulu.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	1	1	1
0	**1**	0	1	1
0	**0**	1	0	0

Lause ei ole tautologia eikä kontradiktio.

$\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$: ”En saa päävoittoa täsmälleen silloin, kun ostan arvan tai saan päävoiton.”

Vastaus

a) On tautologia.
$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \vee B)$: ”Jos ostan arvan ja en saa päävoittoa, niin ostan arvan tai saan päävoiton.”

b) On kontradiktio.
$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$: ”Ostan arvan tai en saa päävoittoa, ja en ostaa arvan ja saan päävoiton.”

c) Ei ole tautologia tai kontradiktio.
$\neg B \Leftrightarrow (A \vee B)$: ”En saa päävoittoa täsmälleen silloin, kun ostan arvan tai saan päävoiton.”

44

a) Muodostetaan totuustaulu lauseille $(A \vee B) \vee C$ ja $A \vee (B \vee C)$.

A	***B***	***C***	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
1	**1**	**1**	1	1	1	1
1	**1**	**0**	1	1	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1	1
1	**0**	**0**	1	0	1	1
0	**1**	**1**	1	1	1	1
0	**1**	**0**	1	1	1	1
0	**0**	**1**	0	1	1	1
0	**0**	**0**	0	0	0	0

Koska lauseiden $(A \vee B) \vee C$ ja $A \vee (B \vee C)$ totuusarvot ovat samat kaikilla atomilauseiden A, B ja C totuusarvoilla, lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

b) Muodostetaan totuustaulu lauseille $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$.

A	***B***	***C***	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
1	**1**	**1**	1	1	1	1
1	**1**	**0**	1	0	0	0
1	**0**	**1**	0	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**1**	**1**	0	1	0	0
0	**1**	**0**	0	0	0	0
0	**0**	**1**	0	0	0	0
0	**0**	**0**	0	0	0	0

Koska lauseiden $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$ totuusarvot ovat samat kaikilla atomilauseiden A, B ja C totuusarvoilla, lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

45

Todistetaan lauseet $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ loogisesti ekvivalenteiksi totuustaulun avulla.

Muodostetaan totuustaulu lauseille $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
1	**1**	0	0	1	0	1	1
1	**0**	0	1	0	0	0	0
0	**1**	1	0	0	0	0	0
0	**0**	1	1	0	1	1	1

Koska lauseiden $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ totuusarvot ovat samat kaikilla atomilauseiden A ja B totuusarvoilla, lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

46

a) Formalisoidaan lauseet.

”Jani lähtee Kolille tai sitten Jani ei lähde Kolille ja käy laskettelemassa.”

$A \vee (\neg A \wedge B)$

”Jani lähtee Kolille tai käy laskettelemassa”.

$A \vee B$

Muodostetaan totuustaulu lauseille $A \vee (\neg A \wedge B)$ ja $A \vee B$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$A \vee (\neg A \wedge B)$	$A \vee B$
1	**1**	0	0	1	1
1	**0**	0	0	1	1
0	**1**	1	1	1	1
0	**0**	1	0	0	0

Koska lauseiden $A \vee (\neg A \wedge B)$ ja $A \vee B$ totuusarvot ovat samat kaikilla atomilauseiden A ja B totuusarvoilla, lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

b) Formalisoidaan lauseet.

”Jos Jani lähtee Kolille, niin hän käy laskettelemassa”

$A \Rightarrow B$

”Jos Jani ei lähde Kolille, niin hän ei käy laskettelemassa.”

$\neg A \Rightarrow \neg B$

Muodostetaan totuustaulu lauseille $A \Rightarrow B$ ja $\neg A \Rightarrow \neg B$.

A	***B***	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
1	**1**	0	0	1	1
1	**0**	0	1	0	1
0	**1**	1	0	1	0
0	**0**	1	1	1	1

Lauseet eivät ole loogisesti ekvivalentit, koska lauseiden totuusarvot eivät ole samat kaikilla atomilauseiden totuusarvoilla.

Vastaus: a) Lauseet $A \vee (\neg A \wedge B)$ ja $A \vee B$ ovat loogisesti ekvivalentit.

b) Lauseet $A \Rightarrow B$ ja $\neg A \Rightarrow \neg B$ eivät ole loogisesti ekvivalentit.

47

a) Koska lause P on totta, kun A on totta tai kun B ei ole totta, eräs mahdollisuus loogisesti ekvivalentiksi lauseeksi on $A \vee \neg B$

A	**B**	$\neg B$	P	$A \vee \neg B$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	1	1	1
0	**1**	0	0	0
0	**0**	1	1	1

b) Koska lause P on totta, kun A on totta ja B ei ole totta tai kun A ei ole totta ja B ei on totta, eräs mahdollisuus loogisesti ekvivalentiksi lauseeksi on $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

A	**B**	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	P	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
1	**1**	0	0	0	0	0	0
1	**0**	0	1	1	0	1	1
0	**1**	1	0	0	1	1	1
0	**0**	1	1	0	0	0	0

Vastaus: a) $A \vee \neg B$

b) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

48

Mikä tahansa lause, joka on muotoa ”onko totta, että *P*?”, missä *P* on jokin tosi lause.

Jos Aine on ritari, niin hän puhuu totta ja vastaa ”kyllä”. Jos Aine on kelmi, niin hän valehtelee ja vastaa ”ei”.

49

a) Käytetään de Morganin lakia lauseeseen $\neg(A \wedge \neg B)$.

$\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B)$

Käytetään kaksoiskiellon lakia lauseeseen $\neg A \vee \neg(\neg B)$

$\neg A \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Eli $\neg(A \wedge \neg B)$ ja $\neg A \vee B$ ovat loogisesti ekvivalentit

b) Käytetään de Morganin lakia lauseeseen $\neg(\neg A \vee \neg B)$

$\neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)$

Käytetään kaksoiskiellon lakia lauseeseen $\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)$

$\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B) \Leftrightarrow A \wedge B$

Eli $\neg(\neg A \vee \neg B)$ ja $A \wedge B$ ovat loogisesti ekvivalentit.

50

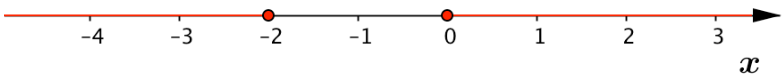
a) Lause $\neg(-2 < x < 0)$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(x > -2 \text{ ja } x < 0)$ eli $\neg(x > -2 \wedge x < 0)$.

Sovelletaan de Morganin lakia lauseeseen $\neg(x > -2 \wedge x < 0)$.

$$\neg(x > -2 \wedge x < 0) \Leftrightarrow \neg(x > -2) \vee \neg(x < 0)$$

Lause $\neg(x > -2) \vee \neg(x < 0)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$x \leq -2 \vee x \geq 0$ eli $x \leq -2$ tai $x \geq 0$



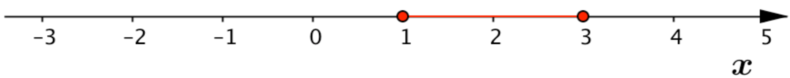
b) Lause $\neg(x < 1 \text{ tai } x > 3)$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg(x < 1 \vee x > 3)$.

Sovelletaan de Morganin lakia lauseeseen $\neg(x < 1 \vee x > 3)$

$$\neg(x < 1 \vee x > 3) \Leftrightarrow \neg(x < 1) \wedge \neg(x > 3)$$

Lause $\neg(x < 1) \wedge \neg(x > 3)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$x \geq 1 \wedge x \leq 3$ eli $x \geq 1$ ja $x \leq 3$ eli $1 \leq x \leq 3$.



Vastaus: a) $x \leq -2 \vee x \geq 0$ eli $x \leq -2$ tai $x \geq 0$

b) $x \geq 1 \wedge x \leq 3$ eli $x \geq 1$ ja $x \leq 3$ eli $1 \leq x \leq 3$

51

a) Tutkitaan lausetta $(A \wedge C) \wedge (B \wedge \neg C)$ totuustaulun avulla.

A	**B**	**C**	$\neg C$	$A \wedge C$	$B \wedge \neg C$	$(A \wedge C) \wedge (B \wedge \neg C)$
1	**1**	**1**	0	1	0	0
1	**1**	**0**	1	0	1	0
1	**0**	**1**	0	1	0	0
1	**0**	**0**	1	0	0	0
0	**1**	**1**	0	0	0	0
0	**1**	**0**	1	0	1	0
0	**0**	**1**	0	0	0	0
0	**0**	**0**	1	0	0	0

Lause on kontradiktio, koska se on epätosi kaikilla atomilauseiden arvoilla.

b) Tutkitaan lausetta $(A \vee \neg B) \vee C$ totuustaulun avulla.

A	**B**	**C**	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \vee C$
1	**1**	**1**	0	1	1
1	**1**	**0**	0	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1
1	**0**	**0**	1	1	1
0	**1**	**1**	0	0	1
0	**1**	**0**	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	1
0	**0**	**0**	1	1	1

Lause ei ole tautologia tai kontradiktio.

c) Tutkitaan lausetta $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ totuustaulun avulla. Merkitään koko lausetta kirjaimella L.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	L
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	**0**	1	0	0	0	1
1	**0**	**1**	0	1	0	1	1
1	**0**	**0**	0	1	0	0	1
0	**1**	**1**	1	1	1	1	1
0	**1**	**0**	1	0	0	1	1
0	**0**	**1**	1	1	1	1	1
0	**0**	**0**	1	1	1	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla atomilauseiden arvoilla.

Vastaus

a) Lause on kontradiktio.
b) Lause ei ole tautologia tai kontradiktio.
c) Lause on tautologia.

52

Olkoon A: ”huomenna on aurinkoista” ja B: ”huomenna on tyyntä”.

a) Formalisoidaan lause.

”Huomenna on aurinkoista ja tyyntä, ja huomenna on pilvistä ja tuulista.”

$(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ (lauseen voi kirjoittaa myös ilman sulkuja)

Tutkitaan lausetta $(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
1	**1**	0	0	1	0	0
1	**0**	0	1	0	0	0
0	**1**	1	0	0	0	0
0	**0**	1	1	0	1	0

Lause on kontradiktio, koska se on epätosi kaikilla atomilauseiden arvoilla.

b) Formalisoidaan lause.

Huomenna on aurinkoista, tai jos on tyyntä, niin on pilvistä.

$A \vee (B \Rightarrow \neg A)$

Tutkitaan lausetta $A \vee (B \Rightarrow \neg A)$ totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg A$	$B \Rightarrow \neg A$	$A \vee (B \Rightarrow \neg A)$
1	**1**	0	0	1
1	**0**	0	1	1
0	**1**	1	1	1
0	**0**	1	1	1

Lause on tautologia, koska se on tosi kaikilla atomilauseiden arvoilla.

Vastaus a) $(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$, lause on kontradiktio.
b) $A \vee (B \Rightarrow \neg A)$, lause on tautologia.

53

a) Laaditaan totuustaulu lauseille $A \wedge (B \vee C)$ ja $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	**B**	**C**	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	**0**	1	1	0	1	1
1	**0**	**1**	1	0	1	1	1
1	**0**	**0**	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	1	0	0	0	0
0	**1**	**0**	1	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	0	0	0	0
0	**0**	**0**	0	0	0	0	0

Lauseet saavat samat totuusarvot samoilla atomilauseiden arvoilla, joten lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

b) Laaditaan totuustaulu lauseille $A \vee (B \wedge C)$ ja $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	**B**	**C**	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	**0**	0	1	1	1	1
1	**0**	**1**	0	1	1	1	1
1	**0**	**0**	0	1	1	1	1
0	**1**	**1**	1	1	1	1	1
0	**1**	**0**	0	1	0	0	0
0	**0**	**1**	0	0	1	0	0
0	**0**	**0**	0	0	0	0	0

Lauseet saavat samat totuusarvot samoilla atomilauseiden arvoilla, joten lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

54

Formalisoidaan Liisan ajatus.

”Pappa aina sanoi, että jos Heikin päivänä on pakkanen, on tuleva kesä poutainen. Tänään ei ole pakkasta. Siis ensi kesä on sateinen.”

$((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P$

Laaditaan totuustaulu lauseelle $((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P$.

$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{P}$	$\neg H$	$\neg P$	$H \Rightarrow P$	$(H \Rightarrow P) \wedge \neg H$	$((H \Rightarrow P) \wedge \neg H) \Rightarrow \neg P$
1	**1**	0	0	1	0	1
1	**0**	0	1	0	0	1
0	**1**	1	0	1	1	0
0	**0**	1	1	1	1	1

Lause ei ole tautologia.

Vastaus Lause ei ole tautologia.

55

a) Hyödynnetään lauseeseen kaksoisnegaation lakia.

$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)$

Hyödynnetään lauseeseen $\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)$ De Morganin lakia.

$\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Eli $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Tulos voidaan tarkistaa totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
1	**1**	0	0	0	1	1
1	**0**	0	1	0	1	1
0	**1**	1	0	0	1	1
0	**0**	1	1	1	0	0

b) Tarkastellaan lausetta $A \Rightarrow B$ totuustaulun avulla.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	**1**	1
1	**0**	0
0	**1**	1
0	**0**	1

Lause on tosi silloin, kun A on epätosi tai B on tosi eli formalisoituna $\neg A \vee B$.

Hyödynnetään lauseeseen B kaksoisnegaation lakia.

$\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg(\neg B)$

Hyödynnetään lauseeseen $\neg A \vee \neg(\neg B)$ De Morganin lakia.

$\neg A \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Eli $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Tulos voidaan tarkistaa totuustaulun avulla.

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$A \Rightarrow B$
1	**1**	0	0	1	1
1	**0**	1	1	0	0
0	**1**	0	0	1	1
0	**0**	1	0	1	1

c) Lause $A \Leftrightarrow B$ on loogisesti ekvivalentti lauseen $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ kanssa (tämä on osoitettu tehtävässä 32).

Tämän tehtävän b-kohdan ratkaisu hyödyntäen nyt voidaan kirjoittaa $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ja vastaavasti $(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(B \wedge \neg A)$ eli

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B).$$

Eli

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$$

Vastaus a) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$

56

Tutkitaan lauseen P totuustaulua.

A	B	C	P
1	**1**	**1**	1
1	**1**	**0**	1
1	**0**	**1**	1
1	**0**	**0**	1
0	**1**	**1**	0
0	**1**	**0**	1
0	**0**	**1**	1
0	**0**	**0**	1

Lause P on tosi aina, kun A on tosi **tai** B on epätosi (eli $\neg B$ on tosi) **tai** C on epätosi (eli $\neg C$ on tosi).

Lause P on formalisoituna esimerkiksi $A \vee \neg B \vee \neg C$

Vastaus $A \vee \neg B \vee \neg C$

Voidaan päätellä myös, että lause P on epätosi ainoastaan silloin kuin kun A on epätosi, B on tosi ja C on tosi. Tämän lauseen negaatio siis käy myös lauseen P formalisoinniksi:

$$\neg(\neg A \wedge B \wedge C)$$

57

a) Hyödynnetään lauseeseen $A \Rightarrow (B \vee \neg C)$ kontraposition lakia.

$(A \Rightarrow (B \vee \neg C)) \Leftrightarrow (\neg(B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A)$

Hyödynnetään lauseeseen $\neg(B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$ De Morganin lakia.

$(\neg(B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow ((\neg B \wedge \neg(\neg C)) \Rightarrow \neg A)$

Hyödynnetään lauseeseen $(\neg B \wedge \neg(\neg C)) \Rightarrow \neg A$ kaksoiskiellon lakia.

$((\neg B \wedge \neg(\neg C)) \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow ((\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg A)$

Eli $(A \Rightarrow (B \vee \neg C)) \Leftrightarrow ((\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg A)$.

b) Hyödynnetään lauseeseen $(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$ kontraposition lakia.

$((A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow (\neg(\neg C) \Rightarrow \neg(A \wedge B))$

Hyödynnetään lauseeseen $\neg(\neg C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ kaksoiskiellon lakia.

$(\neg(\neg C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg(A \wedge B))$
Hyödynnetään lauseeseen $C \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ De Morganin lakia.

$(C \Rightarrow \neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B))$

Eli $((A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow (C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B))$.

58

Kannattaa kysyä esimerkiksi ”Onko totta, että olet ritari?”

Jos heimolainen on ritari, hän vastaa tähän kysymykseen kyllä. Jos heimolainen on kelmi, hän vastaa tähän kysymykseen myös kyllä. Tällöin saat tietää, kumpi sanoista on kyllä.

59

Kannattaa kysyä esimerkiksi: ”Onko totta, että olette molemmat ritareita tai molemmat kelmejä?”

Jos Akua on ritari ja

- vastaa ”Kyllä”, opettaja Bandi on ritari.
- vastaa ”Ei”, opettaja Bandi on kelmi.

Jos Akua on kelmi ja

- vastaa ”Kyllä”, opettaja Bandi on ritari.
- vastaa ”Ei”, opettaja Bandi on kelmi.

60

a) Formalisoidaan ajatelma.

”Jos tiedän olevani kuollut, niin olen kuollut, ja jos tiedän olevani kuollut, niin en ole kuollut. Siis en tiedä olevani kuollut.”

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$$

b) Tutkitaan lausetta $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$ totuustaulun avulla. Merkitään lausetta L kirjaimella.

A	***B***	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	L
1	**1**	0	0	1	0	0	1
1	**0**	0	1	0	1	0	1
0	**1**	1	0	1	1	1	1
0	**0**	1	1	1	1	1	1

Lause $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$ on tautologia.

Vastaus
a) $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg A)$
b) Ajatelma on tautologia.

61

Shefferin viiva voidaan esittää ei- ja ja-konnektiivin avulla.

$(A \mid B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

A	**B**	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \mid B)$
1	**1**	1	0	0
1	**0**	0	1	1
0	**1**	0	1	1
0	**0**	0	1	1

a) Lause $\neg A$ voidaan esittää muodossa

$\neg(A \wedge A)$.

Lause $\neg(A \wedge A)$ voidaan esittää Shefferin viivan avulla muodossa

$A \mid A$.

b) Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \wedge B$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(\neg(A \wedge B)).$$

Lause $\neg(\neg(A \wedge B))$ voidaan esittää Shefferin viivan ja ei-konnektiivin avulla muodossa

$$\neg(A \mid B).$$

Lause $\neg(A \mid B)$ voidaan esittää pelkän Shefferin viivan avulla (tämän tehtävän a-kohtaa mukaillen)

$$(A \mid B) \mid (A \mid B).$$

c) Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \vee B$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(\neg(A \vee B)).$$

De Morganin lakia käyttämällä lause $\neg(\neg(A \vee B))$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(\neg A \wedge \neg B).$$

Shefferin viivan ja ei-konnektiivin avulla lause $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg A \mid \neg B.$$

Tämä voidaan kirjoittaa pelkän Shefferin viivan avulla (tämän tehtävän a-kohtaa mukaillen) muotoon

$$(A \mid A) \mid (B \mid B).$$

Vastaus
a) $A \mid A$
b) $(A \mid B) \mid (A \mid B)$
c) $(A \mid A) \mid (B \mid B)$

62

Peircen nuoli voidaan esittää ei- ja tai-konnektiivin avulla.

$(A \downarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(A \downarrow B)$
1	**1**	1	0	0
1	**0**	1	0	0
0	**1**	1	0	0
0	**0**	0	1	1

a) Lause $\neg A$ voidaan esittää muodossa

$\neg(A \vee A)$.

Lause $\neg(A \vee A)$ voidaan esittää Peircen nuolen avulla muodossa

$A \downarrow A$.

b) Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \wedge B$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(\neg(A \wedge B)).$$

De Morganin sääntöä käyttämällä lause $\neg(\neg(A \wedge B))$ saadaan muotoon

$$\neg(\neg A \vee \neg B)$$

Lause $\neg(\neg A \vee \neg B)$ voidaan esittää Peircen nuolen ja ei-konnektiivin avulla muodossa

$$\neg A \downarrow \neg B.$$

Lause $\neg A \downarrow \neg B$ voidaan esittää pelkän Peircen nuolen avulla (tämän tehtävän a-kohtaa mukaillen) muodossa

$$(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B).$$

c) Kaksoiskiellon lakia käyttämällä lause $A \vee B$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(\neg(A \vee B)).$$

Peircen nuolen ja ei-konnektiivin avulla lause $\neg(\neg(A \vee B))$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\neg(A \downarrow B).$$

Lause $\neg(A \downarrow B)$ voidaan kirjoittaa pelkän Peircen nuolen avulla (tämän tehtävän a-kohtaa mukaillen) muotoon

$$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B).$$

Vastaus

a) $A \downarrow A$
b) $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$
c) $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$

63

a) $K(x) \vee P(x)$: ” x kuuntelee musiikkia tai pelaa kännykkäpeliä”.

Koska x kuuluu koulubussin matkustajien joukkoon (eli on koulubussin matkustaja), lause voidaan suomentaa:

”koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia tai pelaa kännykkäpeliä”.

b) $K(x) \wedge \neg P(x)$: ” x kuuntelee musiikkia ja ei pelaa kännykkäpeliä”.

Koska x kuuluu koulubussin matkustajien joukkoon (eli on koulubussin matkustaja), lause voidaan suomentaa:

”koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia ja ei pelaa kännykkäpeliä” eli

”koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia, mutta ei pelaa kännykkäpeliä”.

c) $\neg K(x) \Rightarrow P(x)$: ” jos x ei kuuntele musiikkia, niin hän pelaa kännykkäpeliä”.

Koska x kuuluu koulubussin matkustajien joukkoon (eli on koulubussin matkustaja), lause voidaan suomentaa:

”jos koulubussin matkustaja ei kuuntele musiikkia, niin hän pelaa kännykkäpeliä”.

Vastaus

a) Koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia tai pelaa kännykkäpeliä.

b) Koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia, mutta ei pelaa kännykkäpeliä.

c) Jos koulubussin matkustaja ei kuuntele musiikkia, niin hän pelaa kännykkäpeliä.

64

a) $A(x) \wedge B(x)$: ” x on jaollinen luvulla kaksi ja luvulla kolme”.

Koska perusjoukko on $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$, lauseella tarkoitetaan niitä joukon lukuja, jotka ovat jaollisia luvulla 2 ja luvulla 3, eli lukuja 6 ja 12.

Ratkaisujoukko on siis $\{6,\ 12\}$.

b) $A(x) \vee B(x)$: ” x on jaollinen luvulla kaksi tai luvulla kolme”.

Koska perusjoukko on $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$, lauseella tarkoitetaan niitä joukon lukuja, jotka ovat jaollisia luvulla 2 tai luvulla 3, eli lukuja 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 ja 12.

Ratkaisujoukko on siis $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$.

c) $\neg A(x) \wedge \neg B(x)$: ” x ei ole jaollinen luvulla kaksi, eikä luvulla kolme”.

Koska perusjoukko on $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$, lauseella tarkoitetaan niitä joukon lukuja, jotka eivät ole jaollisia luvulla 2, eivätkä luvulla 3, eli lukuja 1, 5, 7 ja 11.

Ratkaisujoukko on siis $\{1,\ 5,\ 7,\ 11\}$.

Vastaus a) $\{6,\ 12\}$

b) $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

c) $\{1,\ 5,\ 7,\ 11\}$

65

a) $T(x) \wedge S(x)$: "kolmio x on tasakylkinen ja suorakulmainen".

Perusjoukon alkioista tämän toteuttaa kolmio C.

Ratkaisujoukko on siis $\{C\}$.

b) $\neg T(x) \wedge \neg S(x)$: " kolmio x ei ole tasakylkinen, eikä suorakulmainen".

Perusjoukon alkioista tämän toteuttavat kolmiot A ja F. Muut perusjoukon alkiot ovat joko tasakylkisiä tai suorakulmaisia.

Ratkaisujoukko on siis $\{A, F\}$.

c) $T(x) \vee S(x)$: " kolmio x on tasakylkinen tai suorakulmainen".

Perusjoukon alkioista tämän toteuttavat kolmiot B, C, D ja E.

Ratkaisujoukko on siis $\{B, C, D, E\}$.

d) $\neg T(x) \vee S(x)$: " kolmio x ei ole tasakylkinen tai kolmio x on suorakulmainen".

Perusjoukon alkioista tämän toteuttavat kolmiot A, B, C ja F. Kolmio C on tasakylkinen, mutta koska se on myös suorakulmainen, se otetaan tähän joukkoon mukaan.

Ratkaisujoukko on siis $\{A, B, C, F\}$.

Vastaus

a) $\{C\}$

b) $\{A,F\}$

c) $\{B,C,D,E\}$

d) $\{A,B,C,F\}$

66

a) $\forall x : K(x)$: ”kaikilla x pätee, että x kuuntelee musiikkia”.

Koska perusjoukkona on koulubussin matkustajat, tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

”kaikki koulubussin matkustajat kuuntelevat musiikkia” eli toisin: ”jokainen koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia”.

b) $\exists x : P(x)$: ” on olemassa x, jolle pätee, että x pelaa kännykkäpeliä”.

Koska perusjoukkona on koulubussin matkustajat, tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

”ainakin yksi koulubussin matkustajaa pelaa kännykkäpeliä”.

c) $\forall x : \neg K(x)$: ” kaikilla x pätee, että x ei kuuntelee musiikkia”.

Koska perusjoukkona on koulubussin matkustajat, tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

”Kukaan koulubussin matkustaja ei kuuntele musiikkia”.

d) $\exists x : K(x) \wedge \neg P(x)$: ” on olemassa x, jolle pätee, että x kuuntelee musiikkia ja x ei pelaa kännykkäpeliä”.

Koska perusjoukkona on koulubussin matkustajat, tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

”Ainakin yksi koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia, mutta ei pelaa kännykkäpeliä”.

Vastaus

a) Jokainen koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia.
b) Ainakin yksi koulubussin matkustajaa pelaa kännykkäpeliä.
c) Kukaan koulubussin matkustaja ei kuuntele musiikkia.
d) Ainakin yksi koulubussin matkustaja kuuntelee musiikkia, mutta ei pelaa kännykkäpeliä.

67

a) Formalisoidaan lause.

”On olemassa suunnikas, joka ei ole neliö” eli

”On olemassa tasokuvio x, jolle pätee: x on suunnikas ja x ei ole neliö.”

$$\exists x : S(x) \wedge \neg N(x)$$

Lause on tosi, sillä kaikki suunnikkaat eivät ole neliöitä.

b) Formalisoidaan lause.

”Neliö ei ole suunnikas” eli

“Kaikilla tasokuvioilla x pätee: jos x on neliö, niin x ei ole suunnikas.”

$$\forall x : \mathrm{N}(x) \Rightarrow \neg S(x)$$

Lause on epätosi, sillä kaikki neliöt ovat suunnikkaita.

Vastaus a) $\exists x : S(x) \wedge \neg N(x)$, tosi

b) $\forall x : \mathrm{N}(x) \Rightarrow \neg S(x)$, epätosi

68

a) Formalisoidaan lause.

”kaikki McAnkat ovat pihejä” eli

“Kaikilla ankoilla x pätee: jos x on McAnkka, niin x on pihi.”

$\forall x:\ \mathrm{M}\left(x\right) \Rightarrow P(x)$

b) Formalisoidaan lause.

”ei pidä paikkaansa, että kaikki McAnkat ovat pihejä” eli

“on olemassa ankka x, jolle pätee: x on McAnkka ja x ei ole pihi.”

$\exists x:\ \mathrm{M}\left(x\right) \wedge \neg P(x)$

Vastaus a) $\forall x:\ \mathrm{M}\left(x\right) \Rightarrow P(x)$

b) $\exists x:\ \mathrm{M}\left(x\right) \wedge \neg P(x)$

69

Ratkaistaan yhtälö $|x| = 5$ ensin laajimmassa mahdollisessa perusjoukossa (reaalilukujen joukko). Rajataan sitten mukaan vain ne ratkaisut, jotka kuuluvat tarkasteltavana olevaan perusjoukkoon.

$$|x| = 5$$

$$x = -5 \text{ tai } x = 5$$

a) Molemmat ratkaisut ovat ratkaisuja myös kokonaislukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{Z}$.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{Z}$ on $\{-5, 5\}$.

b) Pelkästään ratkaisu $x = 5$ on ratkaisu luonnollisten lukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{N}$.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{N}$ on $\{5\}$.

Vastaus a) $\{-5, 5\}$
b) $\{5\}$

70

Ratkaistaan yhtälö $\frac{1}{x} = x$ ensin laajimmassa mahdollisessa perusjoukossa (reaalilukujen joukko). Rajataan sitten mukaan vain ne ratkaisut, jotka kuuluvat tarkasteltavana olevaan perusjoukkoon.

$$\frac{1}{x} = x \qquad | \cdot x,\ x \neq 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 1$$

a) Pelkästään ratkaisu $x = 1$ on ratkaisu luonnollisten lukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{N}$.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{N}$ on $\{1\}$.

b) Molemmat ratkaisut $x = -1$ tai $x = 1$ ovat ratkaisuja kokonaislukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{Z}$.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{Z}$ on $\{-1, 1\}$.

Vastaus a) $\{1\}$
b) $\{-1, 1\}$

71

a) $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0$: ”kaikilla reaaliluvuilla x pätee: $x^2 \geq 0$” eli

“jokaisen reaaliluvun neliö on positiivinen tai nolla” eli

“jokaisen reaaliluvun neliö on epänegatiivinen”.

b) $\exists x \in \mathbf{R} : x^3 < 0$: “on olemassa reaaliluku x, jolle pätee: $x^3 < 0$” eli

”on olemassa reaaliluku, joka kuutio on negatiivinen” eli

”ainakin yhden reaaliluvun kuutio on negatiivinen”.

Vastaus a) Jokaisen reaaliluvun neliö on epänegatiivinen.
b) On olemassa reaaliluku, joka kuutio on negatiivinen.

72

a) Formalisoidaan lause.

“Jokaisen luonnollisen luvun vastaluku on negatiivinen” eli

“Kaikilla $x \in \mathbf{N}$ pätee $-x < 0$”

$\forall x \in \mathbf{N} : -x < 0$

Lause on epätosi, sillä luvun 0 vastaluku on 0.

b) Formalisoidaan lause.

”On olemassa kokonaisluku, jonka vastaluku on positiivinen”

$\exists x \in \mathbf{Z} : -x > 0$

Lause on tosi, sillä negatiivisten lukujen vastaluvut ovat positiivisia.

Vastaus a) $\forall x \in \mathbf{N} : -x < 0$, epätosi
b) $\exists x \in \mathbf{Z} : -x > 0$, tosi

73

a) $\neg S(x)$: “ei pidä paikkaansa, että x on suunnikas” eli

“x ei ole suunnikas”.

Ratkaisujoukon muodostavat kuviot E ja F, jotka ovat puolisuunnikkaita.

Ratkaisujoukko on $\{E, F\}$.

b) $R(x) \wedge \neg N(x)$: “x on suorakulmio ja ei pidä paikkaansa, että x on neliö” eli

“x on suorakulmio, mutta x ei ole neliö”.

Ratkaisujoukon muodostaa kuvio B.

Ratkaisujoukko on $\{B\}$.

c) $S(x) \wedge \neg N(x)$: “x on suunnikas ja ei pidä paikkaansa, että x on neliö” eli

“x on suunnikas, mutta x ei ole neliö”.

Ratkaisujoukon muodostavat kuviot A, B ja D.

Ratkaisujoukko on $\{A, B, D\}$.

d) $\neg S(x) \vee \neg R(x)$: “ei pidä paikkaansa, että x on suunnikas tai ei pidä paikkaansa, että x on suorakulmio” eli

“x ei ole suunnikas tai x ei ole suorakulmio”.

Ratkaisujoukon muodostavat kuviot A, D, E ja F.

A ja D toteuttavat tämän ehdon, koska eivät suorakulmioita, vaikka ovatkin suunnikkaita. E ja F eivät ole suunnikkaita, eivätkä suorakulmioita.

Ratkaisujoukko on $\{A, D, E, F\}$.

Vastaus

a) $\{E, F\}$
b) $\{B\}$
c) $\{A, B, D\}$
d) $\{A, D, E, F\}$

74

a) Formalisoidaan lause.

”on olemassa neljäkäs, joka ei ole suorakulmio” eli

“on olemassa tasokuvio x, jolle pätee: x on neljäkäs ja x ei ole suorakulmio”.

$$\exists x : N(x) \land \neg S(x)$$

Lause on tosi, sillä neljäkkään kulmat eivät välttämättä ole suoria.

b) Formalisoidaan lause.

”neljäkäs ei voi olla suorakulmio” eli

“kaikilla tasokuvioilla x pätee: jos x on neljäkäs, niin x ei ole suorakulmio”.

$$\forall x : N(x) \Rightarrow \neg S(x)$$

Lause on epätosi, sillä neliö on sekä neljäkäs että suorakulmio.

Vastaus
a) $\exists x : N(x) \land \neg S(x)$, tosi
b) $\forall x : N(x) \Rightarrow \neg S(x)$, epätosi

75

Ratkaistaan yhtälö $x^2 \le 9$ ensin laajimmassa mahdollisessa perusjoukossa (reaalilukujen joukko). Rajataan sitten mukaan vain ne ratkaisut, jotka kuuluvat tarkasteltavana olevaan perusjoukkoon.

$x^2 \le 9$ (voidaan ratkaista laskimella)

$-3 \le x \le 3$

a) Reaalilukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{R}$, ratkaisujoukko muodostuu koko välistä.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{R}$ on $[-3,3]$.

b) Kokonaislukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{Z}$, ratkaisujoukko muodostuu luvuista -3, -2, -1, 0, 1, 2 ja 3 .

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{Z}$ on $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

c) Luonnollisten lukujen joukossa eli kun $x \in \mathbf{N}$, ratkaisujoukko muodostuu luvuista 0, 1, 2 ja 3.

Ratkaisujoukko, kun $x \in \mathbf{N}$ on $\{0,1,2,3\}$.

Vastaus
a) $[-3,3]$
b) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
c) $\{0,1,2,3\}$

76

a) $\forall x \in \mathbf{Z} : \sqrt[3]{x} \leq x$: "Kaikilla kokonaisluvuilla x pätee: $\sqrt[3]{x} \leq x$" eli

"jokaisen kokonaisluvun kuutiojuuri on pienempi tai yhtäsuuri kuin luku itse".

Lause on epätosi, sillä esimerkiksi $\sqrt[3]{-8} = -2$ ja $-2 > -8$.

b) $\exists x \in \mathbf{R} : \sqrt[3]{x} > x$: "on olemassa reaaliluku x, jolle pätee: $\sqrt[3]{x} > x$" eli

"on olemassa reaaliluku, jonka kuutiojuuri on suurempi kuin luku itse" eli

"ainakin yhden reaaliluvun kuutiojuuri on suurempi kuin luku itse".

Lause on tosi, sillä esimerkiksi $\sqrt[3]{-8} = -2$ ja $-2 > -8$.

Vastaus a) Jokaisen kokonaisluvun kuutiojuuri on pienempi tai yhtä suuri kuin luku itse. Lause on epätosi.

b) On olemassa reaaliluku, jonka kuutiojuuri on suurempi kuin luku itse. Lause on tosi.

77

a) Formalisoidaan lause.

”jokaisen luonnollisen luvun käänteisluku on pienempi kuin yksi” eli

“kaikilla luonnollisilla luvuilla x pätee: $\frac{1}{x} < 1$”.

$\forall x \in \mathbf{N} : \frac{1}{x} < x$

Lause on epätosi, sillä luvun 1 käänteisluku on 1.

b) Formalisoidaan lause.

”on olemassa rationaaliluku, jonka käänteisluku on suurempi kuin yksi” eli

“on olemassa rationaaliluku x, jolle pätee: $\frac{1}{x} > 1$”.

$\exists x \in \mathbf{Q} : \frac{1}{x} > 1$

Lause on tosi, sillä esimerkiksi luvun $\frac{1}{2}$ käänteisluku on 2.

Vastaus a) $\forall x \in \mathbf{N} : \frac{1}{x} < x$ epätosi.

b) $\exists x \in \mathbf{Q} : \frac{1}{x} > 1$, tosi.

78

a) $R(J, y)$: “J rakastaa y:tä.”

Tämän ehdon täyttää M.

Ratkaisujoukko on $\{M\}$.

b) $R(x,\ J)$: “x rakastaa J:tä”.

Tämän ehdon täyttävät M ja L.

Ratkaisujoukko on $\{M, L\}$.

c) $R(x,\ J) \wedge R(J, x)$: “x rakastaa J:tä ja J rakastaa x:ää”.

Tämän ehdon täyttää M.

Ratkaisujoukko on $\{M\}$.

d) $R(K, y) \wedge \neg R(y,\ K)$: “K rakastaa y:tä ja y ei rakasta K:ta”.

Tämän ehdon täyttää L.

Ratkaisujoukko on $\{L\}$.

Vastaus
a) $\{M\}$
b) $\{M, L\}$
c) $\{M\}$
d) $\{L\}$

79

a) $\forall x : R(\text{Harry}, x)$: “kaikilla x, jotka kuuluvat rohkelikkojen joukkoon pätee: Harry rakastaa x:ää” eli

“Harry rakastaa kaikkia rohkelikkoja”.

b) $\exists x : R(\text{Harry}, x)$: “on olemassa x, joka kuuluu rohkelikkojen joukkoon, jolle pätee: Harry rakastaa x:ää” eli

“Harry rakastaa ainakin yhtä rohkelikkoa” eli

“Harry rakastaa jotain rohkelikkoa”.

c) $\forall x \exists y : R(x, y)$: “kaikilla x, jotka kuuluvat rohkelikkojen joukkoon on olemassa y, joka kuuluu rohkelikkojen joukkoon, jolle pätee x rakastaa y:tä” eli

“jokainen rohkelikko rakastaa ainakin yhtä rohkelikkoa” eli

“jokainen rohkelikko rakastaa jotain rohkelikkoa”.

d) $\exists x \forall y : R(x, y)$: “on olemassa x, joka kuuluu rohkelikkojen joukkoon siten, että kaikilla y, jotka kuuluvat rohkelikkojen joukkoon pätee: x rakastaa y:tä” eli

“ainakin yksi rohkelikko rakastaa jokaista rohkelikkoa” eli

“joku rohkelikko rakastaa kaikkia rohkelikkoja”.

Vastaus
a) Harry rakastaa kaikkia rohkelikkoja.
b) Harry rakastaa jotain rohkelikkoa.
c) Jokainen rohkelikko rakastaa jotain rohkelikkoa.
d) Joku rohkelikko rakastaa kaikkia rohkelikkoja.

80

a) Formalisoidaan lause.

”kaikki rakastavat Ronia” eli

”kaikilla x, jotka kuuluvat rohkelikkojen joukkoon
pätee: x rakastaa Ronia”.

$$\forall x : R(x, \text{Ron})$$

b) Formalisoidaan lause.

”joku rakastaa Ronia” eli

”on olemassa x, joka kuuluu rohkelikkojen joukkoon, jolle pätee:
x rakastaa Ronia”.

$$\exists x : R(x, \text{Ron})$$

c) Formalisoidaan lause.

”Hermione rakastaa Ronia”.

$$R(\text{Hermione}, \text{Ron})$$

d) Formalisoidaan lause.

”Hermione rakastaa ainoastaan Ronia” eli

”kaikille x, jotka kuuluvat rohkelikkojen joukkoon pätee:
Hermione rakastaa x:ää jos ja vain jos x on Ron”

$$\forall x : R(\text{Hermione}, x) \Leftrightarrow (x = \text{Ron})$$

Vastaus

a) $\forall x : R\left(x, \text{Ron}\right)$

b) $\exists x : R\left(x, \text{Ron}\right)$

c) $R\left(\text{Hermione}, \text{Ron}\right)$

d) $\forall x : R(\text{Hermione}, x) \Leftrightarrow (x = \text{Ron})$

81

a) $\forall x \exists y : x + y = 0$: “Kaikilla luvuilla x on olemassa luku y, siten että $x + y = 0$”.

Väite on epätosi luonnollisten lukujen joukossa, sillä ainoastaan luvulle 0 löytyy tällainen luku ($0 + 0 = 0$).

Väite on tosi kokonaislukujen joukossa. Luvun ja vastaluvun summa on nolla eli $x + (-x) = 0$ ja nollalle pätee: $0 + 0 = 0$.

b) $\exists x \forall y : x + y = 0$: “On olemassa luku x, siten että kaikille luvuille y pätee: $x + y = 0$”.

Väite on epätosi luonnollisten lukujen joukossa.

Väite on epätosi kokonaislukujen joukossa.

Ei ole olemassa lukua, jonka summa minkä tahansa muun luvun kanssa olisi 0.

c) $\forall x \forall y : x + y = 0$: “Kaikilla luvuilla x ja kaikilla luvuilla y pätee: $x + y = 0$”.

Väite on epätosi luonnollisten lukujen joukossa.

Väite on epätosi kokonaislukujen joukossa.

d) $\exists x \exists y : x + y = 0$: “On olemassa luku x ja on olemassa luku y, joille pätee: $x + y = 0$”.

Väite on tosi luonnollisten lukujen joukossa. Luku 0 toteuttaa tämän.

Väite on tosi kokonaislukujen joukossa. Voidaan valita esimerkiksi luvut -1 ja 1.

Vastaus

a) Väite on epätosi luonnollisten lukujen joukossa ja tosi kokonaislukujen joukossa.
b) Väite on epätosi molemmissa joukoissa.
c) Väite on epätosi molemmissa joukoissa.
d) Väite on tosi molemmissa joukoissa.

82

a) $\forall x \exists y : xy = 1$: "Kaikilla luvuilla x on olemassa luku y, siten että $xy = 1$".

Väite on epätosi kummassakin joukossa, sillä luvulle 0 ei ole olemassa tällaista lukua.

b) $\exists x \forall y : xy = 1$: "On olemassa luku x, siten että kaikille luvuille y pätee: $xy = 1$".

Väite on epätosi kummassakin joukossa. Ei ole olemassa lukua, jonka tulo minkä tahansa muun luvun kanssa olisi 1.

c) $\forall x \forall y : xy = 1$: "Kaikilla luvuilla x ja kaikilla luvuilla y pätee: $xy = 1$".

Väite on epätosi kummassakin joukossa.

d) $\exists x \exists y : xy = 1$: "On olemassa luku x ja on olemassa luku y, joille pätee: $xy = 1$".

Väite on tosi molemmissa joukoissa. Voidaan valita esimerkiksi luvut 1 ja 1.

Vastaus
a) Väite on epätosi molemmissa joukoissa.
b) Väite on epätosi molemmissa joukoissa.
c) Väite on epätosi molemmissa joukoissa.
d) Väite on tosi molemmissa joukoissa.