K1

a) Yhdistetään ja-sanalla lauseet A ja B.

$A \wedge B$: ”Ajattelen joululomaa ja hymyilen.”

b) Muodostetaan implikaatio lauseesta A lauseeseen B.

$A \Rightarrow B$: ”Jos ajattelen joululomaa, niin hymyilen.”

c) Muodostetaan lauseen B negaatio.

$\neg B$: ”En hymyile.”

Yhdistetään tai-sanalla lauseet $\neg B$ ja $A \wedge B$.

$\neg B \vee (A \wedge B)$: ”En hymyile tai sitten ajattelen joululomaa ja hymyilen.”

Vastaus
a) Ajattelen joululomaa ja hymyilen.
b) Jos ajattelen joululomaa, niin hymyilen.
c) En hymyile tai sitten ajattelen joululomaa ja hymyilen.

K2

a) Muodostetaan lauseen C negaatio.

$\neg C$: ”Et ole iloinen.”

Yhdistetään ja-sanoilla lauseet A, B ja $\neg C$.

$A \wedge B \wedge \neg C$: ”Osallistut testiin ja saat palkinnon ja et ole iloinen.”

Toisin: ”Osallistut testiin ja saat palkinnon, mutta et ole iloinen.”

b) Yhdistetään tai-sanalla lauseet A ja C.

$A \vee C$: ”Osallistut testiin tai olet iloinen.”

Muodostetaan implikaatio lauseesta $A \vee C$ lauseeseen B.

$(A \vee C) \Rightarrow B$: ”Jos osallistut testiin tai olet iloinen, niin saat palkinnon.”

c) Yhdistetään ja-sanalla lauseet A ja C.

$A \wedge C$: ”Osallistut testiin ja olet iloinen.”

Muodostetaan ekvivalenssi lauseen B ja lauseen $A \wedge C$ välille.

$B \Leftrightarrow (A \wedge C)$: ”Saat palkinnon, jos ja vain jos osallistut testiin ja olet iloinen.”

Vastaus
a) Osallistut testiin ja saat palkinnon, mutta et ole iloinen.
b) Jos osallistut testiin tai olet iloinen, niin saat palkinnon.
c) Saat palkinnon, jos ja vain jos osallistut testiin ja olet iloinen.

K3

a) Muodostetaan lauseen B negaatio.
$\neg B$: ”Markus on sisällä.”

Yhdistetään lauseet $\neg B$ ja A tai-sanalla eli disjunktiolla.

$\neg B \vee A$: ”Markus on sisällä tai välitunnilla.”

b) Muodostetaan implikaatio lauseesta B lauseeseen A.

$B \Rightarrow A$: ”Jos Markus on ulkona, niin hän on välitunnilla.”

c) Yhdistetään lauseet A ja B ja-sanalla.

$A \wedge B$: ”Markus on välitunnilla ja ulkona.”

Muodostetaan lauseen $A \wedge B$ negaatio.

$\neg(A \wedge B)$: ”Ei pidä paikkaansa, että Markus on välitunnilla ja ulkona.”

Vastaus a) $\neg B \vee A$
b) $B \Rightarrow A$
c) $\neg(A \wedge B)$

K4

Määritellään atomilauseet seuraavasti:

A: ”Laura on lukiolainen”, B: ”Laura opiskelee pitkää matematiikkaa” ja C: ”Laura opiskelee fysiikkaa”

a) Formalisoidaan lause: ”Laura on lukiolainen ja opiskelee pitkää matematiikkaa, mutta ei fysiikkaa.”

$$A \wedge B \wedge \neg C$$

b) Formalisoidaan lause: ”Jos Laura opiskelee pitkää matematiikkaa ja fysiikkaa, niin hän on lukiolainen.”

$$(B \wedge C) \Rightarrow A$$

c) Formalisoidaan lause: ”Laura on lukiolainen täsmälleen silloin, kun hän opiskelee fysiikkaa tai pitkää matematiikkaa.”

$$A \Leftrightarrow (B \vee C)$$

Vastaus
a) $A \wedge B \wedge \neg C$
b) $(B \wedge C) \Rightarrow A$
c) $A \Leftrightarrow (B \vee C)$

K5

a) Laaditaan lauseelle $(A \vee \neg B) \Rightarrow A$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \Rightarrow A$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	1	1	1
0	**1**	0	0	1
0	**0**	1	1	0

Lause on tosi, kun ainakin toinen lauseista A ja B on tosi.

b) Laaditaan lauseelle $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$
1	**1**	0	1	0	1
1	**0**	0	0	0	0
0	**1**	1	0	1	1
0	**0**	1	0	0	0

Lause on tosi, kun lause B on tosi.

c) Laaditaan lauseelle $(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A$ totuustaulu.

A	**B**	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A$
1	**1**	0	0
1	**0**	0	0
0	**1**	1	0
0	**0**	0	1

Lause on tosi, kun molemmat lauseet A ja B ovat epätosia.

K6

a) Laaditaan lauseen $(A \vee \neg B) \vee C$ totuustaulu.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \vee C$
1	**1**	**1**	0	1	1
1	**1**	**0**	0	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1
1	**0**	**0**	1	1	1
0	**1**	**1**	0	0	1
0	**1**	**0**	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	1
0	**0**	**0**	1	1	1

Lause on epätosi, kun A ja C ovat epätosia ja B on tosi.

b) Laaditaan lauseen $(\neg A \vee B) \vee (B \wedge C)$ totuustaulu.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$B \wedge C$	$(\neg A \vee B) \vee (B \wedge C)$
1	**1**	**1**	0	1	1	1
1	**1**	**0**	0	1	0	1
1	**0**	**1**	0	0	0	0
1	**0**	**0**	0	0	0	0
0	**1**	**1**	1	1	1	1
0	**1**	**0**	1	1	0	1
0	**0**	**1**	1	1	0	1
0	**0**	**0**	1	1	0	1

Lause on epätosi, kun A on tosi ja B on epätosi.

K7

Olkoon A: ”Petteri pitää koirista” ja B: ”Petteri pitää kissoista”.

a) Formalisoidaan lause: ”Jos Petteri pitää koirista tai kissoista, niin hän pitää koirista mutta ei kissoista.”

$$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$$

Tutkitaan lauseen totuutta totuustaulun avulla. Laaditaan lauseelle $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$ totuustaulu.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \wedge \neg B$	$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$
1	**1**	0	1	0	0
1	**0**	1	1	1	1
0	**1**	0	1	0	0
0	**0**	1	0	0	1

Lause on tosi, kun Petteri pitää vain koirista tai hän ei pidä koirista eikä kissoista.

b) Formalisoidaan lause: ”Petteri pitää kissoista, jos ja vain jos ei pidä paikkaansa, että hän pitää kissoista ja koirista.”

$B \Leftrightarrow \neg(B \wedge A)$

Laaditaan lauseelle $B \Leftrightarrow \neg(B \wedge A)$ totuustaulu.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$B \wedge A$	$\neg(B \wedge A)$	$B \Leftrightarrow \neg(B \wedge A)$
1	**1**	1	0	0
1	**0**	0	1	0
0	**1**	0	1	1
0	**0**	0	1	0

Lause on tosi, kun Petteri pitää vain kissoista.

K8

Olkoon A: ”Helmi pääsee veneretkelle”, B: ”Kimmo pääsee uimaan” ja C: ”Timo pääsee tivoliin”.

Formalisoidaan lasten vaatimukset.

Timo: $\neg(A \wedge B)$
Kimmo: $\neg A \wedge C$
Helmi: $\neg B \wedge (A \Rightarrow C)$

Tutkitaan lauseita totuustaulun avulla.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow C$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \wedge C$	$\neg B \wedge (A \Rightarrow C)$
1	**1**	**1**	0	0	1	1	0	0	0
1	**1**	**0**	0	0	1	0	0	0	0
1	**0**	**1**	0	1	0	1	1	0	1
1	**0**	**0**	0	1	0	0	1	0	0
0	**1**	**1**	1	0	0	1	1	1	0
0	**1**	**0**	1	0	0	1	1	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	1	1	1	1
0	**0**	**0**	1	1	0	1	1	0	1

Taulukosta löytyy 1 rivi, jossa kaikki lauseet ovat yhtä aikaa tosia. Tämä rivi toteuttaa kaikkien lasten toiveet:

Helmi ei pääse veneretkelle, Kimmo ei pääse uimaan, mutta Timo pääsee Tivoliin.

Vastaus: Helmi ei pääse veneretkelle, Kimmo ei pääse uimaan, mutta Timo pääsee Tivoliin.

K9

Lause on tautologia, jos se on aina tosi.

a) Tutkitaan lausetta $A \vee B$ totuustaulun avulla.

A	B	$A \vee B$
1	**1**	1
1	**0**	1
0	**1**	1
0	**0**	0

Lause ei ole tautologia, koska se ei ole aina tosi.

b) Tutkitaan lausetta $(A \vee \neg B) \vee (C \vee B)$ totuustaulun avulla.

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$C \vee B$	$(A \vee \neg B) \vee (C \vee B)$
1	**1**	**1**	0	1	1	1
1	**1**	**0**	0	1	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1	1
1	**0**	**0**	1	1	0	1
0	**1**	**1**	0	0	1	1
0	**1**	**0**	0	0	1	1
0	**0**	**1**	1	1	1	1
0	**0**	**0**	1	1	0	1

Lause on tautologia, koska se on aina tosi.

Vastaus: a) ei ole tautologia

b) on tautologia

K10

Lause on tautologia, jos se on aina tosi.

Formalisoidaan lause: ” Jos Paavon päivänä käy lämmin etelätuuli, niin kesällä tulee hyvä marjasato. Koska nyt on huono marjasato, niin Paavon päivänä ei ollut lämmin etelätuuli.”

$$((P \Rightarrow M) \wedge \neg M) \Rightarrow \neg P$$

Tutkitaan lausetta totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{M}$	$\neg P$	$\neg M$	$P \Rightarrow M$	$(P \Rightarrow M) \wedge \neg M$	$((P \Rightarrow M) \wedge \neg M) \Rightarrow \neg P$
1	**1**	0	0	1	0	1
1	**0**	0	1	0	0	1
0	**1**	1	0	1	0	1
0	**0**	1	1	1	1	1

Lause on tautologia, koska se on aina tosi.

Vastaus: $((P \Rightarrow M) \wedge \neg M) \Rightarrow \neg P$, on tautologia

K11

a) Muodostetaan lauseen $A\square(A\square B)$ totuustaulu.

A	B	$A\square B$	$A\square(A\square B)$
1	**1**	0	1
1	**0**	1	0
0	**1**	0	0
0	**0**	0	0

b) Lause $A\square(A\square B)$ on totta, kun A ja B ovat molemmat tosia. Loogisessa mielessä samaa tarkoittaa esimerkiksi lause $A \wedge B$.

A	B	$A\square B$	$A\square(A\square B)$	$A \wedge B$
1	**1**	0	1	1
1	**0**	1	0	0
0	**1**	0	0	0
0	**0**	0	0	0

Vastaus b) esimerkiksi $A \wedge B$

K12

Lause P on tosi silloin, kun C on tosi tai kun A on epätosi ja B on tosi.

Loogisesti ekvivalentti lause olisi esimerkiksi: $(\neg A \wedge B) \vee C$.

Vastaus: esimerkiksi $(\neg A \wedge B) \vee C$

K13

a) Lause $A(x) \wedge B(x)$ tarkoittaa: ”Luku x on pariton sekä jaollinen luvulla 3.”

Perusjoukon luvuista tämän toteuttavat luvut 3 ja 9.

Ratkaisujoukko on: $\{3, 9\}$.

b) Lause $A(x) \wedge \neg B(x)$ tarkoittaa: ”Luku x on pariton eikä se ole jaollinen luvulla 3.”

Perusjoukon luvuista tämän toteuttavat luvut 1, 5, 7.

Ratkaisujoukko on: $\{1, 5, 7\}$.

c) Lause $A(x) \vee B(x)$ tarkoittaa: ”Luku x on pariton tai jaollinen luvulla 3.”

Perusjoukon luvuista tämän toteuttavat luvut 1, 3, 5, 6, 7 ja 9.

Ratkaisujoukko on: $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

d) Lause $A(x) \vee \neg B(x)$ tarkoittaa: ”Luku x on pariton tai luku x ei ole jaollinen luvulla 3.”

Perusjoukon luvuista tämän toteuttavat luvut 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10.

Ratkaisujoukko on: {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}.

Vastaus: a) {3, 9}

b) {1, 5, 7}

c) {1, 3, 5, 6, 7, 9}

d) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}

K14

a) Lause $S(x)$ tarkoittaa: ”Kuvio x on suunnikas.”

Perusjoukon kuvioista tämän toteuttavat kuviot A, B, C ja D.

Ratkaisujoukko on: $\{A, B, C, D\}$.

b) Lause $P(x)$ tarkoittaa: ”Kuvio x on puolisuunnikas.”

Perusjoukon kuvioista tämän toteuttavat kuviot A, B, C, D ja F.

Ratkaisujoukko on: $\{A, B, C, D, F\}$.

c) Lause $\neg S(x) \wedge \neg P(x)$ tarkoittaa: ”Kuvio x ei ole suunnikas eikä puolisuunnikas.”

Perusjoukon kuvioista tämän toteuttavat kuvio E.

Ratkaisujoukko on: $\{E\}$.

d) Lause $\neg(S(x) \lor P(x))$ tarkoittaa: ”Ei pidä paikkaansa, että kuvio x on suunnikas tai puolisuunnikas.”

Perusjoukon kuvioista tämän toteuttaa kuvio E.

Ratkaisujoukko on: {E}.

Vastaus: a) {A, B, C, D}

b) {A, B, C, D, F }

c) {E}

d) {E}

K15

a) Formalisoidaan lause: ”Kaikki salaiset tuttavat esitellään perheelle.”

Lause voidaan esittää muodossa: ”Kaikille ihmisille x pätee: jos x on salainen tuttava, niin x esitellään perheelle.”

$$\forall x: S(x) \Rightarrow E(x)$$

b) Formalisoidaan lause: ”Kaikkia salaisia tuttavia ei esitellä perheelle.”

Lause voidaan esittää muodossa: ”On olemassa ihminen x, jolle pätee: x on salainen tuttava ja x:ää ei esitellä perheelle.”

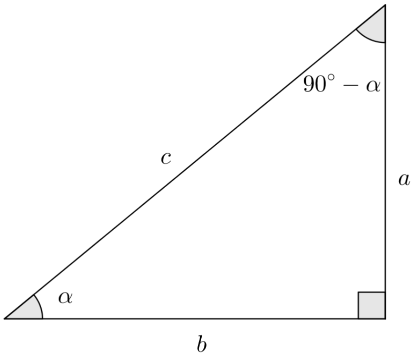
$$\exists x: S(x) \wedge \neg E(x)$$

Vastaus: a) $\forall x: S(x) \Rightarrow E(x)$

b) $\exists x: S(x) \wedge \neg E(x)$

K16

Väite $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$



Todistus Piirretään suorakulmainen kolmio.

Nimetään kolmion terävät kulmat: α ja $90° - \alpha$.

Hyödynnetään sinin ja kosinin määritelmiä terävälle kulmalle.

Muodostetaan kulman α sini ja kulman $90° - \alpha$ kosini.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ja} \quad \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}.$$

Huomataan, että $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Väite on tosi. □

K17

Oletus Luku a on parillinen.

Väite Luvun a kuutio on aina jaollinen luvulla 8.

Todistus Koska luku a on parillinen, voidaan se kirjoittaa muodossa $a = 2n$, missä n on kokonaisluku.

Muodostetaan nyt luvun a kuutio.

$$a^3 = (2n)^3 = 2^3 n^3 = 8n^3$$

Saatiin, että $a^3 = 8n^3$. Koska n^3 on kokonaisluku, parillisen luvun a kuutio on jaollinen luvulla 8.

Väite on tosi. □

K18

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n(n-1)(n+1)$ on jaollinen luvulla 6.

Todistus Luku $n(n-1)(n+1)$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo.

Tällöin välttämättä ainakin yhden luvuista on oltava jaollinen luvulla 2 ja ainakin yhden luvuista on oltava jaollinen luvulla 3.

Tästä seuraa, että tulo on jaollinen luvulla 6.

Väite on tosi. $\square$

K19

Väite $x = a^{\log_a x}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$.

Todistus Todistetaan väite logaritmin määritelmän perusteella. Logaritmin määritelmän mukaan:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x,$ kun $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$

Sijoitetaan $y = \log_a x$ lausekkeeseen $a^y = x$.

Saadaan $a^{\log_a x} = x$.

Väite on tosi. □

K20

a) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{Z} : n^3 \geq n^2$ epätodeksi vastaesimerkin avulla.

Valitaan $n = -1$. Saadaan $(-1)^3 = -1$ ja $(-1)^2 = 1$. Nyt siis $(-1)^3 < (-1)^2$.

Lause on epätosi. □

b) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{N} : n^3 > n^2$ epätodeksi vastaesimerkin avulla.

Valitaan $n = 0$. Saadaan $0^3 = 0$ ja $0^2 = 0$. Nyt siis $0^3 = 0^2$.

Lause on epätosi. □

K21

a) Todistetaan väite $\exists n \in \mathbf{Z} : -n > n$: ”on olemassa jokin kokonaisluku *n* siten, että luvun *n* vastaluku on suurempi kuin luku *n*” todeksi.

Riittää, että löydetään yksikin kokonaisluku, joka toteuttaa lauseen.

Valitaan $n = -1$. Saadaan $-(-1) = 1$. Nyt siis $-(-1) > -1$.

Lause on tosi. □

b) Osoitetaan lause $\exists n \in \mathbf{Z} : \frac{1}{n} > n$: ”on olemassa jokin kokonaisluku *n* siten, että luvun *n* käänteisluku on suurempi kuin luku *n*” todeksi.

Riittää, että löydetään yksikin kokonaisluku, joka toteuttaa lauseen.

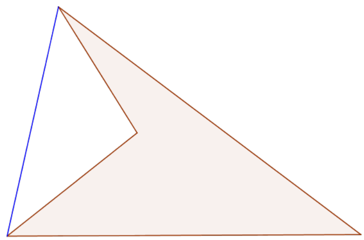
Valitaan $n = -2$. Saadaan: $\frac{1}{-2} > -2$, joka on totta.

Lause on tosi. □

K22

Osoitetaan lause epätodeksi vastaesimerkin avulla.

Piirretään kovera nelikulmio, jossa lävistäjä ei ole nelikulmion sisäpuolella.



Lause on epätosi. □

K23

Esitetään lauseelle ”kuuden peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla kuusi” vastaesimerkki:

$$0+1+2+3+4+5=15$$

Koska luku 15 ei ole jaollinen luvulla 6, kuuden peräkkäisen kokonaisluvun summa ei ole aina jaollinen luvulla 6.

Alkuperäinen lause on epätosi. □

K24

Oletus Kahden kokonaisluvun m ja n tulo on pariton.

Väite Ainakin toinen luvuista m ja n on pariton.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että molemmat luvut ovat parillisia eli $m = 2k$ ja $n = 2l$, kun luvut k ja l ovat kokonaislukuja.

Muodostetaan nyt lukujen m ja n tulo.

$$mn = 2k \cdot 2l = 2(2kl)$$

Saatiin, että $mn = 2(2kl)$ eli tulo on parillinen. Tämä on ristiriita, joten alkuperäinen väite on tosi.

Väite: ”jos kahden kokonaisluvun tulo on pariton, niin ainakin toinen luvuista on pariton” pätee. □

K25

Väite Irrationaaliluvun ja rationaaliluvun summa on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että irrationaaliluvun x ja rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ summa on rationaaliluku $\frac{m}{n}$. Luvut a, b, m ja n ovat kokonaislukuja.

Muodostetaan summa lauseke ja ratkaistaan siitä x.

$$x + \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$x = {}^{b)}\frac{m}{n} - {}^{n)}\frac{a}{b}$$

$$x = \frac{bm - an}{bn}$$

Saatiin, että $x = \frac{bm - an}{bn}$ eli x on rationaaliluku. Tämä on ristiriita, joten alkuperäinen väite on tosi.

Väite: ”irrationaaliluvun ja rationaaliluvun summa on irrationaaliluku” pätee. □

K26

Oletus Kokonaisluvun kuutio on pariton.

Väite Kokonaisluku on pariton.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kokonaisluku n on parillinen eli $n = 2k$, missä k on kokonaisluku.

Muodostetaan kokonaisluvun n kuutio.

$$n^3 = (2k)^3 = 2^3 k^3 = 8k^3 = 2(4k^3)$$

Saatiin, että $n^3 = 2(4k^3)$ eli kokonaisluvun n kuutio on parillinen. Tämä on ristiriita, joten alkuperäinen väite on tosi.

Alkuperäinen väite pätee. $\square$

K27

Väite n-kulmiolla on $\dfrac{n(n-3)}{2}$ lävistäjää.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n=3$.

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{3(3-3)}{2}=0$$

Kolmiolla on 0 lävistäjää.

Väite on tosi, kun $n=3$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

n-kulmiolla on $\dfrac{n(n-3)}{2}$ lävistäjää,

mielivaltaisella $n=3,\ 4,\ 5...$.

Induktioväite:

$n+1$-kulmiolla on

$$\frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}$$

lävistäjää.

Induktioväitteen todistus:

Kun n-kulmioon lisätään yksi kulma lisää eli kulma $n+1$, voidaan uudesta kulmasta piirtää lävistäjät kaikkiin muihin kulmiin, paitsi kulmaan itseensä ja kahteen viereiseen kulmaan.

Koska kulmia on nyt $n+1$, lähtee uudesta kulmasta nyt $((n+1)-3)=n-2$ lävistäjää. Lisäksi kahden aiemmin viereisen kulman välille tulee 1 uusi lävistäjä eli kaiken kaikkiaan lävistäjiä tulee yhteensä: $n-2+1=n-1$ kappaletta lisää.

Lisätään nyt oletuksen mukaiseen lävistäjien määrään $n-1$ lävistäjää.

$$\frac{n(n-3)}{2} + {}^{2)}(n-1) = \frac{n(n-3)+2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2-3n+2n-2}{2}$$

$$= \frac{n^2-n-2}{2}$$

Saatiin tulokseksi induktioväitteen mukainen lävistäjien määrä.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

K28

Oletus Lukujono on rekursiivinen

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2, \text{ kun } n = 2,\ 3,\ 4,... \end{cases}$$

Väite Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3^n - 1$, kun n = 1, 2, 3, … .

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 2$.

$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ ja toisaalta $a_2 = 3^2 - 1 = 8$

Väite on tosi, kun $n = 2$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3^n - 1$, mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:

Lukujonon yleinen jäsen on $a_{n+1} = 3^{n+1} - 1$.

Induktioväitteen todistus:

Sovelletaan rekursiokaavaa $a_n = 3a_{n-1} + 2$ jäseneen a_{n+1}.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3a_{(n+1)-1} + 2 \\
&= 3a_n + 2 \qquad a_n = 3^n - 1 \text{ induktio-oletuksen perusteella} \\
&= 3 \cdot (3^n - 1) + 2 \\
&= 3^{n+1} - 3 + 2 \\
&= 3^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

K29

Oletus n on positiivinen kokonaisluku.

Väite $2+4+6+...+2n=n^2+n$

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n=1$.

$2=1+1=2$

Väite on tosi, kun $n=1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$2+4+6+...+2n=n^2+n$

mielivaltaisella $n=1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:

$2+4+6+...+2(n+1)=(n+1)^2+(n+1)$

Induktioväitteen todistus:

Muokataan induktioväitteen vasenta puolta käyttäen hyväksi induktio-oletusta.

$$2+4+6+\ldots+2(n+1)$$

$$=\underbrace{2+4+6+\ldots+2n}_{=n^2+n}+2(n+1)$$

induktio-oletuksen perusteella.

$$=n^2+n+2(n+1)$$

$$=n^2+n+2n+2$$

Ryhmitellään lauseke uudelleen.

$$=(n^2+2n+1)+(n+1)$$

$$=(n+1)^2+(n+1)$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

K30

Oletus n on luonnollinen luku.

Väite $4^n - 1$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 0$.

$4^0 - 1 = 0$

Luku 0 on jaollinen luvulla 3.

Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$4^n - 1$ on jaollinen luvulla 3

mielivaltaisella $n = 0, 1, 2...$.

Induktioväite:

$4^{n+1} - 1$ on jaollinen luvulla 3.

Induktioväitteen todistus:

Induktio-oletuksen mukaan $4^n - 1 = 3s$, jossa s on kokonaisluku. Tästä saadaan $4^n = 3s + 1$.

Muokataan induktioväitettä.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \cdot \underbrace{4^n}_{=3s+1} - 1 \\ &= 4 \cdot (3s+1) - 1 \\ &= 4 \cdot 3s + 4 - 1 \qquad \text{Erotetaan luku 3 yhteiseksi tekijäksi.} \\ &= 3(4s+1) \end{aligned}$$

Saatiin, että $4^{n+1} - 1$ on jaollinen luvulla 3.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

K31

Määritetään kongruenssin avulla jakojäännös, kun päivien lukumäärä 1001 = 700 + 280 + 21 jaetaan luvulla 7.

$$700 \equiv 0 \pmod{7}$$
$$280 \equiv 0 \pmod{7}$$
$$21 \equiv 0 \pmod{7}$$
$$1001 \equiv 0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{7}$$

Koska jakojäännös on 0, 1001 yön kuluttua on myös sunnuntai.

Vastaus: sunnuntai

K32

a) Huomataan, että $6 \cdot 21 = 126$ ja $127 - 126 = 1$.

Luku 6 menee 127:ään 21 kertaa, ja yli jää 1.

Jakolaskun 127 : 6 osamäärä on 21 ja jakojäännös 1.

Jakoyhtälö on $127 = 6 \cdot 21 + 1$.

b) Huomataan, että $8 \cdot 52 = 416$ ja $423 - 416 = 7$.

Luku 8 menee 423:een 52 kertaa, ja yli jää 7.

Jakolaskun 423 : 8 osamäärä on 52 ja jakojäännös 7.

Jakoyhtälö on $423 = 8 \cdot 52 + 7$.

c) Huomataan, että $11 \cdot 90 = 990$ ja $1000 - 990 = 10$.

Luku 11 menee 1000:een 90 kertaa, ja yli jää 10.

Jakolaskun 1000 : 11 osamäärä on 990 ja jakojäännös 10.

Jakoyhtälö on $1000 = 11 \cdot 90 + 10$.

Vastaus: a) osamäärä 21, jakojäännös 1, jakoyhtälö $127 = 6 \cdot 21 + 1$
b) osamäärä 52, jakojäännös 7, jakoyhtälö $423 = 8 \cdot 52 + 7$
c) osamäärä 90, jakojäännös 10, jakoyhtälö $1000 = 11 \cdot 90 + 10$

K33

a) Laskimella saadaan $-111:37=-3$

Siis $-111=37\cdot(-3)+0$.

b) Laskimella saadaan $-109:37=-2,945...$

Etsitään suurin luvun 37 monikerta, joka on pienempi kuin -109.

$37\cdot(-2)=-74>-109$
$37\cdot(-3)=-111<-109$

Lasketaan lukujen -109 ja -111 erotus: $-109-(-111)=2$

Siis $-109=37\cdot(-3)+2$.

c) Laskimella saadaan $-998:37=-26,972...$

Etsitään suurin luvun 37 monikerta, joka on pienempi kuin -998.

$37\cdot(-26)=-962>-998$
$37\cdot(-27)=-999<-998$

Lasketaan lukujen -998 ja -999 erotus: $-998-(-999)=1$

Siis $-998=37\cdot(-27)+1$

Vastaus a) $-111=37\cdot(-3)+0$
b) $-109=37\cdot(-3)+2$
c) $-998=37\cdot(-27)+1$

K34

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $2n(n+1)$ on jaollinen luvulla 4.

Todistus Jokainen kokonaisluku n voidaan esittää muodossa $n=4q,\ n=4q+1,\ n=4q+2,\ n=4q+3$, missä q on kokonaisluku.

Sijoitetaan nämä yksi kerrallaan lausekkeeseen $2n(n+1)$.

<table>
<tr><th>n</th><th>$2n(n+1)$</th></tr>
<tr><td>$4q$</td><td>$2\cdot 4q(4q+1)=4\cdot 2q(4q+1)$</td></tr>
<tr><td>$4q+1$</td><td>$2\cdot(4q+1)((4q+1)+1)=(8q+2)(4q+2)$
$=(32q^2+16q+8q+4)$
$=(32q^2+24q+4)$
$=4\cdot(8q^2+6q+1)$</td></tr>
<tr><td>$4q+2$</td><td>$2\cdot(4q+2)((4q+2)+1)=\underbrace{(8q+4)}_{\text{Erotetaan 4 yhteiseksi tekijäksi}}(4q+3)$
$=4\cdot(2q+1)(4q+3)$</td></tr>
<tr><td>$4q+3$</td><td>$2\cdot(4q+3)((4q+3)+1)=(8q+6)\underbrace{(4q+4)}_{\text{Erotetaan 4 yhteiseksi tekijäksi.}}$
$=(8q+6)\cdot 4\cdot(q+1)$
$=4\cdot(8q+6)(q+1)$</td></tr>
</table>

Jokaisessa tapauksessa luku $2n(n+1)$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 4.

Eli luku $2n(n+1)$ on jaollinen luvulla 4. $\square$

K35

a) Jaetaan luku 60 luvulla 36 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$60 = 36 \cdot 1 + 24$ syt(60, 36) = syt(36, 24)

Jaetaan jakaja 36 jakojäännöksellä 24 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$36 = 24 \cdot 1 + 12$ syt(36, 24) = syt(24, 12)

Jaetaan jakaja 24 jakojäännöksellä 12 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$24 = 12 \cdot 2 + 0$ syt(24, 12) = 12

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(60, 36) = 12.

b) Lasketaan lukujen 60 ja 36 pienin yhteinen monikerta.

$$\text{pym}(60, 36) = \frac{60 \cdot \cancelto{3}{36}}{\cancelto{1}{12}} = 180$$

$$\text{pym}(a, b) = \frac{ab}{\text{syt}(a, b)}$$

Vastaus: a) 12
b) 180

K36

Tiedetään, että syt(a, b) = 6 ja pym(a, b) = 60.

Hyödynnetään tietoa: $\text{pym}(a,b)\cdot\text{syt}(a,b) = a\cdot b$.

Saadaan: $a\cdot b = 60\cdot 6$. Eli eräs ratkaisu on 6 ja 60.

Tutkitaan, voidaanko luku $60\cdot 6 = 360$ jakaa muihin kokonaislukutekijöihin siten, että lukujen suurin yhteinen tekijä on luku 6 ja pienin yhteinen monikerta luku 60.

Lukujen tulee olla suurempia kuin luku 6 ja toisaalta taas pienempiä kuin luku 60.

Mahdollisia ovat siten lukuparit:
8 ja 45, 9 ja 40, 10 ja 36, 12 ja 30, 15 ja 24, 18 ja 20.

Näistä ainoa, joka toteuttaa ehdon "lukujen suurin yhteinen tekijä on luku 6 ja pienin yhteinen monikerta on luku 60" on lukupari 12 ja 30.

Vastaus: Luvut ovat 6 ja 60 tai 12 ja 30.

K37

Muodostetaan jakoyhtälöt.

$5538 = 455 \cdot 12 + 78$	syt(5538, 455) = syt(455, 78)
$455 = 78 \cdot 5 + 65$	syt(455, 78) = syt(78, 65)
$78 = 65 \cdot 1 + 13$	syt(78, 65) = syt(65, 13)
$65 = 13 \cdot 5 + 0$	syt(65, 13) = 13

Saatiin syt(5538, 455) = 13.

Vastaus: 13

K38

Etsitään Eukleideen algoritmin avulla suurin luku, jolla murtoluku $\frac{546}{1386}$ voidaan supistaa.

Muodostetaan jakoyhtälöt.

$1386 = 546 \cdot 2 + 294$	syt(1386, 546) = syt(546, 294)
$546 = 294 \cdot 1 + 252$	syt(546, 294) = syt(294, 252)
$294 = 252 \cdot 1 + 42$	syt(294, 252) = syt(252, 42)
$252 = 42 \cdot 6 + 0$	syt(252, 42) = 42

Saatiin syt(1386, 546) = 42.
Eli 42 on suurin luku, jolla murtoluku $\frac{546}{1386}$ voidaan supistaa.
Supistetaan murtoluku.

$$\frac{546}{1386}^{(42} = \frac{13}{33}$$

Vastaus: voidaan supistaa luvulla 42, saadaan $\frac{13}{33}$

K39

a) Osoitetaan, että lukujen 398 ja 326 erotus on jaollinen luvulla 9.

$$398-326=72=9\cdot 8$$

Siis $398\equiv 326 \pmod{9}$. □

b) Osoitetaan, että luku 128 on jaollinen luvulla 32.

$$128=32\cdot 4$$

Siis $128\equiv 0 \pmod{32}$. □

c) Osoitetaan, että lukujen 443 ja –1 erotus on jaollinen luvulla 111.

$$443-(-1)=444=111\cdot 4$$

Siis $443\equiv -1 \pmod{111}$. □

K40

a) Määritetään jakojäännös kongruenssin avulla.

Jakolaskun 16 : 5 jakojäännös on 1, joten $16 \equiv 1 \pmod{5}$.

Korvataan luku 16^{2018} kongruentilla luvulla modulo 5.

$$16^{2018} \equiv 1^{2018} \equiv 1 \pmod{5}$$

Jakojäännös on 1.

b) Määritetään jakojäännös kongruenssin avulla.

Jakolaskun 125 : 6 jakojäännös on 5 ja $5 \equiv -1 \pmod{6}$, joten $125 \equiv -1 \pmod{6}$.

Korvataan luku 125^{101} kongruentilla luvulla modulo 6.

$$125^{101} \equiv (-1)^{101} \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6}$$

Jakojäännös on 5.

Vastaus: a) 1
b) 5

K41

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Luku on jaollinen luvulla 16, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 16.

Erotus $20-4=16$ on jaollinen luvulla 16, joten $20 \equiv 4 \pmod{16}$.

Erotus $17-1=16$ on jaollinen luvulla 16, joten $17 \equiv 1 \pmod{16}$.

Erotus $19-3=16$ on jaollinen luvulla 16, joten $19 \equiv 3 \pmod{16}$.

Erotus $15-(-1)=16$ on jaollinen luvulla 16, joten $15 \equiv -1 \pmod{16}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 16.

$$\begin{aligned} 20 \cdot 17^{2016} + 19 \cdot 15^{2017} - 1 &\equiv 4 \cdot 1^{2017} + 3 \cdot (-1)^{2017} - 1 \\ &\equiv 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 1 \\ &\equiv 0 \pmod{16} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 0, joten luku $20 \cdot 17^{2017} + 19 \cdot 15^{2017} - 1$ on jaollinen luvulla 16. □

K42

Oletus Luku n on luonnollinen luku.

Väite Luku $3^{2n+1}+5^n$ on jaollinen luvulla 4.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$3 \equiv -1 \text{ (mod 4)}$$
$$5 \equiv 1 \text{ (mod 4)}$$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 4.

$$\begin{aligned}&3^{2n+1}+5^n\\ &\equiv (-1)^{2n+1}+1^n\\ &\equiv -1+1\\ &\equiv 0 \text{ (mod 4)}\end{aligned}$$

$(-1)^{2n+1}=-1$, koska $2n+1$ on pariton luku, kun $n \in \mathbf{N}$.

Havaitaan, että $3^{2n+1}+5^n \equiv 0 \pmod{4}$.

Luku $3^{2n+1}+5^n$ on jaollinen luvulla 4 kaikilla luonnollisilla luvuilla n. □

K43

a) Muodostetaan lukujen 18 ja 63 alkulukuhajotelmat.

$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

$63 = 7 \cdot 9 = 7 \cdot 3 \cdot 3 = 3^2 \cdot 7$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy 3^2.

$\text{syt}(63,18) = 3^2 = 9$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 7. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$\text{pym}(63, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$

Vastaus:
a) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ ja $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$
b) 9
c) 126

K44

a) Koska $\sqrt{379} = 19,467...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku 19 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

379 : 2 = 189,5
379 : 3 = 126,333…
379 : 5 = 75,8
379 : 7 = 54,142…
379 : 11 = 34,454…
379 : 13 = 29,153…
379 : 17 = 22,294…
379 : 19 = 19,947…

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 379 on alkuluku.

b) Koska $\sqrt{8671} = 93,118...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku 93.

8671 : 2 = 4335,5
8671 : 3 = 2890,333…
8671 : 5 = 1734,2
8671 : 7 = 1238,714…
8671 : 11 = 788,272…
8671 : 13 = 667

Koska jakolasku 8671 : 13 = 667 menee tasan, luku 8671 ei ole alkuluku.

c) Koska $\sqrt{79625} = 282{,}179...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 282.

79625 : 2 = 39812,5
79625 : 3 = 26541,666…
79625 : 5 = 15925

Koska jakolasku 79625 : 5 =159251 menee tasan, luku 79625 ei ole alkuluku.

Tämä nähdään toisaalta jo suoraan siitä, että luku 79625 päättyy numeroon 5.

Vastaus: a) On. Luku on jaettava lukua $\sqrt{379} = 19{,}467...$ pienemmillä alkuluvuilla.

b) Ei ole. Luku on jaollinen luvulla 13.
c) Ei ole. Luku on jaollinen luvulla 5.

K45

a)

Hyödynnetään Eratostheneen seulaa tehtävästä 250, jossa on korostettuna kaikki alkuluvut lukuun 120 saakka.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Kahdeksan ensimmäistä alkulukuparia ovat:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)

b) Jokainen lukua 3 suurempi kokonaisluku on muotoa:

$6n-2,\ 6n-1,\ 6n,\ 6n+1,\ 6n+2$ tai $6n+3$, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Huomataan, että luvut $6n-2,\ 6n,\ 6n+2$ ja $6n+3$ voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$6n-2=2(3n-1)$$
$$6n=2(3n)$$
$$6n+2=2(3n+1)$$
$$6n+3=3(2n+1).$$

Siispä vain luvut $6n-1$ ja $6n+1$ voivat olla alkulukuja. □

Vastaus: a) (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)

K46

Jokainen lukua 3 suurempi kokonaisluku on muotoa:

$3q$, $3q+1$ tai $3q+2$, kun q on positiivinen kokonaisluku.

n	$n+2$	$n+4$
$3q$	$3q+2$	$3q+4$
$3q+1$	$3q+1+2=3q+3=3(q+1)$	$3q+1+4=3q+5$
$3q+2$	$3q+2+2=3q+4$	$3q+2+4=3q+6=3(q+2)$

Huomataan, että vähintään yksi luvuista n, $n+2$ ja $n+4$ on aina yhdistetty luku.

Siten kaikki luvut n, $n+2$ ja $n+4$ eivät voi olla alkulukuja. □

K47

Eukleideen lemman mukaan: ”jos kokonaislukujen *a* ja *b* tulo on jaollinen alkuluvulla *p*, niin ainakin toinen luvuista *a* ja *b* on jaollinen luvulla *p*.”

a) Koska luku 19 on alkuluku, niin ainakin toinen luvuista *a* ja *b* on jaollinen luvulla 19.

Väite on tosi. □

b) Koska luku 18 ei ole alkuluku, niin kumpikaan luvuista *a* ja *b* ei välttämättä ole jaollinen luvulla 18.

Etsitään vastaesimerkki:

Valitaan $a = 4$, $b = 9$. Nyt $ab = 4 \cdot 9 = 36$ ja luku 36 on jaollinen luvulla 18, mutta kumpikaan luvuista 4 ja 9 ei ole jaollinen luvulla 18.

Koska löytyi vastaesimerkki, väite ei ole tosi. □

Vastaus: a) Tosi, sillä luku 19 on alkuluku.
b) Epätosi. Vastaesimerkki: $36 = 4 \cdot 9$.

K48

Luku 12 voidaan esittää alkulukujen tulona $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ja luku 18 voidaan esittää alkulukujen tulona $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Koska luku a on jaollinen luvuilla 12 ja 18, luku a on myös jaollinen näiden lukujen tekijöillä, joiden suurin yhteinen tekijä on luku 1.

Koska lukujen $2 \cdot 2 = 4$ ja $3 \cdot 3 = 9$ suurin yhteinen tekijä on luku 1, luku a on jaollinen näiden lukujen tulolla eli luvulla 36. $\square$

K49

Lukion opiskelijamäärä n on välillä $300 \le n \le 600$.

Opiskelijamäärän tulee olla jaollinen luvuilla 5, 4 sekä 13. Näiden lukujen suurin yhteinen tekijä on 1, joten opiskelijamäärän tulee olla jaollinen näiden tulolla $4 \cdot 5 \cdot 13 = 260$.

Etsitään väliltä $300 \le n \le 600$ kokonaisluku n, joka on jaollinen luvulla 260.

$$300 : 260 = 1{,}153...$$
$$600 : 260 = 2{,}307...$$

Opiskelijamäärän tulee siis olla: $2 \cdot 260 = 520$.

Vastaus: 520

K50

a) Ilmaistaan luku 8 530 002 käyttäen muotoa
$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$.

$$\begin{aligned} 8530002 &= 8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 2 \\ &= 8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \end{aligned}$$

Koska $10 \equiv 1 \pmod 3$, niin kaikilla eksponenteilla $k > 0$ pätee, että $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$.

Siten voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 &\equiv 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \\ &\equiv 18 \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

Siis luku 8 530 002 on jaollinen luvulla 3. □

b) Ilmaistaan luku 13 080 627 käyttäen muotoa
$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$.

$$\begin{aligned} 13080627 &= 1 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 \\ &= 1 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 \end{aligned}$$

Koska $10 \equiv 1 \pmod 9$, niin kaikilla eksponenteilla $k > 0$ pätee, että $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$.

Siten voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 7 &\equiv 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \\ &\equiv 27 \equiv 0 \pmod 9. \end{aligned}$$

Siis luku 13 080 627 on jaollinen luvulla 9. □

M1

Lause ”tänään on siivouspäivä, jos tänään on perjantai” voidaan ilmaista toisin: ”jos tänään on perjantai, niin tänään on siivouspäivä”.

Formalisoidaan lause.

$A \Rightarrow B$

Vastaus: a

M2

Lause $\neg A \wedge B$ voidaan suomentaa: ”tänään ei ole perjantai ja tänään on siivouspäivä” eli ”tänään ei ole perjantai, mutta tänään on siivouspäivä”.

Vastaus: c

M3

Tutkitaan lauseen $A \vee B$ totuutta totuustaulun avulla.

A	***B***	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Lause $A \vee B$ on tosi, kun

- A on tosi ja B on tosi,
- A on tosi ja B on epätosi ja
- A on epätosi ja B on tosi.

Vastaus: a ja b

M4

Tutkitaan lauseen $(A \wedge B) \Rightarrow C$ totuutta totuustaulun avulla.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Lause $(A \wedge B) \Rightarrow C$ on tosi kaikissa muissa tapauksissa paitsi, kun A on tosi, B on tosi ja C on epätosi.

Vastaus: a ja c

M5

Tutkitaan lausetta $A \vee \neg A$ totuustaulun avulla.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

Koska lause $A \vee \neg A$ on aina tosi, se on tautologia.

Vastaus: a

M6

Lause P on tosi, kun A on epätosi ja B on tosi eli lause P on loogisesti ekvivalentti lauseen $\neg A \land B$ kanssa.

Vastaus: b

M7

Lause $\exists x : M(x) \wedge \neg P(x)$ voidaan suomentaa seuraavasti:

”on olemassa *x*, joka kuuluu ankkojen joukkoon, ja jolle pätee: *x* on McAnkka ja *x* ei ole pihi”

eli ”on olemassa McAnkka, joka ei ole pihi”

eli ”kaikki McAnkat eivät ole pihejä”.

Vastaus: a ja b

M8

Lause ”jokaisen kokonaisluvun itseisarvo on epänegatiivinen” voidaan sanoa toisin:

”kaikille kokonaisluvuille x pätee: x:n itseisarvo on suurempi tai yhtä suuri kuin luku 0”.

Vastaus: c

M9

Muodostetaan kahden parittoman kokonaisluvun $2n + 1$ ja $2m + 1$, missä n ja m ovat kokonaislukuja, summa.

$$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(n+m+1)$$

Havaitaan, että summa on parillinen kokonaisluku.

Vastaus: c

M10

Tutkitaan lukua n^2+1.

Jos n on luku 2, luku $n^2+1=4+1=5$ on pariton.

Jos n on luku 3, luku $n^2+1=9+1=10$ on parillinen.

Joten luku n^2+1 voi olla joko parillinen tai pariton.

Kun n on kokonaisluku, niin n^2 on epänegatiivinen kokonaisluku.
Siten luku n^2+1 on aina positiivinen kokonaisluku.

Eli luku n^2+1 on aina luonnollinen luku.

Vastaus: c

M11

Jos $x = -4$, $x^2 = (-4)^2 = 16 > 9$.

Tämä sopii vastaesimerkiksi, kun todistetaan lauseen ”jos $x \leq 3$, niin $x^2 \leq 9$” olevan epätosi.

Vastaus: c

M12

Tutkitaan tuloa: $5 \cdot 4 = 20$.

Havaitaan, että:

$$3 \cdot 6 = 18 < 20$$
$$3 \cdot 7 = 21 > 20.$$

Siis kun todistetaan lauseen ”parillisen ja parittoman luvun tulo on aina jaollinen luvulla kolme” olevan epätosi, niin vastaesimerkiksi sopii $5 \cdot 4 = 20$,

Vastaus: b

M13

Alkuaskeleessa tulee osoittaa, että $a_1 = 5$. Eli $(-1)^{1-1} \cdot 5 = 5$.

Vastaus: b

M14

Induktio-oletuksessa oletetaan, että väite pätee mielivaltaisella luvulla.

Eli $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 5$ mielivaltaisella luvulla n.

Vastaus: a

M15

Induktioväitteessä väitetään, että väite pätee myös mielivaltaista lukua seuraavalla luvulla eli luvulla $n+1$.

Eli $a_{n+1} = (-1)^{(n+1)-1} \cdot 5 = (-1)^n \cdot 5$.

Vastaus: c

M16

Koska $13\cdot(-1)=-65$, luku -65 on jaollinen luvulla 13.

Vastaus: b

M17

Koska $5 \cdot (-4) + 3 = -17$, luku -17 voidaan ilmaista jakoyhtälöllä $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$.

Vastaus: c

M18

Tapa1:

Koska lukujen 18 ja 39 alkulukuhajotelmat ovat

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$39 = 3 \cdot 13,$$

niin lukujen suurin yhteinen tekijä on 3.

Tapa 2:

Määritetään lukujen 18 ja 39 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$39 = 2 \cdot 18 + 3$$
$$18 = 6 \cdot 3$$

syt(18, 39) = 3

Vastaus: b

M19

Tapa 1:

Määritetään lukujen 93 ja 201 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$201 = 93 \cdot 2 + 15$$
$$93 = 15 \cdot 6 + 3$$
$$15 = 3 \cdot 5 + 0$$
$$\text{syt}(201, 93) = 3$$

Koska lukujen suurin yhteinen tekijä on luku 3, voidaan murtoluku $\frac{93}{201}$ supistaa luvulla 3.

Tapa 2:

Koska lukujen 93 ja 201 alkulukuhajotelmat ovat:

$$93 = 3 \cdot 31$$
$$201 = 3 \cdot 67,$$

lukujen suurin yhteinen tekijä on luku 3 eli murtoluku $\frac{93}{201}$ voidaan supistaa luvulla 3.

Vastaus: a

M20

Koska lukujen 21 ja 35 alkulukuhajotelmat ovat:

$$21 = 3 \cdot 7$$
$$35 = 5 \cdot 7,$$

lukujen pienin yhteinen monikerta on luku $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Vastaus: b

M21

Koska $4 \equiv (-1) \pmod{5}$, niin $4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Vastaus: a

M22

Koska $9 \equiv (-1) \pmod{10}$,

niin

$9^{77} \equiv (-1)^{77} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$.

Siten, kun luku 9^{77} jaetaan luvulla 10, jakojäännös on 9.

Vastaus: c

M23

Koska

$$
\begin{aligned}
&4 \equiv 1 \pmod{3} \\
&2 \equiv -1 \pmod{3} \\
&5 \equiv -1 \pmod{3} \\
&7 \equiv 1 \pmod{3},
\end{aligned}
$$

niin

$$
\begin{aligned}
&4 \cdot 2^5 + 7^7 \equiv 1 \cdot (-1)^5 + 1^7 \equiv 0 \pmod{3} \\
&4 \cdot 2^6 + 7^6 \equiv 1 \cdot (-1)^6 + 1^6 \equiv 2 \pmod{3} \\
&3 \cdot 2^6 + 5^7 \equiv 3 \cdot (-1)^6 + (-1)^7 \equiv 2 \pmod{3}.
\end{aligned}
$$

Eli luku $4 \cdot 2^5 + 7^7$ on jaollinen luvulla 3.

Vastaus: a

M24

Alkulukuja ovat lukua 1 suuremmat luonnolliset luvut, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1.

Luku $27 = 3 \cdot 9$, joten se ei ole alkuluku.

Luku 37 on alkuluku.

Vastaus: c

M25

Laaditaan luvun 60 alkulukuhajotelma.

$$\begin{aligned} 60 &= 6 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Vastaus: b ja c

A1

a) Huomataan, että $8 \cdot 20 = 160$ ja $163 - 160 = 3$.

Luku 8 menee 163:een 20 kertaa, ja yli jää 3.

Jakolaskun 163 : 8 osamäärä on 20 ja jakojäännös 3.

Jakoyhtälö on $163 = 8 \cdot 20 + 3$.

b) Huomataan, että $11 \cdot 9 = 99$ ja $100 - 99 = 1$.

Luku 11 menee 100:aan 9 kertaa, ja yli jää 1.

Jakolaskun 100 : 11 osamäärä on 9 ja jakojäännös 1.

Jakoyhtälö on $100 = 11 \cdot 9 + 1$.

Vastaus: a) osamäärä 20, jakojäännös 3, jakoyhtälö
$163 = 8 \cdot 20 + 3$
b) osamäärä 9, jakojäännös 1, jakoyhtälö
$100 = 11 \cdot 9 + 1$

A2

a) Saadaan $-35:7=-5$

Siis $-35=7\cdot(-5)+0$.

b) Laskimella saadaan $-36:7=-5{,}142...$

Etsitään suurin luvun 7 monikerta, joka on pienempi kuin -36.

$$7\cdot(-5)=-35>-36$$
$$7\cdot(-6)=-42<-36$$

Lasketaan lukujen -36 ja -42 erotus: $-36-(-42)=6$

Siis $-36=7\cdot(-6)+6$.

Vastaus a) $-35=7\cdot(-5)+0$
b) $-36=7\cdot(-6)+6$

A3

a) Etsitään luvuille 18 ja 42 pienin yhteinen monikerta.

Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$42 = 18 \cdot 2 + 6$ $\quad$ $\text{syt}(42, 18) = \text{syt}(18, 6)$

$18 = 6 \cdot 3 + 0$ $\quad$ $\text{syt}(18, 6) = 6$

Saatiin syt(42, 18) = 6.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{42 \cdot \overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 42 \cdot 3 = 126 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

b) Selvitetään laventajat.

$$\frac{42 \cdot \overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 42 \cdot 3 = 126 \qquad \frac{\overset{7}{\cancel{42}} \cdot 18}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 7 \cdot 18 = 126$$

Yhteinen nimittäjä on 126. Laventajat ovat 3 ja 7.

$$^{7)}\frac{1}{18} = \frac{7}{126} \qquad ^{3)}\frac{1}{42} = \frac{3}{126}$$

Vastaus: a) 126

b) $\frac{1}{18} = \frac{7}{126}$ ja $\frac{1}{42} = \frac{3}{126}$

A4

a) Muodostetaan lukujen 24 ja 150 alkulukuhajotelmat.

$$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3$$

$$150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy 3^2.

$$\text{syt}(24,150) = 2 \cdot 3 = 6$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 5. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(24,\ 150) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$$

Vastaus: a) $24 = 2^3 \cdot 3$ ja $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
b) 6
c) 600

A5

Luku 14 voidaan esittää alkulukujen 2 ja 7 tulona.

Koska $3500:2=1750$ ja $3500:7=500$, niin luku 3500 on jaollinen sekä luvulla 2 että luvulla 7.

Tällöin luku 3500 on jaollinen luvulla $2\cdot 7=14$.

Vastaus: Koska luku 3500 on jaollinen alkuluvuilla 2 ja 7, se on jaollinen myös luvulla 2 · 7 = 14.

A6

Määritetään jakojäännös kongruenssin avulla.

$17 \equiv -1 \pmod{18}$

$15 \equiv -3 \pmod{18}$

$183 \equiv 3 \pmod{18}$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 18.

$$\begin{aligned} 17^{19} + 15 \cdot 183 &\equiv (-1)^{19} + (-3) \cdot 3 \\ &\equiv -1 - 9 \\ &\equiv -10 \\ &\equiv 8 \pmod{18} \end{aligned}$$

Kongruenteilla luvuilla on sama jakojäännös. Kun luku $17^{19} + 15 \cdot 183$ jaetaan luvulla 18, niin jakojäännös on 8.

Vastaus: Jakojäännös on 8.

A7

Oletus Lukiossa on 63 opiskelijaa.

Väite Ainakin 2 opiskelijalla on syntymäpäivä samalla viikolla.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että jokaisen opiskelijan syntymäpäivä on eri viikolla.

Koska viikkoja on vuodessa 52, lukiossa voi olla 52 opiskelijaa. Tämä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa.

Alkuperäinen väite on siten totta. □

A8

a) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{Z} : n < n^2$ epätodeksi vastaesimerkin avulla.

Valitaan $n = 1$. Saadaan $1 < 1^2$. Tämä ei pidä paikkaansa, sillä $1 = 1^2$.

Lause on epätosi. □

b) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{R} : \frac{1}{n} < n$ epätodeksi vastaesimerkin avulla.

Valitaan $n = 0,5$. Saadaan $\frac{1}{0,5} < 0,5$. Tämä ei pidä paikkaansa, sillä $\frac{1}{0,5} = 2 > 0,5$.

Lause on epätosi. □

A9

Oletus Luvut $a > 0$ ja $b > 0$.

Väite $(a+b)^2 > a^2 + b^2$

Todistus Lähdetään tarkastelemaan epäyhtälöä sieventämällä sen vasenta puolta.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + \underbrace{2ab}_{>0} + b^2 \\ &> a^2 + b^2\end{aligned}$$

Saatiin $(a+b)^2 > a^2 + b^2$.

Väite pitää paikkansa. □

A10

Oletus n on luonnollinen luku.

Väite Luku $6^{2n+1}+1$ on jaollinen luvulla 7.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

Koska $6 \equiv -1 \pmod{7}$,

$$6^{2n+1}+1 \equiv (-1)^{2n+1}+1$$

$(-1)^{2n+1}=-1$,
sillä $2n+1$ on pariton.

$$\equiv 0 \pmod{7}.$$

Kun luku $6^{2n+1}+1$ jaetaan luvulla 7, jakojäännös on 0.

Luku $6^{2n+1}+1$ on siten jaollinen luvulla 7, kun n on luonnollinen luku. □

B1

a) ”Saadaan kolme klaavaa” voidaan kirjoittaa toisin:

”ensimmäisellä heitolla saadaan klaava ja toisella heitolla saadaan klaava ja kolmannella heitolla saadaan klaava.”

Lause formalisoituna: $A \wedge B \wedge C$

b) ”Saadaan ainakin yksi klaava” voidaan kirjoittaa toisin:

”ensimmäisellä heitolla saadaan klaava tai toisella heitolla saadaan klaava tai kolmannella heitolla saadaan klaava.”

Lause formalisoituna: $A \vee B \vee C$

c) ”Saadaan tasan yksi klaava” voidaan kirjoittaa toisin:

”ensimmäisellä heitolla saadaan klaava ja toisella heitolla saadaan kruuna ja kolmannella heitolla saadaan kruuna TAI ensimmäisellä heitolla saadaan kruuna ja toisella heitolla saadaan klaava ja kolmannella heitolla saadaan kruuna TAI ensimmäisellä heitolla saadaan kruuna ja toisella heitolla saadaan kruuna ja kolmannella heitolla saadaan klaava.”

Lause formalisoituna:
$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

Vastaus
a) $A \wedge B \wedge C$
b) $A \vee B \vee C$
c) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

B2

Osoitetaan lauseet loogisesti ekvivalenteiksi totuustaulun avulla.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	**1**	0	0	0	0
1	**0**	0	1	1	1
0	**1**	1	0	1	1
0	**0**	1	1	1	1

Koska lauseiden $A \Rightarrow \neg B$ ja $\neg A \vee \neg B$ totuustaulut ovat samat, ne ovat loogisesti ekvivalentit. □

B3

Olkoon A: ”Heimo on kelmi”, B: ”Miia on kelmi” ja C: ”Silja on kelmi”.

Formalisoidaan lauseet.

Heimo: ”Miia ja Silja ovat molemmat kelmejä” eli ”Miia on kelmi ja Silja on kelmi”.

$B \wedge C$

Miia: ”Heimo ja Silja ovat molemmat ritareita” eli ”Heimo on ritari ja Silja on ritari”.

$\neg A \wedge \neg C$

Silja: ”Heimo on ritari tai Miia on kelmi.”

$\neg A \vee B$

Laaditaan totuustaulu.

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$B \wedge C$	$\neg A \wedge \neg C$	$\neg A \vee B$
1	**1**	**1**	0	0	1	0	1
1	**1**	**0**	0	1	0	0	1
1	**0**	**1**	0	0	0	0	0
1	**0**	**0**	0	1	0	0	0
0	**1**	**1**	1	0	1	0	1
0	**1**	**0**	1	1	0	1	1
0	**0**	**1**	1	0	0	0	1
0	**0**	**0**	1	1	0	1	1

Muistetaan, että kelmit valehtelevat aina, ja ritarit puhuvat aina totta.

Keskitytään ensin Heimon väittämään. Jos Heimo on kelmi, hänen väitteensä ei ole totta, joten rivit 2, 3, ja 4 ovat mahdollisia. Näillä riveillä Heimon väittämän totuusarvo on epätosi.

Jos Heimo on ritari, hänen väitteensä on totta. Siten myös rivi 5 on mahdollinen. Eli rivit 2, 3, 4 ja 5 ovat mahdollisia.

Keskitytään nyt riveihin 2, 3, 4 ja 5.

Jos Miia on kelmi, hänen väitteensä ei ole totta, joten rivit 2 ja 5 ovat edelleen mahdollisia.

Jos Miia on ritari, hänen väitteensä on totta ja rivit 3 ja 4 eivät voi pitää paikkaansa.

Tutkitaan nyt rivejä 2 ja 5.

Jos Silja on kelmi, hänen väitteensä ei ole totta, joten rivi 5 ei ole mahdollinen.

Jos Silja on ritari, hänen väitteensä on totta, joten rivi 2 on mahdollinen.

Rivi 2 on ainoa mahdollinen rivi. Sen perusteella Heimo on kelmi, Miia on kelmi ja Silja on ritari.

Vastaus Heimo ja Miia ovat kelmejä, Silja on ritari.

B4

Lukua 10 000 pienemmät kokonaisluvut, jotka ovat jaollisia jokaisella luvuista 11, 13 ja 19 ovat jaollisia näiden lukujen tulolla, sillä luvut 11, 13 ja 19 ovat alkulukuja.

Lukujen tulo on $11 \cdot 13 \cdot 19 = 2717$.

Luvulla 2717 jaollisia lukua 10 000 pienempiä lukuja ovat:

2717, $2 \cdot 2717 = 5434$ ja $3 \cdot 2717 = 8151$.

Vastaus 2717, 5434 ja 8151

B5

Muodostetaan jakoyhtälöt.

$59052 = 3822 \cdot 15 + 1722$	$\text{syt}(59052, 3822) = \text{syt}(3822, 1722)$
$3822 = 1722 \cdot 2 + 378$	$\text{syt}(3822, 1722) = \text{syt}(1722, 378)$
$1722 = 378 \cdot 4 + 210$	$\text{syt}(1722, 378) = \text{syt}(378, 210)$
$378 = 210 \cdot 1 + 168$	$\text{syt}(378, 210) = \text{syt}(210, 168)$
$210 = 168 \cdot 1 + 42$	$\text{syt}(210, 168) = \text{syt}(168, 42)$
$168 = 42 \cdot 4 + 0$	$\text{syt}(168, 42) = 42$

Saatiin $\text{syt}(59052, 3822) = 42$.

Vastaus: 42

B6

a) Osoitetaan, että kolmen peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa ei ole jaollinen luvulla 2.

Esitetään vastaesimerkki: $1+3+5=9$

Luku 9 ei ole jaollinen luvulla 2, joten kolmen peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa ei ole jaollinen luvulla 2.

b) Osoitetaan, että kolmen peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa on jaollinen luvulla 3.

Kolme peräkkäistä paritonta kokonaislukua voidaan esittää muodossa: $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, missä n on kokonaisluku.

Muodostetaan lukujen summa.

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$$

Havaitaan, että summa on jaollinen luvulla 3.

Vastaus: a) Ei ole.
b) On.

B7

Väite Luku $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ei ole irrationaaliluku. Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n $(n \neq 0)$, että $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{m}{n}$.

Ratkaistaan $\sqrt{3}$.

$$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{m}{n} \qquad |\cdot(1+\sqrt{3})$$

$$1-\sqrt{3} = \frac{m(1+\sqrt{3})}{n} \qquad |\cdot n$$

$$n(1-\sqrt{3}) = m(1+\sqrt{3})$$

$$n - n\sqrt{3} = m + m\sqrt{3}$$

$$m\sqrt{3} + n\sqrt{3} = n - m$$

Erotetaan luku $\sqrt{3}$ yhteiseksi tekijäksi.

$$(m+n)\sqrt{3} = n - m \qquad |:(m+n)$$

$$\sqrt{3} = \frac{n-m}{m+n}$$

Saatiin, että $\sqrt{3}$ on rationaaliluku.

On päädytty ristiriitaan, sillä $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku.

Alkuperäinen väite pitää siis paikkansa.

Luku $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ on irrationaaliluku. □

B8

Oletus Luku n on positiivinen kokonaisluku.

Väite Luku $n^3 + 11n$ on jaollinen luvulla 6.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden kongruensseista $n \equiv 0$, $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 3$, $n \equiv 4$ tai $n \equiv 5 \pmod 6$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa
$n^3 + 11n \equiv 0 \pmod 6$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 0^3 + 11 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 6.$$
2) Jos $n \equiv 1 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 1^3 + 11 \cdot 1 \equiv 12 \equiv 0 \pmod 6.$$
3) Jos $n \equiv 2 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 2^3 + 11 \cdot 2 \equiv 30 \equiv 0 \pmod 6.$$
4) Jos $n \equiv 3 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 3^3 + 11 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \pmod 6.$$
3) Jos $n \equiv 4 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 4^3 + 11 \cdot 4 \equiv 108 \equiv 0 \pmod 6.$$
3) Jos $n \equiv 5 \pmod 6$, niin
$$n^3 + 11n \equiv 5^3 + 11 \cdot 5 \equiv 180 \equiv 0 \pmod 6.$$

Huomataan, että aina $n^3 + 11n \equiv 0 \pmod 6$.

Siispä kaikilla kokonaisluvuilla n luku $n^3 + 11n$ on jaollinen luvulla 6. □

B9

Tulee osoittaa:

1) Jos luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on jaollinen luvulla 3, niin kokonaisluku n on toisen kokonaisluvun kuutio.

ja

2) Jos kokonaisluku n on toisen kokonaisluvun kuutio, niin luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on jaollinen luvulla 3.

Osoitetaan ensin kohta 1:

Jos luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on jaollinen luvulla 3, luvun n alkulukuhajotelma on muotoa:

$$n = p_1^{3\cdot q_1} \cdot p_2^{3\cdot q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{3\cdot q_k} .$$

Sievennetään alkulukuhajotelma potenssikaavojen avulla.

$$n = p_1^{3\cdot q_1} \cdot p_2^{3\cdot q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{3\cdot q_k} = (\underbrace{p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{q_k}}_{=m})^3 = m^3$$

Saatiin, että kokonaisluku n on toisen kokonaisluvun kuutio.

Osoitetaan sitten kohta 2:

Jos kokonaisluku n on toisen kokonaisluvun kuutio, voidaan merkitä $n = m^3$, missä m on kokonaisluku. Luvun m alkulukuhajotelma on muotoa:

$$m = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{q_k}.$$

Sijoitetaan tämä lausekkeeseen $n = m^3$.

$$n = m^3 = (p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{q_k})^3 = p_1^{3 \cdot q_1} \cdot p_2^{3 \cdot q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{3 \cdot q_k}$$

Saatiin, että luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on jaollinen luvulla 3.

Koska molemmat kohdat 1 ja 2 pätevät, kokonaisluku n on toisen kokonaisluvun kuutio täsmälleen silloin, kun luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on jaollinen luvulla 3. $\square$

B10

a)

Väite $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, missä $q \neq 0, q \neq 1$

kaikilla $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 0$.

$$q^0 = \frac{1-q^1}{1-q}$$

$$1 = 1$$

Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

mielivaltaisella $n = 0,\ 1,\ 2\ldots$.

Induktioväite:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella ja sievennetään lauseketta.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^k}_{\substack{=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \text{induktio-oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + {}^{1-q)}q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+1+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

b) $3+3^2+3^3+...+3^{12}=\sum_{k=0}^{12}3^k-1=\frac{1-3^{13}}{1-3}-1=797160$

Vastaus: b) 797 160