170

a) Koska $28 = 4 \cdot 7$, luku 28 on jaollinen luvulla 4.

b) Koska $104 = 4 \cdot 26$, luku 104 on jaollinen luvulla 4.

c) Koska $4 \cdot 20 = 80 < 82$ ja $4 \cdot 21 = 84 > 82$, luku 82 ei ole jaollinen luvulla 4.

d) Koska $32 = 4 \cdot 8$, luku 32 on jaollinen luvulla 4.

Vastaus
a) on, koska $28 = 4 \cdot 7$
b) on, koska $104 = 4 \cdot 26$
c) ei ole, koska $4 \cdot 20 = 80 < 82$ ja $4 \cdot 21 = 84 > 82$
d) on, koska $32 = 4 \cdot 8$

171

a) Koska $21 \cdot 1 = 21 < 35$ ja $21 \cdot 2 = 42 > 35$, luku 35 ei ole jaollinen luvulla 21.

b) Koska $-42 = 21 \cdot (-2)$, luku -42 on jaollinen luvulla 21.

c) Koska $21 \cdot 10 = 210 < 219$ ja $21 \cdot 11 = 231 > 219$, luku 219 ei ole jaollinen luvulla 21.

d) Koska $-105 = 21 \cdot (-5)$, luku -105 on jaollinen luvulla 21.

Vastaus
a) ei, koska $21 \cdot 1 = 21 < 35$ ja $21 \cdot 2 = 42 > 35$
b) on, koska $-42 = 21 \cdot (-2)$
c) ei, koska $21 \cdot 10 = 210 < 219$ ja $21 \cdot 11 = 231 > 219$
d) on, koska $-105 = 21 \cdot (-5)$

172

a) Huomataan, että $10 \cdot 2 = 20$ ja $27 - 20 = 7$.

Luku 10 menee 27:ään 2 kertaa, ja yli jää 7.

Jakolaskun 27 : 10 osamäärä on 2 ja jakojäännös 7.

Jakoyhtälö on $27 = 10 \cdot 2 + 7$.

b) Huomataan, että $100 \cdot 3 = 300$ ja $305 - 300 = 5$.

Luku 100 menee 305:een 3 kertaa, ja yli jää 5.

Jakolaskun 305 : 100 osamäärä on 3 ja jakojäännös 5.

Jakoyhtälö on $305 = 100 \cdot 3 + 5$.

c) Huomataan, että $1000 \cdot 9 = 9000$ ja $9999 - 9000 = 999$.

Luku 1000 menee 9999:ään 9 kertaa, ja yli jää 999.

Jakolaskun 9999 : 1000 osamäärä on 9 ja jakojäännös 999.

Jakoyhtälö on $9999 = 1000 \cdot 9 + 999$.

Vastaus a) osamäärä 2, jakojäännös 7 ja jakoyhtälö $27 = 10 \cdot 2 + 7$.
b) osamäärä 3, jakojäännös 5 ja jakoyhtälö $305 = 100 \cdot 3 + 5$.
c) osamäärä 9, jakojäännös 999 ja jakoyhtälö $9999 = 1000 \cdot 9 + 999$.

173

a) Huomataan, että $5 \cdot 7 = 35$ ja $36 - 35 = 1$.

Luku 5 menee 36:een 7 kertaa, ja yli jää 1.

Jakolaskun 36 : 5 osamäärä on 7 ja jakojäännös 1.

Jakoyhtälö on $36 = 5 \cdot 7 + 1$.

b) Huomataan, että $5 \cdot 14 = 70$ ja $72 - 70 = 2$.

Luku 5 menee 72:een 14 kertaa, ja yli jää 2.

Jakolaskun 72 : 5 osamäärä on 14 ja jakojäännös 2.

Jakoyhtälö on $72 = 5 \cdot 14 + 2$.

c) Huomataan, että $5 \cdot 0 = 0$ ja $3 - 0 = 3$.

Luku 5 menee 3:een 0 kertaa, ja yli jää 3.

Jakolaskun 3 : 5 osamäärä on 0 ja jakojäännös 3.

Jakoyhtälö on $3 = 5 \cdot 0 + 3$.

d) Huomataan, että $5 \cdot 20 = 100$ ja $104 - 100 = 4$.

Luku 5 menee 104:ään 20 kertaa, ja yli jää 4.

Jakolaskun 104 : 5 osamäärä on 20 ja jakojäännös 4.

Jakoyhtälö on $104 = 5 \cdot 20 + 4$.

Vastaus a) osamäärä 7, jakojäännös 1 ja jakoyhtälö on $36 = 5 \cdot 7 + 1$
b) osamäärä 14, jakojäännös 2 ja jakoyhtälö on $72 = 5 \cdot 14 + 2$
c) osamäärä 0, jakojäännös 3 ja jakoyhtälö on $3 = 5 \cdot 0 + 3$
d) osamäärä 20, jakojäännös 4 ja jakoyhtälö on $104 = 5 \cdot 20 + 4$

174

a) Huomataan, että $21:3=7$

Luku 3 menee 21:een 7 kertaa ja jako menee tasan.

Siis $21=3\cdot 7+0$.

b) Laskimella saadaan $43:3=14,333...$

Etsitään suurin luvun 3 monikerta, joka on pienempi kuin 43.

$$3\cdot 14=42<43$$
$$3\cdot 15=45>43$$

Lasketaan lukujen 43 ja 42 erotus: $43-42=1$

Siis $43=3\cdot 14+1$.

c) Laskimella saadaan $-28:3=-9,333...$

Etsitään suurin luvun 3 monikerta, joka on pienempi kuin -28.

$$3\cdot(-9)=-27>-28$$
$$3\cdot(-10)=-30<-28$$

Lasketaan lukujen -28 ja -30 erotus: $-28-(-30)=2$

Siis $-28=3\cdot(-10)+2$.

d) Laskimella saadaan $-44:3=-14,666...$

Etsitään suurin luvun 3 monikerta, joka on pienempi kuin -44.

$$3\cdot(-14)=-42>-44$$
$$3\cdot(-15)=-45<-44$$

Lasketaan lukujen -44 ja -45 erotus: $-44-(-45)=1$

Siis $-44=3\cdot(-15)+1$.

Vastaus
a) $21=3\cdot 7+0$
b) $43=3\cdot 14+1$
c) $-28=3\cdot(-10)+2$
d) $-44=3\cdot(-15)+1$

175

a) Saadaan $24:10=2,4$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin 24.

$10\cdot 2=20<24$
$10\cdot 3=30>24$

Lasketaan lukujen 24 ja 20 erotus: $24-20=4$.

Siis $24=10\cdot 2+4$.

b) Saadaan $541:10=54,1$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin 541.

$10\cdot 54=540<541$
$10\cdot 55=550>541$

Lasketaan lukujen 541 ja 540 erotus: $541-540=1$.

Siis $541=10\cdot 54+1$.

c) Saadaan $-28:10=-2,8$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin -28.

$10\cdot(-2)=-20>-28$
$10\cdot(-3)=-30<-28$

Lasketaan lukujen -28 ja -30 erotus: $-28-(-30)=2$.

Siis $-28=10\cdot(-3)+2$.

d) Saadaan $-91:10=-9,1$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin -91.

$10\cdot(-9)=-90>-91$
$10\cdot(-10)=-100<-91$

Lasketaan lukujen -91 ja -100 erotus: $-91-(-100)=9$.

Siis $-91=10\cdot(-10)+9$.

Vastaus
a) $24=10\cdot 2+4$
b) $541=10\cdot 54+1$
c) $-28=10\cdot(-3)+2$
d) $-91=10\cdot(-10)+9$

176

a) Laskimella saadaan $37:15=2,466...$

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin 37.

$15\cdot 2=30<37$
$15\cdot 3=45>24$

Lasketaan lukujen 37 ja 30 erotus: $37-30=7$.

Siis $37=15\cdot 2+7$.

b) Laskimella saadaan $6:15=0,4$

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin 6.

$0\cdot 15=0<6$
$1\cdot 15=15>6$

Lasketaan lukujen 6 ja 0 erotus: $6-0=6$.

Siis $6=15\cdot 0+6$.

c) Laskimella saadaan $-224:15=-14,933...$

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin -224.

$15\cdot(-14)=-210>-224$
$15\cdot(-15)=-225<-224$

Lasketaan lukujen -224 ja -225 erotus: $-224-(-225)=1$.

Siis $-224=15\cdot(-15)+1$.

d) Laskimella saadaan $-128:15=-8,533...$

Etsitään suurin luvun 15 monikerta, joka on pienempi kuin -128.

$15\cdot(-8)=-120>-128$
$15\cdot(-9)=-135<-128$

Lasketaan lukujen -128 ja -135 erotus: $-128-(-135)=7$.

Siis $-128=15\cdot(-9)+7$.

Vastaus
a) $37=15\cdot 2+7$
b) $6=15\cdot 0+6$
c) $-224=15\cdot(-15)+1$
d) $-128=15\cdot(-9)+7$

177

Jos kokonaisluvuista pienintä merkitään kirjaimella k, niin sitä seuraavat 4 kokonaislukua ovat $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k + 4$.

Oletus Luku k on kokonaisluku.

Väite Summa $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Summa $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)$ on aritmeettinen, koska kahden peräkkäisen termin erotus on aina yksi.

Summassa on 5 termiä. Ensimmäinen termi on k ja viimeinen on $k + 4$.

$$
\begin{aligned}
& k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4) \\
&= 5 \cdot \frac{(k+(k+4))}{2} \\
&= 5 \cdot \frac{2k+4}{2}^{(2} \\
&= 5 \cdot (k+2)
\end{aligned}
$$

Koska luku $k+2$ on kokonaisluku, luku $5 \cdot (k+2)$ on jaollinen luvulla 5.

Siis 5:n peräkkäisen kokonaisluvun summa on jaollinen luvulla 5. □

178

a)

Oletus Luku a on jaollinen luvulla 28 ja luku b on jaollinen luvulla 21.

Väite Luku $a + b$ on jaollinen luvulla 7.

Todistus Koska luku a on jaollinen luvulla 28, voidaan merkitä $a = 28q$ ja koska luku b on jaollinen luvulla 21, voidaan merkitä $b = 21r$. Luvut q ja r ovat kokonaislukuja.

Muodostetaan summa $a + b$.

$$
\begin{aligned}
a + b &= 28q + 21r \\
&= \underbrace{7 \cdot 4q + 7 \cdot 3r}_{\text{Erotetaan 7 yhteiseksi tekijäksi.}} \\
&= 7 \cdot (4q + 3r)
\end{aligned}
$$

Koska luku $4q + 3r$ on kokonaisluku, luku $5 \cdot (k + 2)$ on jaollinen luvulla 7.

Siis luku $a + b$ on jaollinen luvulla 7. □

b)

Oletus Luku a on jaollinen luvulla 28 ja luku b on jaollinen luvulla 21.

Väite Luku ab on jaollinen luvulla 12.

Todistus Koska luku a on jaollinen luvulla 28, voidaan merkitä $a = 28q$ ja koska luku b on jaollinen luvulla 21, voidaan merkitä $b = 21r$. Luvut q ja r ovat kokonaislukuja.

Muodostetaan tulo ab.

$$\begin{aligned} ab &= 28q \cdot 21r \\ &= 7 \cdot 4 \cdot q \cdot 7 \cdot 3 \cdot r \\ &= 12 \cdot 49 \cdot qr \end{aligned}$$

Koska luku $49 \cdot qr$ on kokonaisluku, luku $12 \cdot 49 \cdot qr$ on jaollinen luvulla 12.

Siis luku ab on jaollinen luvulla 12. □

179

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n(n^2+8)$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus Jakoyhtälön nojalla jokainen kokonaisluku n voidaan esittää muodossa $n=3q$, $n=3q+1$ tai $n=3q+2$, missä q on kokonaisluku.

Sijoitetaan nämä yksi kerrallaan lausekkeeseen $n(n^2+8)$.

n	$n(n^2+8)$
$3q$	$3q((3q)^2+8)=3\cdot q(9q^2+8)$
$3q+1$	$(3q+1)((3q+1)^2+8)=(3q+1)((3q)^2+2\cdot 3\cdot q+1^2+8)$ $=(3q+1)\underbrace{(9q^2+6q+9)}_{\text{Erotetaan 3 yhteiseksi tekijäksi.}}$ $=(3q+1)\cdot 3\cdot(3q^2+2q+3)$ $=3\cdot(3q+1)(3q^2+2q+3)$
$3q+2$	$(3q+2)((3q+2)^2+8)=(3q+2)((3q)^2+2\cdot 3q\cdot 2+2^2+8)$ $=(3q+2)\underbrace{(9q^2+12q+12)}_{\text{Erotetaan 3 yhteiseksi tekijäksi.}}$ $=(3q+2)\cdot 3\cdot(3q^2+4q+4)$ $=3\cdot(3q+2)(3q^2+4q+4)$

Jokaisessa tapauksessa luku $n(n^2+8)$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 3.

Siis $n(n^2+8)$ on aina jaollinen luvulla 3. □

180

a) Koska $6 \cdot 6 = 36 < 38$ ja $6 \cdot 7 = 42 > 38$, luku 38 ei ole jaollinen luvulla 6.

b) Koska $72 = 6 \cdot 12$, luku 72 on jaollinen luvulla 6.

c) Koska $6 \cdot (-8) = -48 > 52$ ja $6 \cdot (-9) = -54 < -52$, luku -52 ei ole jaollinen luvulla 6.

d) Koska $102 = 6 \cdot 17$, luku 102 on jaollinen luvulla 6.

Vastaus
a) ei, koska $6 \cdot 6 = 36 < 38$ ja $6 \cdot 7 = 42 > 38$
b) on, koska $72 = 6 \cdot 12$
c) ei, koska $6 \cdot (-8) = -48 > 52$ ja $6 \cdot (-9) = -54 < -52$
d) on, koska $102 = 6 \cdot 17$

181

a) Koska $2016 = 4 \cdot 504$, vuosi 2016 oli karkausvuosi.

b) Koska $4 \cdot 499 = 1996 < 1998$ ja $4 \cdot 500 = 2000 > 1998$, vuosi 1998 ei ollut karkausvuosi.

c) Koska $1880 = 4 \cdot 470$, vuosi 1880 oli karkausvuosi.

d) Koska $400 \cdot 4 = 1600 < 1800$ ja $400 \cdot 5 = 2000 > 1800$, vuosi 1800 ei ollut karkausvuosi.

e) Koska $2000 = 400 \cdot 5$, vuosi 2000 oli karkausvuosi.

Vastaus
a) on
b) ei
c) on
d) ei
e) on

182

a) Huomataan, että $2 \cdot 25 = 50$ ja $51 - 50 = 1$.

Luku 2 menee 51:een 25 kertaa, ja yli jää 1.

Jakolaskun 51 : 2 osamäärä on 25 ja jakojäännös 1.

Jakoyhtälö on $51 = 2 \cdot 25 + 1$.

b) Huomataan, että $3 \cdot 31 = 93$.

Luku 3 menee 93:een 31 kertaa, ja yli jää 0.

Jakolaskun 93 : 3 osamäärä on 31 ja jakojäännös 0

Jakoyhtälö on $93 = 3 \cdot 31 + 0$.

c) Huomataan, että $4 \cdot 25 = 100$ ja $103 - 100 = 3$.

Luku 4 menee 103:een 25 kertaa, ja yli jää 3.

Jakolaskun 103 : 4 osamäärä on 25 ja jakojäännös 3.

Jakoyhtälö on $103 = 4 \cdot 25 + 3$.

d) Huomataan, että $8 \cdot 125 = 1000$ ja $1005 - 1000 = 5$.

Luku 8 menee 1005:een 125 kertaa, ja yli jää 5.

Jakolaskun 1005 : 8 osamäärä on 125 ja jakojäännös 5.

Jakoyhtälö on $1005 = 8 \cdot 125 + 5$.

Vastaus

a) osamäärä 25, jakojäännös 1 ja jakoyhtälö on
$51 = 2 \cdot 25 + 1$

b) osamäärä 31, jakojäännös 0 ja jakoyhtälö on
$93 = 3 \cdot 31 + 0$

c) osamäärä 25, jakojäännös 3 ja jakoyhtälö on
$103 = 4 \cdot 25 + 3$

d) osamäärä 125, jakojäännös 5 ja jakoyhtälö on
$1005 = 8 \cdot 125 + 5$

183

a) Laskimella saadaan $111:10=11{,}1$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin 111.

$$10\cdot 11=110<111$$
$$10\cdot 12=120>111$$

Lasketaan lukujen 111 ja 110 erotus: $111-110=1$

Siis $111=10\cdot 11+1$.

b) Huomataan, että $1000:10=100$

Luku 10 menee 1000:een 100 kertaa ja jako menee tasan.

Siis $1000=10\cdot 100+0$.

c) Laskimella saadaan $-109:10=-10{,}9$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin -109.

$$10\cdot(-10)=-100>-109$$
$$10\cdot(-11)=-110<-109$$

Lasketaan lukujen -109 ja -110 erotus: $-109-(-110)=1$

Siis $-109=10\cdot(-11)+1$.

d) Laskimella saadaan $-998:10=-99,8$

Etsitään suurin luvun 10 monikerta, joka on pienempi kuin $10\cdot(-99)=-990>-998$.

$$10\cdot(-99)=-990>-998$$
$$10\cdot(-100)=-1000<-998$$

Lasketaan lukujen -998 ja -1000 erotus: $-998-(-1000)=2$

Siis $-998=10\cdot(-100)+2$.

Vastaus
a) $111=10\cdot 11+1$
b) $1000=10\cdot 100+0$
c) $-109=10\cdot(-11)+1$
d) $-998=10\cdot(-100)+2$

184

a) Laskimella saadaan $37:18=2,055...$

Etsitään suurin luvun 18 monikerta, joka on pienempi kuin 37.

$18\cdot 2=36<37$
$18\cdot 3=54>37$

Lasketaan lukujen 37 ja 36 erotus: $37-36=1$

Siis $37=18\cdot 2+1$.

b) Huomataan, että $6:18=0,333...$

Etsitään suurin luvun 18 monikerta, joka on pienempi kuin 6.

$18\cdot 0=0<6$
$18\cdot 1=18>6$

Lasketaan lukujen 6 ja 0 erotus: $6-0=6$

Siis $6=18\cdot 0+6$.

c) Laskimella saadaan $215 : 18 = 11,944...$

Etsitään suurin luvun 18 monikerta, joka on pienempi kuin 215.

$$18 \cdot 11 = 198 < 215$$
$$18 \cdot 12 = 216 > 215$$

Lasketaan lukujen 215 ja 198 erotus: $215 - 198 = 17$

Siis $215 = 18 \cdot 11 + 17$.

d) Laskimella saadaan $-128 : 18 = -7,111...$

Etsitään suurin luvun 18 monikerta, joka on pienempi kuin -128.

$$18 \cdot (-7) = -126 > -128$$
$$18 \cdot (-8) = -144 < -128$$

Lasketaan lukujen -128 ja -144 erotus: $-128 - (-144) = 16$

Siis $-128 = 18 \cdot (-8) + 16$.

Vastaus
a) $37 = 18 \cdot 2 + 1$
b) $6 = 18 \cdot 0 + 6$
c) $215 = 18 \cdot 11 + 17$
d) $-128 = 18 \cdot (-8) + 16$

185

a)

Oletus $c \mid a$, kun a on kokonaisluku ja c on positiivinen kokonaisluku.

Väite $c \mid na$, kun n on kokonaisluku.

Todistus Oletuksen mukaan $c \mid a$ eli luku a on jaollinen luvulla c.

Voidaan siis kirjoittaa: $a = cq$, kun q on kokonaisluku.

Sijoitetaan saatu arvo tuloon *na.*

$$\begin{aligned} na &= ncq \\ &= cnq \end{aligned}$$

Nyt $na = cnq$ eli luku na on jaollinen luvulla c.

Väite $c \mid na$ pitää paikkansa. □

b)

Oletus $c \mid a$ ja $c \mid b$, kun a ja b ovat kokonaislukuja ja c on positiivinen kokonaisluku.

Väite $c \mid a + b$.

Todistus Oletuksen mukaan $c \mid a$ eli luku a on jaollinen luvulla c ja $c \mid b$ eli luku b on jaollinen luvulla c.

Voidaan siis kirjoittaa: $a = cq$ ja $b = cr$, kun q ja r ovat kokonaislukuja.

Sijoitetaan saadut arvot summaan $a + b$.

$$a + b = \underbrace{cq + cr}_{\text{Erotetaan } c \text{ yhteiseksi tekijäksi.}}$$
$$= c(q + r)$$

Nyt $a + b = c(q + r)$ eli luku $a + b$ on jaollinen luvulla c.

Väite $c \mid a + b$ pitää paikkansa. □

c)

Oletus $c \mid a$ ja $c \nmid b$, kun a ja b ovat kokonaislukuja ja c on positiivinen kokonaisluku.

Väite $c \nmid a+b$.

Todistus Oletuksen mukaan $c \mid a$ eli luku a on jaollinen luvulla c ja $c \nmid b$ eli luku b ei ole jaollinen luvulla c.

Oletetaan vastoin väitettä, että $c \mid a+b$. Tällöin $a+b=cq$, kun q on kokonaisluku.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä b.

$$a+b=cq$$

$$b=cq-a$$ Koska a on jaollinen c:llä, $a=cr$, kun $r \in \mathbf{Z}$.

$$b=cq-cr$$

$$b=c(q-r)$$

Nyt $b=c(q+r)$ eli luku b on jaollinen luvulla c.

On päädytty ristiriitaan, sillä edellä todettiin, että b ei ole jaollinen luvulla c.

Väite $c \nmid a+b$ pitää paikkansa. □

186

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $(n+1)^2-(n-1)^2$ on jaollinen luvulla 4.

Todistus Sievennetään luku $(n+1)^2-(n-1)^2$.

$$\begin{aligned}(n+1)^2-(n-1)^2 &= n^2+2n+1-(n^2-2n+1)\\ &= n^2+2n+1-n^2+2n-1\\ &= 4n\end{aligned}$$

Saatiin $(n+1)^2-(n-1)^2=4n$

Eli luku $(n+1)^2-(n-1)^2$ on jaollinen luvulla 4. □

187

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n(n+1)(2n+1)$ on jaollinen luvulla 6.

Todistus Jakoyhtälön nojalla jokainen kokonaisluku n voidaan esittää muodossa $n=6q,\ n=6q+1,\ n=6q+2,$ $n=6q+3,\ n=6q+4,\ n=6q+5$, missä q on kokonaisluku.

Sijoitetaan nämä yksi kerrallaan lausekkeeseen $n(n+1)(2n+1)$.

n	$n(n+1)(2n+1)$
$6q$	$6\cdot q(6q+1)(2\cdot 6q+1)$
$6q+1$	$(6q+1)((6q+1)+1)(2(6q+1)+1) = (6q+1)\underbrace{(6q+2)(12q+2+1)}_{\text{Kerrotaan keskenään.}}$ $= (6q+1)\underbrace{(72q^2+18q+24q+6)}_{\text{Erotetetaan 6 yhteiseksi tekijäksi.}} = (6q+1)\cdot 6\cdot(12q^2+7q+6)$ $= 6\cdot(6q+1)(12q^2+7q+6)$
$6q+2$	$(6q+2)((6q+2)+1)(2(6q+2)+1) = \underbrace{(6q+2)(6q+3)}_{\text{Kerrotaan keskenään.}}(12q+5)$ $= (\underbrace{36q^2+18q+12q+6}_{\text{Otetaan 6 yhteiseksi tekijäksi.}})(12q+5) = 6\cdot(6q^2+5q+1)(12q+5)$
$6q+3$	$(6q+3)((6q+3)+1)(2(6q+3)+1) = \underbrace{(6q+3)(6q+4)}_{\text{Kerrotaan keskenään.}}(12q+7)$ $= (\underbrace{36q^2+24q+18q+12}_{\text{Erotetaan 6 yhteiseksi tekijäksi.}})(12q+7) = 6\cdot(6q^2+7q+2)(12q+7)$
$6q+4$	$(6q+4)((6q+4)+1)(2(6q+4)+1) = (6q+4)(6q+5)(12q+9)$ $= \underbrace{(6q+4)(12q+9)}_{\text{Kerrotaan keskenään.}}(6q+5) = (\underbrace{72q^2+54q+48q+36}_{\text{Erotetaan 6 yhteiseksi tekijäksi.}})(6q+5)$ $= 6\cdot(12q^2+17q+6)(6q+5)$
$6q+5$	$(6q+5)((6q+5)+1)(2(6q+5)+1) = (6q+5)(\underbrace{6q+6}_{\text{Erotetaan 6 yhteiseksi tekijäksi.}})(12q+11)$ $= (6q+5)\cdot 6\cdot(q+1)(12q+11) = 6\cdot(6q+5)(q+1)(12q+11)$

Jokaisessa tapauksessa luku $n(n+1)(2n+1)$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona niin, että yksi tulon tekijöistä on luku 6.

Siis $n(n+1)(2n+1)$ on aina jaollinen luvulla 6. □

188

Oletus Luku $2n+1$ on pariton kokonaisluku.

Väite Luku $(2n+1)^2-1$ on jaollinen luvulla 8.

Todistus Jotta luku on jaollinen luvulla 8 sen pitää olla jaollinen sekä luvulla 2 että myös luvulla 4.

Muokataan lukua $(2n+1)^2-1$.

$$(2n+1)^2-1=\underbrace{4n^2+4n}_{\substack{\text{Erotetaan } 4n\\ \text{yhteiseksi}\\ \text{tekijäksi.}}}+1-1$$

$$=4n(n+1)$$

Saatiin $(2n+1)^2-1=4\cdot n\cdot(n+1)$ eli luku $(2n+1)^2-1$ on jaollinen luvulla 4. Luvut n ja $n+1$ ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Tällöin toinen niistä on välttämättä pariton ja toinen parillinen. Eli luku $(2n+1)^2-1$ on jaollinen myös luvulla 2.

Koska luku $(2n+1)^2-1$ on jaollinen luvulla 4 ja lisäksi jaollinen luvulla 2, luku $(2n+1)^2-1$ on jaollinen luvulla 8. □

189

Oletus Summa muodostuu parittomasta määrästä peräkkäisiä kokonaislukuja.

Väite Summa on jaollinen yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Todistus Jos summa muodostuu parittomasta määrästä peräkkäisiä kokonaislukuja, summassa on $2n+1$ yhteenlaskettavaa.

Summa voidaan kirjoittaa:

$$\underbrace{k+(k+1)+(k+2)+...+(k+2n)}_{2n+1 \text{ kpl}}$$

Sievennetään summa.

$$\underbrace{k+(k+1)+(k+2)+...+(k+2n)}_{\substack{\text{Aritmeettinen summa, jossa 1. yhteenlaskettava on } k, \\ \text{viimein } k+2n \text{ ja yhteenlaskettavia on yhteensä } 2n+1.}}$$

$$=(2n+1)\frac{k+(k+2n)}{2}$$

$$=(2n+1)\frac{2k+2n}{2}$$

$$=(2n+1)(k+n)$$

$k+(k+1)+(k+2)+...+(k+2n)=(2n+1)(k+n)$ eli kun lasketaan yhteen pariton määrä peräkkäisiä kokonaislukuja, muodostuva summa on jaollinen yhteenlaskettavien lukumäärällä. □

190

Oletus Summa muodostuu parillisesta määrästä peräkkäisiä kokonaislukuja.

Väite Summa ei ole jaollinen yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Todistus Jos summa muodostuu parillisesta määrästä peräkkäisiä kokonaislukuja, summassa on $2n$ yhteenlaskettavaa.

Summa voidaan kirjoittaa:

$$\underbrace{k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2n-1)}_{2n\ \text{kpl}}$$

Sievennetään summa.

$$\underbrace{k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2n-1)}_{\substack{\text{Aritmeettinen summa, jossa 1. yhteenlaskettava on } k,\\ \text{viimein } k+2n-1 \text{ ja yhteenlaskettavia on yhteensä } 2n.}}$$

$$=(2n)\frac{k+(k+2n-1)}{2}$$

$$=(2n)\frac{2k+2n-1}{2}$$

$$=(2n)(k+n-\frac{1}{2})$$

Saatiin:

$$k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2n-1)=(2n)(k+n-\frac{1}{2})$$

Koska $(k+n-\frac{1}{2})$ ei ole kokonaisluku, summa ei ole jaollinen yhteenlaskettavien lukumäärällä. □

191

a)

Oletus Luku a^3+b^3, jossa a ja b ovat kokonaislukuja, on jaollinen luvulla 3.

Väite Luku $(a+b)^3$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus Jos luku a^3+b^3, jossa a ja b ovat kokonaislukuja, on jaollinen luvulla 3, niin $a^3+b^3=3q$ (q on kokonaisluku).

Sievennetään luku $(a+b)^3$.

$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{binomin kuutio}} = \underbrace{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}_{\text{Hyödynnetään tietoa } a^3+b^3=3q.}$$

$$= \underbrace{3q+3a^2b+3ab^2}_{\text{Erotetaan luku 3 yhteiseksi tekijäksi.}}$$

$$= 3(q+a^2b+ab^2)$$

Saatiin:

$(a+b)^3=3(q+a^2b+ab^2)$

Eli $(a+b)^3$ on jaollinen luvulla 3. □

b)

Oletus Luku $(a+b)^3$, jossa a ja b ovat kokonaislukuja, on jaollinen luvulla 3.

Väite Luku a^3+b^3 on jaollinen luvulla 3.

Todistus Jos luku $(a+b)^3$, jossa a ja b ovat kokonaislukuja, on jaollinen luvulla 3, niin $(a+b)^3=3q$ (q on kokonaisluku).

Ratkaistaan a^3+b^3 binomin kuution lausekkeesta.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$a^3+b^3=\underbrace{(a+b)^3}_{3q}-3a^2b-3ab^2$$
$$a^3+b^3=\underbrace{3q-3a^2b-3ab^2}_{\text{Erotetaan luku 3 yhteiseksi tekijäksi.}}$$
$$a^3+b^3=3(q-a^2b-ab^2)$$

Saatiin:
$a^3+b^3=3(q-a^2b-ab^2)$

Eli a^3+b^3 on jaollinen luvulla 3. □

192

Väite Luku $997^3 + 2003^3$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus Tehtävässä 191 on todistettu, että jos luku $(a+b)^3$, jossa a ja b ovat kokonaislukuja, on jaollinen luvulla 3, myös luku $a^3 + b^3$ on jaollinen luvulla 3.

Tutkitaan, onko luku $(997+2003)^3$ jaollinen luvulla 3.

$$\begin{aligned}(997+2003)^3 &= 3000^3 \\ &= \underbrace{(3\cdot 1000)^3}_{(ab)^n = a^n b^n} \\ &= 3^3 \cdot 1000^3 \\ &= 3 \cdot 3^2 \cdot 1000^3\end{aligned}$$

Koska luku $(997+2003)^3$ on jaollinen luvulla 3, on myös luku $997^3 + 2003^3$ jaollinen luvulla 3. □

193

Oletus Luku n on luonnollinen luku.

Väite $3^{2n+1}+2^{n+2}$ on jaollinen luvulla 7
on tosi kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n=0$.

$$3^{2\cdot 0+1}+2^{0+2}=3+4=7$$

Väite on tosi, kun $n=0$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
$3^{2n+1}+2^{n+2}$ on jaollinen luvulla 7
eli $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ (k on kokonaisluku)
on tosi mielivaltaisella $n=0, 1, 2...$.

Induktioväite:
$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ on jaollinen luvulla 7.

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitettä hyödyntämällä tietoa

$3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ eli $2^{n+2}=7k-3^{2n+1}$.

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+2+1}+2^{n+1+2} \\
&= 3^2\cdot 3^{2n+1}+2\cdot \underbrace{2^{n+2}}_{=7k-3^{2n+1}} \\
&= 9\cdot 3^{2n+1}+2\cdot(7k-3^{2n+1}) \\
&= 9\cdot 3^{2n+1}+2\cdot 7k-2\cdot 3^{2n+1} \\
&= \underbrace{7\cdot 3^{2n+1}+2\cdot 7k}_{\text{Erotetaan luku 7 yhteiseksi tekijäksi.}} \\
&= 7\cdot(3^{2n+1}+2k)
\end{aligned}
$$

Saatiin $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=7\cdot(3^{2n+1}+2k)$.

$3^{2n+1}+2k$ on kokonaisluku, kun k on kokonaisluku ja n on luonnollinen luku. Induktioväite siis on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

194

a) Jaetaan luku 96 luvulla 32 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$96 = 32 \cdot 3 + 0$ $\quad$ syt(96, 32) = 32

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(96, 32) = 32.

b) Jaetaan luku 45 luvulla 18 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$45 = 18 \cdot 2 + 9$ $\quad$ syt(45, 18) = syt(18, 9)

Jaetaan jakaja 18 jakojäännöksellä 9 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$18 = 9 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(18, 9) = 9

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(45, 18) = 9.

c) Jaetaan luku 450 luvulla 42 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$450 = 42 \cdot 10 + 30$ $\quad$ syt(450, 42) = syt(42, 30)

Jaetaan jakaja 42 jakojäännöksellä 30 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$42 = 30 \cdot 1 + 12$ $\quad$ syt(42, 30) = syt(30, 12)

Jaetaan jakaja 30 jakojäännöksellä 12 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$30 = 12 \cdot 2 + 6$ $\quad$ syt(30, 12) = syt(12, 6)

Jaetaan jakaja 12 jakojäännöksellä 6 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$12 = 6 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(12, 6) = 6

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(450, 42) = 6.

Vastaus:
a) 32
b) 9
c) 6

195

a) Jaetaan luku 160 luvulla 54 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$160 = 54 \cdot 2 + 52$ $\quad$ syt(160, 54) = syt(54, 52)

Jaetaan jakaja 54 jakojäännöksellä 52 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$54 = 52 \cdot 1 + 2$ $\quad$ syt(54, 52) = syt(52, 2)

Jaetaan jakaja 52 jakojäännöksellä 2 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$52 = 2 \cdot 26 + 0$ $\quad$ syt(52, 2) = 2

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(160, 54) = 2.

b) Jaetaan luku 629 luvulla 111 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$629 = 111 \cdot 5 + 74$ $\quad$ syt(629, 111) = syt(111, 74)

Jaetaan jakaja 111 jakojäännöksellä 74 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$111 = 74 \cdot 1 + 37$ $\quad$ syt(111, 74) = syt(74, 37)

Jaetaan jakaja 74 jakojäännöksellä 37 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$74 = 37 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(74, 37) = 37

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(629, 111) = 37.

Vastaus: a) 2
b) 37

196

a) Muodostetaan jakoyhtälöt.

$495 = 364 \cdot 1 + 131$	syt(495, 364) = syt(364, 131)
$364 = 131 \cdot 2 + 102$	syt(364, 131) = syt(131, 102)
$131 = 102 \cdot 1 + 29$	syt(131, 102) = syt(102, 29)
$102 = 29 \cdot 3 + 15$	syt(102, 29) = syt(29, 15)
$29 = 15 \cdot 1 + 14$	syt(29, 15) = syt(15, 14)
$15 = 14 \cdot 1 + 1$	syt(15, 14) = syt(14, 1)
$14 = 1 \cdot 14 + 0$	syt(14, 1) = 1

Saatiin syt(495, 364) = 1.

b) Koska lukujen 364 ja 495 ainoa yhteinen tekijä on 1, niin murtolukua $\frac{364}{495}$ ei voi supistaa.

Vastaus: a) syt(364, 495) = 1
b) ei voi supistaa

197

Etsitään Eukleideen algoritmin avulla suurin luku, jolla murtoluku $\frac{168}{182}$ voidaan supistaa.

Muodostetaan jakoyhtälöt.

$182 = 168 \cdot 1 + 14$	$\text{syt}(182, 168) = \text{syt}(168, 14)$
$168 = 14 \cdot 12 + 0$	$\text{syt}(168, 14) = 14$

Saatiin syt(182, 168) = 14.

Eli 14 on suurin luku, jolla murtoluku $\frac{168}{182}$ voidaan supistaa.

Vastaus: 14

198

a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$182 = 140 \cdot 1 + 42$	syt(182, 140) = syt(140, 42)
$140 = 42 \cdot 3 + 14$	syt(140, 42) = syt(42, 14)
$42 = 14 \cdot 3 + 0$	syt(42, 14) = 14

Saatiin syt(182, 140) = 14.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{182\cdot \overset{10}{\cancel{140}}}{\underset{1}{\cancel{14}}} = 182\cdot 10 = 1820 \qquad \text{pym}(a,b)=\frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$300 = 255 \cdot 1 + 45$	syt(300, 255) = syt(255, 45)
$255 = 45 \cdot 5 + 30$	syt(255, 45) = syt(45, 30)
$45 = 30 \cdot 1 + 15$	syt(45, 30) = syt(30, 15)
$30 = 15 \cdot 2 + 0$	syt(30, 15) = 15

Saatiin syt(300, 255) = 15.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{\overset{20}{\cancel{300}}\cdot 255}{\underset{1}{\cancel{15}}} = 20\cdot 255 = 5100 \qquad \text{pym}(a,b)=\frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Vastaus: a) 1800
b) 5100

199

a) Etsitään luvuille 116 ja 87 pienin yhteinen monikerta.

Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

116 = 87 · 1 + 29 syt(116, 87) = syt(87, 29)
87 = 29 · 3 + 0 syt(87, 29) = 29

Saatiin syt(116, 87) = 29.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{116\cdot \overset{3}{\cancel{87}}}{\underset{1}{\cancel{29}}}=116\cdot 3=348 \qquad \text{pym}(a,b)=\frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Selvitetään laventajat.

$$\frac{116\cdot \overset{3}{\cancel{87}}}{\underset{1}{\cancel{29}}}=116\cdot 3=348 \qquad \frac{\overset{4}{\cancel{116}}\cdot 87}{\underset{1}{\cancel{29}}}=4\cdot 87=348$$

Yhteinen nimittäjä on 348. Laventajat ovat 3 ja 4.

$$^{3)}\frac{1}{116}=\frac{3}{348} \qquad ^{4)}\frac{1}{87}=\frac{4}{348}$$

b) Etsitään luvuille 70 ja 25 pienin yhteinen monikerta.

Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$70 = 25 \cdot 2 + 20$	syt(70, 25) = syt(25, 20)
$25 = 20 \cdot 1 + 5$	syt(25, 20) = syt(20, 5)
$20 = 5 \cdot 4 + 0$	syt(20, 5) = 5

Saatiin syt(70, 25) = 5.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{70 \cdot \cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_{1}} = 70 \cdot 5 = 350 \qquad \mathrm{pym}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{syt}(a,b)}$$

Selvitetään laventajat.

$$\frac{70 \cdot \cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_{1}} = 70 \cdot 5 = 350 \qquad \frac{\cancel{70}^{14} \cdot 25}{\cancel{5}_{1}} = 14 \cdot 25 = 350$$

Yhteinen nimittäjä on 350. Laventajat ovat 5 ja 14.

$$^{5)}\frac{3}{70} = \frac{15}{350} \qquad ^{14)}\frac{4}{25} = \frac{56}{350}$$

Vastaus: a) yhteinen nimittäjä 348, laventajat 3 ja 4.
b) yhteinen nimittäjä 350, laventajat 5 ja 14

200

Tumman neliön sivu on lukujen 378 ja 180 pienin yhteinen monikerta eli pym(378, 180)

Selvitetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$$378 = 180 \cdot 2 + 18 \qquad \text{syt}(378, 180) = \text{syt}(180, 18)$$
$$180 = 18 \cdot 10 + 0 \qquad \text{syt}(180, 18) = 18$$

Saatiin syt(378, 180) = 18.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{378 \cdot \overset{10}{\cancel{180}}}{\underset{1}{\cancel{18}}} = 3780 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Neliön sivun pituus on siis 3780 mm.

Neliön ala on siten:

$$3780 \text{ mm} \cdot 3780 \text{ mm} = 14\ 288\ 400 \text{ mm}^2 \approx 14,3 \text{ m}^2.$$

Selvitetään pienimmän yhteisen monikerran lauseketta laventamalla neliön sivuihin tarvittavien laattojen määrät:

$$\frac{378 \cdot \overset{10}{\cancel{180}}}{\cancel{18}} = 378 \cdot 10 = 3780 \qquad \frac{\overset{21}{\cancel{378}} \cdot 180}{\cancel{18}} = 21 \cdot 180 = 3780$$

Laattoja tarvitaan $21 \cdot 10 = 210$.

Vastaus: 210 laattaa, pinta-ala 14,3 m^2

201

Määritetään lukujen 70, 315 ja 133 suurin yhteinen tekijä hyödyntämällä tietoa: $\text{syt}(a, b, c) = \text{syt}(\text{syt}(a, b), c)$.

$$\text{syt}(70, 315, 133) = \text{syt}(\text{syt}(70, 315), 133)$$

Selvitetään ensin lukujen 70 ja 315 suurin yhteinen tekijä.

$315 = 70 \cdot 4 + 35$	syt(315, 70) = syt(70, 35)
$70 = 35 \cdot 2 + 0$	syt(70, 35) = 35

Saatiin syt(315, 70) = 35.

Selvitetään lukujen 35 ja 133 suurin yhteinen tekijä.

$133 = 35 \cdot 3 + 28$	syt(133, 35) = syt(35, 28)
$35 = 28 \cdot 1 + 7$	syt(35, 28) = syt(28, 7)
$28 = 7 \cdot 4 + 0$	syt(28, 7) = 7

Saatiin syt(133, 35) = 7. Eli syt(70, 315, 133) = 7.

Vastaus: 7

202

a) Jaetaan luku 202 luvulla 102 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$202 = 102 \cdot 1 + 100$ $\quad$ syt(202, 102) = syt(102, 100)

Jaetaan jakaja 102 jakojäännöksellä 100 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$102 = 100 \cdot 1 + 2$ $\quad$ syt(102, 100) = syt(100, 2)

Jaetaan jakaja 100 jakojäännöksellä 2 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$100 = 2 \cdot 50 + 0$ $\quad$ syt(100, 2) = 2

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(202, 102) = 2.

b) Jaetaan luku 308 luvulla 165 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$308 = 165 \cdot 1 + 143$ $\quad$ syt(308, 165) = syt(165, 143)

Jaetaan jakaja 165 jakojäännöksellä 143 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$165 = 143 \cdot 1 + 22$ $\quad$ syt(165, 143) = syt(143, 22)

Jaetaan jakaja 143 jakojäännöksellä 22 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$143 = 22 \cdot 6 + 11$ $\quad$ syt(143, 22) = syt(22, 11)

Jaetaan jakaja 12 jakojäännöksellä 6 ja esitetään tulos jakoyhtälönä.

$22 = 11 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(22, 11) = 11

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(308, 165) = 11.

Vastaus: a) 2
b) 11

203

a) Ratkaistaan Eukleideen algoritmilla.

$29614 = 11055 \cdot 2 + 7504$	syt(29614, 11055) = syt(11055, 7504)
$11055 = 7504 \cdot 1 + 3551$	syt(11055, 7504) = syt(7504, 3551)
$7504 = 3551 \cdot 2 + 402$	syt(7504, 3551) = syt(3551, 402)
$3551 = 402 \cdot 8 + 335$	syt(3551, 402) = syt(402, 335)
$402 = 335 \cdot 1 + 67$	syt(402, 335) = syt(335, 67)
$335 = 67 \cdot 5 + 0$	syt(335, 67) = 67

Viimeinen nollaa suurempi jakojäännös on kysytty suurin yhteinen tekijä. Siis syt(29 614, 11 055) = 67.

b) Koska syt(29 614, 11055) = 67, murtolausekkeen $\frac{11055}{29614}$ voi supistaa luvulla 67.

Vastaus: a) 67
b) Voi supistaa luvulla 67.

204

a) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$396 = 363 \cdot 1 + 33$ $\quad$ syt(396, 363) = syt(363, 33)

$363 = 33 \cdot 11 + 0$ $\quad$ syt(363, 33) = 33

Saatiin syt(396, 363) = 33.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{396 \cdot \cancelto{11}{363}}{\cancelto{1}{33}} = 396 \cdot 11 = 4356 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(396, 363) = 4356.

b) Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$504 = 320 \cdot 1 + 184$	$\text{syt}(504, 320) = \text{syt}(320, 184)$
$320 = 184 \cdot 1 + 136$	$\text{syt}(320, 184) = \text{syt}(184, 136)$
$184 = 136 \cdot 1 + 48$	$\text{syt}(184, 136) = \text{syt}(36, 4)$
$136 = 48 \cdot 2 + 40$	$\text{syt}(136, 48) = \text{syt}(48, 40)$
$48 = 40 \cdot 1 + 8$	$\text{syt}(48, 40) = \text{syt}(40, 8)$
$40 = 8 \cdot 5 + 0$	$\text{syt}(40, 8) = 8$

Saatiin syt(504, 320) = 8.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{504 \cdot \cancelto{40}{320}}{\cancelto{1}{8}} = 504 \cdot 40 = 20160 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(504, 320) = 20160

Vastaus: a) 4356
b) 20160

205

a) Etsitään luvuille 130 ja 429 pienin yhteinen monikerta.

Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$429 = 130 \cdot 3 + 39$ — syt(429, 130) = syt(130, 39)
$130 = 39 \cdot 3 + 13$ — syt(130, 39) = syt(39, 13)
$39 = 13 \cdot 3 + 0$ — syt(39, 13) = 13

Saatiin syt(429, 130) = 13.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{429 \cdot \overset{10}{\cancel{130}}}{\underset{1}{\cancel{13}}} = 429 \cdot 10 = 4290 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Selvitetään laventajat.

$$\frac{429 \cdot \overset{10}{\cancel{130}}}{\underset{1}{\cancel{13}}} = 429 \cdot 10 = 4290 \qquad \frac{\overset{33}{\cancel{429}} \cdot 130}{\underset{1}{\cancel{13}}} = 33 \cdot 130 = 4290$$

Yhteinen nimittäjä on 4290. Laventajat ovat 10 ja 33.

$$^{33)}\frac{1}{130} = \frac{33}{4290} \qquad ^{10)}\frac{1}{429} = \frac{10}{4290}$$

b) Etsitään luvuille 220 ja 99 pienin yhteinen monikerta.

Määritetään ensin lukujen suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$220 = 99 \cdot 2 + 22$	syt(220, 99) = syt(99, 22)
$99 = 22 \cdot 4 + 11$	syt(99, 22) = syt(22, 11)
$22 = 11 \cdot 2 + 0$	syt(22, 11) = 11

Saatiin syt(220, 99) = 11.

Lasketaan seuraavaksi lukujen pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{220 \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{1}{\cancel{11}}} = 220 \cdot 9 = 1980 \qquad \mathrm{pym}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{syt}(a,b)}$$

Selvitetään laventajat.

$$\frac{220 \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{1}{\cancel{11}}} = 220 \cdot 9 = 1980 \qquad \frac{\overset{20}{\cancel{220}} \cdot 99}{\underset{1}{\cancel{11}}} = 20 \cdot 99 = 1980$$

Yhteinen nimittäjä on 1980. Laventajat ovat 9 ja 20.

$$^{9)}\frac{3}{220} = \frac{27}{1980} \qquad ^{20)}\frac{5}{99} = \frac{100}{1980}$$

Vastaus: a) yhteinen nimittäjä 4290, laventajat 10 ja 3
b) yhteinen nimittäjä 1980, laventajat 9 ja 20

206

Tiedetään, että syt(x, 28) = 14 ja pym(x, 28) = 84.
Hyödynnetään pienimmän yhteisen monikerran laskukaavaa:

$$\text{pym}(a,b)=\frac{ab}{\text{syt}(a,b)}.$$

Saadaan:

$$\begin{aligned} \frac{x\cdot 28}{14} &= 84 \\ 28x &= 14\cdot 84 \\ x &= 42. \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 42$

207

Määritetään lukujen 510, 1938 ja 3740 suurin yhteinen tekijä hyödyntämällä tietoa: $\text{syt}(a,b,c) = \text{syt}(\text{syt}(a,b),c)$.

syt(510, 1938, 3740) = syt(syt(510, 1938), 3740)

Selvitetään ensin lukujen 510 ja 1938 suurin yhteinen tekijä.

$1938 = 510 \cdot 3 + 408$	syt(1938, 510) = syt(510, 408)
$510 = 408 \cdot 1 + 102$	syt(510, 408) = syt(408, 102)
$408 = 102 \cdot 4 + 0$	syt(408, 102) = 102

Saatiin syt(1938, 510) = 102.

Selvitetään lukujen 102 ja 3740 suurin yhteinen tekijä.

$3740 = 102 \cdot 36 + 68$	syt(3740, 102) = syt(102, 68)
$102 = 68 \cdot 1 + 34$	syt(102, 68) = syt(68, 34)
$68 = 34 \cdot 2 + 0$	syt(68, 34) = 34

Saatiin syt(3740, 102) = 34. Eli syt(510, 1938, 3740) = 34

Vastaus: 34

208

Määritetään lukujen 12, 18 ja 25 pienin yhteinen monikerta hyödyntämällä tietoa: $\text{pym}(a,b,c) = \text{pym}(\text{pym}(a,b),c)$.

$$\text{pym}(12, 18, 25) = \text{pym}(\text{pym}(12, 18), 25)$$

Selvitetään ensin lukujen 12 ja 18 suurin yhteinen tekijä.

$18 = 12 \cdot 1 + 6$ $\quad$ syt(18, 12) = syt(12, 6)
$12 = 6 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(12, 6) = 6

Saatiin syt(18, 12) = 6.

Selvitetään lukujen 18 ja 12 pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{18 \cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{6}_{1}} = 18 \cdot 2 = 36 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(18, 12) = 36.

Selvitetään lukujen 36 ja 25 suurin yhteinen tekijä.

$36 = 25 \cdot 1 + 11$ $\quad$ syt(36, 25) = syt(25, 11)
$25 = 11 \cdot 2 + 3$ $\quad$ syt(25, 11) = syt(11, 3)
$11 = 3 \cdot 3 + 2$ $\quad$ syt(11, 3) = syt(3, 2)
$3 = 2 \cdot 1 + 1$ $\quad$ syt(3, 2) = syt(2, 1)
$2 = 1 \cdot 2 + 0$ $\quad$ syt(2, 1) = 1

Saatiin syt(36, 25) = 1.

Selvitetään lukujen 36 ja 25 pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{36 \cdot 25}{1} = 900 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(36, 25) = 900. Eli pym(12, 18, 25) = 900

Vastaus: 90

209

Kuution särmän pituus on lukujen 24, 18 ja 8 pienin yhteinen monikerta eli pym(24, 18, 8).

Määritetään lukujen 24, 18 ja 8 pienin yhteinen monikerta hyödyntämällä tietoa: $\text{pym}(a,b,c) = \text{pym}(\text{pym}(a,b),c)$.

pym(24, 18, 8) = pym(pym(24, 18), 8)

Selvitetään ensin lukujen 24 ja 18 suurin yhteinen tekijä.

$24 = 18 \cdot 1 + 6$ syt(24, 18) = syt(18, 6)

$18 = 6 \cdot 3 + 0$ syt(18, 6) = 6

Saatiin syt(24, 18) = 6.

Selvitetään lukujen 24 ja 18 pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{24 \cdot \cancelto{3}{18}}{\cancelto{1}{6}} = 24 \cdot 3 = 72 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(24, 18) = 72.

Selvitetään lukujen 72 ja 8 suurin yhteinen tekijä.

$72 = 8 \cdot 9 + 0$ syt(72, 8) = 8

Saatiin syt(72, 8) = 8.

Selvitetään lukujen 72 ja 8 pienin yhteinen monikerta.

$$\frac{72 \cdot \cancel{8}^{1}}{\cancel{8}_{1}} = 72 \qquad \text{pym}(a,b) = \frac{ab}{\text{syt}(a,b)}$$

Saatiin pym(72, 8) = 72. Eli kuution särmä on 72 cm. Tällöin kuution tilavuus on $72^3 = 373248\ (\text{cm}^3) \approx 0{,}37\ (\text{m}^3)$

Koska

$72 = 8 \cdot 9 + 0$ ja $72 = 24 \cdot 3 + 0$ ja $72 = 18 \cdot 4 + 0$,

tiiliä kuutioon tarvitaan $9 \cdot 3 \cdot 4 = 108$.

Vastaus: 108 tiiltä, tilavuus 0,37 m^3

210

Oletus Luku n on luonnollinen luku.

Väite Lukujen $11n + 3$ ja $7n + 2$ suurin yhteinen tekijä on luku 1.

Todistus Etsitään lukujen $11n + 3$ ja $7n + 2$ suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmin avulla.

$$\begin{aligned} 11n+3 &= (7n+2)\cdot 1+(4n+1) \\ 7n+2 &= (4n+1)\cdot 1+(3n+1) \\ 4n+1 &= (3n+1)\cdot 1+n \\ 3n+1 &= n\cdot 3+1 \\ n &= 1\cdot n+0 \end{aligned}$$

Saatiin syt$(11n + 3, 7n + 2) = 1$.

Siispä lukujen $11n + 3$ ja $7n + 2$ suurin yhteinen tekijä on luku 1. □

211

a) Määritetään ensin kertoimien 29 ja 11 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$29 = 11 \cdot 2 + 7$
$11 = 7 \cdot 1 + 4$
$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$
$3 = 3 \cdot 1$

Siis syt(29, 11) = 1. Ratkaistaan seuraavaksi jakoyhtälöistä jakojäännökset.

$7 = 29 - 11 \cdot 2$
$4 = 11 - 7 \cdot 1$
$3 = 7 - 4 \cdot 1$
$1 = 4 - 3 \cdot 1$

Aloitetaan viimeisestä yhtälöstä ja sijoitetaan vuorollaan jokaisen jakojäännöksen lauseke.

$1 = 4 - 3 \cdot 1$	Sijoitetaan $3 = 7 - 4 \cdot 1$.
$= 4 - (7 - 4 \cdot 1)$	Poistetaan sulkeet.
$= 4 - 7 + 4 \cdot 1$	Yhdistetään kertoimet.
$= 4 \cdot 2 - 7$	Sijoitetaan $4 = 11 - 7 \cdot 1$.
$= (11 - 7 \cdot 1) \cdot 2 - 7$	Poistetaan sulkeet.
$= 11 \cdot 2 - 7 \cdot 2 - 7$	Yhdistetään kertoimet.
$= 11 \cdot 2 - 7 \cdot 3$	Sijoitetaan $7 = 29 - 11 \cdot 2$.
$= 11 \cdot 2 - (29 - 11 \cdot 2) \cdot 3$	Poistetaan sulkeet.
$= 11 \cdot 2 - 29 \cdot 3 + 11 \cdot 6$	Yhdistetään kertoimet.
$= -29 \cdot 3 + 11 \cdot 8$	
$= 29 \cdot (-3) + 11 \cdot 8$	

Yhtälön $29x + 11y = 1$ eräs ratkaisu on $x = -3$ ja $y = 8$.

b) Tiedetään, että yhtälö $29x+11y=1$ toteutuu, kun $x=-3$ ja $y=8$.

Eli:

$$
\begin{aligned}
29\cdot(-3)+11\cdot 8 &= 1 \qquad \Big|\cdot 13 \\
29\cdot 13\cdot(-3)+11\cdot 13\cdot 8 &= 13\cdot 1 \\
29\cdot(-39)+11\cdot 104 &= 13
\end{aligned}
$$

Yhtälön $29x+11y=13$ eräs ratkaisu on $x=-39$ ja $y=104$.

Vastaus: a) esimerkiksi $x=-3$ ja $y=8$
b) esimerkiksi $x=-39$ ja $y=104$.

212

a) Määritetään ensin kertoimien 15 ja 8 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$15 = 8 \cdot 1 + 7$
$8 = 7 \cdot 1 + 1$
$7 = 1 \cdot 7$

Siis syt(15, 8) = 1. Ratkaistaan seuraavaksi jakoyhtälöistä jakojäännökset.

$7 = 15 - 8 \cdot 1$
$1 = 8 - 7 \cdot 1$

Aloitetaan viimeisestä yhtälöstä ja sijoitetaan vuorollaan jokaisen jakojäännöksen lauseke.

$1 = 8 - 7 \cdot 1$	Sijoitetaan $7 = 15 - 8 \cdot 1$.
$= 8 - (15 - 8 \cdot 1)$	Poistetaan sulkeet.
$= 8 - 15 + 8 \cdot 1$	Yhdistetään kertoimet.
$= -15 + 8 \cdot 2$	
$= 15 \cdot (-1) + 8 \cdot 2$	

Yhtälön $15x + 8y = 1$ eräs ratkaisu on $x = -1$ ja $y = 2$.

Muut ratkaisut ovat:

$$x = -1 + \frac{n \cdot 8}{1} = -1 + 8n \text{ ja } y = 2 - \frac{n \cdot 15}{1} = 2 - 15n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

b) Tiedetään, että yhtälö $15x + 8y = 1$ toteutuu, kun $x = -1$ ja $y = 2$.

Eli:

$$15 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = 1 \quad \Big| \cdot 50$$
$$15 \cdot 50 \cdot (-1) + 8 \cdot 50 \cdot 2 = 50 \cdot 1$$
$$15 \cdot (-50) + 8 \cdot 100 = 50$$

Yhtälön $15x + 8y = 50$ eräs ratkaisu on $x = -50$ ja $y = 100$.

Muut ratkaisut ovat:
$x = -50 + \frac{n \cdot 8}{1} = -50 + 8n$ ja $y = 100 - \frac{n \cdot 15}{1} = 100 - 15n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Vastaus:

a) $x = -1 + 8n$ ja $y = 2 - 15n$, $n \in \mathbb{Z}$.
b) $x = -50 + 8n$ ja $y = 100 - 15n$, $n \in \mathbb{Z}$.

213

a) Määritetään ensin kertoimien 37 ja 27 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

$37 = 27 \cdot 1 + 10$
$27 = 10 \cdot 2 + 7$
$10 = 7 \cdot 1 + 3$
$7 = 3 \cdot 2 + 1$
$3 = 1 \cdot 3$

Siis syt(37, 27) = 1. Ratkaistaan seuraavaksi jakoyhtälöistä jakojäännökset.

$10 = 37 - 27 \cdot 1$
$7 = 27 - 10 \cdot 2$
$3 = 10 - 7 \cdot 1$
$1 = 7 - 3 \cdot 2$

Aloitetaan viimeisestä yhtälöstä ja sijoitetaan vuorollaan jokaisen jakojäännöksen lauseke.

$$
\begin{aligned}
1 &= 7-3\cdot 2 && \text{Sijoitetaan } 3=10-7\cdot 1.\\
&= 7-(10-7\cdot 1)\cdot 2 && \text{Poistetaan sulkeet.}\\
&= 7-10\cdot 2+7\cdot 2 && \text{Yhdistetään kertoimet.}\\
&= -10\cdot 2+7\cdot 3 && \text{Sijoitetaan } 7=27-10\cdot 1.\\
&= -10\cdot 2+(27-10\cdot 2)\cdot 3 && \text{Poistetaan sulkeet.}\\
&= -10\cdot 2+27\cdot 3-10\cdot 6 && \text{Yhdistetään kertoimet.}\\
&= -10\cdot 8+27\cdot 3 && \text{Sijoitetaan } 10=37-27\cdot 1\\
&= -(37-27\cdot 1)\cdot 8+27\cdot 3 && \text{Poistetaan sulkeet.}\\
&= -37\cdot 8+27\cdot 8+27\cdot 3 && \text{Yhdistetään kertoimet.}\\
&= 37\cdot(-8)+27\cdot 11
\end{aligned}
$$

Yhtälön $37x+27y=1$ eräs ratkaisu on $x=-8$ ja $y=11$.

Muut ratkaisut ovat:

$$x=-8+\frac{n\cdot 27}{1}=-8+27n \text{ ja } y=11-\frac{n\cdot 37}{1}=11-37n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

b) Tiedetään, että yhtälö $37x+27y=1$ toteutuu, kun $x=-8$ ja $y=11$.

Eli:

$$37\cdot(-8)+27\cdot 11=1 \quad \Big|\cdot 1000$$
$$37\cdot 1000\cdot(-8)+27\cdot 1000\cdot 11=1000\cdot 1$$
$$37\cdot(-8000)+27\cdot 11000=1000$$

Yhtälön $37x+27y=1000$ eräs ratkaisu on $x=-8000$ ja $y=11000$.

Muut ratkaisut ovat:

$x=-8000+\frac{n\cdot 27}{1}=-8000+27n$ ja

$y=11000-\frac{n\cdot 37}{1}=11000-37n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Vastaus:

a) $x=-8+27n$ ja $y=11-37n$, missä $n\in\mathbb{Z}$.

b) $x=-8000+27n$ ja $y=11000-37n$, missä $n\in\mathbb{Z}$.

214

Oletus Luku r_n on kokonaislukujen a ja b $(a > b)$ suurin yhteinen tekijä.

Väite Luku r_n on jaollinen jokaisella lukujen a ja b yhteisellä tekijällä.

Todistus Olkoon luku c mielivaltainen lukujen a ja b yhteinen tekijä.

Eukleideen algoritmin perusteella:

$$a = bq_1 + r_1$$
$$b = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
$$\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q + r_n$$
$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$$

Nyt siis syt(a, b) = r_n .

Jos luku c on lukujen a ja b yhteinen tekijä, niin se on myös lukujen b ja r_1 yhteinen tekijä.

Jos luku c on lukujen b ja r_1 yhteinen tekijä, se on myös lukujen r_1 ja r_2 yhteinen tekijä.

Näin jatkaen havaitaan, että luku c on myös lukujen r_{n-1} ja r_n yhteinen tekijä.

On siis osoitettu, että luku r_n on jaollinen jokaisella lukujen a ja b yhteisellä tekijällä. □

215

Tulee osoittaa:

1) jos luku d on lukujen a, b ja c yhteinen tekijä, niin se on lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.

ja

2) jos luku d on lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä, niin se on lukujen a, b ja c yhteinen tekijä.

Osoitetaan ensin kohta 1).

Olkoon d lukujen a, b ja c yhteinen tekijä.

Koska d on lukujen a ja b yhteinen tekijä, on se myös luvun $\text{syt}(a, b)$ tekijä (tehtävän 214 perusteella).

Siten luku d on lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.

Osoitetaan sitten kohta 2).

Olkoon d lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c yhteinen tekijä.

Koska d on luvun $\text{syt}(a, b)$ tekijä, niin $\text{syt}(a,b) = d \cdot m$, missä m on kokonaisluku.

Koska molemmat luvuista a ja b ovat jaollisia luvulla $\text{syt}(a,b) = d \cdot m$, niin molemmat luvuista a ja b ovat jaollisia myös luvulla d.

Siten d on lukujen a, b ja c yhteinen tekijä.

Koska kohtien 1) ja 2) perusteella lukujen a, b ja c yhteiset tekijät ovat samat kuin lukujen $\text{syt}(a, b)$ ja c, niin niiden suurin yhteinen tekijäkin on sama.

On siis osoitettu, että $\text{syt}(a, b, c) = \text{syt}(\text{syt}(a, b), c)$. $\square$

216

a) Koska $165 = 12 \cdot 13 + 9 \equiv 9 \pmod{12}$, kello näyttää aikaa 9.00.

b) Koska $165 = 24 \cdot 6 + 21 \equiv 21 \pmod{24}$, kello näyttää aikaa 21.00.

Vastaus: a) 9.00
b) 21.00

217

a) Osoitetaan, että lukujen 71 ja 3 erotus on jaollinen luvulla 4.

$71-3=68=4\cdot 17$

Siis $71\equiv 3 \pmod 4$. □

b) Osoitetaan, että lukujen 48 ja –1 erotus on jaollinen luvulla 7.

$48-(-1)=49=7\cdot 7$

Siis $48\equiv -1 \pmod 7$. □

c) Osoitetaan, että luku 72 on jaollinen luvulla 12.

$72=12\cdot 6$

Siis $72\equiv 0 \pmod{12}$. □

218

a) Lasketaan lukujen 754 ja 421 erotus.

$$754 - 421 = 333 = 3 \cdot 111$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 3, niin $754 \equiv 421 \pmod{3}$.
Siten luvuilla 754 ja 421 on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 3. □

b) Lasketaan lukujen $7^5 + 12$ ja $7^5 - 9$ erotus.

$$7^5 + 12 - (7^5 - 9) = 21 = 3 \cdot 7$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 3, niin
$7^5 + 12 \equiv 7^5 - 9 \pmod{3}$.
Siten luvuilla $7^5 + 12$ ja $7^5 - 9$ on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 3. □

c) Lasketaan lukujen $8^3 - 12$ ja $2^9 + 1$ erotus.

$$\begin{aligned} 8^3 - 5 - (2^9 + 1) &= (2^3)^3 - 5 - (2^9 + 1) \\ &= 2^9 - 5 - 2^9 - 1 \\ &= -6 = 3 \cdot (-2) \end{aligned}$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 3, niin
$8^3 - 12 \equiv 2^9 + 1 \pmod{3}$
Siten luvuilla $8^3 - 12$ ja $2^9 + 1$ on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 3. □

219

Kun luvut jaetaan luvulla 3, niin jakojäännös on 1. Kahden luvun erotus on aina jaollinen luvulla 3. Luvut ovat kongruentit modulo 3.

220

Jakolaskun 74 : 8 jakojäännös on 2, joten $74 \equiv 2 \pmod 8$.

Jakolaskun 65 : 8 jakojäännös on 1, joten $65 \equiv 1 \pmod 8$.

Jakolaskun 57 : 8 jakojäännös on 1, joten $57 \equiv 1 \pmod 8$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 8.

$$\begin{aligned} 74 \cdot 65 + 2 \cdot 57 &\equiv 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ &\equiv 4 \pmod 8 \end{aligned}$$

Kongruenteilla luvuilla on sama jakojäännös. Kun luku $74 \cdot 65 + 2 \cdot 57$ jaetaan luvulla 8, niin jakojäännös on 4.

Vastaus: 4

221

Väite $9^{24} - 5^{12} \equiv 0 \pmod 4$

Todistus Tulee siis todistaa, että luku $9^{24} - 5^{12}$ on jaollinen luvulla 4. Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

Jakolaskun 9 : 4 jakojäännös on 1, joten
$9 \equiv 1 \pmod 4$.
Jakolaskun 5 : 4 jakojäännös on 1, joten
$5 \equiv 1 \pmod 4$.
Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 4.

$$
\begin{aligned}
9^{24} - 5^{12} &\equiv 1^{24} - 1^{12} \\
&\equiv 1 - 1 \\
&\equiv 0 \pmod 4
\end{aligned}
$$

Väite $9^{24} - 5^{12} \equiv 0 \pmod 4$ pitää paikkansa. □

222

a) Erotus $20-(-1)=21$ on jaollinen luvulla 21, joten $20 \equiv -1 \pmod{21}$.

Korvataan laskutoimituksen luku kongruentilla luvulla modulo 21.

$$\begin{aligned} 20^{15} &\equiv (-1)^{15} \\ &\equiv -1 \\ &\equiv 20 \pmod{21} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 20.

b) Erotus $62-(-1)=63=21\cdot 3$ on jaollinen luvulla 21, joten $63 \equiv -1 \pmod{21}$.

Erotus $85-1=84=21\cdot 4$ on jaollinen luvulla 21, joten $85 \equiv 1 \pmod{21}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 21.

$$\begin{aligned} 62^{51}+85^{51} &\equiv (-1)^{51}+1^{51} \\ &\equiv -1+1 \\ &\equiv 0 \pmod{21} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 0.

Vastaus: a) 20
b) 0

223

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Luku on jaollinen luvulla 3, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 3.

Erotus $4-1=3$ on jaollinen luvulla 3, joten $4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Erotus $2-(-1)=3$ on jaollinen luvulla 3, joten $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 3.

$$\begin{aligned} 4^{2017}+2^{2017} &\equiv 1^{2017}+(-1)^{2017} \\ &\equiv 1+(-1) \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 0, joten luku $4^{2017}+2^{2017}$ on jaollinen luvulla 3. □

224

Määritetään jakojäännös kongruenssin avulla.

Muokataan lukua 2^{2100}.

$$2^{2100} = (2^3)^{700} = 8^{700}$$

Erotus $8 - 1 = 7$ on jaollinen luvulla 7, joten $8 \equiv 1 \pmod{7}$.

Korvataan laskutoimituksen luku kongruentilla luvulla modulo 7.

$$2^{2100} \equiv 8^{700} \equiv 1^{700} \equiv 1 \pmod{7}$$

Jakojäännös on 1.

Vastaus: 1

225

a) Erotus $1000-1=999=111\cdot 9$ on jaollinen luvulla 111, joten $1000\equiv 1 \pmod{111}$. □

b) Osoitetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$
\begin{aligned}
112110 &\equiv 112\cdot 1000+110 \quad 1000=1(\text{mod } 111),\ 110=-1\ (\text{mod } 111)\\
&\equiv 112\cdot 1+(-1)\\
&\equiv 111\equiv 0 \pmod{111}
\end{aligned}
$$

Saatiin $112110\equiv 0 \pmod{111}$ eli luku 112 110 on jaollinen luvulla 111. □

226

a) Erotus $3^4 - (-1) = 81 + 1 = 82 = 41 \cdot 2$ on jaollinen luvulla 41, joten $3^4 \equiv -1 \pmod{41}$. □

b) Tutkitaan jaollisuutta kongruenssin avulla.

$$\begin{aligned} 3^{23} - 14 &\equiv 3^3 \cdot 3^{20} - 14 \\ &\equiv 27 \cdot (3^4)^5 - 14 \\ &\equiv 27 \cdot (-1)^5 - 14 \\ &\equiv -27 - 14 \\ &\equiv -41 \equiv 41 \cdot (-1) \equiv 0 \pmod{41} \end{aligned}$$

Saatiin $3^{23} - 14 \equiv 0 \pmod{41}$ eli luku $3^{23} - 14$ on jaollinen luvulla 41.

Vastaus: b) on

227

Luvun 23^{128} viimeinen numero on jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 10. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 10.

$$
\begin{aligned}
23^{128} &\equiv 3^{128} && 23 \equiv 3 \pmod{10} \\
&\equiv (3^2)^{64} && 3^{128} = 3^{2\cdot 64} = (3^2)^{64} \\
&\equiv 9^{64} && 9 \equiv -1 \pmod{10} \\
&\equiv (-1)^{64} \\
&\equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

Saatiin $23^{128} \equiv 1 \pmod{10}$ eli luvun 23^{128} viimeinen numero on luku 1.

Vastaus: 1

228

Uudenvuodenpäivästä vuonna 2000 uudenvuodenpäivään vuonna 2017 on kulunut 17 vuotta. Tälle ajalle osuvat vuosien 2000, 2004, 2008, 2012 ja 2016 karkauspäivät. Ajanjakson päivien lukumäärä on $17 \cdot 365 + 5$.

Määritetään kongruenssin avulla jakojäännös, kun päivien lukumäärä $17 \cdot 365 + 5$ jaetaan luvulla 7.

$$17 \equiv 3 \pmod{7} \qquad 17 - 3 = 14 = 7 \cdot 2$$
$$365 \equiv 1 \pmod{7} \qquad 365 - 1 = 364 = 7 \cdot 52$$
$$17 \cdot 365 + 5 \equiv 3 \cdot 1 + 5 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

Jakojäännös on 1. Vuoden 2000 uudenvuodenpäivästä on kulunut kokonaisten viikkojen lisäksi 2 päivää. Koska vuoden 2017 uudenvuodenpäivä oli sunnuntai, vuoden 2000 uudenvuodenpäivä oli 1 viikonpäivää aiemmin eli lauantaina.

Vastaus: Lauantai

229

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n(n^2+5)$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden kongruensseista $n \equiv 0$, $n \equiv 1$ tai $n \equiv 2 \pmod 3$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa $n(n^2+5) \equiv 0 \pmod 3$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod 3$, niin

$$n(n^2+5) \equiv 0(0+5) \equiv 0 \pmod 3.$$

2) Jos $n \equiv 1 \pmod 3$, niin

$$n(n^2+5) \equiv 1(1+5) \equiv 6 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

3) Jos $n \equiv 2 \pmod 3$, niin

$$n(n^2+5) \equiv 2(2^2+5) \equiv 18 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 0 \pmod 3.$$

Huomataan, että aina $n(n^2+5) \equiv 0 \pmod 3$.

Siispä kaikilla kokonaisluvuilla n luku $n(n^2+5)$ on jaollinen luvulla 3. □

230

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden kongruensseista $n \equiv 0$, $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 3$ tai $n \equiv 4 \pmod 5$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod 5$, niin
$$n^5 - n \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod 5.$$
2) Jos $n \equiv 1 \pmod 5$, niin
$$n^5 - n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5.$$
3) Jos $n \equiv 2 \pmod 5$, niin
$$n^5 - n \equiv 2^5 - 2 \equiv 30 \equiv 5 \cdot 6 \equiv 0 \pmod 5.$$
4) Jos $n \equiv 3 \pmod 5$, niin
$$n^5 - n \equiv 3^5 - 3 \equiv 240 \equiv 5 \cdot 48 \equiv 0 \pmod 5.$$
5) Jos $n \equiv 4 \pmod 5$, niin
$$n^5 - n \equiv 4^5 - 4 \equiv 1020 \equiv 5 \cdot 204 \equiv 0 \pmod 5.$$

Huomataan, että aina $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$.

Siispä kaikilla kokonaisluvuilla n luku $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5. □

231

a) Koska $394 = 24 \cdot 16 + 10 \equiv 10 \pmod{24}$ ja $9 + 10 = 19$ kello näyttää aikaa $9 + 10 = 19$ 19.00.

b) Koska $217 = 12 \cdot 18 + 1 \equiv 1 \pmod{12}$ ja $9 - 1 = 8$ kello näyttää aikaa 8.00.

Vastaus: a) 19.00
b) 8.00

232

a) Osoitetaan, että lukujen 332 ja -1 erotus on jaollinen luvulla 111.

$$332-(-1)=333=111\cdot 3$$

Siis $332\equiv -1 \pmod{111}$. □

b) Osoitetaan, että lukujen 43 ja 2193 erotus on jaollinen luvulla 25.

$$43-2193=-2150=25\cdot(-86)$$

Siis $43\equiv 2193 \pmod{25}$. □

c) Osoitetaan, että luku 1000 on jaollinen luvulla 8.

$$1000=8\cdot 125$$

Siis $1000\equiv 0 \pmod{8}$. □

233

Lasketaan lukujen $2^{60}-3$ ja $16^{15}+18$ erotus.

$$\begin{aligned}2^{60}-3-(16^{15}+18) &= 2^{60}-3-(2^4)^{15}-18\\ &= 2^{60}-3-2^{60}-18\\ &= -21 = 7\cdot(-3)\end{aligned}$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 7, niin
$2^{60}-3 \equiv 16^{15}+18 \ (\text{mod } 7)$.

Siten luvuilla $2^{60}-3$ ja $16^{15}+18$ on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 7. □

234

Kun luvut jaetaan luvulla 5, niin jakojäännös on 3.

Kahden luvun erotus on aina jaollinen luvulla 5.

Luvut ovat kongruentit modulo 5.

235

Muodostetaan lukujen 16, 28 ja 4 kongruentit luvut modulo 5.

$16 \equiv 1 \pmod{5}$

$28 \equiv 3 \pmod{5}$

$4 \equiv -1 \pmod{5}$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 5.

$$\begin{aligned} 16^{2016} - 28 \cdot 4^{2019} &\equiv 1^{2016} - 3 \cdot (-1)^{2019} \\ &\equiv 1 - 3 \cdot (-1) \\ &\equiv 4 \pmod{5} \end{aligned}$$

Kongruenteilla luvuilla on sama jakojäännös. Kun luku $16^{2016} - 28 \cdot 4^{2019}$ jaetaan luvulla 5, niin jakojäännös on 4.

Vastaus: 4

236

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Luku on jaollinen luvulla 3, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 3.

Erotus $7-1=3\cdot 2$ on jaollinen luvulla 3, joten $7\equiv 1 \pmod{3}$.

Erotus $2-(-1)=3$ on jaollinen luvulla 3, joten $2\equiv -1 \pmod{3}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 3.

$$\begin{aligned} 7^{2502}+2^{1573} &\equiv 1^{2502}+(-1)^{1573} \\ &\equiv 1+(-1) \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 0, joten luku $7^{2502}+2^{1573}$ on jaollinen luvulla 3. □

237

Tutkitaan luvun 17^3 kongruenssia modulo 15.

Erotus $17-2=15$ on jaollinen luvulla 15, joten $17 \equiv 2 \pmod{15}$.

Korvataan laskutoimituksen luku 17 kongruentilla luvulla modulo 15.

$$\begin{aligned} 17^3 &\equiv 2^3 \\ &\equiv 8 \pmod{15} \end{aligned}$$

Vastaus: $x=8$

238

a) Erotus $11^2 - 4 = 121 - 4 = 117$ on jaollinen luvulla 117, joten $11^2 \equiv 4 \pmod{117}$. □

b) Osoitetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$\begin{aligned} 11^{44} - 2^{44} &\equiv (11^2)^{22} - (2^2)^{22} \quad 11^2 \equiv 4 (\text{mod } 117) \\ &\equiv 4^{22} - 4^{22} \\ &\equiv 0 \pmod{117} \end{aligned}$$

Saatiin $11^{44} - 2^{44} \equiv 0 \pmod{117}$ eli luku $11^{44} - 2^{44}$ on jaollinen luvulla 117. □

239

a) Luvun 99^{2019} kaksi viimeistä numeroa ovat jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 100. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 100.

$$
\begin{aligned}
99^{2019} &\equiv (-1)^{2019} && 99 \equiv -1 \pmod{100} \\
&\equiv -1 \\
&\equiv 99 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

Saatiin $99^{2019} \equiv 99 \pmod{100}$ eli luvun 99^{2019} viimeinen numero on luku 99.

b) Luvun 51^{2018} kaksi viimeistä numeroa ovat jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 100. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 100.

$$
\begin{aligned}
51^{2018} &\equiv (51^2)^{1009} \\
&\equiv 2601^{1009} && 2601 \equiv 1 \pmod{100} \\
&\equiv 1^{1009} \\
&\equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

Saatiin $51^{2018} \equiv 1 \pmod{100}$ eli luvun 51^{2018} kaksi viimeistä numeroa ovat 01.

Vastaus: a) 99
b) 01

240

Tälle ajalle osuvat karkausvuodet vuodesta 1920 vuoteen 2016 eli yhteensä 25 karkauspäivää. Ajanjakson päivien lukumäärä on $100 \cdot 365 + 25$.

Määritetään kongruenssin avulla jakojäännös, kun päivien lukumäärä $100 \cdot 365 + 25$ jaetaan luvulla 7.

$100 \equiv 2 \pmod{7}$ $\quad 100 - 2 = 98 = 7 \cdot 14$

$365 \equiv 1 \pmod{7}$ $\quad 365 - 1 = 364 = 7 \cdot 52$

$25 \equiv 4 \pmod{7}$ $\quad 25 - 4 = 21 = 7 \cdot 3$

$100 \cdot 365 + 25 \equiv 2 \cdot 1 + 4 \equiv 6 \pmod{7}$

Jakojäännös on 6. Joulukuun 6. päivästä vuonna 1917 on kulunut kokonaisten viikkojen lisäksi 6 päivää.

Koska 6.12.2017 on keskiviikko, 6.12.1917 oli 6 viikonpäivää aiemmin eli torstaina.

Vastaus: torstai

241

Oletus Luku n on positiivinen kokonaisluku.

Väite Luku $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$16 \equiv 1 \pmod 5$$
$$7 \equiv 2 \pmod 5$$
$$28 \equiv 3 \pmod 5$$
$$3 \equiv -2 \pmod 5$$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 5.

$16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$

$\equiv 1 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot (-2)^{2n+3}$

$\equiv 2^{2n} - 3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^{2n}$ $\quad (-2)^{2n} = 2^{2n}$, koska $2n$ on parillinen.

$\equiv 2^{2n}(1+24)$ $\quad$ Erotetaan 2^{2n} yhteiseksi tekijäksi.

$\equiv 2^{2n} \cdot 25$

$\equiv 2^{2n} \cdot 5 \cdot 5$

$\equiv 0 \pmod 5$

Havaitaan, että $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3} \equiv 0 \pmod 5$. Luku $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$ on jaollinen luvulla 5 kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. □

242

Oletus Luku n on pariton positiivinen kokonaisluku.

Väite Luku $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$3 \equiv -2 \pmod 5$

$4 \equiv -1 \pmod 5$

$5 \equiv 0 \pmod 5$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 5.

$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

$\equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n + 0^n$ $(-2)^n = -(2^n)$ ja $(-1)^n = -(1^n)$ koska n on pariton.

$\equiv 1^n + 2^n - (2^n) - (1^n)$

$\equiv 0 \pmod 5$

Havaitaan, että $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \equiv 0 \pmod 5$.

Luku $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ on jaollinen luvulla 5 kaikilla parittomilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. □

243

Oletus Luku n on kokonaisluku.

Väite Luku $n(n^2+1)(n^2+4)$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden kongruensseista $n \equiv 0$, $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 3$ tai $n \equiv 4 \pmod 5$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa
$n(n^2+1)(n^2+4) \equiv 0 \pmod 5$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod 5$, niin

$$n(n^2+1)(n^2+4) \equiv 0 \cdot (0+1) \cdot (0+4) \equiv 0 \pmod 5.$$

2) Jos $n \equiv 1 \pmod 5$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2+1)(n^2+4) &\equiv 1 \cdot (1+1) \cdot (1+4) \\ &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 5 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

3) Jos $n \equiv 2 \pmod 5$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2+1)(n^2+4) &\equiv 2 \cdot (2^2+1) \cdot (2^2+4) \\ &\equiv 2 \cdot 5 \cdot 9 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

4) Jos $n \equiv 3 \pmod 5$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2+1)(n^2+4) &\equiv 3 \cdot (3^2+1) \cdot (3^2+4) \\ &\equiv 3 \cdot 10 \cdot 13 \equiv 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 13 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

5) Jos $n \equiv 4 \pmod 5$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2+1)(n^2+4) &\equiv 4 \cdot (4^2+1) \cdot (4^2+4) \\ &\equiv 4 \cdot 17 \cdot 20 \equiv 4 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 4 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

Huomataan, että aina $n(n^2+1)(n^2+4) \equiv 0 \pmod{5}$.

Siispä kaikilla kokonaisluvuilla n luku
$n(n^2+1)(n^2+4)$ on jaollinen luvulla 5. $\square$

244

Oletus Luku n ei ole jaollinen luvulla 3.

Väite Luku $n^6 - 1$ on jaollinen luvulla 9.

Todistus Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

Jos luku n ei ole jaollinen luvulla 3, silloin tarkastellaan lukuja n, jotka toteuttavat kongruenssit $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 4$, $n \equiv 5$, $n \equiv 7$ tai $n \equiv 8 \pmod 9$.

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod 9$.

1) Jos $n \equiv 1 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 9$.

2) Jos $n \equiv 2 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 2^6 - 1 \equiv 63 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 0 \pmod 9$.

3) Jos $n \equiv 4 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 4^6 - 1 \equiv 4095 \equiv 9 \cdot 455 \equiv 0 \pmod 9$.

4) Jos $n \equiv 5 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 5^6 - 1 \equiv 15624 \equiv 9 \cdot 1736 \equiv 0 \pmod 9$.

5) Jos $n \equiv 7 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 7^6 - 1 \equiv 117648 \equiv 9 \cdot 13072 \equiv 0 \pmod 9$.

6) Jos $n \equiv 8 \pmod 9$, niin
$n^6 - 1 \equiv 8^6 - 1 \equiv 262143 \equiv 9 \cdot 29127 \equiv 0 \pmod 9$.

Huomataan, että aina, kun n ei ole jaollinen luvulla 3, $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{9}$.

Siispä $n(n^2+1)(n^2+4)$ on jaollinen luvulla 9, kun n ei ole jaollinen luvulla 3. $\square$

245

Oletus Luku n on satanumeroinen kokonaisluku, jonka kaikki numerot ovat yhdeksikköjä.

Väite Luku n on jaollinen luvulla 101.

Todistus Luku n voidaan kirjoittaa muodossa $10^{100}-1$.

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$\begin{aligned}10^{100}-1 &\equiv (10^2)^{50}-1\\ &\equiv 100^{50}-1 \qquad 100\equiv -1 \pmod{101}\\ &\equiv (-1)^{50}-1\\ &\equiv 1-1\\ &\equiv 0 \pmod{101}\end{aligned}$$

Huomataan, että $10^{100}-1\equiv 0 \pmod{101}$.

Siispä satanumeroinen kokonaisluku, jonka kaikki numerot ovat yhdeksikköjä on jaollinen luvulla 101. □

246

a)

Merkitään $a = nq_1 + r_1$ ja $b = nq_2 + r_2$, missä $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ ja luvut r_1 ja r_2 ovat suurempia tai yhtä suuria kuin nolla sekä pienempiä kuin luku n.

Luvut ovat kongruentit modulo n, jos niiden erotus on jaollinen luvulla n.

Tutkitaan lukujen a ja b erotusta.

$$\begin{aligned} a - b &= nq_1 + r_1 - (nq_2 + r_2) \\ &= nq_1 - nq_2 + r_1 - r_2 \\ &= n(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \end{aligned}$$

Huomataan, että lukujen a ja b erotus on jaollinen luvulla n jos ja vain jos $r_1 - r_2 = 0$ eli $r_1 = r_2$.

Eli saatiin, että luvut a ja b ovat kongruentit modulo n, jos ja vain jos luvuilla a ja b on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla n. □

b) Koska tiedetään, että jakolaskun $a : n$ jakojäännös on r, merkitään $a = nq + r$, missä $q \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq r < n$.

Luvut ovat kongruentit modulo *n*, jos niiden erotus on jaollinen luvulla *n*.

Muodostetaan lukujen *a* ja *r* erotus.

$$a - r = (nq + r) - r = nq$$

Huomataan, että lukujen erotus on jaollinen luvulla *n*.

Luvut *a* ja *r* ovat siten kongruentit modulo *n*. □

247

a) Koska $\sqrt{89} = 9,433...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 9 eli alkuluvuilla 2, 3, 5 ja 7.

Tarvitaan siis korkeintaan 4 jakolaskua.

b) Koska $\sqrt{751} = 27,404...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 27 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ja 23.

Tarvitaan siis korkeintaan 8 jakolaskua.

c) Koska $\sqrt{4507} = 67,134...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 67 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 59, 61 ja 67 .

Tarvitaan siis korkeintaan 19 jakolaskua.

Vastaus:
a) 4
b) 8
c) 19

248

a) Koska $\sqrt{79} = 8,888...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 8 eli alkuluvuilla 2, 3, 5 ja 7.
79 : 2 = 39,5
79 : 3 = 27,666…
79 : 5 = 15,8
79 : 7 = 11,285…

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 79 on alkuluku.

b) Koska $\sqrt{143} = 11,958...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 11 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7 ja 11.

143 : 2 = 71,5
143 : 3 = 47,666…
143 : 5 = 28,6
143 : 7 = 20,428…
143 : 11 = 13

Koska jakolasku 143 : 11 = 13 menee tasan, luku 143 ei ole alkuluku.

c) Koska $\sqrt{961} = 31$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 31 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

961 : 2 = 480,5
961 : 3 = 320,333…
961 : 5 = 192,2
961 : 7 = 137,285…
961 : 11 = 87,363…
961 : 13 = 73,923…
961 : 17 = 56,529…
961 : 19 = 50,578…
961 : 23 = 41,782…
961 : 29 = 33,137…
961 : 31 = 31

Koska jakolasku 961 : 31 = 31 menee tasan, luku 961 ei ole alkuluku.

Tämä nähdään toisaalta jo suoraan laskutoimituksesta $\sqrt{961} = 31$, josta seuraa, että $31 \cdot 31 = 961$.

Vastaus: a) 2, 3, 5, 7, on alkuluku
b) 2, 3, 5, 7, 11, ei ole alkuluku
c) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ei ole alkuluku

249

a) Koska $\sqrt{187} = 13,674...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 13 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13.

$187 : 2 = 93,5$
$187 : 3 = 62,333\ldots$
$187 : 5 = 37,4$
$187 : 7 = 26,714\ldots$
$187 : 11 = 17$

Koska jakolasku menee tasan, 187 ei ole alkuluku.

b) Koska $\sqrt{299} = 17,291..$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 17 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

$299 : 2 = 149,5$
$299 : 3 = 99,666\ldots$
$299 : 5 = 59,8$
$299 : 7 = 42,714\ldots$
$299 : 11 = 27, 181\ldots$
$299 : 13 = 23$

Koska jakolasku menee tasan, luku 299 ei ole alkuluku.

c) Koska $\sqrt{113} = 10,630...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 10 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7.

113 : 2 = 56,5
113 : 3 = 37,666…
113 : 5 = 22,6
113 : 7 = 16,142…

Koska mikään jakolasku ei mene tasan, luku 113 on alkuluku.

Vastaus: a) ei ole
b) ei ole
c) on

250

Kirjoitetaan luvut $2, \ldots, 120$ taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{120} = 10,954...$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Korostetaan luku 2 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 2 monikerrat.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~

Korostetaan luku 3 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 3 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~

Korostetaan luku 5 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 5 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~

Korostetaan luku 7 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 7 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Seuraava jäljellä oleva luku on 11, joka on suurempi kuin $\sqrt{120}$. Nyt taulukossa on jäljellä kaikki korkeintaan 120 suuruiset alkuluvut.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

Eli luvut: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109 ja 113

Vastaus: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109 ja 113

251

a) Jaetaan luku 48 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 48 &= 4 \cdot 12 && 4 = 2 \cdot 2 \text{ ja } 12 = 2 \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 && 6 = 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^4 \cdot 3 \end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 105 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 105 &= 5 \cdot 21 && 21 = 3 \cdot 7 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 7 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 252 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \cdot 126 && 126 = 3 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 42 && 42 = 6 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 && 6 = 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Vastaus:
a) $2^4 \cdot 3$
b) $3 \cdot 5 \cdot 7$
c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

252

a) Jaetaan luku 1575 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 1575 &= 15 \cdot 105 && 15 = 3 \cdot 5 \text{ ja } 105 = 5 \cdot 21 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 21 && 21 = 3 \cdot 7 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 2244 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 2244 &= 22 \cdot 102 && 22 = 2 \cdot 11 \text{ ja } 102 = 3 \cdot 34 \\ &= 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 34 && 34 = 2 \cdot 17 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 17 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 14631 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 14641 &= 11 \cdot 1331 && 1331 = 11 \cdot 121 \\ &= 11 \cdot 11 \cdot 121 && 121 = 11 \cdot 11 \\ &= 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 11^4 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

b) $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$

c) 11^4

253

Muodostetaan lukujen 36, 88, 100 alkulukuhajotelmat.

$$
\begin{aligned}
36 &= 4\cdot 9 && 4 = 2\cdot 2 \text{ ja } 9 = 3\cdot 3\\
&= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.}\\
&= 2^2\cdot 3^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
88 &= 8\cdot 11 && 8=2\cdot 4\\
&= 2\cdot 4\cdot 11 && 4=2\cdot 2\\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 11 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.}\\
&= 2^3\cdot 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
100 &= 5\cdot 20 && 20 = 4\cdot 5\\
&= 5\cdot 4\cdot 5 && 4 = 2\cdot 2\\
&= 5\cdot 2\cdot 2\cdot 5 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.}\\
&= 2^2\cdot 5^2
\end{aligned}
$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy 2^2.

$$\text{syt}(36,\ 88,\ 100) = 2^2 = 4$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 5, 11. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(36,\ 88,\ 100) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 19800$$

Vastaus: a) 4
b) 19800

254

a) Muodostetaan lukujen 24 ja 90 alkulukuhajotelmat.

$$
\begin{aligned}
24 &= 4 \cdot 6 && 4 = 2 \cdot 2 \text{ ja } 6 = 2 \cdot 3 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\
&= 2^3 \cdot 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
90 &= 9 \cdot 10 && 9 = 3 \cdot 3 \text{ ja } 10 = 2 \cdot 5 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\
&= 2 \cdot 3^2 \cdot 5
\end{aligned}
$$

b) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy kumpaakin alkulukuhajotelmaan. Kummastakin hajotelmasta löytyy $2 \cdot 3$.

$$\text{syt}(24,\ 90) = 2 \cdot 3 = 6$$

Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3 ja 5. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(24,\ 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

c) Muodostetaan alkulukuhajotelmien avulla tulo ja ryhmitellään sitä uudelleen.

$$\begin{aligned} 24 \cdot 90 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= \text{syt}(24, 90) \cdot \text{pym}(24, 90) \ \square \end{aligned}$$

Vastaus: a) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ja $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

b) $\text{syt}(24, 90) = 2 \cdot 6 = 6$ ja

$\text{pym}(24, 90) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$

255

Hyödynnetään Eratostheneen seulaa. Huomataan tehtävästä 250, että lukujen 2, …, 120 joukossa on 6 palindromialkulukua.

Laajennetaan lukujoukkoa lukuun 200 saakka.

Kirjoitetaan luvut 2, …, 200 taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{200} = 14{,}142...$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Korostetaan luku 2 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 2 monikerrat.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	123	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	129	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	135	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
141	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	147	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	154	~~154~~	155	~~156~~	157	~~158~~	159	~~160~~
161	~~162~~	164	~~164~~	165	~~166~~	167	~~168~~	169	~~170~~
171	~~172~~	174	~~174~~	175	~~176~~	177	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	184	~~184~~	185	~~186~~	187	~~188~~	189	~~190~~
191	~~192~~	194	~~194~~	195	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Korostetaan luku 3 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 3 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	155	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
161	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	169	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	175	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	185	~~186~~	187	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Korostetaan luku 5 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 5 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
161	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	169	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	187	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Korostetaan luku 7 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 7 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	169	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	187	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Korostetaan luku 11 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 11 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	169	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Korostetaan luku 13 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 13 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	~~169~~	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Seuraava jäljellä oleva luku on 17, joka on suurempi kuin $\sqrt{200}$.
Nyt taulukossa on jäljellä kaikki korkeintaan 200 suuruiset alkuluvut.
Korostetaan näiden joukosta palindromialkuluvut.

	2	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	~~169~~	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Eli luvut: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181 ja 191

Vastaus: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181 ja 191

256

Muodostetaan luvun $2 \cdot 3^{11} \cdot 4^5 \cdot 6^9$ alkulukuhajotelma ja muokataan sitä. Hyödynnetään potenssin laskusääntöjä.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3^{11} \cdot 4^5 \cdot 6^9 &= 2 \cdot 3^{11} \cdot (2^2)^5 \cdot (2 \cdot 3)^9 \\
&= 2 \cdot 3^{11} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 \cdot 3^9 \\
&= 2^{20} \cdot 3^{20} \\
&= (2^{10} \cdot 3^{10})^2 \\
&= (6^{10})^2
\end{aligned}$$

Vastaus: $(6^{10})^2$

257

Oletus Luvut a, b ja n ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $ab = n$.

Väite Luku $a \le \sqrt{n}$ tai luku $b \le \sqrt{n}$.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että $a > \sqrt{n}$ ja $b > \sqrt{n}$. Tällöin:

$$ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n.$$

Eli saadaan $ab > n$, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Siispä alkuperäinen väite “luku $a \le \sqrt{n}$ tai luku $b \le \sqrt{n}$ ” on tosi. □

258

Oletus Luku $p \geq 3$ on alkuluku.

Väite Luku $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4.

Todistus Alkuluvut, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin luku 3, ovat välttämättä parittomia.

Tällöin $p = 2n + 1$, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Sijoitetaan $p = 2n + 1$ lausekkeeseen $p^2 - 1$.

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (2n+1)^2 - 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 1 \quad \text{Erotetaan 4 yhteiseksi tekijäksi.} \\ &= 4(n^2 + n) \end{aligned}$$

Saadaan $p^2 - 1 = 4(n^2 + n)$. Koska luku $n^2 + n$ on kokonaisluku, $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4.

Väite on tosi. □

259

Korkeintaan kymmenellä jakolaskulla voidaan löytää alkuluvut, jotka ovat pienempiä kuin 11. alkuluvun neliö.

Yhdestoista alkuluku on luku 31, joten $31^2 = 961$.

Vastaus: Alkuluvut, jotka ovat pienempiä kuin $31^2 = 961$.

260

a) Koska $\sqrt{323} = 17,972...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 17 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

323 : 2 = 161,5
323 : 3 = 107,666…
323 : 5 = 64,6
323 : 7 = 46,142…
323 : 11 = 29,363…
323 : 13 = 24,846…
323 : 17 = 19

Koska jakolasku menee tasan, luku 323 ei ole alkuluku.

b) Koska $\sqrt{109} = 10,440..$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku 10 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7.

109 : 2 = 54,5
109 : 3 = 36,333…
109 : 5 = 21,8
109 : 7 = 15,571…

Koska jakolaskut eivät mene menee tasan, luku 109 on alkuluku.

c) Koska $\sqrt{1793} = 42,343...$ täytyy tutkia jaollisuutta alkuluvuilla, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku 42 eli alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.

1793 : 2 = 896,5
1793 : 3 = 597,666…
1793 : 5 = 358,6
1793 : 7 = 256,142…
1793 : 11 = 163

Koska jakolasku menee tasan, luku 1793 ei ole alkuluku.

Vastaus: a) ei ole
b) on
c) ei ole

261

Kirjoitetaan luvut 200, …, 299 taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{299}=17,291...$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Poistetaan siis lukujen 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja 17 monikerrat.

~~200~~	~~201~~	~~202~~	~~203~~	~~204~~	~~205~~	~~206~~	~~207~~	~~208~~	~~209~~
~~210~~	211	~~212~~	~~213~~	~~214~~	~~215~~	~~216~~	~~217~~	~~218~~	~~219~~
~~220~~	~~221~~	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~	227	~~228~~	229
~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~	239
~~240~~	241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~
~~250~~	251	~~252~~	~~253~~	~~254~~	~~255~~	~~256~~	257	~~258~~	~~259~~
~~260~~	~~261~~	~~262~~	263	~~264~~	~~265~~	~~266~~	~~267~~	~~268~~	269
~~270~~	271	~~272~~	~~273~~	~~274~~	~~275~~	~~276~~	277	~~278~~	~~279~~
~~280~~	281	~~282~~	283	~~284~~	~~285~~	~~286~~	~~287~~	~~288~~	~~289~~
~~290~~	~~291~~	~~292~~	293	~~294~~	~~295~~	~~296~~	~~297~~	~~298~~	~~299~~

Alkulukuja ovat: 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283 ja 293.

Vastaus: 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283 ja 293

262

a) Jaetaan luku 396 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 396 &= 9\cdot 44 && 9=3\cdot 3 \text{ ja } 44=4\cdot 11 \\ &= 3\cdot 3\cdot 4\cdot 11 && 4=2\cdot 2 \\ &= 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 11 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^2\cdot 3^2\cdot 11 \end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 606 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 606 &= 6\cdot 101 && 6=2\cdot 3 \\ &= 2\cdot 3\cdot 101 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 945 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 945 &= 5\cdot 189 && 189=3\cdot 63 \\ &= 5\cdot 3\cdot 63 && 63=9\cdot 7 \\ &= 5\cdot 3\cdot 9\cdot 7 && 9=3\cdot 3 \\ &= 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7 && \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 3^3\cdot 5\cdot 7 \end{aligned}$$

Vastaus:
a) $2^2\cdot 3^2\cdot 11$
b) $2\cdot 3\cdot 101$
c) $3^3\cdot 5\cdot 7$

263

Muodostetaan lukujen 4158 ja 37240 alkulukuhajotelmat laskimella.

$$4158 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$37240 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy $2 \cdot 7$.

$$\text{syt}(4158, 37240) = 2 \cdot 7 = 14$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 5, 7, 11, 19. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(4158,\ 37240) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 = 11060280$$

Vastaus: a) 14
b) 11 060 280

264

Muodostetaan lukujen 475, 7502 ja 809 874 alkulukuhajotelmat laskimella.

$$475 = 5^2 \cdot 19$$

$$7502 = 2 \cdot 11^2 \cdot 31$$

$$809875 = 5^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkulukuhajotelmaan. Koska hajotelmista ei löydy yhteistä osaa, suurin yhteinen tekijä on 1.

$$\text{syt}(475,\ 7502,\ 809875) = 1$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkulukuhajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 5, 11, 19, 31. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(475,\ 7502,\ 809875) = 2 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 31 = 17817250$$

Vastaus: a) 1
b) 17 817 250

265

Tutkitaan alkulukuja alkulukuun 37 saakka, sillä 37 on suurin lukua 40 pienempi tai yhtä suuri alkuluku.

Alkuluku p	**$2p + 1$**	**Onko alkuluku?**
2	5	**on**
3	7	**on**
5	11	**on**
7	15	ei
11	23	**on**
13	27	ei
17	35	ei
19	39	ei
23	47	**on**
29	59	**on**
31	63	ei
37	75	ei

Alkuluvut 2, 3, 5, 11, 23, 29 ovat Sophie Germainin alkulukuja.

Vastaus: 2, 3, 5, 11, 23, 29

266

a) Hyödynnetään Eratostheneen seulaa, joka saatiin tehtävän 255 lopputuloksena.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~
151	~~152~~	~~153~~	~~154~~	~~155~~	~~156~~	157	~~158~~	~~159~~	~~160~~
~~161~~	~~162~~	163	~~164~~	~~165~~	~~166~~	167	~~168~~	~~169~~	~~170~~
~~171~~	~~172~~	173	~~174~~	~~175~~	~~176~~	~~177~~	~~178~~	179	~~180~~
181	~~182~~	~~183~~	~~184~~	~~185~~	~~186~~	~~187~~	~~188~~	~~189~~	~~190~~
191	~~192~~	193	~~194~~	~~195~~	~~196~~	197	~~198~~	199	~~200~~

Löydetään esimerkiksi summat:

$$200 = 97 + 103 \qquad 202 = 89 + 113$$
$$204 = 97 + 107 \qquad 206 = 97 + 109$$
$$208 = 101 + 107 \qquad 210 = 103 + 107$$

b)

Oletus Luku n on lukua 3 suurempi pariton kokonaisluku.

Väite Kaikki lukua 3 suuremmat parittomat kokonaisluvut voidaan esittää kahden alkuluvun summana.

Todistus Käydään läpi parittomia lukua 3 suurempia kokonaislukuja ja esitetään ne kaikkina mahdollisina kahden kokonaisluvun summina, joista molemmat yhteenlaskettavat ovat suurempia tai yhtä suuria kuin luku 2.

Luku n	**Summa**	**Mahdollista esittää alkulukujen summana?**
5	2 + 3	kyllä
7	2 + 5 3 + 4	kyllä
9	2 + 7 3 + 6 4 + 5	kyllä
11	2 + 9 3 + 8 4 + 7 5 + 6	ei

Koska löytyy ainakin yksi vastaesimerkki eli tilanne, jossa väite ei päde, väite on epätosi.

Eli kaikkia lukua 3 suurempia parittomia kokonaislukuja ei voi esittää kahden alkuluvun summana. □

267

Oletus Luku p on lukua 3 suurempi alkuluku.

Väite Luku p vodaan kirjoittaa joko muodossa $6k+1$ tai $6k+5$, kun k on kokonaisluku.

Todistus Jokainen kokonaisluku voidaan esittää muodossa $6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4$ tai $6k+5$, kun k on kokonaisluku.

Huomataan, että luvut $6k,\ 6k+2,\ 6k+3$ ja $6k+4$ voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
6k &= 2(3k) \\
6k+2 &= 2(3k+1) \\
6k+3 &= 3(2k+1) \\
6k+4 &= 2(3k+2).
\end{aligned}
$$

Eli ainoastaan luvut $6k+1$ ja $6k+5$ voivat olla alkulukuja.

Lukua 3 suurempi alkuluku p vodaan kirjoittaa joko muodossa $6k+1$ tai $6k+5$, kun k on kokonaisluku. □

268

Oletus Luku p on lukua 3 suurempi alkuluku.

Väite p^2+5 ei voi olla alkuluku.

Todistus Tiedetään, että lukua 3 suuremmat alkuluvut voidaan kirjoittaa muodossa $6k+1$ tai $6k+5$, missä k on kokonaisluku.

Tällöin:

$$\begin{aligned}p^2+5 &= (6k+1)^2+5\\ &= 36k^2+12k+1+5\\ &= 36k^2+12k+6\\ &= 6(6k^2+2k+1)\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}p^2+5 &= (6k+5)^2+5\\ &= 36k^2+60k+25+5\\ &= 36k^2+60k+30\\ &= 6(6k^2+10k+5)\end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa luku p^2+5 on jaollinen luvulla 6 eli luku p^2+5 ei voi olla alkuluku. □

269

a)

Oletus Luku $n \geq 2$ on kokonaisluvun neliö.

Väite Luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen.

Todistus Koska luku n on kokonaisluvun neliö, se voidaan kirjoittaa muodossa $n = m^2$, missä m on kokonaisluku.

Luvun m alkulukuhajotelma on muotoa
$p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}$.

Tällöin:

$$\begin{aligned} n &= m^2 \\ &= \left(p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}\right)^2 \\ &= p_1^{2 \cdot t_1} \cdot p_2^{2 \cdot t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2 \cdot t_k}. \end{aligned}$$

Saatiin, että luvun n alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen, jos luku $n \geq 2$ on kokonaisluvun neliö. $\square$

b)

Oletus Kokonaisluvun $n \geq 2$ alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen.

Väite Luku n on kokonaisluvun neliö.

Todistus Luvun n on alkulukuhajotelma on muotoa $p_1^{2\cdot t_1} \cdot p_2^{2\cdot t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\cdot t_k}$.

Tällöin:

$$\begin{aligned} p_1^{2\cdot t_1} \cdot p_2^{2\cdot t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\cdot t_k} &= \left(p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}\right)^2 \\ &= m^2. \end{aligned}$$

Saatiin, että luvun n alkulukuhajotelma voidaan muokata potenssin laskusääntöjen avulla kokonaisluvun neliöksi.

Väite pitää paikkansa. □

270

Jos kokonaisluku n on jaollinen luvulla 120, se on jaollinen myös luvun 120 alkulukutekijöillä.

Luvun 120 alkulukuhajotelma on: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Jos n on lisäksi jonkin kokonaisluvun neliö, sen alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen (todistettu tehtävän 269 a-kohdassa).

Tällöin luvun n tulee olla: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$

Vastaus: 3600

271

a)

Väite Luku $\sqrt{7}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että luku $\sqrt{7}$ ei ole irrationaaliluku. Tällöin luku voidaan kirjoittaa supistetussa murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja.

Korotetaan molemmat puolet neliöön:

$$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$$ Korotetaan molemmat puolet neliöön.

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$7 = \frac{m^2}{n^2}$$ Ratkaistaan m^2.

$$m^2 = 7 \cdot n^2$$

Saatiin, että luku $m^2 = 7 \cdot n^2$. Tämä on ristiriita, koska nyt kokonaisluvun neliön alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti ei ole parillinen.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. □

b)

Väite Luku $\sqrt{p}$, jossa p on alkuluku, on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että luku $\sqrt{p}$ ei ole irrationaaliluku. Tällöin luku voidaan kirjoittaa supistetussa murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja.

Korotetaan molemmat puolet neliöön:

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$ Korotetaan molemmat puolet neliöön.

$$\left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$p = \frac{m^2}{n^2}$$ Ratkaistaan m^2.

$$m^2 = p \cdot n^2$$

Saatiin, että luku $m^2 = p \cdot n^2$. Tämä on ristiriita, koska nyt kokonaisluvun neliön eli luvun m^2 alkulukuhajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti ei ole parillinen.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. □

272

Oletus Luku $n^k + 1$ on lukua 2 suurempi alkuluku ja luvut n ja k ovat kokonaislukuja.

Väite Luku n on parillinen.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että luku n on pariton. Tällöin n voidaan kirjoittaa muodossa $2m+1$, missä m on kokonaisluku.

Tehdään sijoitus $n = 2m+1$ ja tutkitaan luvun $n^k + 1$ kongruenssia modulo 2.

$$\begin{aligned} n^k + 1 &\equiv (2m+1)^k + 1 \qquad 2m+1 \equiv 1 \pmod 2, \quad 1 \equiv -1 \pmod 2 \\ &\equiv 1^k + (-1) \\ &\equiv 1 - 1 \\ &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

Saatiin, että $n^k + 1 \equiv 0 \pmod 2$. Tämä on ristiriita, koska luku $n^k + 1$ on alkuluku.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. □

273

a) $M_{127} = 2^{127} - 1 = 1,701... \cdot 10^{38}$ eli luvussa on 38 + 1 = 39 numeroa.

$M_{257} = 2^{257} - 1 = 2,315... \cdot 10^{77}$ eli luvussa on 77 + 1 = 78 numeroa.

b)

Oletus Luku *k* on alkuluku.

Väite Luku $2^k - 1$ on alkuluku vain jos *k* on alkuluku.

Todistus Oletetaan, että luku $k = mn$, missä m ja n ovat lukua 1 suurempia kokonaislukuja.

Tehdään sijoitus $k = mn$ ja tutkitaan lukua $2^k - 1$.

$$\begin{aligned} 2^k - 1 &= 2^{mn} - 1 \\ &= (2^m)^n - 1^n \quad \text{$a^n - b^n$ on jaollinen luvulla $a - b$.} \\ &= (2^m - 1)((2^m)^{n-1} + (2^m)^{n-2} + ... + 1) \end{aligned}$$

Saatiin, että luku $2^k - 1$ on jaollinen luvulla $2^m - 1$. Tämä on ristiriita, koska luku $2^k - 1$ on alkuluku.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. □

Vastaus: a) 39 ja 78

274

Eukleideen lemman mukaan: ”jos kokonaislukujen a ja b tulo on jaollinen alkuluvulla p, niin ainakin toinen luvuista a ja b on jaollinen luvulla p.”

a) Koska luku 31 on alkuluku, niin ainakin toinen luvuista a ja b on jaollinen luvulla 31.

Väite on tosi.

b) Koska luku 32 ei ole alkuluku, niin kumpikaan luvuista a ja b ei välttämättä ole jaollinen luvulla 32.

Etsitään vastaesimerkki:

Valitaan $a = 6$, $b = 16$. Nyt $ab = 6 \cdot 16 = 96$ ja luku 96 on jaollinen luvulla 32, mutta kumpikaan luvuista 6 ja 16 ei ole jaollinen luvulla 32.

Koska löytyi vastaesimerkki, väite ei ole tosi.

Vastaus: a) on
b) ei ole

275

Aritmetiikan peruslauseen mukaan:
1) Kaikki lukua 1 suuremmat kokonaisluvut voidaan esittää alkulukujen tulona.
2) Tulon tekijät voidaan valita vain yhdellä tavalla.

a) Muodostetaan tulojen alkulukukehitelmät.

$$24\cdot 50=(3\cdot 8)\cdot(2\cdot 25)=(3\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 5\cdot 5)=2^4\cdot 3\cdot 5^2$$
$$25\cdot 48=(5\cdot 5)\cdot(6\cdot 8)=(5\cdot 5)\cdot(2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=2^4\cdot 3\cdot 5^2$$

Aritmetiikan peruslauseen mukaan nämä ovat lukujen ainoat alkulukuhajotelmat. Koska ne ovat identtiset, luvut ovat yhtä suuret.

b) Muodostetaan tulojen alkulukukehitelmät.

$$35\cdot 44=(5\cdot 7)\cdot(4\cdot 11)=(5\cdot 7)\cdot(2\cdot 2\cdot 11)=2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$$
$$55\cdot 42=(5\cdot 11)\cdot(6\cdot 7)=(5\cdot 11)\cdot(2\cdot 3\cdot 7)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$$

aritmetiikan peruslauseen mukaan nämä ovat lukujen ainoat alkulukuhajotelmat. Koska ne eivät ole identtiset, luvut eivät ole yhtä suuret.

Vastaus: a) ovat
b) eivät ole

276

Tutkitaan lukua $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, joka voidaan esittää summana

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

Koska $10 \equiv 1 \pmod{3}$, niin $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{3}$ kaikilla eksponenteilla $k > 0$. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}
&a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
&\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \\
&\equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \ \text{(mod 3).}
\end{aligned}$$

Eli luvulla $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ ja sen summalla on sama jakojäännös jaettaessa luvulla 3.

On siis osoitettu, että luku on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3.

277

a) Tutkitaan luvun 56 456 numeroiden summaa.

$$5+6+4+5+6 \equiv 26$$
$$\equiv 2 \pmod{3} \qquad 26-2=24=3\cdot 8$$

Luku 56 456 ei ole jaollinen luvulla 3, koska sen numeroiden summa ei ole jaollinen luvulla 3.

b) Tutkitaan luvun 23 501 + 53368 yhteenlaskettavat erikseen.

$$2+3+5+0+1 \equiv 11$$
$$\equiv 2 \pmod{9}$$

$$5+3+3+6+8 \equiv 25$$
$$\equiv 7 \pmod{9}$$

Yhdistetään saadut tulokset:

$$23501+53368 \equiv 2+7$$
$$\equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

Luku 23 501 + 53368 on jaollinen luvulla 9.

Vastaus: a) ei ole
b) on

278

a) Luku 21 voidaan esittää alkulukujen 3 ja 7 tulona.

Koska $1470 : 3 = 490$ ja $1470 : 7 = 210$, niin luku 1470 on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 7.

Tällöin luku 1470 on jaollinen luvulla $3 \cdot 7 = 21$.

b) Luku 24 voidaan esittää lukujen 3 ja 8 tulona. Lukujen 3 ja 8 suurin yhteinen tekijä on 1.

Koska $960 : 3 = 320$ ja $960 : 8 = 120$, niin luku 960 on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 8.

Tällöin luku 960 on jaollinen luvulla $3 \cdot 8 = 24$.

Vastaus: a) on
b) on

279

a) Koska lukujen 8 ja 6 suurin yhteinen tekijä on luku 2, eikä luku 1, luku a ei ole välttämättä jaollinen lukujen 8 ja 6 tulolla.

Etsitään vastaesimerkki.

Luku 24 on jaollinen luvulla 8 ja luvulla 6, mutta luku 24 ei ole jaollinen lukujen 8 ja 6 tulolla.

Luku a ei siis välttämättä ole jaollinen lukujen 8 ja 6 tulolla.

b) Koska lukujen 7 ja 5 suurin yhteinen tekijä on luku 1, luku a on jaollinen lukujen 7 ja 5 tulolla (Lause 2 s. 124).

Vastaus: a) ei ole
b) on

280

Esitetään luku $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ muodossa:
$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Tutkitaan luvun jaollisuutta luvulla 10.

$$
\begin{aligned}
& a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad 10^k \equiv 0 \text{ (mod 10)} \\
& \equiv a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \\
& \equiv a_0 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

Koska luvun viimeinen numero eli a_0 on nolla, jakojäännös jaettaessa luvulla 10 on myös 0. Siispä luku $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ on jaollinen luvulla 0.

On siis osoitettu, että luku on jaollinen luvulla 10 täsmälleen silloin, kun se päättyy numeroon 0. □

281

a) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 2 jakamalla luvulla 2.

$$2342 : 2 = 1171$$
$$5784 : 2 = 2892$$
$$7662 : 2 = 3831$$

Eli luvut ovat jaollisia luvulla 2.

b) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 3 numeroiden summan avulla (todistettu tehtävässä 276) .

$$2+3+4+2 \equiv 11 \equiv 2 \pmod{3}$$
$$5+7+8+4 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$7+6+6+2 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{3}$$

Luvut 5784 ja 7662 ovat jaollisia myös luvulla 3.

c) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 8 tarkastelemalla luvun kolmen viimeisen numeron muodostaman luvun jaollisuutta luvulla 8 (todistettu esimerkissä 5).

$$342 : 8 = 42,75$$

$$784 : 8 = 98$$

$$662 : 8 = 82,75$$

Koska luku 784 on jaollinen luvulla 8, on myös luku 5784 jaollinen luvulla 8.

Vastaus:
a) kaikki
b) 5784 ja 7662
c) 5784

282

a) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 3 numeroiden summan avulla (todistettu tehtävässä 276) .

$$7+5+6+2+1+9 \equiv 30 \equiv 0 \pmod{3} \qquad 30 = 3\cdot 10$$

Eli luku 756 219 on jaollinen luvulla 3, koska sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3.

b) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 9 numeroiden summan avulla (todistettu esimerkissä 3) .

$$7+5+6+2+1+9 \equiv 30 \equiv 3 \pmod{9}$$

Luku 756 219 ei ole jaollinen luvulla 9, koska sen numeroiden summa ei ole jaollinen luvulla 9.

c) Luku $756\,219$ ei ole jaollinen luvulla $27 = 3\cdot 9$, koska se ei ole jaollinen luvulla 9.

Vastaus: a) on
b) ei
c) ei

283

a) Jos luku on jaollinen alkuluvuilla 3 ja 5, se on jaollinen luvulla 15.

Ensimmäinen tällainen luku on 15 ja viimeinen 90.

Lukuja on 6 kappaletta (90 : 15 = 6).

b) Jos luku on jaollinen alkuluvuilla 3 tai 5, selvitetään ensin luvulla 3 jaolliset ja sitten luvulla 5 jaolliset.

Näiden lukumäärät lasketaan yhteen ja vähennetään tästä lukumäärästä niiden lukujen lukumäärä, jotka ovat jaollisia sekä luvulla 3 että luvulla 5.

Ensimmäinen luvulla 3 jaollinen luku on 3 ja viimeinen 99.

Luvulla 3 jaollisia lukuja on 33 kappaletta (99 : 3 = 33).

Ensimmäinen luvulla 5 jaollinen luku on 5 ja viimeinen 100.

Luvulla 5 jaollisia lukuja on 20 kappaletta (100 : 5 = 20).

A-kohdan perusteella luvulla 15 jaollisia lukuja on 6 kappaletta.

Siispä luvuilla 3 tai 5 jaollisia lukuja on: $33+20-6=47$

c) Täsmälleen toisella luvuista 3 ja 5 jaolliset luvut saadaan, kun luvuilla 3 tai 5 jaollisten lukujen joukosta poistetaan luvut, jotka ovat jaollisia luvuilla 3 ja 5.

Siten täsmälleen toisella luvuista 3 ja 5 jaollisia lukuja on:
$47-6=41$.

Vastaus: a) 6 kpl
b) 47 kpl
c) 41 kpl

284

Luvuilla 4 ja 10 jaollisia lukuja ovat lukujen 4 ja 10 pienimmillä yhteisellä monikerralla jaolliset luvut.

Selvitetään pienin yhteinen monikerta:

$$\mathrm{pym}(4,\ 10) = \frac{4 \cdot 10}{\mathrm{syt}(4,\ 10)} = \frac{40}{2} = 20.$$

Ensimmäinen tällainen luku on 20 ja viimeinen 10 000. Lukuja on $10000 : 20 = 500$ kpl.

Luvuista muodostuu aritmeettinen jono:

20, 40, 60,…, 9980, 10 000.

Jonon ensimmäinen termi on 20, viimeinen 10 000 ja erotusluku on 20.

Lukujen summa on siten aritmeettinen summa.

$$S_{500} = \frac{500 \cdot (20 + 10000)}{2} = 2505000 \qquad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Vastaus: 2 505 000

285

Koska lukujen $2 \cdot 5 = 10$ ja 12 suurin yhteinen tekijä on luku 2, eikä luku 1, luku a ei ole välttämättä jaollinen lukujen 10 ja 12 tulolla 120.

Etsitään vastaesimerkki.

Luku 60 on jaollinen luvulla 2, 5 ja 12, mutta luku 60 ei ole jaollinen luvulla 120.

Luku a ei siis välttämättä ole jaollinen luvulla 120.

Vastaus: ei ole

286

a) Muodostetaan tulojen alkulukukehitelmät.

$$72 \cdot 320 = (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 40) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$48 \cdot 480 = (6 \cdot 8) \cdot (6 \cdot 8 \cdot 10) = (2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5) = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Aritmetiikan peruslauseen mukaan nämä ovat lukujen ainoat alkulukuhajotelmat. Koska ne ovat identtiset, luvut ovat yhtä suuret.

b) Muodostetaan tulojen alkulukukehitelmät.

$$88 \cdot 25 = (8 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 5) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11) \cdot (5 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$$
$$20 \cdot 165 = (4 \cdot 5) \cdot (11 \cdot 15) = (2 \cdot 2 \cdot 5) \cdot (11 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Aritmetiikan peruslauseen mukaan nämä ovat lukujen ainoat alkulukuhajotelmat. Koska ne eivät ole identtiset, luvut eivät ole yhtä suuret.

Vastaus: a) ovat
b) eivät ole

287

a) Koska lukujen 7 ja 6 suurin yhteinen tekijä on luku 1, luku a on jaollinen lukujen 7 ja 6 tulolla (Lause 2 s. 124).

b) Koska lukujen 10 ja 15 suurin yhteinen tekijä on luku 5, eikä luku 1, luku a ei ole välttämättä jaollinen lukujen 10 ja 15 tulolla.

Etsitään vastaesimerkki.

Luku 30 on jaollinen luvulla 10 ja luvulla 15, mutta luku 30 ei ole jaollinen lukujen 10 ja 15 tulolla.

Luku a ei siis välttämättä ole jaollinen lukujen 10 ja 15 tulolla.

Vastaus: a) on
b) ei ole

288

a) Alkulukuhajotelma on:

$$48 \cdot 2766 = (6 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 40) = (2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 461) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 461.$$

b) Koska $5532 = 2 \cdot 2766$, alkulukuhajotelma on:

$$2 \cdot 2766 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 461 = 2^2 \cdot 3 \cdot 461$$

c) Koska $1383 = 2766 : 2$, alkulukuhajotelma on:

$$1383^4 = \left(\frac{2766}{2}\right)^4 = \left(\frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 461}{\cancel{2}}\right)^4 = (3 \cdot 461)^4 = 3^4 \cdot 461^4$$

Vastaus: a) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 461$
b) $2^2 \cdot 3 \cdot 461$
c) $3^4 \cdot 461^4$

289

Jos luku on korkeintaan kaksinumeroinen, on se sama kuin sen kahden viimeisen numeron muodostama luku. Tällöin väite on tosi.

Oletetaan, että luvussa on vähintään 3 numeroa. Tutkitaan tällöin lukua $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$, joka voidaan esittää summana

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Ryhmitellään summa:

$$
\begin{aligned}
& a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
&= 100\underbrace{(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2)}_{b} + (a_1 \cdot 10 + a_0) \\
&= 100b + (a_1 \cdot 10 + a_0).
\end{aligned}
$$

Koska $100b : 4 = 25b$, niin luku $100b$ on jaollinen luvulla 4.

Summa $100b + (a_1 \cdot 10 + a_0)$ on jaollinen luvulla 4 täsmälleen silloin, kun luku $a_1 \cdot 10 + a_0$ on jaollinen luvulla 4.

On siis osoitettu, että luku on jaollinen luvulla 4 täsmälleen silloin, kun sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen luvulla 4. □

290

Väite ”luku on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun se on jaollinen luvuilla 2 ja 3” tarkoittaa, että väitteiden

1) ”jos luku on jaollinen luvulla 6, niin se on jaollinen luvuilla 2 ja 3.”

ja

2) ”jos luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, niin se on jaollinen luvulla 6”

täytyy olla molempien totta.

Todistetaan ensin väite 1.

Jos luku on jaollinen luvulla 6, niin se voidaan kirjoittaa muodossa $6q$, jossa q on kokonaisluku.

Koska $6q = 2 \cdot 3 \cdot q$, $6q$ on jaollinen sekä luvulla 2, että luvulla 3.

Väite 1 on siten totta.

Todistetaan sitten väite 2.

Jos luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, jotka ovat alkulukuja, se on silloin jaollinen näiden lukujen tulolla. Tulo $2 \cdot 3 = 6$ on jaollinen luvulla 6.

Väite 2 on siten totta.

Koska molemmat väitteet 1 ja 2 ovat totta, on luku jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun se on jaollinen luvuilla 2 ja 3. $\square$

291

a) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 2 jakamalla luvulla 2.

$$69223 : 2 = 34611{,}5$$
$$594720 : 2 = 297360$$
$$8368292 : 2 = 4184146$$

Eli luvut 594 720 ja 8 368292 ovat jaollisia luvulla 2.

b) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 4 luvun kahden viimeisen numeron muodostaman luvun jaollisuuden perusteella (todistettu tehtävässä 289) .

$$23 : 4 = 5{,}75$$
$$20 : 4 = 5$$
$$92 : 4 = 23$$

Eli luvut 594 720 ja 8 368292 ovat jaollisia luvulla 4.

c) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 6 tarkastelemalla luvun jaollisuutta luvuilla 2 ja 3 (todistettu tehtävässä 290).

Luku 69 233 ei ole jaollinen luvulla 2, joten se ei ole jaollinen myöskään luvulla 6.

Luvun jaollisuutta luvulla 3 voidaan tutkia luvun numeroiden summan jaollisuuden perusteella.

$$5+9+4+7+2+0 \equiv 27 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$8+3+6+8+2+9+2 \equiv 38 \equiv 2 \pmod{3}$$

Koska luku 594 720 on jaollinen sekä luvulla 2 ja luvulla 3, luku 594 720 on jaollinen luvulla 6.

Vastaus: a) 594 720 ja 8 368292
b) 594 720 ja 8 368292
c) 594 720

292

Tutkitaan lukua $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$, joka voidaan esittää summana

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

Koska $10 \equiv -1 \pmod{11}$, niin kaikilla eksponenteilla $k > 0$ pätee, että $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.

Eli:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$
$$\equiv a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + ... + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \pmod{11}.$$

Siten luku $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ on jaollinen luvulla 11, jos ja vain jos luku $a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + ... + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$ on jaollinen luvulla 11. □

293

a) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 3 luvun numeroiden summan jaollisuuden perusteella.

$$1+0+7+1 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$1+1+5+5 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$1+8+8+7 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$2+2+9+9 \equiv 22 \equiv 1 \pmod{3}$$

Luvut 1071, 1155 ja 1887 ovat jaollisia luvulla 3.

b) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 9 luvun numeroiden summan jaollisuuden perusteella.

$$1+0+7+1 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}$$
$$1+1+5+5 \equiv 12 \equiv 3 \pmod{9}$$
$$1+8+8+7 \equiv 24 \equiv 6 \pmod{9}$$
$$2+2+9+9 \equiv 22 \equiv 4 \pmod{9}$$

Luku 1071 on jaollinen luvulla 9.

c) Tutkitaan jaollisuutta luvulla 11 tehtävän 292 mukaisesti.

$$1\cdot(-1)^3+0\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+1\equiv -7\equiv 4 \pmod{11}$$
$$1\cdot(-1)^3+1\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+5\equiv 0 \pmod{11}$$
$$1\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+7\equiv 6 \pmod{11}$$
$$2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)+9\equiv 0 \pmod{11}$$

Luvut 1155 ja 2299 ovat jaollisia luvulla 11.

Vastaus: a) 1071, 1155 ja 2299
b) 1071
c) 1155 ja 2299

294

a) Luvut 7 ja 17 ovat alkulukuja, joten luvun *n* tulee olla jaollinen lukujen 7 ja 17 tulolla eli luvulla 119.

Tutkitaan laskimella:

$$1000:119 = 8,403...$$
$$1100:119 = 9,243...\,.$$

Eli luvun *n* tulee olla $9 \cdot 119 = 1071$.

b) Luvut 5, 8 ja 12 eivät kaikki ole alkulukuja, joten luvun *n* tulee olla jaollinen lukujen 5, 8 ja 12 pienimmällä yhteisellä monikerralla.

Selvitetään laskimella:

pym(5, 8, 12) = pym(pym(5, 8), 12) = 120.

Tutkitaan laskimella:

$$1000:120 = 8,333...$$
$$1100:120 = 9,166...$$

Eli luvun *n* tulee olla $9 \cdot 120 = 1080$.

Vastaus: a) 1071
b) 1080

295

a) Jos luku on jaollinen luvuilla 6 tai 8, selvitetään ensin luvulla 6 jaolliset ja sitten luvulla 8 jaolliset.

Näiden lukumäärät lasketaan yhteen ja vähennetään tästä lukumäärästä niiden lukujen lukumäärä, jotka ovat jaollisia sekä luvulla 6 että luvulla 8.

Ensimmäinen luvulla 6 jaollinen luku on 6 ja viimeinen 498. Luvulla 6 jaollisia lukuja on 83 kappaletta (498 : 6 = 83).

Ensimmäinen luvulla 8 jaollinen luku on 8 ja viimeinen 496. Luvulla 8 jaollisia lukuja on 62 kappaletta (496 : 8 = 62).

Luvuilla 6 ja 8 jaollisia ovat luvut, jotka ovat jaollisia lukujen 6 ja 8 pienimmällä yhteisellä monikerralla eli luvulla

pym(6, 8) = 24.

Ensimmäinen luvulla 24 jaollinen luku on luku 24 ja viimeinen 480. Luvulla 24 jaollisia lukuja on 20 kappaletta (480 : 24 = 20).

Siispä luvuilla 6 tai 8 jaollisia lukuja on: $83 + 62 - 20 = 125$.

b) Jos luku on jaollinen luvulla 11, mutta ei luvulla 2 eikä 3, selvitetään ensin luvulla 11 jaolliset luvut. Tästä määrästä vähennetään luvut, jotka ovat luvun 11 lisäksi jaollisia luvulla 2 tai luvulla 3.

Ensimmäinen luvulla 11 jaollinen luku on 11 ja viimeinen 495. Luvulla 11 jaollisia lukuja on 45 kappaletta (495 : 11 =45).

Luvut, jotka ovat jaollisia luvuilla 11 ja 2, ovat jaollisia näiden lukujen tulolla eli luvulla 22. Ensimmäinen luvulla 22 jaollinen luku on 22 ja viimeinen 484. Luvulla 22 jaollisia lukuja on 22 kappaletta (484 : 22 = 22).

Luvut, jotka ovat jaollisia luvuilla 11 ja 3, ovat jaollisia näiden lukujen tulolla eli luvulla 33. Ensimmäinen luvulla 33 jaollinen luku on 33 ja viimeinen 484. Luvulla 33 jaollisia lukuja on 15 kappaletta (495 : 33 = 15).

Vielä pitää selvittää luvut, jotka ovat jaollisia luvuilla 2, 3 ja 11. Nämä luvut ovat jaollisia lukujen 2, 3 ja 11 tulolla 66. Ensimmäinen luvulla 66 jaollinen luku on 66 ja viimeinen 462. Luvulla 66 jaollisia lukuja on 7 kappaletta (462 : 66 = 7).

Nyt lasketaan yhteen niiden lukujen lukumäärä, jotka ovat jaollisia luvuilla 22 tai 33 ja vähennetään tästä summasta 66 jaollisten lukujen lukumäärä. Saadaan: $22+15-7=30$.

Saatu tulos vähennetään luvulla 11 jaollisten lukujen lukumäärästä.

Siispä luvulla 11, mutta ei luvulla 2 eikä 3 jaollisia lukuja on $45-30=15$ kappaletta.

Vastaus: a) 125 kpl
b) 15 kpl

296

a) Jos alkulukuhajotelmassa on vain lukuja 2 tai 3 (tai molempia), täytyy tutkia kuinka monta lukua, jotka ovat muotoa 2^n, 3^n ja $2^n \cdot 3^m$ on lukujoukossa {2, …, 1000}.

Etsitään laskimella ensin luvut, jotka ovat muotoa 2^n tai 3^n.

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	
9	512	
10	1024	

Näitä lukuja on yhteensä $9 + 6 = 15$ kappaletta.

Seuraavaksi selvitetään laskimen avulla muotoa $2^n \cdot 3^m$ olevat luvut. Hyödynnetään taulukossa edelliseen taulukkoon koottuja lukuja.

3^m / 2^n	3	9	27	81	243	729
2	6	18	54	162	486	1458
4	12	36	108	324	972	
8	24	72	216	648	1944	
16	48	144	432	1296		
32	96	288	864			
64	192	576	1728			
128	384	1152				
256	768					
512	1536					

Näitä lukuja on yhteensä 8 + 6 + 5 + 3 + 2 = 24 kappaletta.

Huomataan, että kysyttyjä lukuja on yhteensä 9 + 6 + 24 = 39 kappaletta.

b)

Luvuista, jotka ovat muotoa 2^n tai 3^n muodostuu geometriset summat.

Ensimmäisessä summassa suhdeluku on 2, ensimmäinen termi on 2 ja termejä on 9 kappaletta.

$$S_9 = \frac{2 \cdot (1-2^9)}{1-2} = 1022$$

Toisessa summassa suhdeluku on 3, ensimmäinen termi on 3 ja termejä on 6 kappaletta.

$$S_6 = \frac{3 \cdot (1-3^6)}{1-3} = 1092$$

Vastaavasti muotoa $2^n \cdot 3^m$ olevista luvuista muodostuu 5 geometrista summaa, joissa kaikissa suhdeluku on 2. Eli summat:

$$S_8 = \frac{6 \cdot (1-2^8)}{1-2} = 1530$$

$$S_6 = \frac{18 \cdot (1-2^6)}{1-2} = 1134$$

$$S_5 = \frac{54 \cdot (1-2^5)}{1-2} = 1674$$

$$S_3 = \frac{162 \cdot (1-2^3)}{1-2} = 1134$$

$$S_2 = \frac{486 \cdot (1-2^2)}{1-2} = 1458$$

Eli kaikkien lukujen, joiden alkulukuhajotelmassa on vain lukuja 2 tai 3 (tai molempia), summa on:

1022 + 1092 + 1530 + 1134 + 1674 + 1134 + 1458 = 9044.

Vastaus: a) 39 kpl
b) 9044

297

Koska oppikirjassa on 12 lukua, joissa jokaisessa on 20 tai 21 harjoitustehtävää, oppikirjan tehtävien määrä n on lukujen $12\cdot 20=240$ ja $12\cdot 21=252$ välillä eli $240\le n\le 252$.

Koska Jukan tehtävämäärä j on kolminkertainen Mikan tehtävämäärään m nähden ja seitsenkertainen Paavon tehtävämäärään p nähden, voidaan merkitä:

$$j=3m \text{ ja } j=7p \text{ eli}$$

$$m=\frac{j}{3} \text{ ja } p=\frac{j}{7}$$

Tehtäviä on siis yhteensä $j+\dfrac{j}{3}+\dfrac{j}{7}=\dfrac{31j}{21}$, joten:

$$n=\frac{31j}{21} \text{ ja } j=\frac{21n}{31}$$

Koska lukujen 31 ja 21 pienin yhteinen tekijä on 1, luvun n pitää olla jaollinen luvulla 31 (ja luvun j taas luvulla 21).

Etsitään väliltä $240\le n\le 252$ luku, joka on jaollinen luvulla 31.

$$240:31=7.741...$$

$$252:31=8.129...$$

$$31\cdot 8=248.$$

Nyt saadaan:

$$j = \frac{21 \cdot n}{31} = \frac{21 \cdot 248}{31} = 168, \quad m = \frac{168}{3} = 56 \text{ ja } p = \frac{168}{7} = 24.$$

Eli Jukka teki 168 tehtävää, Mika teki 56 tehtävää ja Paavo 24 tehtävää.

Vastaus: Jukka 168, Mika 56 tehtävää ja Paavo 24

298

Oletus Kokonaisluvun a neliö a^2 on jaollinen alkuluvulla p.

Väite Luku a^2 on jaollinen luvulla p^2.

Todistus Luku a^2 voidaan kirjoittaa tulona $a \cdot a$. Jos kokonaislukujen tulo on jaollinen alkuluvulla p, niin ainakin yksi tulon tekijöistä on jaollinen luvulla p (Eukleideen lemma).

Nyt siis luku a on jaollinen luvulla p. Eli luku $a = pq$, jossa q on kokonaisluku.

Saadaan:

$$a^2 = a \cdot a = pq \cdot pq = p^2q^2.$$

Koska luku $a^2 = p^2q^2$, luku a^2 on jaollinen luvulla p^2.

Väite on tosi. □

299

Oletus Tulo $a_1 a_2 ... a_n$ on jaollinen alkuluvulla p.

Väite Ainakin yksi tulon tekijöistä on jaollinen luvulla p .

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

a_1 on jaollinen alkuluvulla p.

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
Ainakin yksi tulon $a_1 a_2 ... a_n$ tekijöistä on jaollinen alkuluvulla p mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:
Ainakin yksi tulon $a_1 a_2 ... a_{n+1}$ tekijöistä on jaollinen alkuluvulla p.

Induktioväitteen todistus:
Muokataan tuloa $a_1a_2...a_{n+1}$.

$$a_1a_2...a_{n+1} = \underbrace{(a_1a_2...a_n)}_{\substack{\text{Induktio-oletuksen} \\ \text{mukaan ainakin yksi} \\ \text{tulon tekijöistä on} \\ \text{jaollinen alkuluvulla } p.}} \cdot a_{n+1}$$

Ainakin yksi tulon $a_1a_2...a_n$ tekijöistä on jaollinen alkuluvulla p, kun tulo $a_1a_2...a_n$ on jaollinen alkuluvulla p. Tällöin myös tulo $a_1a_2...a_{n+1}$ on jaollinen alkuluvulla p. Siten ainakin yksi tulon $a_1a_2...a_{n+1}$ tekijöistä on jaollinen alkuluvulla p.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □