83

a) Osoitetaan sijoittamalla, että yhtälö toteutuu, kun $x = 2$.

$$\begin{aligned} 2^2 + 2 - 6 &= 0 \\ 6 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

tosi

Luku $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x^2 + x - 6 = 0$. □

b) Osoitetaan ratkaisemalla yhtälö.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -3$$

Yhtälön ainoat ratkaisut ovat $x = 2$ ja $x = -3$. □

84

Osoitetaan sieventämällä binomin kuutio $(a-b)^3$.

Käytetään apuna binomin kuution muistikaavaa:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \square\end{aligned}$$

85

TAPA 1:

Osoitetaan ratkaisemalla epäyhtälö $f(x) > 0$.

$3x^2 - 6x + 9 > 0$

Ratkaistaan funktion nollakohdat:

$$3x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-108}}{6}$$

Ei nollakohtia.

Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia, funktio saa vain positiivisia arvoja. □

TAPA 2:

Osoitetaan muokkaamalla funktion lauseketta.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 9 &= 2x^2 + x^2 - 6x + 9 \\ &= 2x^2 + (x^2 - 6x + 9) \quad \text{Binomin neliö} \\ &= 2x^2 + (x-3)^2 \end{aligned}$$

Koska summalausekkeen molemmat yhteenlaskettavat ovat positiivia, summa on positiivinen. Funktio saa vain positiivisia arvoja. □

86

Oletuksena on, että luvut a ja b ovat parittomia kokonaislukuja. Pitää osoittaa, että tällöin myös lukujen tulo ab on pariton kokonaisluku.

Oletus a ja b ovat parittomia kokonaislukuja.

Väite ab on pariton kokonaisluku.

Todistus Koska luvut a ja b ovat parittomia, on olemassa sellaiset kokonaisluvut n ja m, että $a = 2n + 1$ ja $b = 2m + 1$.

Muodostetaan tulo ab.

$$\begin{aligned} ab &= (2n+1)(2m+1) \\ &= 2n \cdot 2m + 2n + 2m + 1 \\ &= 4nm + 2n + 2m + 1 \\ &= 2(2nm + n + m) + 1 \end{aligned}$$

$2nm + n + m$ on välttämättä kokonaisluku. Nyt voidaan merkitä $2nm + n + m = p$ $(p \in \mathbf{Z})$. Lukujen a ja b tulo voidaan nyt esittää muodossa $ab = 2p + 1$, joka on pariton kokonaisluku. □

87

Oletuksena on, että luku a on pariton kokonaisluku. Pitää osoittaa, että tällöin myös luvun kuutio a^3 on pariton kokonaisluku.

Oletus a on pariton kokonaisluku.

Väite a^3 on pariton kokonaisluku.

Todistus Koska luku a on pariton, on olemassa sellainen kokonaisluku n, että $a = 2n + 1$.

Muodostetaan kuutio a^3.

$$
\begin{aligned}
a &= (2n+1)^3 \\
&= (2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 + 3 \cdot 2n + 1 \\
&= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\
&= 2(4n^3 + 6n + 3) + 1
\end{aligned}
$$

$4n^3 + 6n + 3$ on välttämättä kokonaisluku. Nyt voidaan merkitä $4n^3 + 6n + 3 = p$ $(p \in \mathbf{Z})$. Luvun a kuutio voidaan esittää muodossa $a^3 = 2p + 1$, joka on pariton kokonaisluku. □

88

Oletuksena on, että luku on kahdella jaolliseen eli parilliseen numeroon päättyvä kokonaisluku. Pitää osoittaa, että tällöin koko luku on myös parillinen.

Oletus Luvun a viimeinen numero on parillinen.

Väite a on parillinen kokonaisluku.

Todistus Koska luvun a viimeinen numero on parillinen, on olemassa sellainen kokonaisluku n ja sellainen parillinen kokonaisluku k, että $a = 10n + k$.

Merkitään, että $k = 2m$ $(m \in \mathbf{Z})$.

Tällöin

$$\begin{aligned} a &= 10n + 2m \\ &= 2 \cdot 5n + 2m \\ &= 2(5n + m) \end{aligned}$$

$5n + m$ on välttämättä kokonaisluku. Nyt voidaan merkitä $5n + m = p$ $(p \in \mathbf{Z})$. Luku a voidaan esittää muodossa $a = 2p$, joka on parillinen kokonaisluku. □

89

Oletuksena on, että luku on luvulla 3 jaollinen kokonaisluku. Pitää osoittaa, että tällöin luvun kuutio on jaollinen luvulla 27.

Oletus a jaollinen luvulla 3.

Väite a^3 on jaollinen luvulla 27.

Todistus Koska luku a on jaollinen luvulla 3, on olemassa sellainen kokonaisluku n, että $a = 3n$.

Muodostetaan luvun a kuutio.

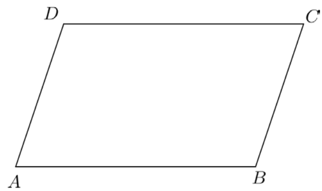
$$\begin{aligned} a^3 &= (3n)^3 \\ &= 3^3 \cdot n^3 \\ &= 27n^3 \end{aligned}$$

Koska luku a^3 on kokonaislukujen 27 ja n^3 tulo, niin se on jaollinen luvulla 27. □

90

Määritelmän mukaan suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. Lisäksi esimerkin 3 perusteella vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkä.

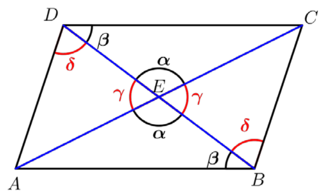
Oletus Nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.



Väite Nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa.

Todistus Piirretään lävistäjät.

Lävistäjien leikkauskohtaan syntyvät ristikulmat ovat yhtä suuret:



$$\sphericalangle CED = \sphericalangle AEB \ (= \alpha)$$
$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle BEC \ (= \gamma).$$

Koska vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat myös yhtä suuret:

$$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EBA \ (= \beta)$$
$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle CBE \ (= \delta).$$

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseen (kk) perusteella kolmiot ADE ja CBE sekä kolmiot DCE ja BAE ovat yhdenmuotoiset ja niiden vastinsivujen suhteet ovat yhtä suuret.

Esimerkissä 3 osoitettiin, että vastinsivujen AD ja CB suhde on $1:1$ ja $|AD| = |CB|$ (eli $|AD| = |BC|$) .

Tällöin myös kolmioiden ADE ja CBE muiden vastinsivujen suhde on $1:1$ ja vastinsivut ovat yhtä pitkät.

Kolmion ADE sivun DE vastinsivu kolmiossa CBE on BE. Sivujen suhde on $1:1$ ja $|DE| = |BE|$.

Vastaava pätee myös kolmioille DCE ja BAE. Eli vastinsivujen suhde on $1:1$ ja vastinsivut ovat yhtä pitkät.

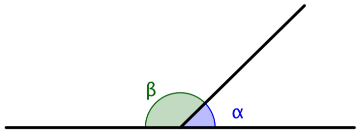
Kolmion DCE sivun CE vastinsivu kolmiossa BAE on AE. Sivujen suhde on $1:1$ ja $|CE| = |AE|$.

Koska $|DE| = |BE|$ ja $|CE| = |AE|$, piste E eli lävistäjien leikkauspiste on lävistäjien puolivälissä. Toisin sanoen suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. □

91

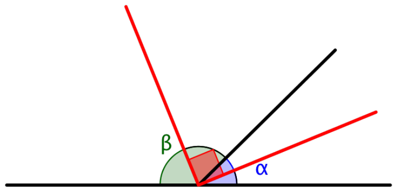
Määritelmän mukaan vieruskulmat muodostavat oikokulman eli vieruskulmien summa on $180°$.

Oletus Vieruskulmien summa on $180°$.



Väite Vieruskulmien puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Eli vieruskulmien puolittajat muodostavat $90°$ kulman.

Todistus Piirretään kuva.



Hyödynnetään tietoa vieruskulmien summasta:

$$\alpha+\beta=180°$$
$$\alpha=180°-\beta.$$

Vieruskulmien puolittajien välinen kulma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta&=\frac{1}{2}(180°-\beta)+\frac{1}{2}\beta\\&=90°-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\beta\\&=90°.\ \square\end{aligned}$$

92

Oletus n on kokonaisluku.

Väite $n^3 - n$ on jaollinen luvulla 3.

Todistus Jaetaan luku $n^3 - n$ tekijöihin:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\ &= n(n+1)(n-1). \end{aligned}$$

Koska n on kokonaisluku, luvut $n-1$, n ja $n+1$ ovat kolme peräkkäistä kokonaislukua. Koska luvut ovat peräkkäiset, näistä täsmälleen yksi luku on jaollinen luvulla 3.

Koska yksi luvun $n^3 - n$ tekijöistä on jaollinen luvulla 3, on luku $n^3 - n$ jaollinen luvulla 3. □

93

Sievennetään lauseke $(a+b+c)^2$.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \quad \square\end{aligned}$$

Sieventämisessä hyödynnetty binomin neliön muistikaavaa.

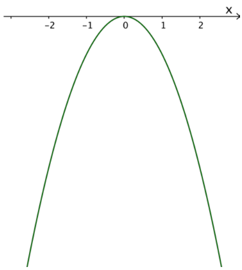
94

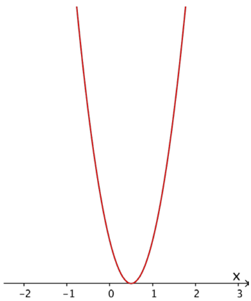
Tutkitaan tulon $-x^2(4x^2-4x+1)$ merkkiä.

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat.

$$\begin{aligned} -x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x^2-4x+1 &= 0 \\ (2x-1)^2 &= 0 \\ 2x-1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hahmotellaan kuvaajat.





Laaditaan merkkikaavio.

$-x^2$	$-$	$-$	$-$
$4x^2-4x+1$	$+$	$+$	$+$
$-x^2(4x^2-4x+1)$	$-$	$-$	$-$
x		0	$\frac{1}{2}$

Koska tulo $-x^2(4x^2-4x+1)$ on 0, kun $x=0$ tai $x=\frac{1}{2}$ ja muutoin arvoltaan negatiivinen, funktion $f(x)=-x^2(4x^2-4x+1)-1$ arvot ovat aina negatiivisia. □

95

Oletus n on kokonaisluku.

Väite $n^3 + n$ on parillinen.

Todistus Jaetaan luku $n^3 + n$ tekijöihin:

$n^3 + n = n(n^2 + 1)$.

Tutkitaan erikseen tapauksia, joissa n on parillinen ja pariton.

1. Jos n on parillinen, tulo $n(n^2 + 1)$ on parillinen eli $n^3 + n$ on parillinen.

2. Jos n on pariton, n^2 on myös pariton (osoitettu esimerkissä 1), ja siten $n^2 + 1$ on parillinen. Tulo $n(n^2 + 1)$ on parillinen eli $n^3 + n$ on parillinen.

Kohtien 1 ja 2 perusteella $n^3 + n$ on parillinen. □

96

Oletus $a < b$ ja $c < d$

Väite $a + c < b + d$

Todistus Lasketaan oletuksen epäyhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{aligned} a &< b \\ c &< d \\ a + c &< b + c \end{aligned}$$

Epäyhtälö $a + c < b + d$ pitää paikkansa. □

97

Oletus Luvut a, b, c, d, e ovat peräkkäisiä ja luonnollisia.

Väite Tulo $abcde$ on jaollinen luvulla 5.

Todistus Koska viisi lukua ovat peräkkäisiä ja luonnollisia, näistä täsmälleen yksi luku on jaollinen luvulla 5.

Koska yksi tulon $abcde$ tekijöistä on jaollinen luvulla 5, on tulo $abcde$ jaollinen luvulla 5. □

98

Oletus Luku n kokonaisluku.

Väite Luku $n^3 - 9n$ on parillinen.

Todistus Jaetaan luku $n^3 - 9n$ tekijöihin:

$$\begin{aligned} n^3 - 9n &= n(n^2 - 9) \\ &= n(n+3)(n-3) \end{aligned}$$

Tarkastellaan erikseen tapaukset, joissa n on parillinen ja n on pariton.

1. Jos n on parillinen, tulo $n(n+3)(n-3)$ on myös parillinen. Eli $n^3 - 9n$ on parillinen.

2. Jos n on pariton, $n+3$ on parillinen (tai vastaavasti $n-3$ on parillinen) ja tulo $n(n+3)(n-3)$ on parillinen. Eli $n^3 - 9n$ on parillinen.

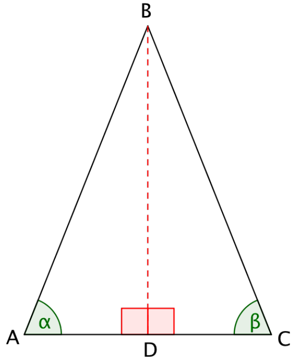
Kohdista 1 ja 2 seuraa, että $n^3 - 9n$ on parillinen. □

99

Oletus Kolmio on tasakylkinen.

Väite Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

Todistus Piirretään mallikuva.



Jaetaan kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Tasakylkisen kolmion huipusta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman.

Kolmiot *ABD* ja *CBD* ovat yhdenmuotoisuuslauseen (kk) perusteella yhdenmuotoiset, koska

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ ja

$\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDB.$

Koska kolmiot ovat yhdenmuotoiset, ovat myös kulmat α ja β yhtä suuret. Eli tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. □

100

Oletus Luvut *b*, *c* ja *d* eivät ole nollia.

Väite $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Todistus Hyödynnetään jakolaskun määritelmää:

$m : n = q$, jos $nq = m$ $(n \neq 0)$.

Merkitään: $m = \frac{a}{b}$, $n = \frac{c}{d}$, $q = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$$
\begin{aligned}
nq &= \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \\
&= \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} \\
&= \frac{a}{b} = m
\end{aligned}
$$

Eli $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. □

101

Oletus Luvut x ja y ovat reaalilukuja.

Väite $|x||y|=|xy|$

Todistus Hyödynnetään itseisarvon määritelmää.

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{kun } x<0\\ x, & \text{kun } x\geq 0\end{cases}$$

Tutkitaan kaikki 4 tapausta erikseen.

1. $x<0,\ y<0$
   $|x||y|=(-x)(-y)=xy=|xy|$

2. $x<0,\ y\geq 0$
   $|x||y|=(-x)\cdot y=-xy=|xy|$

3. $x\geq 0,\ y<0$
   $|x||y|=x\cdot(-y)=-xy=|xy|$

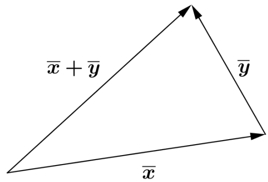
4. $x\geq 0,\ y\geq 0$
   $|x||y|=xy=|xy|$

Kohdista 1-4 seuraa, että kun x ja y ovat reaalilukuja, $|x||y|=|xy|$. □

102

Oletus $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat vektoreita.

Väite $\left|\overline{x}+\overline{y}\right| \le \left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|$ eli vektoreiden summavektorin pituus on pienempi tai yhtä suuri kuin vektoreiden pituuksien summa.



Todistus Koska väitteenä olevan epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun sen molemmat puolet korotetaan neliöön.

$$\left|\overline{x}+\overline{y}\right| \le \left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right| \quad |(\ )^2$$

$$\left|\overline{x}+\overline{y}\right|^2 \le (\left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|)^2$$

Tutkitaan epäyhtälön vasenta puolta.

$$\begin{aligned}
\left|\overline{x}+\overline{y}\right|^2 &= (\overline{x}+\overline{y})\cdot(\overline{x}+\overline{y}) && \color{blue}{\left|\overline{a}\right|^2 = \overline{a}\cdot\overline{a}} \\
&= \overline{x}\cdot\overline{x} + 2\overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{y}\cdot\overline{y} && \color{blue}{\overline{a}\cdot\overline{a} = \left|\overline{a}\right|^2} \\
&= \left|\overline{x}\right|^2 + 2\overline{x}\cdot\overline{y} + \left|\overline{y}\right|^2 && \color{blue}{\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})} \\
&= \left|\overline{x}\right|^2 + 2\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|\cos(\overline{x},\overline{y}) + \left|\overline{y}\right|^2 && \color{blue}{-1 \le \cos\alpha \le 1} \\
&\le \left|\overline{x}\right|^2 + 2\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right| + \left|\overline{y}\right|^2 \\
&= (\left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|)^2
\end{aligned}$$

Nyt on todistettu, että $\left|\overline{x}+\overline{y}\right|^2 \le (\left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|)^2$.

Samalla on todistettu, että väitteenä ollut epäyhtälö $\left|\overline{x}+\overline{y}\right| \le \left|\overline{x}\right| + \left|\overline{y}\right|$ pitää paikkansa. □

103

Oletus x ja y ovat reaalilukuja.

Väite $\big||x|-|y|\big| \le |x+y|$

Todistus Hyödynnetään tietoa:

$$|x| = |x+y-y| = |(x+y)+(-y)| \text{ ja}$$
$$|y| = |x+y-x| = |(x+y)+(-x)|.$$

Sovelletaan näihin tuloksiin kolmioepäyhtälöä:

$$\begin{aligned} |x| &= |(x+y)+(-y)| \qquad && |a+b| \le |a|+|b| \\ &\le |x+y| + |-y| \\ &= |x+y| + |y| \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} |y| &= |(x+y)+(-x)| \qquad && |a+b| \le |a|+|b| \\ &\le |x+y| + |-x| \\ &= |x+y| + |x|. \end{aligned}$$

Nyt siis $|x| \le |x+y| + |y|$ ja $|y| \le |x+y| + |x|$.

Muokataan saatuja epäyhtälöitä.

$$
\begin{aligned}
|x| &\leq |x+y| + |y| \\
|x| - |y| &\leq |x+y|
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
|y| &\leq |x+y| + |x| \\
|y| - |x| &\leq |x+y| \qquad\qquad b-a = -(a-b) \\
-(|x| - |y|) &\leq |x+y|.
\end{aligned}
$$

Eli saadaan epäyhtälöt:

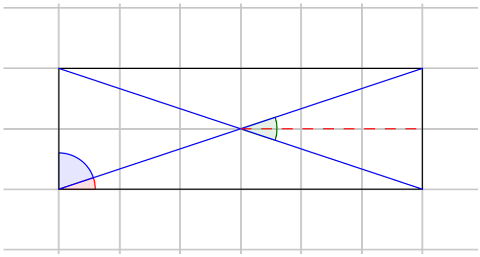
$|x| - |y| \leq |x+y|$ ja $-(|x| - |y|) \leq |x+y|$.

Itseisarvon määritelmän perusteella voidaan nyt todeta, että käänteinen kolmioepäyhtälö

$||x| - |y|| \leq |x+y|$ pätee. □

104

Laaditaan lauseille vastaesimerkki.



a) Kuvan suorakulmion lävistäjien välinen terävä kulma on kooltaan:

$$\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18{,}43°$$

$$\alpha \approx 36°$$

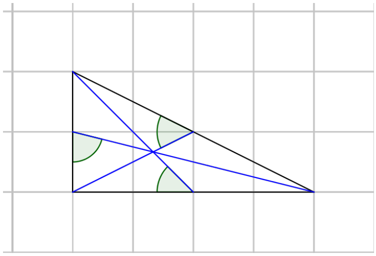
Kyseisen suorakulmion lävistäjät eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten a-kohdan lause on epätosi. □

b) Kyseisen suorakulmion lävistäjät jakavat suorakulmion kulmat noin $18°$ (samankohtainen kuin a-kohdan kulma $\frac{1}{2}\alpha$) ja $72°$ kokoisiksi kulmiksi.

Kyseisen suorakulmion lävistäjä ei jaa suorakulmion kulmaa kahteen yhtä suureen osaan, joten b-kohdan lause on epätosi. □

105

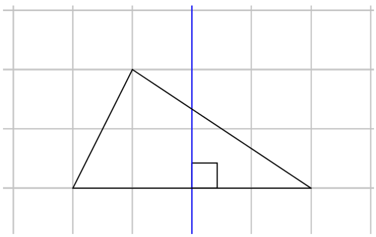
a) Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.



Mikään kyseisen kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle piirretty keskijana ei ole kohtisuorassa vastakkaista sivua vastaan. □

Lause pätee tasakylkiselle kolmiolle, sillä voidaan osoittaa, että tasakylkisen kolmion huippukulman kärjestä piirretty keskijana on kohtisuorassa vastakkaista sivua vasten.

b) Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.



Kyseisen kolmion ainakin yhden sivun keskinormaali ei kulje vastakkaisen kärkipisteen kautta, joten lause on epätosi. □

Lause pätee tasasivuiselle kolmiolle, sillä voidaan osoittaa, että tasasivuisen kolmion jokaisen sivun keskinormaali kulkee vastakkaisen kärkipisteen kautta.

106

a) Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

n	n^2	n^3	$n^2 \leq n^3$
1	1	1	tosi
2	4	8	tosi
3	9	27	tosi
-1	1	-1	epätosi

Huomataan, että kokonaisluku -1 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “$\forall n \in \mathbf{Z} : n^2 \leq n^3$” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

b) Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

n	n^2	n^3	$n^3 - n^2$	$n^3 - n^2 \leq 50$
1	1	1	0	tosi
2	4	8	4	tosi
3	9	27	18	tosi
4	16	64	48	tosi
5	25	125	100	epätosi

Huomataan, että luonnollinen luku 5 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “$\forall n \in \mathbf{N} : n^3 - n^2 \leq 50$” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

107

a) Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

x	x^2	$x < 3$	$x^2 \leq 9$
2	4	tosi	tosi
1	1	tosi	tosi
0	0	tosi	tosi
–1	1	tosi	tosi
–2	4	tosi	tosi
–3	9	tosi	tosi
–4	16	tosi	epätosi

Huomataan, että reaaliluku -4 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “ jos $x < 3$, niin $x^2 < 9$ ” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

b) Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

x	x^2	$x^2 > 1$	$x > 1$
2	4	tosi	tosi
3	9	tosi	tosi
4	16	tosi	tosi
–1	1	tosi	tosi
–2	4	tosi	epätosi

Huomataan, että reaaliluku -2 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “ jos $x^2 > 1$, niin $x > 1$ ” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

108

a) **Oletus** Luvut x ja y ovat rationaalilukuja.

Väite Luku $x+y$ on rationaaliluku.

Todistus Koska x ja y ovat rationaalilukuja, ne voidaan esittää muodossa $x=\frac{m}{n}$ ja $y=\frac{p}{q}$, missä n, m, p ja q ovat kokonaislukuja ($n\neq 0, q\neq 0$).

Lasketaan summa $x+y$.

$$x+y = \frac{^{q)}m}{n}+\frac{^{n)}p}{q}$$ Lavennetaan samannimisiksi.

$$=\frac{qm}{qn}+\frac{np}{nq}$$ Lasketaan osoittajien summa.

$$=\frac{mq+np}{nq}$$ Nimittäjäksi tulee yhteinen nimittäjä.

Koska luvut $mq+np$ ja nq ($nq\neq 0$) ovat kokonaislukuja, luku $x+y$ on rationaaliluku. □

b) Muodostetaan lause: ”Kahden irrationaaliluvun summa on aina irrationaaliluku.”

Esitetään lauseelle vastaesimerkki:

$$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$$

Koska luku 0 ei ole irrationaalinen, kahden irrationaaliluvun summa ei ole aina irrationaalinen.

Alkuperäinen lause on epätosi. $\square$

109

a) **Oletus** Luvut $n,\ n+1$ ja $n+2$ ovat peräkkäisiä kokonaislukuja.

Väite Lukujen $n,\ n+1$ ja $n+2$ summa on jaollinen luvulla 3.

Todistus Lasketaan summa lukujen $n,\ n+1$ ja $n+2$ summa.

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= 3n+3 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Erotetaan yhteinen tekijä 3.

Koska lukujen $n,\ n+1$ ja $n+2$ summa voidaan esittää tulona $3(n+1)$, jossa toisena tekijänä on luku 3, summa on jaollinen luvulla 3. □

b) Muodostetaan lause: ”Neljän peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla 4.”

Esitetään lauseelle vastaesimerkki:

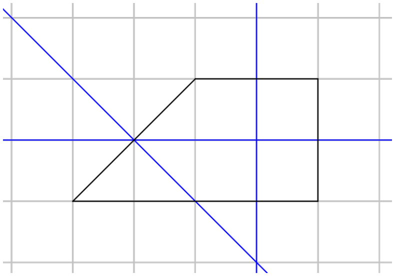
$$0+1+2+3=6.$$

Koska luku 6 ei ole jaollinen luvulla 4, neljän peräkkäisen kokonaisluvun summa ei ole aina jaollinen luvulla 4.

Alkuperäinen lause on epätosi. □

110

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.

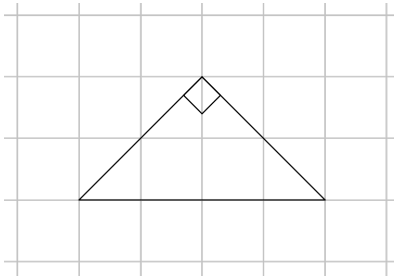


Kuvan nelikulmion kolmen sivun keskinormaalit eivät leikkaa samassa pisteessä.

Koska lauseella on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

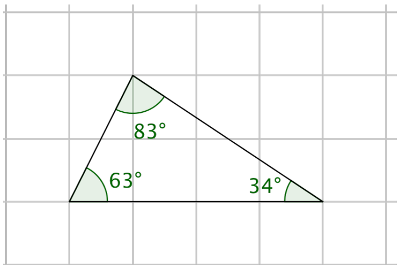
111

a) Riittää, että löydetään yksi esimerkki suorakulmaisesta, tasakylkisestä kolmiosta.



Lause on tosi. □

b) Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.



Kuvan kolmion kulmat ovat:

$$\tan\alpha = \frac{2}{1} \qquad \tan\beta = \frac{2}{3} \qquad \gamma = 180° - 63° - 34°$$

$$\alpha \approx 63° \qquad \beta \approx 34° \qquad = 83°$$

Kuvan kolmion kaikki kulmat ovat teräviä, mutta erisuuria, joten kolmio ei ole tasakylkinen. Alkuperäinen väite on epätosi. □

112

Oletus x on reaaliluku.

Väite $\exists x \in \mathbf{R} : 3 - 4x^2 \geq 0$ eli on olemassa (ainakin 1) reaaliluku x, joka toteuttaa epäyhtälön $3 - 4x^2 \geq 0$.

Todistus Riittää, että löydetään yksi reaaliluku, joka toteuttaa tämän epäyhtälön.

Sijoitetaan $x = 0$ epäyhtälön vasemmalle puolelle.

$$3 - 4 \cdot 0^2 = 3$$

Saatu tulos 3 on suurempi tai yhtä suuri kuin 0.

Väite on totta. □

113

Oletus x on reaaliluku.

Väite $x^2 - 6x + 5 < 0$, kun $1 < x < 5$.

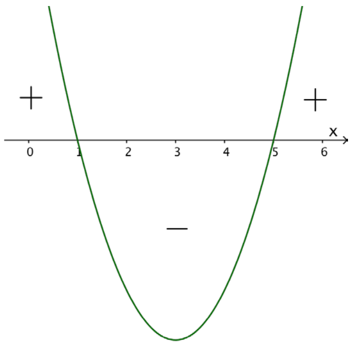
Todistus Todistetaan ratkaisemalla epäyhtälö.

Ratkaistaan funktion $x^2 - 6x + 5$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 4}{2}
\end{aligned}
$$

$x = 5 \quad$ tai $\quad x = 1$

Hahmotellaan funktion kuvaaja.



Laaditaan merkkikaavio.

x^2-6x+5	$+$	$-$	$+$
	1	5	

Merkkikaaviosta ja kuvaajasta nähdään, että
$x^2-6x+5<0$, kun $1<x<5$.

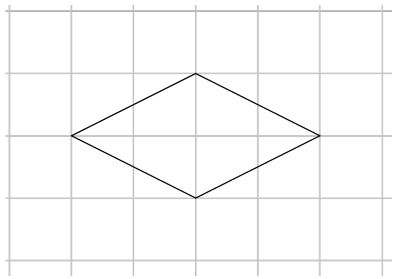
Väite ” $x^2-6x+5<0$, kun $1<x<5$” on tosi. □

114

a) Monikulmio on säännöllinen, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja sen kaikki kulmat yhtä suuria.

Neljäkäs on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.

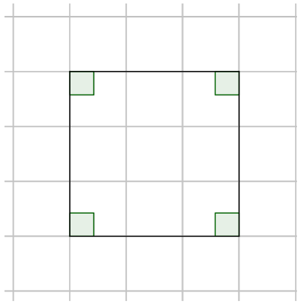


Kuvan neljäkäs ei ole säännöllinen monikulmio, koska sen kulmat eivät ole yhtä suuret.

Lause on epätosi. □

b) Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.



Neliö on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Neliö on siten myös säännöllinen monikulmio.

Lause on epätosi. □

115

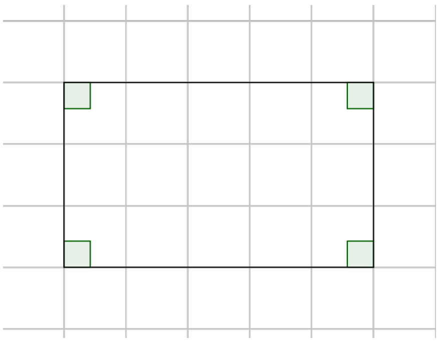
a) Määritelmänsä mukaisesti suorakulmio on suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

Joten kaikki suunnikkaille voimassa olevat ominaisuudet ovat voimassa myös kaikille suorakulmioille.

Väite on tosi. □

b) Määritelmänsä mukaisesti neliö on suorakulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.

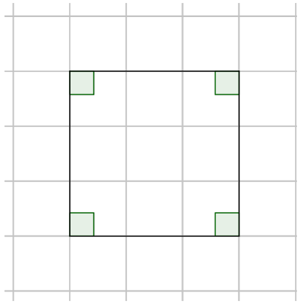


Kuvan suorakulmion kaikki sivut eivät ole yhtä pitkät, joten kaikki neliön ominaisuudet eivät ole voimassa kaikille suorakulmioille.

Väite on epätosi. □

b) Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.



Neliö on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Neliö on siten myös säännöllinen monikulmio.

Lause on epätosi. □

116

a) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{Z} : n^3 - n^2 \geq 0$ eli

”kaikilla kokonaislukuarvoilla pätee: luvun kuution ja luvun neliön erotus on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla”

epätodeksi vastaesimerkillä.

Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

n	n^2	n^3	$n^3 - n^2$	$n^3 - n^2 \geq 0$
1	1	1	0	tosi
2	4	8	4	tosi
3	9	27	18	tosi
-1	1	-1	-2	epätosi

Huomataan, että kokonaisluku -1 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “$\forall n \in \mathbf{Z} : n^3 - n^2 \geq 0$” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. $\square$

b) Osoitetaan lause $\forall n \in \mathbf{R} : -n \leq n$ eli

”kaikilla reaalilukuarvoilla pätee: luvun vastaluku on pienempi tai yhtä suuri kuin luku itse”

epätodeksi vastaesimerkillä.

Etsitään lauseelle vastaesimerkki järjestelmällisellä kokeilulla.

n	$-n$	$-n \leq n$
1	1	tosi
2	–2	tosi
3	–3	tosi
–1	1	epätosi

Huomataan, että reaaliluku -1 käy lauseen vastaesimerkiksi.

Koska lauseella “$\forall n \in \mathbf{R} : -n \leq n$” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

117

a) Osoitetaan lause jos $x < y$, niin $x^2 < y^2$ epätodeksi vastaesimerkillä.

Etsitään lauseelle vastaesimerkki kokeilulla.

x	y	x^2	y^2	$x^2 < y^2$
1	2	1	4	tosi
2	3	4	9	tosi
3	4	9	16	tosi
-1	0	1	0	epätosi

Huomataan, että arvot $x = -1$, $y = 0$ käyvät lauseen vastaesimerkiksi, sillä:

$-1 < 0$, mutta $(-1)^2 = 1$, joka on suurempi kuin 0.

Koska lauseella “ jos $x < y$, niin $x^2 < y^2$ ” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

b) Osoitetaan lause jos $x < y$ ja $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, niin $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ epätodeksi vastaesimerkillä.

Etsitään lauseelle vastaesimerkki kokeilulla.

x	y	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{y}$	$\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
1	2	1	$\dfrac{1}{2}$	tosi
2	3	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	tosi
3	4	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	tosi
–2	2	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	epätosi

Huomataan, että arvot $x = -2$, $y = 2$ käyvät lauseen vastaesimerkiksi, sillä:

$-2 < 2$, mutta $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$.

Koska lauseella “ jos $x < y$ ja $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, niin $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ ” on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

118

a) **Oletus** Luvut x ja y ovat rationaalilukuja.

Väite Luku xy on rationaaliluku.

Todistus Koska x ja y ovat rationaalilukuja, ne voidaan esittää muodossa $x=\frac{m}{n}$ ja $y=\frac{p}{q}$, missä n, m, p ja q ovat kokonaislukuja ($n\neq 0, q\neq 0$).

Lasketaan tulo xy.

$$xy=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$$

Osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$$=\frac{mp}{nq}$$

Koska luvut mp ja nq ($nq\neq 0$) ovat kokonaislukuja, luku xy on rationaaliluku. □

b) Muodostetaan lause: ”Kahden irrationaaliluvun tulo on aina irrationaaliluku.”

Esitetään lauseelle vastaesimerkki:

$$-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$$

Koska luku -2 ei ole irrationaalinen, kahden irrationaaliluvun tulo ei ole aina irrationaalinen.

Alkuperäinen lause on epätosi. $\square$

119

a) **Oletus** Luvut $2n+1$ ja $2n+3$ ovat peräkkäisiä parittomia kokonaislukuja.

Väite Lukujen $2n+1$ ja $2n+3$ summa on jaollinen luvulla 4.

Todistus Lasketaan summa lukujen $2n+1$ ja $2n+3$ summa.

$$\begin{aligned}(2n+1)+(2n+3) &= 4n+4 \\ &= 4(n+1)\end{aligned}$$

Erotetaan yhteinen tekijä 4.

Koska lukujen $2n+1$ ja $2n+3$ summa voidaan esittää tulona $4(n+1)$, jossa toisena tekijänä on luku 4, kahden peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa on jaollinen luvulla 4. □

b) Muodostetaan lause: ”Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla 4.”

Esitetään lauseelle vastaesimerkki:

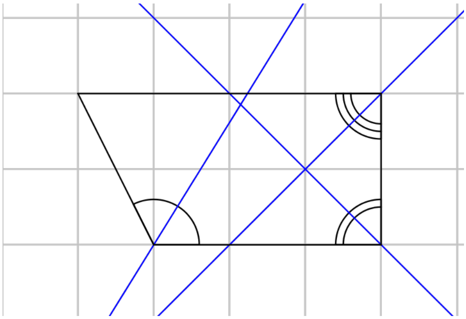
$$2+4=6.$$

Koska luku 6 ei ole jaollinen luvulla 4, kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun summa ei ole aina jaollinen luvulla 4.

Alkuperäinen lause on epätosi. □

120

Laaditaan lauseelle vastaesimerkki.

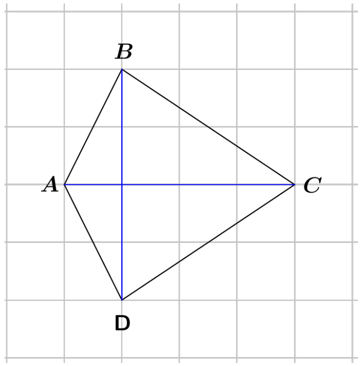


Kuvan nelikulmion kolmen kulman kulmanpuolittajat eivät leikkaa samassa pisteessä.

Koska lauseella on ainakin yksi vastaesimerkki, lause on epätosi. □

121

a) Todistetaan lause.



Olkoon $ABCD$ leija, jonka sivut AB ja AD ovat yhtä pitkät ja sivut CB ja CD ovat yhtä pitkät. Tällöin kärjet A ja C ovat janan BD keskinormaalilla.

Eli leijan lävistäjät ovat aina kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite on tosi. □

b) Laaditaan vastaesimerkki väitteelle.

Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkät eli neliössä on 2 paria yhtä pitkiä vierekkäisiä sivuja. Neliö on siten leija.

Neliön vastakkaiset sivut ovat kuitenkin yhdensuuntaiset. Ei pidä siis paikkaansa, että leijan kaikki sivut ovat aina erisuuntaiset.

Väite on epätosi. □

122

a) Todistetaan väite $\forall x \exists y : xy = x$ eli ”kaikilla reaaliluvuilla x on olemassa jokin y siten, että $xy = x$”.

Olkoon x mikä tahansa reaaliluku. Valitaan $y = 1$. Jos luku x kerrotaan luvulla y (joka on 1), tuloksena on luku x.

Eli jos luvulla 1 kerrotaan mikä tahansa reaaliluku, tuloksena on reaaliluku itse.

Väite on tosi. □

b) Todistetaan väite $\forall y \exists x : xy = x$ eli ”kaikilla reaaliluvuilla y on olemassa jokin x siten, että $xy = x$”.

Olkoon y mikä tahansa reaaliluku. Valitaan $x = 0$. Jos nyt luku y kerrotaan luvulla x (joka on 0), tuloksena on luku x.

Eli jos luvulla 0 kerrotaan mikä tahansa reaaliluku, tuloksena on 0.

Väite on tosi. □

b) Laaditaan vastaesimerkki väitteelle.

Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkät eli neliössä on 2 paria yhtä pitkiä vierekkäisiä sivuja. Neliö on siten leija.

Neliön vastakkaiset sivut ovat kuitenkin yhdensuuntaiset. Ei pidä siis paikkaansa, että leijan kaikki sivut ovat aina erisuuntaiset.

Väite on epätosi. □

123

a) Todistetaan väite $\forall x \exists y : x + y = x$ eli ”kaikilla reaaliluvuilla x on olemassa jokin y siten, että $x + y = x$”.

Olkoon x mikä tahansa reaaliluku. Valitaan $y = 0$. Jos lukuun x lisätään luku y (joka on 0), tuloksena on luku x.

Eli jos luku 0 lisätään mihin tahansa reaalilukuun, tuloksena on reaaliluku itse.

Väite on tosi. □

b) Todistetaan väite $\forall y \exists x : x + y = x$ eli ”kaikilla reaaliluvuilla y on olemassa jokin x siten, että $x + y = x$”.

Esitetään vastaesimerkki.

Valitaan $y = 1$. Tällöin mikään luku x ei toteuta yhtälöä $x + 1 = x$.

Väite on epätosi. □

b) Laaditaan vastaesimerkki väitteelle.

Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkät eli neliössä on 2 paria yhtä pitkiä vierekkäisiä sivuja. Neliö on siten leija.

Neliön vastakkaiset sivut ovat kuitenkin yhdensuuntaiset. Ei pidä siis paikkaansa, että leijan kaikki sivut ovat aina erisuuntaiset.

Väite on epätosi. □

124

Oletus Lapsia on kahdeksan.

Väite Ainakin kaksi lasta on syntynyt samana viikonpäivänä.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kaikki lapset ovat syntyneet eri viikonpäivinä.

Koska viikonpäiviä on seitsemän, lapsia voi olla enintään seitsemän.

On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

125

Oletus Päivittäin syntyy noin 360 000 lasta.

Väite Ainakin viisi lasta syntyy samalla sekunnilla.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että enintään neljä lasta syntyy samalla sekunnilla.

Koska vuorokaudessa on

$24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekuntia,

vuorokaudessa voisi syntyä enintään

$4 \cdot 86400 = 345600$ lasta.

On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

126

Oletus Kokonaisluvun neliö a^2 on pariton.

Väite Kokonaisluku a on pariton.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kokonaisluku a on parillinen.

Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku n, että $a = 2n$.

Lasketaan neliö a^2.

$$\begin{aligned} a^2 &= (2n)^2 \\ &= 4n^2 \\ &= 2(2n^2) \end{aligned}$$

Koska luku $2n^2$ on kokonaisluku, niin kokonaisluvun neliö $a^2 = 2(2n^2)$ on parillinen.

On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

127

Oletus Kokonaislukujen a ja b tulo ab on parillinen.

Väite Ainakin toinen luvuista a ja b on parillinen.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että molemmat luvut a ja b ovat parittomia.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $a = 2m + 1$ ja $b = 2n + 1$.

Lasketaan tulo ab.

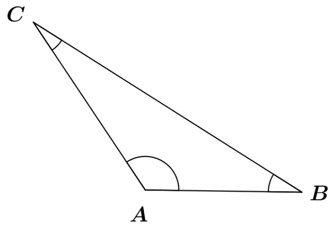
$$\begin{aligned} ab &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

Koska luku $2mn + m + n$ on kokonaisluku, niin kahden kokonaisluvun tulo $ab = 2(2mn + m + n) + 1$ on pariton.

On osoitettu, että jos väite on epätosi,
niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

128



Oletus ABC on kolmio.

Väite Kolmiossa on enintään yksi kulma, joka on suurempi kuin $90°$.

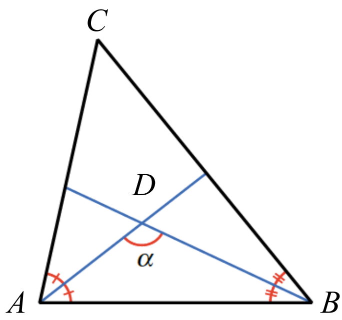
Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että ainakin kulmat A ja B ovat suurempia kuin $90°$.

Tällöin kulmien A ja B summa on suurempi kuin $90° + 90° = 180°$.

Koska kolmion kulmien summa on aina $180°$, on päädytty ristiriitaan.

Siis väite on tosi. □

129



Oletus ABC on kolmio.

Väite Kulma α on suurempi kuin $90°$.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kulma α on pienempi tai yhtä suuri kuin $90°$.

Koska kolmion kulmien summa on aina $180°$, tällöin kolmion ABD kantakulmien summa on vähintään $180° - 90° = 90°$.

Koska kolmion ABD kantakulmat ovat kolmion ABC kantakulmien puolikkaita, kolmion ABC kantakulmien (kaksi kulmaa) summa on vähintään $2 \cdot 90° = 180°$.

Koska kolmion kaikkien kulmien summa on aina $180°$, on päädytty ristiriitaan.

Siis väite on tosi. □

130

Oletus x^2 on irrationaaliluku.

Väite x on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että x on rationaaliluku.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $x = \frac{m}{n}$.

Lasketaan neliö x^2.

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{m}{n}\right)^2 \\ &= \frac{m^2}{n^2} \end{aligned}$$

Koska m^2 ja n^2 ovat kokonaislukuja,
on x^2 rationaaliluku.

On osoitettu, että jos väite on epätosi,
niin oletus on epätosi.

Siis x on irrationaaliluku. $\square$

131

Väite Luku $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että $\sqrt{6}$ on rationaaliluku.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n $(n \neq 0)$, että $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$. Koska murtoluku ei enää supistu, enintään toinen luvuista m ja n on parillinen.

Tutkitaan luvun $\sqrt{6}$ neliötä.

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$6 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{Ratkaistaan tästä yhtälöstä } m^2.$$

$$m^2 = 6n^2 = 2(3n^2)$$

Koska $3n^2$ on kokonaisluku, on m^2 parillinen kokonaisluku. Tällöin myös m on parillinen kokonaisluku (todistettu esimerkissä 1).

Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $m = 2k$.

Saadaan:

$$
\begin{aligned}
m^2 &= 2(3n^2) \\
(2k)^2 &= 2(3n^2) \\
4k^2 &= 2(3n^2) \quad \big| :2 \\
2k^2 &= 3n^2.
\end{aligned}
$$

Nyt luku $3n^2$ on parillinen. Tästä seuraa, että luku n^2 on välttämättä parillinen (koska luku 3 on pariton), ja samoin luvun n on oltava parillinen (Esimerkki 1).

On päädytty ristiriitaan, sillä edellä todettiin, että enintään toinen luvuista m ja n on parillinen.

Siis luku $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku. □

132

Oletus Luku x on irrationaaliluku.

Väite Luku $2x-1$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että $2x-1$ on rationaaliluku.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n $(n \neq 0)$, että $2x-1=\frac{m}{n}$.

Ratkaistaan x.

$$2x-1=\frac{m}{n}$$

$$2x=\frac{m}{n}-1 \quad |:2$$

$$x=\frac{m}{2n}-{}^{n)}\frac{1}{2}$$ Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi.

$$x=\frac{m-n}{2n}$$

Koska $m-n$ ja $2n$ ovat kokonaislukuja, on x rationaaliluku.

On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

133

Oletus Luku x on yhtälön $3^x = 2$ ratkaisu.

Väite x on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että x on rationaaliluku.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n $(n \neq 0)$, että $x = \frac{m}{n}$.

Koska $3^x = 2 > 1$, niin $x > 0$. Voidaan olettaa, että kokonaisluvut m ja n ovat molemmat positiivisia.

Saadaan:

$$3^{\frac{m}{n}} = 2$$

Korotetaan yhtälön molemmat puolet potenssiin n.

$$\left(3^{\frac{m}{n}}\right)^n = 2^n$$

$$3^m = 2^n.$$

Luku 3^m on pariton. Tämä voidaan johtaa tiedosta, että kahden parittoman luvun tulo on pariton.

Luku 2^n parillinen, sillä $2^n = 2(2^{n-1})$ ja 2^{n-1} on kokonaisluku, jos n on kokonaisluku.
On päädytty ristiriitaan, sillä luku 3^m on pariton ja 2^n on parillinen.

Siis x on irrationaaliluku. □

134

Oletus Espoon väkiluku on noin 270 000.

Väite Ainakin kolmella espoolaisella on päässään yhtä monta hiusta.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että enintään kahdella espoolaisella on päässään yhtä monta hiusta.

Koska ihmisen päässä voi olla enintään noin 100 000 hiusta, espoolaisia voi olla enintään
$2 \cdot 100000 = 200000$.

On osoitettu, että jos väite on epätosi,
niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

135

Oletus Kokonaislukujen a ja b summa $a+b$ on pariton.

Väite Täsmälleen toinen luvuista a ja b on pariton.

Todistus **1)** Oletetaan vastoin väitettä, että luvuista a ja b molemmat ovat parillisia.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $a=2m$ ja $b=2n$.

$$a+b=2m+2n=2(m+n)$$

Koska summa $a+b$ on kokonaislukujen 2 ja $m+n$ tulo, se on parillinen.

2) Oletetaan vastoin väitettä, että luvuista a ja b molemmat ovat parittomia.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $a=2m+1$ ja $b=2n+1$.

$$a+b=(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(m+n+1)$$

Koska summa $a+b$ on kokonaislukujen 2 ja $m+n+1$ tulo, se on parillinen.

3) On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis täsmälleen toinen luvuista a ja b on pariton. $\square$

136

Oletus Kokonaisluvun n neliö n^2 ei ole jaollinen luvulla 9.

Väite Kokonaisluku n ei ole jaollinen luvulla 3.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kokonaisluku n on jaollinen luvulla 3.

Tällöin on olemassa kokonaisluku a siten, että $n = 3a$.

Muodostetaan neliö n^2.

$$\begin{aligned} n^2 &= (3a)^2 \\ &= 3^2 a^2 \\ &= 9a^2 \end{aligned}$$

Huomataan, että kokonaisluvun n neliö n^2 on jaollinen luvulla 9.

On osoitettu, että jos väite on epätosi, niin oletus on epätosi.

Siis väite on tosi. □

137

Väite Nelikulmiossa on enintään yksi kupera kulma.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että nelikulmiossa on vähintään kaksi kuperaa kulmaa.

Kupera kulma on kulma, joka on suurempi kuin $180°$ ja pienempi kuin $360°$.

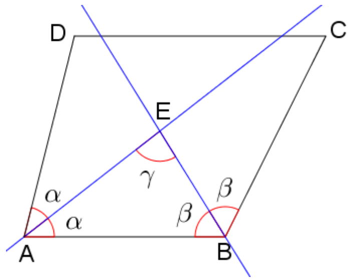
Tällöin kahden kuperan kulman summa on välttämättä suurempi kuin $180° + 180° = 360°$.

On päädytty ristiriitaan, sillä nelikulmion kulmien summa on täsmälleen $360°$.

Siis väite on tosi. □

138

Oletus Käytetään kuvan merkintöjä. $ABCD$ on puolisuunnikas.



Väite Kulma γ ei aina ole $90°$.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että kulma γ on aina $90°$.

Koska kolmion ABE kulmien summa on $180°$, niin $\alpha + \beta = 90°$.

Puolisuunnikkaan $ABCD$ kantakulmien A ja B summa on $2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90° = 180°$.

Tästä seuraa, että myös sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset ja $ABCD$ on suunnikas.

On päädytty ristiriitaan, sillä kaikki puolisuunnikkaat eivät ole suunnikkaita.

Siis väite on tosi.

139

Oletus x on irrationaaliluku ($x \neq 0$).

Väite $\frac{1}{x}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että $\frac{1}{x}$ on rationaaliluku.

Tällöin $\frac{1}{x}$ voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$,
jossa luvut m ja n ovat kokonaislukuja
($m \neq 0$ ja $n \neq 0$).

Saadaan:

$$\frac{1}{x} = \frac{m}{n} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$xm = n \qquad \text{Ratkaistaan } x.$$

$$x = \frac{n}{m}$$

Mutta tällöin x olisi rationaaliluku, mikä on ristiriita.

Siis väite on tosi. □

140

Väite Luku $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että luku $\sqrt{3}$ on rationaaliluku.

Tällöin luku $\sqrt{3}$ voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, jossa luvut m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Lisäksi tiedetään, että murtoluku $\frac{m}{n}$ ei enää supistu.

Tutkitaan luvun $\sqrt{3}$ neliötä.

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{Ratkaistaan } m^2.$$

$$m^2 = 3n^2$$

Koska m^2 on kokonaislukujen 3 ja n^2 tulo, niin se on jaollinen luvulla 3. Siten myös luku m on jaollinen luvulla 3.

On siis olemassa sellainen kokonaisluku k, että $m = 3k$.

Saadaan

$$\begin{aligned} m^2 &= 3n^2 \\ (3k)^2 &= 3n^2 \\ 9k^2 &= 3n^2 \qquad \text{Ratkaistaan } n^2. \\ n^2 &= 3k^2. \end{aligned}$$

Siten luvut n^2 ja n ovat jaollisia luvulla 3.

Eli molemmat kokonaisluvut m ja n ovat jaollisia luvulla 3.

Tämä on ristiriita, sillä aiemmin todettiin, että murtoluku $\frac{m}{n}$ ei enää supistu.

Siis väite on tosi. □

141

Oletus Luku x on yhtälön $5^x = 3$ ratkaisu.

Väite x on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että x on rationaaliluku.

Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n $(n \neq 0)$, että $x = \frac{m}{n}$.

Koska $5^x = 3 \;\; > 1$, niin $x > 0$. Voidaan olettaa, että§ kokonaisluvut m ja n ovat molemmat positiivisia.

Saadaan:

$$5^{\frac{m}{n}} = 3$$

Korotetaan yhtälön molemmat puolet potenssiin *n*.

$$\left(5^{\frac{m}{n}}\right)^n = 3^n$$

$$5^m = 3^n.$$

Luku 3^m on pariton. Tämä voidaan johtaa tiedosta, että kahden parittoman luvun tulo on pariton.

Luku 2^n parillinen, sillä $2^n = 2(2^{n-1})$ ja 2^{n-1} on kokonaisluku, jos n on kokonaisluku.
On päädytty ristiriitaan, sillä luku 5^m ei ole jaollinen luvulla 3, mutta luku 3^n on jaollinen luvulla 3.

Siis x on irrationaaliluku. □

142

Oletetaan, että luku $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on rationaaliluku. Tällöin luku voidaan esittää muodossa $\dfrac{m}{n}$, jossa luvut m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Lisäksi tiedetään, että murtoluku $\dfrac{m}{n}$ ei enää supistu.

Saadaan:

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{m}{n} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$\sqrt{2}n = (1-\sqrt{2})m$$

$$\sqrt{2}n = m - \sqrt{2}m \qquad \text{Ratkaistaan } \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2}n + \sqrt{2}m = m$$

$$\sqrt{2}(n+m) = m$$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{m+n}.$$

Saadun tuloksen mukaan $\sqrt{2}$ voidaan esittää murtolukuna. Tämä on ristiriita.

Eli luku $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku. □

143

Oletus Luku x on irrationaaliluku.

Väite Luku $\frac{x-1}{x+1}$ on irrationaaliluku.

Todistus Oletetaan vastoin väitettä, että luku $\frac{x-1}{x+1}$ on rationaaliluku.

Tällöin luku $\frac{x-1}{x+1}$ voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, jossa luvut m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Lisäksi tiedetään, että murtoluku $\frac{m}{n}$ ei enää supistu.

Saadaan:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{m}{n} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$(x+1)m = (x-1)n \qquad \text{Lähdetään ratkaisemaan, mitä } x \text{ on.}$$

$$xm + m = xn - n$$

$$xm - xn = -n - m$$

$$x(m-n) = -(m+n)$$

$$x = -\frac{m+n}{m-n}.$$

x on nyt rationaaliluku. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan x on irrationaaliluku.

Väite on siis tosi. □

144

a)

Oletus $a_1 = 3$ ja $a_n = 2a_{n-1} - 1$, kun $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Väite $a_n = 2^n + 1$ kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus

1) Alkuaskel

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$a_1 = 3$ ja toisaalta $a_1 = 2^1 + 1 = 3$.

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Osoitetaan, että jos

$a_n = 2^n + 1$, niin $a_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.

Induktio-oletus:

$a_n = 2^n + 1$ mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$a_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.

Induktioväitteen todistus:
Sovelletaan rekursiokaavaa $a_n = 2a_{n-1} - 1$ jäseneen a_{n+1}.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_{(n+1)-1} - 1 \\ &= 2a_n - 1 \\ &= 2(2^n + 1) - 1 \\ &= 2^{n+1} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Käytetään induktio-oletusta $a_n = 2^n + 1$.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

b) Lukujonon 13. jäsen eli a_{13} voidaan nyt laskea lausekkeella $a_n = 2^n + 1$.

$a_{13} = 2^{13} + 1 = 8192$

Vastaus: $a_{13} = 16385$

145

a) Lähdetään taulukoimaan rekursiokaavan avulla saatavia jonon jäseniä.

n	a_n
1	$a_1 = 2$
2	$a_2 = 4 \cdot a_1 = 4 \cdot 2 = 8$
3	$a_3 = 4 \cdot a_2 = 4 \cdot (4 \cdot a_1) = 4^2 \cdot 2 = 32$
4	$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot (4^2 \cdot 2) = 4^3 \cdot 2 = 128$
. . .	
n	$a_n = 4 \cdot a_{n-1} = 4 \cdot (4^{(n-2)} \cdot 2) = 4^{n-1} \cdot 2$

Todistetaan jonon yleisen jäsenen lauseke $a_n = 4^{n-1} \cdot 2$ oikeaksi induktiolla.

Oletus $a_1 = 2$ ja $a_n = 4a_{n-1}$, kun $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Väite $a_n = 4^{n-1} \cdot 2$ kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$a_1 = 2$ ja toisaalta $a_1 = 4^{1-1} \cdot 2 = 4^0 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2.$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Osoitetaan, että jos

$a_n = 4^{n-1} \cdot 2,$ niin $a_{n+1} = 4^{(n-1)+1} \cdot 2 = 4^n \cdot 2.$

Induktio-oletus:

$a_n = 4^{n-1} \cdot 2$ mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$a_{n+1} = 4^n \cdot 2.$

Induktioväitteen todistus:

Sovelletaan rekursiokaavaa $a_n = 4a_{n-1}$ jäseneen a_{n+1}.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_{(n+1)-1} \\ &= 4a_n \\ &= 4 \cdot 4^{n-1} \cdot 2 \\ &= 4^n \cdot 2 \end{aligned}$$

Käytetään induktio-oletusta $a_n = 4^{n-1} \cdot 2.$

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

b) Lukujonon 10. jäsen eli a_{10} voidaan nyt laskea lausekkeella $a_n = 4^{n-1} \cdot 2$.

$$a_{10} = 4^{10-1} \cdot 2 = 4^9 \cdot 2 = 524288$$

Vastaus: $a_{10} = 524288$

146

Väite $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ kaikilla $n=1,\ 2,\ 3,\ ...$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n=1$.

$1=1^2$

$1=1$

Väite on tosi, kun $n=1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

mielivaltaisella $n=1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:

$1+3+5+...+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen
$1+3+5+\ldots+\big(2(n+1)\;-1\big)\;=\;(n+1)^2$ vasenta
puolta induktio-oletuksen perusteella ja
sievennetään lauseketta.

$$
\begin{aligned}
&1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)\\
&=\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{\substack{n^2\\ \text{induktio-oletuksen}\\ \text{perusteella}}}+(2(n+1)-1)\\
&=n^2+(2n+2-1)\\
&=n^2+2n+1\\
&=(n+1)^2
\end{aligned}
$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat,
joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

147

Väite $3+3^2+3^3+...+3^n = \frac{3^{n+1}-3}{2}$ kaikilla $n=1, 2, ...$

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n=1$.

$$3=\frac{3^{1+1}-3}{2}$$

$$3=\frac{3^2-3}{2}$$

$$3=\frac{9-3}{2}$$

$$3=3$$

Väite on tosi, kun $n=1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$$3+3^2+3^3+...+3^n = \frac{3^{n+1}-3}{2}$$

mielivaltaisella $n=1, 2, 3...$.

Induktioväite:

$$3+3^2+3^3+...+3^{n+1} = \frac{3^{(n+1)+1}-3}{2}$$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen

$$3+3^2+3^3+\ldots+3^{n+1} = \frac{3^{(n+1)+1}-3}{2}$$

vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$3+3^2+3^3+\ldots+3^{n+1}$$

$$=\underbrace{3+3^2+3^3+\ldots+3^n}_{\substack{\frac{3^{n+1}-3}{2} \\ \text{induktio-oletuksen} \\ \text{perusteella}}}+3^{n+1}$$

$$=\frac{3^{n+1}-3}{2}+{}^{2)}3^{n+1}$$ Lavennetaan yhteenlaskettavat samannimisiksi.

$$=\frac{3^{n+1}-3+2\cdot 3^{n+1}}{2}$$ Yhdistetään termit 3^{n+1} ja $2\cdot 3^{n+1}$.

$$=\frac{3\cdot 3^{n+1}-3}{2}$$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$=\frac{3^{(n+1)+1}-3}{2}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

148

Oletus Jonon ensimmäinen jäsen on a_1.

Väite Jonon yleinen jäsen on

$a_n = a_1 q^{n-1}$ **kaikilla** $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$
$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_1 = a_1 \cdot 1$$
$$a_1 = a_1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:

$a_n = a_1 q^{n-1}$

mielivaltaisella $n = 1, 2, 3\ldots$.

Induktioväite:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 q^{(n+1)-1} \\ &= a_1 q^n \end{aligned}$$

Induktioväitteen todistus:

Muokataan induktioväitteen $a_{n+1} = a_1 q^n$ vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{\substack{a_1 q^{n-1} \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} \cdot q$$

Peräkkäisten jäsenten suhdeluku on q.

$$= a_1 q^{n-1} \cdot q$$

$$= a_1 q^n$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

149

Väite $2n^2 \geq (n + 1)^2$ kaikilla $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 3$.

$$2 \cdot 3^2 \geq (3 + 1)^2$$
$$2 \cdot 9 \geq 16$$
$$18 \geq 16$$

Väite on tosi, kun $n = 3$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$2n^2 \geq (n + 1)^2$

mielivaltaisella $n = 3, 4, 5...$.

Induktioväite:

$2(n+1)^2 \geq ((n+1) + 1)^2$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$
\begin{aligned}
2(n+1)^2 &= 2(n^2+2n+1) \qquad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
&= \underbrace{2n^2}_{\substack{\geq (n+1)^2 \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + 4n + 2 \\
&\geq (n+1)^2 + 4n + 2 \\
&= n^2 + 2n + 1 + 4n + 2 \\
&= n^2 + 4n + \underbrace{2n}_{\substack{>1,\ \text{kun} \\ n \geq 3}} + 3 \\
&\geq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2
\end{aligned}
$$

Saatiin $2(n+1)^2 \geq (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$.
Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

150

Kirjan 1. painoksessa on virhe a-kohdan kysymyksessä. Kysymyksen pitäisi olla ”Tutki, mistä kokonaisluvusta $n > 1$ lähtien epäyhtälö pätee.”

a) Tutkitaan sijoittamalla, mistä kokonaisluvusta $n > 1$ lähtien epäyhtälö pätee.

n	2^n	n^2	$2^n \geq n^2$
2	$2^2 = 4$	$2^2 = 4$	tosi
3	$2^3 = 8$	$3^2 = 9$	epätosi
4	$2^4 = 16$	$4^2 = 16$	tosi
5	$2^5 = 32$	$5^2 = 25$	tosi

Epäyhtälö näyttää pätevän luvusta $n = 4$ alkaen.

b)

Väite $2^n \geq n^2$ on tosi kaikilla $n = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 4$.

$2^4 \geq 4^2$

$16 \geq 16$

Väite on tosi, kun $n = 4$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$2^n \geq n^2$ mielivaltaisella $n = 4,\ 5,\ 6\ldots$.

Induktioväite:

$2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Induktioväitteen todistus:

Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$2^{n+1} = 2 \cdot \underbrace{2^n}_{\substack{\geq n^2 \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} \qquad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$\geq 2 \cdot n^2$$

$$= n^2 + n^2$$

$$= n^2 + \underbrace{n \cdot n}_{\substack{>3n, \\ \text{kun } n \geq 4}}$$

$$\geq n^2 + 3n$$

$$= n^2 + 2n + \underbrace{n}_{\substack{>1, \\ \text{kun } n \geq 4}}$$

$$\geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Saatiin $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

151

Väite $(ab)^n = a^n b^n$ on tosi kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 1$.

$$(ab)^1 = ab$$
$$= a^1 b^1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$(ab)^n = a^n b^n$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\dots$.

Induktioväite:

$(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$(ab)^{n+1} = ab \cdot \underbrace{(ab)^n}_{\substack{=a^n b^n \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} \qquad x^{m+n} = x^m \cdot x^n$$

$$= ab \cdot a^n b^n \qquad \text{ryhmitellään uudelleen}$$

$$= aa^n \cdot bb^n \qquad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$= a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

Saatiin $(ab)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1}$. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

152

Väite $7^n - 4$ on jaollinen luvulla 3 kaikilla $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 0$.

$$
\begin{aligned}
7^0 - 4 &= 1 - 4 \\
&= -3 \\
&= 3 \cdot (-1)
\end{aligned}
$$

Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$7^n - 4$ on jaollinen luvlla 3
mielivaltaisella $n = 0,\ 1,\ 2\ldots$. Eli on olemassa
sellainen kokonaisluku s, että $7^n - 4 = 3s$.

Induktioväite:

$7^{n+1} - 4$ on jaollinen luvulla 3.

Induktioväitteen todistus:
Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku s, että $7^n - 4 = 3s$. Siten $7^n = 4 + 3s$.

Sievennetään luku $7^{n+1} - 4$ muotoon, josta nähdään, että se on jaollinen luvulla 3.

$$
\begin{aligned}
7^{n+1} - 4 &= 7 \cdot \underbrace{7^n}_{\substack{=4+3s \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} - 4 && x^{m+n} = x^m \cdot x^n \\
&= 7 \cdot (4 + 3s) - 4 \\
&= 7 \cdot 4 + 7 \cdot 3s - 4 && \text{Yhdistetään termit } 7 \cdot 4 \text{ ja } -4. \\
&= 7 \cdot 3s + \underbrace{6}_{3 \cdot 2} \cdot 4 && \text{Erotetaan luku 3 yhteiseksi tekijäksi.} \\
&= 3(7s + 2 \cdot 4) \\
&= 3(7s + 8)
\end{aligned}
$$

Koska s on kokonaisluku, niin myös $7s + 8$ on kokonaisluku. Siten $7^n - 4$ on jaollinen luvlla 3. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

153

Väite $9^n + 7$ on jaollinen luvulla 8 kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 0$.

$$9^0 + 7 = 1 + 7$$
$$= 8$$

Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
$9^n + 7$ on jaollinen luvulla 8
mielivaltaisella $n \in \mathbf{Z}$.

Induktioväite:
$9^{n+1} + 7$ on jaollinen luvulla 8.

Induktioväitteen todistus:

Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku s, että $9^n + 7 = 8s$. Siten $9^n = 8s - 7$.

Sievennetään luku $9^{n+1} + 7$ muotoon, josta nähdään, että se on jaollinen luvulla 8.

$$9^{n+1} + 7$$

$$= 9 \cdot \underbrace{9^n}_{\substack{=8s-7 \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + 7 \qquad a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$= 9 \cdot (8s - 7) + 7$$

$$= 9 \cdot 8s - 9 \cdot 7 + 7$$ Yhdistetään termit $-9 \cdot 7$ ja 7.

$$= 9 \cdot 8s - 8 \cdot 7$$ Erotetaan luku 8 yhteiseksi tekijäksi.

$$= 8(9s - 7)$$

Koska s on kokonaisluku, niin myös $9s - 7$ on kokonaisluku.

Siten $9^{n+1} + 7$ on jaollinen luvulla 8.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.

Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

154

Väite $n^2 - n$ on parillinen kaikilla $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.

Todistus 1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 0$.

$0^2 - 0 = 0$

Luku 0 kuuluu parillisiin lukuihin. Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
$n^2 - n$ on parillinen
mielivaltaisella $n = 0,\ 1,\ 2\dots$. Eli on olemassa sellainen kokonaisluku s, että $n^2 - n = 2s$.

Induktioväite:
$(n+1)^2 - (n+1)$ on parillinen.

Induktioväitteen todistus:
Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku s, että $n^2 - n = 2s$. Siten $n^2 = n + 2s$.

Sievennetään luku $n^2 - n$ muotoon, josta nähdään, että se on parillinen.

$$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1$$

$(a+b)^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

$$= \underbrace{n^2}_{n+2s} + n$$

induktio-
oletuksen
perusteella

$$= n + 2s + n$$

Yhdistetään
termit n ja n.

$$= 2s + 2n$$

Erotetaan luku 2
yhteiseksi
tekijäksi.

$$= 2(s+n)$$

Koska n ja s ovat kokonaislukuja, niin myös $s + n$ on kokonaisluku. Siten $n^2 - n$ on parillinen luku. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

155

a)

Oletus $a_1 = 1$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 3$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Väite $a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$a_1 = 1$ ja toisaalta $a_1 = 4 \cdot 2^{1-1} - 3 = 4 - 3 = 1$.

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) **Induktioaskel**
Osoitetaan, että jos
$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3$, niin $a_{n+1} = 4 \cdot 2^{(n+1)-1} - 3$.

Induktio-oletus:
$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3$ mielivaltaisella $n = 1, 2, 3\ldots$.

Induktioväite:
$a_{n+1} = 4 \cdot 2^{(n+1)-1} - 3 = 4 \cdot 2^n - 3$

Induktioväitteen todistus:
Sovelletaan rekursiokaavaa $a_n = 2a_{n-1} + 3$
jäseneen a_{n+1}.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_{(n+1)-1} + 3 \\
&= 2\underbrace{a_n}_{\substack{=4\cdot 2^{n-1}-3 \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + 3 \\
&= 2(4\cdot 2^{n-1} - 3) + 3 \\
&= 2\cdot 4\cdot 2^{n-1} - 2\cdot 3 + 3 \\
&= 4\cdot 2^{(n-1)+1} - 3 \\
&= 4\cdot 2^n - 3
\end{aligned}$$

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

b) Lukujonon 25. jäsen eli a_{25} voidaan nyt laskea lausekkeella $a_n = 4\cdot 2^{n-1} - 3$.

$$a_{25} = 4\cdot 2^{25-1} - 3 = 67\ 108\ 861$$

Vastaus: $a_{25} = 67\ 108\ 861$

156

a) Lähdetään taulukoimaan rekursiokaavan avulla saatavia jonon jäseniä.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n}$
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = 4 \cdot a_1 + 3 = 4 \cdot 3 + 3$
3	$a_3 = 4 \cdot a_2 + 3 = 4 \cdot (4 \cdot 3 + 3) + 3 = 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3$
4	$a_4 = 4 \cdot a_3 + 3 = 4 \cdot (4^2 + 4 \cdot 3 + 3) + 3 = 4^3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3$
. . .	
n	$a_n = 4 \cdot a_{n-1} + 3$ $= 4^{n-1} \cdot 3 + 4^{n-2} \cdot 3 + \ldots + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3$ Hyödynnetään geometrisen summan kaavaa. $= \dfrac{3(1-4^n)}{1-4} = \dfrac{3(1-4^n)^{(3}}{-3} = -(1-4^n) = 4^n - 1$

Todistetaan jonon yleisen jäsenen lauseke $a_n = 4^n - 1$ oikeaksi induktiolla.

Oletus $\quad a_1 = 3$ ja $a_n = 4a_{n-1} + 3$, kun $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Väite $\quad a_n = 4^n - 1$ kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$a_1 = 3$ ja toisaalta $a_1 = 4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$.

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$a_n = 4^n - 1$ mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$a_{n+1} = 4^{n+1} - 1$.

Induktioväitteen todistus:

Sovelletaan rekursiokaavaa $a_n = 4a_{n-1} + 3$ jäseneen a_{n+1}.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 4a_{(n+1)-1} + 3 \\
&= 4 \underbrace{a_n}_{\substack{=4^n-1 \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + 3 \\
&= 4 \cdot (4^n - 1) + 3 \\
&= 4^{n+1} - 4 + 3 \\
&= 4^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Väite on näin todistettu. □

157

a)

Väite $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ ....$

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (n+1)^3$$

$$= \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + n^3}_{\substack{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \text{induktio-oletuksen} \\ \text{perusteella}}} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + {}^{4)}(n+1)^3$$

$$= \frac{\overbrace{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}^{\substack{\text{Erotetaan } (n+1)^2 \\ \text{yhteiseksi tekijäksi.}}}}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

b) Laskettava summa on $S_{200} - S_{99}$.

$$S_{200} = \frac{200^2(200+1)^2}{4} = 404\ 010\ 000$$

$$S_{99} = \frac{99^2(99+1)^2}{4} = 24\ 502\ 500$$

$$S_{200} - S_{99} = 379\ 507\ 500$$

Vastaus: 379 507 500

158

Väite $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) \ = \ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ ....$

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) \ = \ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3...$.

Induktioväite:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n+1) \cdot ((n+1)+1)$

$= \dfrac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella ja sievennetään lauseketta.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n+1)\cdot((n+1)+1)$$

$$=\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)}_{=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\ \text{induktio-oletuksen perusteella}}+(n+1)\cdot((n+1)+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+{}^{3)}(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$$

Erotetaan (n+1)(n+2) yhteiseksi tekijäksi.

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

159

Väite $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \left(2n \ -1\right)^2 \ = \ \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1\cdot(4\cdot 1^2 - 1)}{3}$$
$$= \frac{3}{3} = 1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \left(2n \ -1\right)^2 \ = \ \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + \left(2(n+1) \ -1\right)^2$$
$$= \ \frac{(n+1)(4(n+1)^2 - 1)}{3}$$

Induktioväitteen todistus:
Sievennetään ensin oikean puolen lauseketta.

$$\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$$
$$=\frac{(n+1)(4(n^2+2n+1)-1)}{3}$$
$$=\frac{(n+1)(4n^2+8n+4-1)}{3}$$
$$=\frac{4n^3+8n^2+3n+4n^2+8n+3}{3}$$
$$=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$$

Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella ja sievennetään lauseketta.

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+\big(2(n+1)\ -1\big)^2$$

$$=\underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}_{\substack{\frac{n(4n^2-1)}{3} \\ \text{induktio-oletuksen} \\ \text{perusteella}}}+(2(n+1)-1)^2$$

$$=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+2-1)^2$$

$$=\frac{n(4n^2-1)}{3}+{}^{3)}(2n+1)^2$$

$$=\frac{n(4n^2-1)+3(2n+1)^2}{3}$$

$$=\frac{4n^3-n+3(4n^2+4n+1)}{3}$$

$$=\frac{4n^3-12n^2+11n+3}{3}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

160

Väite $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

on tosi kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$a_1 = \frac{a_1(1-q^1)}{1-q}^{(\ (1-q)}$$
$$= a_1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{(n+1)-1} = \dfrac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{(n+1)-1}$$

$$=\underbrace{a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}}_{\substack{=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\\ \text{induktio-oletuksen}\\ \text{perusteella}}}+a_1q^{(n+1)-1}$$

$$=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}+a_1q^{n\ (\ (1-q)}$$

$$=\frac{a_1(1-q^n)+a_1q^n(1-q)}{1-q}$$

$$=\frac{a_1-a_1q^n+a_1q^n-a_1q^nq}{1-q}$$

$$=\frac{a_1-a_1q^{n+1}}{1-q}=\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$$

Erotetaan a_1 yhteiseksi tekijäksi.

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

161

a)

Väite $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Induktioväitteen todistus:
Sievennetään ensin oikean puolen lauseketta.

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$=\frac{(n^2+\overbrace{2n+n}^{=3n}+2)(2n+3)}{6}$$
$$=\frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}$$
$$=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella ja sievennetään lauseketta.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ induktio-oletuksen perusteella}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^{2\ (6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat samat, joten induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

b) Lasketaan summien erotus: $S_{20} - S_9$

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20 + 1)}{6}$$
$$= 2870$$

$$S_9 = \frac{9 \cdot (9+1) \cdot (2 \cdot 9 + 1)}{6}$$
$$= 285$$

$$S_{20} - S_9 = 2870 - 285 = 2585$$

Vastaus: 2585

162

Väite $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 1$.

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$= a^1 + b^1$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$(a+b)^n \geq a^n + b^n$

mielivaltaisella $n = 1, 2, 3\ldots$.

Induktioväite:

$(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{\substack{\geq a^n+b^n \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}}$$

$$\geq (a+b)(a^n+b^n)$$

$$= a^{n+1} + \underbrace{ab^n + ba^n}_{\substack{\geq 0,\text{ kun } a \text{ ja } b \\ \text{ovat positiivisia} \\ \text{kokonaislukuja}}} + b^{n+1}$$

$$\geq a^{n+1} + b^{n+1}$$

Saatiin $(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

163

Väite $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 1$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$
$$= \frac{a^1}{b^1}$$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

mielivaltaisella $n = 1, 2, 3...$.

Induktioväite:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \frac{a}{b}\cdot \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}_{\substack{=\frac{a^n}{b^n} \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{a^n}{b^n}$$

$$= \frac{a\cdot a^n}{b\cdot b^n}$$

$$= \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Induktioväitteen vasen puoli ja oikea puoli ovat samat. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

164

Väite

$n! > 2^n$ kaikilla $n \geq 4$.

Todistus 1) **Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 4$.

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24 \\ &\geq 2^4 = 16 \end{aligned}$$

Väite on tosi, kun $n = 4$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:

$n! > 2^n$ mielivaltaisella $n = 4,\ 5,\ 6...$.

Induktioväite:

$(n+1)! > 2^{n+1}$

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen ja kertoman määrittelyn perusteella.

$$(n+1)! = (n+1)\cdot \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1}_{=n!}$$

$$= (n+1)\cdot \underbrace{n!}_{\substack{\geq 2^n,\\ \text{kun } n\geq 4\\ \text{induktio-}\\ \text{oletuksen}\\ \text{perusteella}}}$$

$$\geq \underbrace{(n+1)}_{>2,\ \text{kun } n\geq 4} \cdot 2^n$$

$$\geq 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Induktioväitteen vasen puoli ja oikea puoli ovat samat. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

165

Väite Luvun 6^n viimeinen numero on 6 kaikilla $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 1$.

$6^1 = 6$

Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
Luvun 6^n viimeinen numero on 6 mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$ eli luku 6^n voidaan kirjoittaa muodossa $10s + 6$, missä s on kokonaisluku.

Induktioväite:
Luvun 6^{n+1} viimeinen numero on 6.

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitettä induktio-oletuksen perusteella.

$$
\begin{aligned}
6^{n+1} &= 6\cdot \underbrace{6^n}_{\substack{=10s+6\\ \text{induktio-}\\ \text{oletuksen}\\ \text{perusteella}}}\\
&= 6\cdot(10s+6)\\
&= 60s+36\\
&= \underbrace{60s+30}_{\substack{\text{Erotetaan 10}\\ \text{yhteiseksi tekijäksi.}}}+6\\
&= 10\cdot(6s+3)+6
\end{aligned}
$$

Saatiin $6^{n+1} = 10\cdot(6s+3)+6$, jossa luku $6s + 3$ on kokonaisluku, kun s on kokonaisluku. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

166

Väite $n^3 + 2n$ on jaollinen luvulla 3
kaikilla $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.

Todistus

1) **Alkuaskel**
Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 0$.

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0$$

Luku 0 on jaollinen luvulla 3. Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) **Induktioaskel**

Induktio-oletus:
$n^3 + 2n$ on jaollinen luvulla 3
mielivaltaisella $n = 0,\ 1,\ 2\dots$. Eli on olemassa sellainen kokonaisluku s, että $n^3 + 2n = 3s$.

Induktioväite:
$(n+1)^3 + 2(n+1)$ on jaollinen luvulla 3

Induktioväitteen todistus:

Sievennetään luku $(n+1)^3+2(n+1)$ muotoon, josta nähdään, että se on jaollinen luvulla 3.

$$\begin{aligned}(n+1)^3+2(n+1) &= n^3+3n^2+3n+1+2n+2\\ &= \underbrace{n^3+2n}_{\substack{=3s\\ \text{induktio-}\\ \text{oletuksen}\\ \text{perusteella}}}+3n^2+3n+3\\ &= \underbrace{3s+3n^2+3n+3}_{\substack{\text{Erotetaan luku 3}\\ \text{yhteiseksi tekijäksi.}}}\\ &= 3(s+n^2+n+1)\end{aligned}$$

Luku $3(s+n^2+n+1)$ on jaollinen luvulla 3, kun $s+n^2+n+1$ on kokonaisluku. Induktioväite on tosi.

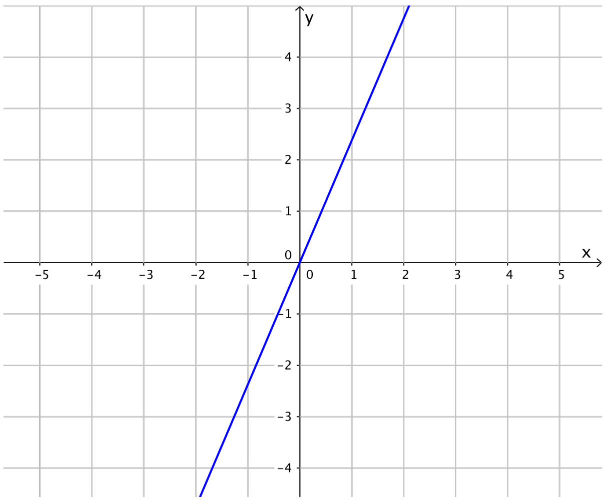
On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

167

Väite Origon kautta kulkevat n eri suoraa jakavat tason $2n$ osaan.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 1$.



Yksi suora jakaa tason kahteen osaan. Väite on tosi, kun $n = 1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

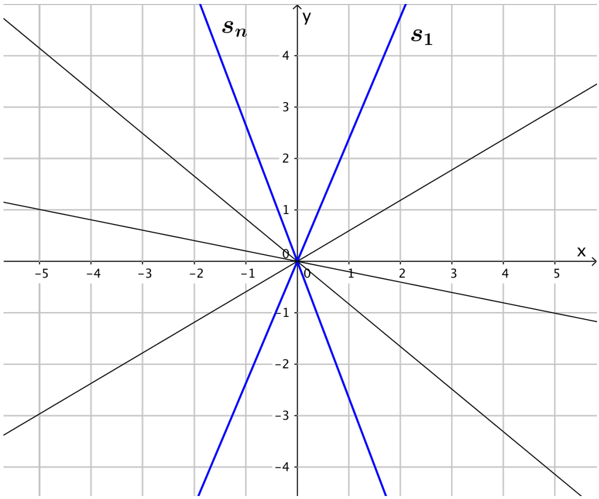
Origon kautta kulkevat n eri suoraa jakavat tason $2n$ osaan mielivaltaisella $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$.

Induktioväite:

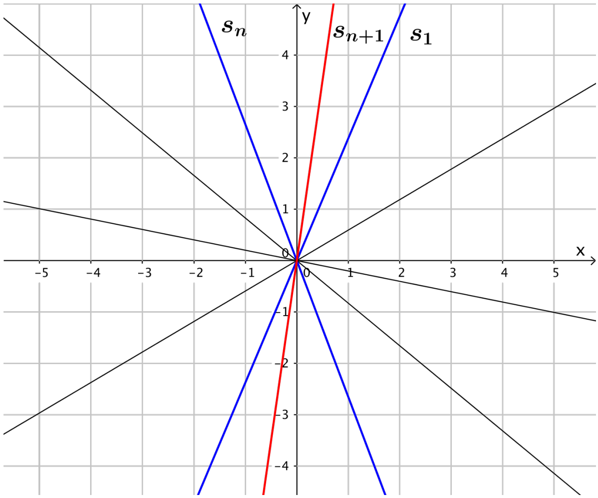
Origon kautta kulkevat $n + 1$ eri suoraa jakavat tason $2(n + 1)$ osaan.

Induktioväitteen todistus:

Induktio-oletuksen mukaan origon kautta kulkevat n eri suoraa jakavat tason $2n$ osaan.



Kun tähän lisätään uusi origon kautta kulkeva suora $n + 1$, se jakaa kaksi olemassa olevaa tason osaa molemmat kahteen osaan (alkuaskeleen perusteella).



Eli taso on tämän jälkeen jakautunut $2n + 2 = 2(n + 1)$ osaan.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

168

Väite $\dfrac{n^3+5n}{6}$ on kokonaisluku kaikilla $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n=1$.

$$\frac{1^3+5\cdot 1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Väite on tosi, kun $n=1$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$\dfrac{n^3+5n}{6}$ mielivaltaisella $n=1,\ 2,\ 3\ldots$.

Eli $\dfrac{n^3+5n}{6}=s$, kun s on kokonaisluku.

Induktioväite:

$\dfrac{(n+1)^3+5(n+1)}{6}$ on kokonaisluku.

Induktioväitteen todistus:

Induktio-oletuksen perusteella $\dfrac{n^3+5n}{6}=s$, kun s on kokonaisluku. Tästä saadaan $n^3+5n=6s$ eli n^3+5n on jaollinen luvulla 6.

Muokataan induktioväitettä induktio-oletuksen perusteella ja sievennetään lauseketta.

$$\frac{(n+1)^3+5(n+1)}{6}=\frac{n^3+3n^2+3n+1+5n+5}{6}$$

$$=\frac{\overbrace{n^3+5n}^{\substack{=6s \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}}+\overbrace{3n^2+3n}^{\substack{\text{Erotetaan } 3n \\ \text{yhteiseksi} \\ \text{tekijäksi.}}}+6}{6}$$

$$=\frac{6s+3n(n+1)+6}{6}$$

Luku $6s+3n(n+1)+6$ on jaollinen luvulla 6, sillä yhteenlaskettavat $6s$, $3n(n+1)$ ja 6 ovat jaollisia luvulla 6. Luvun $3n(n+1)$ tekijöistä n tai $n+1$ on parillinen ja siten luku $3n(n+1)$ on jaollinen luvulla 6.

Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

169

a)

Väite $(1+ x)^n \geq 1+nx$, missä $x > -1$,
on tosi kaikilla $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.

Todistus **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi alkuarvolla eli kun $n = 0$.

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1\\ &\geq 1+0\cdot x\\ &= 1\end{aligned}$$

Väite on tosi, kun $n = 0$.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

$(1+ x)^n \geq 1+nx$, missä $x > -1$,
on tosi mielivaltaisella $n = 0,\ 1,\ 2...$.

Induktioväite:

$(1+ x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ (missä $x > -1$).

Induktioväitteen todistus:
Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\geq 1+nx \\ \text{induktio-} \\ \text{oletuksen} \\ \text{perusteella}}} \\ &\geq (1+x)\cdot(1+nx) \\ &= 1+\underbrace{nx+x}_{\substack{\text{Erotetaan } x \\ \text{yhteiseksi} \\ \text{tekijäksi.}}}+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

Saatiin $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Induktioväite on tosi.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel. Alkuperäinen väite on näin todistettu. □

b)

Väite $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1+\frac{n}{2}$, kaikilla $n = 0\ ,1\ ,2,\ ...$.

Todistus Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon $\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{2}$.
Nähdään, että epäyhtälö on Bernoullin epäyhtälö, jossa $x=\frac{1}{2}$.

Koska Bernoullin epäyhtälö pätee, aina kun $x > -1$ ja $n \in \mathbf{N}$, epäyhtälö $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1+\frac{n}{2}$ pätee. □