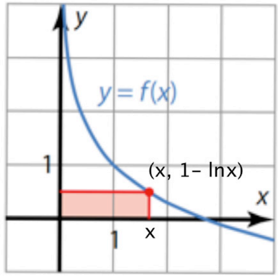
326

a) Koska suorakulmion kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla, suorakulmion kanta on x ja korkeus $1-\ln x$.



Ratkaistaan funktion f nollakohdat laskimella.

$$f(x)=0$$
$$1-\ln x=0$$
$$x=\mathrm{e}$$

Muuttuja x on välillä $]0,\mathrm{e}[$.
Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio
$A(x)=x\cdot(1-\ln x)=x-x\ln x$

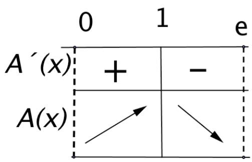
b) Määritetään derivaattafunktio laskimella.

$A'(x) = -\ln x$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$A'(x) = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

Laaditaan funktion A kulkukaavio.



x	$A(x)$	merkki
0,5	0,693….	+
2	–0,693…	–

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$.

Lasketaan suurin mahdollinen pinta-ala.

$A(1) = 1(1 - \ln 1) = 1$

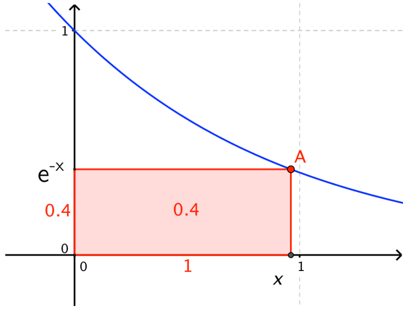
Vastaus a) $A(x) = x - x\ln x$, $0 < x < \mathrm{e}$

b) 1

327

a) Piirretään käyrä $y = \mathrm{e}^{-x}$ ja merkitään käyrälle piste A.

Piirretään suorakulmio, jonka kahtena kärkenä ovat origo sekä piste A sekä kärkipisteet positiivisella x-akselilla ja y-akselilla.



Määritetään suorakulmion ominaisuudet, niin, että nähdään suorakulmion pinta-ala sekä kanta ja korkeus. Siirretään pistettä A kohtaan, missä pinta-alalla on suurin arvo.

Kuvan perusteella pinta-ala on suurin, kun kanta on 1,0 ja korkeus 0,4.

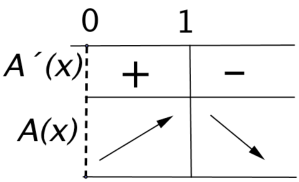
b) Suorakulmion kanta on x ja korkeus e^{-x}, missä $x > 0$.
Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio
$A(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad x > 0$

Määritetään derivaattafunktio.
$A'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$x = 1$$

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $x > 0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$A'(x)$	merkki
0,5	0,303….	+
2	–0,135…	–

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$.

Lasketaan suurin mahdollinen pinta-ala.

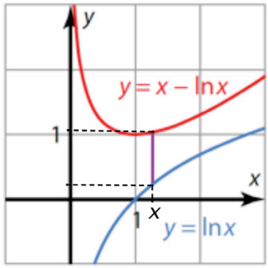
$$A(1) = 1\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Vastaus a) kanta 1,0 ja korkeus 0,4

b) $\frac{1}{\mathrm{e}}$

328

Funktiot $\ln x$ ja $x - \ln x$ ovat molemmat määritellyt, kun $x > 0$



Kohtaan x piirretyn y-akselin suuntaisen janan pituuden p ilmaisee funktio

$$p(x) = x - \ln x - \ln x = x - 2\ln x\,,\ x > 0.$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$p'(x) = 1 - \frac{2}{x},\quad x > 0$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$1 - \frac{2}{x} = 0$$

$$x = 2$$

Laaditaan funktion p kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $x > 0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	0	2
$p'(x)$	−	+
$p(x)$	↘	↗

x	$p'(x)$	merkki
1	−1	−
2	0,5	+

Funktio p saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 2$.
Lasketaan pienin pituus

$$p(2) = 2 - 2\ln 2$$

Vastaus $2 - 2\ln 2$

329

$$f(t)=\frac{e^{(2,4-t)^2}+t+30}{e^{(2,4-t)^2}}$$

Funktio f on määritelty suljetulla välillä $0 \le t \le 12$.

Funktio f saa suljetulla välillä [0, 12] suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille]0, 12[kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.
Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(t)=\frac{-10t^2-276t+725}{5e^{(t-2,4)^2}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.
$t = –30,015…$ tai $t = 2,415…$

Ratkaisuista $t = 2,415…$ on välillä [0,12[.

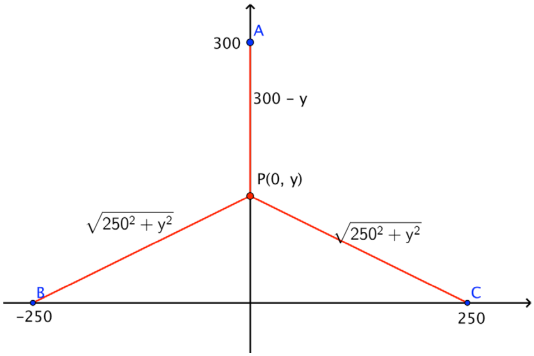
Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$f(0) \approx 1,1$
$f(12) \approx 1,0$
$f(2,415…) \approx 33,4$

Kulkusirkkojen määrä oli suurin, kun $t = 2,415… \approx 2,42$, määrä on noin 33 400.

Vastaus kun $t \approx 2,42$ (helmikuun toisella viikolla), yksilömäärä noin 33 400.

330



Porakaivo sijaitsee pisteessä $P(0, y)$. Määritetään etäisyydet porakaivosta.

$$|PA| = 300 - y$$
$$|PB| = \sqrt{(-250)^2 + y^2} = \sqrt{250^2 + y^2}$$
$$|PC| = \sqrt{250^2 + y^2}$$

Etäisyyksien yhteispituus on
$f(y) = 2\sqrt{250^2 + y^2} + 300 - y$.

Funktion f on määritelty suljetulla välillä [0, 300].

Funktio f saa suljetulla välillä [0, 300] suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille]0, 300[kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 62500}} - 1, \qquad 0 < y < 300$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2y}{\sqrt{y^2+62500}}-1=0$$

$$y=\frac{250\sqrt{3}}{3}\approx 144,3$$

Ratkaisu on välillä [0, 300].

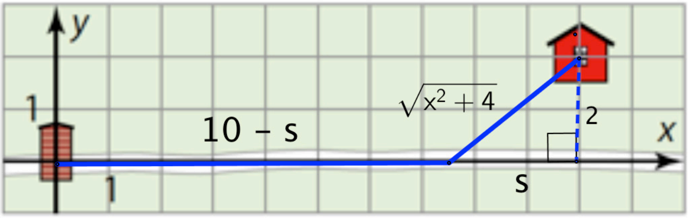
Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$f(0) = 800$
$f(300)= 781,02….$
$$f\left(\frac{250\sqrt{3}}{3}\right)=733,012...$$

Funktio f saa pienimmän arvon kohdassa 144,3… .
Porakaivo kannattaa sijoittaa pisteeseen (0,144).

Vastaus pisteeseen (0, 144)

331



Halvin reitti kulkee pitkin tien vartta kohtaan $10-s$ ja siitä suoraan metsän halki pisteeseen (10, 2).

Matkan pituus metsän halki on $\sqrt{s^2+2^2}=\sqrt{4+s^2}$.

Merkitään kustannuksia tien varressa100 metriä kohden kirjaimella a. Sähkölinjan reitin kustannukset yhteensä ovat
$a(10-s)+2a\sqrt{s^2+4}$, missä $0\le s\le 10$.

Koska a on positiivinen vakio reitin kustannukset saavat pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio

$$f(s)=10-s+2\sqrt{s^2+4},\ 0\le s\le 10.$$

Funktio f saa suljetulla välillä [0, 10] suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille]0, 10[kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.
Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(s)=-1+\frac{2s}{\sqrt{s^2+4}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-1+\frac{2s}{\sqrt{s^2+4}}=0$$

$$s=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1,154... \text{ tai } s=-\frac{2\sqrt{3}}{3}=-1,154...$$

Derivaattafunktion nollakohta s = 1,154…. kuuluu välille]0,10[.

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$f(0) = 14$

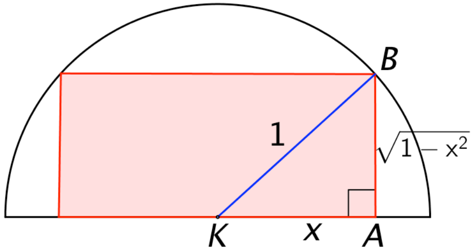
$$f(10)=4\sqrt{26}=20,39...$$

$$f(\frac{2\sqrt{3}}{3})=10+2\sqrt{3}=13,46...$$

Funktio f saa pienimmän arvonsa kohdassa s = 1,154… .
Sähkölinja kannattaa vetää ensin tien viertä pisteeseen (1,154…,0) ja sitten metsän halki kesämökille.
Halvin reitti on tien viertä (10 – 1,154…)·100 m ≈ 880 m.

Vastaus tien viertä 880 m ja sitten suoraan mökille

332



Merkitään puoliympyrän keskipistettä kirjaimella *K*, suorakulmion toista puoliympyrän halkaisijalla olevaa kärkipistettä kirjaimella *A* ja puoliympyrällä olevaa kärkipistettä kirjaimella *B*.

Suorakulmion leveys on $2|KA| = 2x$ ja korkeus on $|AB| = \sqrt{1-x^2}$, missä muuttuja *x* on välillä [0, 1]

Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio

$A(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $0 < x < 1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$A'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2}, \quad 0 < x < 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ tai } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Derivaattafunktion nollakohta $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707...$ kuuluu välille $]0,1[$.

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $]0,1[$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$A'(x)$	+	−
$A(x)$	↗	↘

x	$A'(x)$	merkki
0,1	1,969…	+
0,8	–0,9333	–

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suorakulmion leveys on $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ja korkeus on

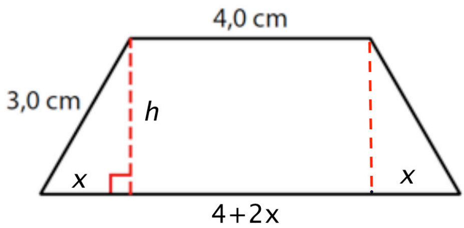
$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lasketaan suurin mahdollinen pinta-ala.

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Vastaus leveys $\sqrt{2}$, korkeus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja pinta-ala 1

333



Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + x^2 = 3^2$$

$$h^2 = 9 - x^2$$

$$h = \sqrt{9 - x^2}$$

Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio

$$A(x) = \frac{4 + 2x + 4}{2} \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

$$= (x + 4)\sqrt{9 - x^2}$$

Funktio A on määritelty välillä $]0,3[$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$A'(x) = \frac{-x(x + 4)}{\sqrt{9 - x^2}} + \sqrt{9 - x^2}$$

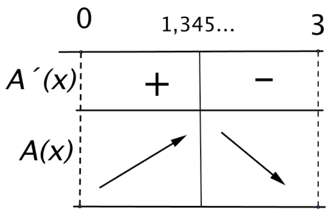
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-x(x+4)}{\sqrt{9-x^2}}+\sqrt{9-x^2}=0$$

$$x=\frac{-2+\sqrt{22}}{2}=1,345\ldots \quad \text{tai} \quad x=\frac{-2+\sqrt{22}}{2}=-3,345\ldots$$

Ratkaisu $x=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}=1,345\ldots$ toteuttaa
määrittelyehdon $0<x<3$.

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $0<x<3$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$A'(x)$	merkki
1	1,06…	+
2	–3,13…	–

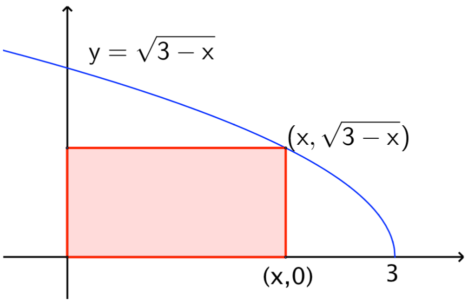
Funktio A saa suurimman arvonsa, kun $x=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{2}=1,345\ldots$.

Tällöin kannan pituus on
4,0 cm + 2·1,345… cm = 6,690… cm.

Kannan pituus on 6,7 cm.

Vastaus 6,7 cm

334



Koska suorakulmion kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla, suorakulmion kanta on x ja korkeus $\sqrt{3-x}$.

Funktion $f(x)=\sqrt{3-x}$ nollakohta on 3 ja funktio on määritelty, kun $x \le 3$.

Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio
$A(x)=x\cdot\sqrt{3-x}$.

Funktio A on määritelty, kun $0<x<3$.

Määritetään derivaattafunktio.

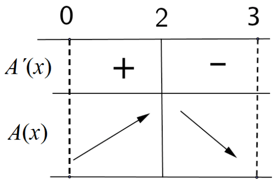
$$A'(x)=\sqrt{3-x}-\frac{x}{2\sqrt{3-x}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\sqrt{3-x}-\frac{x}{2\sqrt{3-x}}=0$$
$$x=2$$

Ratkaisu kuuluu välille]0,3[.

Laaditaan funktion A kulkukaavio.



x	$A'(x)$	merkki
1	1,060…	+
2,5	–1,060…	–

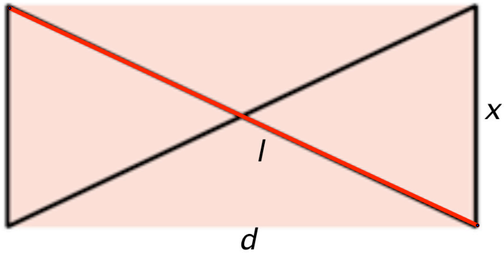
Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 2$.

Lasketaan suurin mahdollinen pinta-ala.

$A(2) = 2\sqrt{3-1} = 2$

Vastaus 2

335



Merkitään mainostaulun sivun pituutta kirjaimella x ja lävistäjän pituutta kirjaimelle l.
Alumiinitangon pituudesta saadaan yhtälö $2x + 2l = 10$. Tästä saadaan $l = 5 - x$.
Muuttuja x on välillä]0,5[.

Mainostaulun leveys d saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + d^2 = l^2$$
$$d^2 = l^2 - x^2$$
$$d^2 = (5-x)^2 - x^2$$
$$d = \sqrt{25-10x}$$

Suorakulmion pinta-alan ilmaisee funktio
$$A(x) = x \cdot \sqrt{25-10x}, \quad 0 < x < 5$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$A'(x) = \frac{\sqrt{5}(-3x+5)}{\sqrt{5-2x}}$$

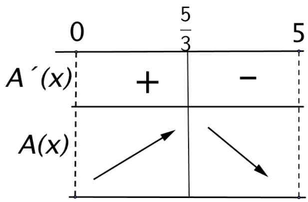
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-3\sqrt{5}x+5\sqrt{5}}{\sqrt{5-2x}}=0$$

$$x=\frac{5}{3}$$

Ratkaisu $x=\frac{5}{3}$ kuuluu välille]0, 5[.

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $0 < x < 5$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.



x	$A'(x)$	merkki
1	2,58….	+
2	–2,23…	–

Funktio A saa suurimman arvonsa kohdassa $x=\frac{5}{3}$ =1,66…. .

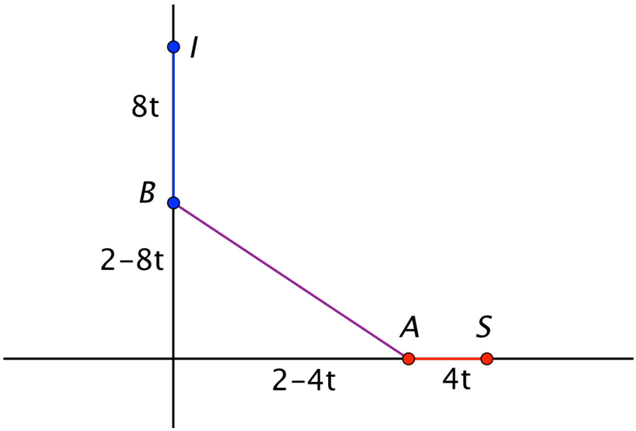
Lasketaan mainostaulun leveys.

$$d=\sqrt{25-10\cdot\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{3}=2,886...$$

Vastaus 2,86 m × 1,67 m

336



Saara on aluksi pisteessä S ja Irja on pisteessä I. Ajan t tunnin kuluttua Saara on päässyt pisteeseen A, johon matkaa lähtöpisteestä $4t$, Irja on päässyt pisteeseen B, johon on matkaa $8t$.

Tyttöjen välinen etäisyys on janan AB pituus.

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(2-4t)^2+(2-8t)^2}\\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{10t^2-6t+1}\end{aligned}$$

Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, etäisyys $|AB|$ saa pienimmän arvonsa, kun $f(t)=10t^2-6t+1$, missä $t \geq 0$, saa pienimmän arvonsa.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(t) = 20t-6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat

$$20t - 6 = 0$$
$$t = 0,3$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $t > 0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.

	0	0,3	
$f'(t)$		−	+
$f(t)$		↘	↗

Funktio f saa pienimmän arvonsa, kun $t = 0{,}3$.

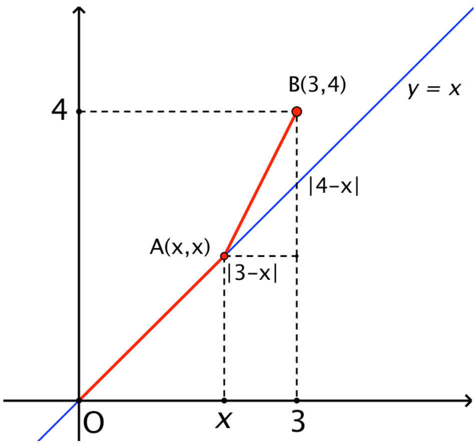
Etäisyys on pienin, kun tytöt ovat kulkeneet 0,3 h = 18 min.
Heidän etäisyytensä on tällöin

$$|AB| = 2\sqrt{2}\sqrt{10 \cdot 0,3^2 - 6 \cdot 0,3 + 1}$$
$$= 0,894...$$

Tyttöjen välinen etäisyys on 0,89 km

Vastaus 0,3 h = 18 min, 0,89 km

337



Nopein reitti origosta polkua pitkin pisteeseen $A(x, x)$ ja siitä suoraan metsän halki pisteeseen $B(3, 4)$. Muuttuja x voidaan rajata välille $x \geq 0$.

Lasketaan etäisyydet.

$$|OA| = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(3-x)^2 + (4-x)^2} \\ &= \sqrt{2x^2 - 14x + 25}\end{aligned}$$

Merkitään polulla kilometriä kohden kulunutta aikaa kirjaimella t. Tällöin metsässä kilometriä kohden kuluva aika on 2t. Matkaan kuluva aika on yhteensä

$$tx\sqrt{2} + 2t\sqrt{2x^2 - 14x + 25} = t(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2x^2 - 14x + 25})\,.$$

Koska *t* on positiivinen vakio, matkaan kuluva aika saa pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio

$$f(x) = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2x^2 - 14x + 25}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \sqrt{2} + \frac{4x - 14}{\sqrt{2x^2 - 14x + 25}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat

$$\sqrt{2} + \frac{4x - 14}{\sqrt{2x^2 - 14x + 25}} = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{7}{2} = 3,211...$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $x > 0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa.

	0	3,211...
$f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\nearrow$

x	$f'(x)$	merkki
1	–1,35…	–
4	3,414…	+

Funktio f saa pienimmän arvonsa, kun $x = 3{,}211\ldots$.

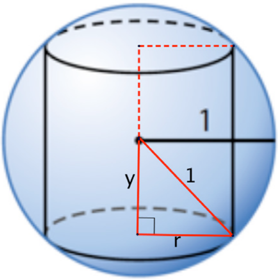
Lasketaan, kuinka pitkä matka juostaan polkua pitkin.

$$3,211... \cdot \sqrt{2} = 4,54...$$

Nopein reitti on polkua pitkin pisteeseen (3,2; 3,2), josta metsän halki pisteeseen (3, 4) eli ensin polkua pitkin 4,5 km, josta sitten suoraan rastille.

Vastaus polkua pitkin pisteeseen (3,2; 3,2), josta metsän halki rastille (polkua pitkin 4,5 km ja sitten suoraan rastille)

338



Merkitään kirjaimella r lieriön pohjan sädettä ja kirjaimella y pallon keskipisteen etäisyyttä lieriön pohjan keskipisteestä.

$r = \sqrt{1 - y^2}$

Muuttuja y on välillä]0, 1[.

Lieriön korkeus $h = 2y$.

Lieriön tilavuus voidaan laske kaavalla $V = 2\pi r^2 h$.

Lieriön tilavuuden ilmaisee funktio

$$V(y) = \pi(\sqrt{1 - y^2})^2 \cdot 2y = 2\pi(y - y^3).$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$V'(y) = 2\pi(1 - 3y^2)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2\pi(1 - 3y^2) = 0$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{tai} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ratkaisu $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ toteuttaa määrittelyehdon $0 < y < 1$.

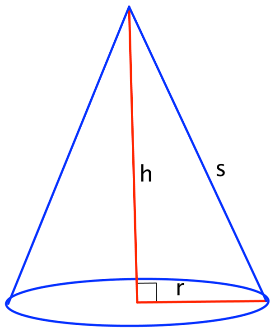
Laaditaan funktion V kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $]0,1[$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa.

	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$V'(y)$	+		−
$V(y)$	↗		↘

Funktio V saa suurimman arvon kohdassa $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, jolloin lieriön korkeus on $h = 2y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ja pohjan säde $r = \sqrt{1 - (\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vastaus pohjan säde $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, korkeus $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

339



Merkitään kirjaimella r teltan pohjan sädettä, kirjaimella h teltan korkeutta ja kirjaimella s teltan sivujanaa.

Teltan pinta-ala on ympyräkartion vaipan ala $A = \pi rs = 16$.
Ratkaistaan s.

$$s = \frac{16}{\pi r}$$

Teltan korkeus h saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + r^2 = s^2$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{16}{\pi r}\right)^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{256}{\pi^2 r^2} - r^2}$$

Teltan tilavuus voidaan laske kaavalla $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Teltan tilavuuden ilmaisee funktio

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{256}{\pi^2 r^2}-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\pi^2 r^4\left(\frac{256}{\pi^2 r^2}-r^2\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{256r^2-\pi^2 r^6}\,.$$

Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, saa tilavuus suurimman arvonsa samassa kohdassa kuin funktio
$f(r)=256r^2-\pi^2 r^6$.

Määritetään derivaattafunktio.

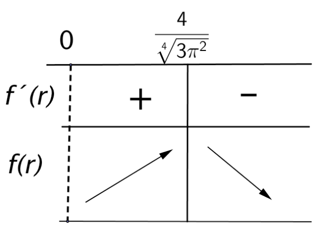
$$f'(r)=512r-6\pi^2 r^5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$512r-6\pi^2 r^5=0$$
$$r=0 \text{ tai } r=\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}=1{,}714... \text{ tai } r=-\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$$

Negatiivinen säteen arvo ei käy.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.

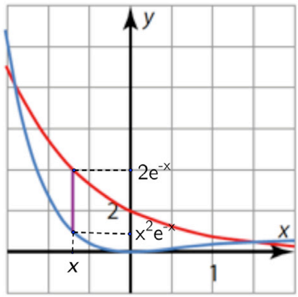


r	$f'(r)$	merkki
1	452,7…	+
2	–870,9…	–

Teltan tilavuus on suurin, kun pohjan säde on 1,714… m, jolloin pohjan halkaisija on 3,429… m ≈ 3,43 m.

Vastaus 3,43 m

340



Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet.

$$x^2e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$x^2e^{-x} - 2e^{-x} = 0$$

$$e^{-x}(x^2 - 2) = 0$$

$x^2 - 2 = 0$ tai $e^{-x} = 0$

$x = \sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$ ei ratkaisua

Muuttuja x on välillä $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Janan pituuden ilmaisee funktio
$f(x) = 2e^{-x} - x^2e^{-x}$.

Funktio f saa suljetulla välillä $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$e^{-x}(x^2-2x-2)=0$

$x^2-2x-2=0$ tai $e^{-x}=0$

$x=1-\sqrt{3}$ tai $x=1+\sqrt{3}$ ei ratkaisua

Ratkaisuista $x=1-\sqrt{3}$ kuuluu välille $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$f(-\sqrt{2})=2e^{-\sqrt{2}}-(-\sqrt{2})^2e^{-\sqrt{2}}=0$

$f(\sqrt{2})=2e^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}^2e^{\sqrt{2}}=0$

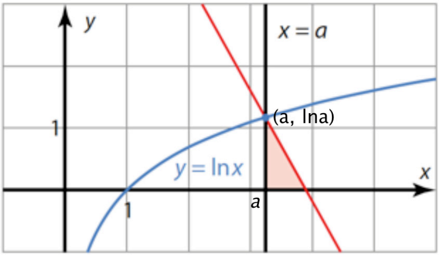
$f(1-\sqrt{3})=2e^{-(1-\sqrt{3})}-(1-\sqrt{3})^2e^{-(1-\sqrt{3})}=2e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)$

Funktio f saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $x=1-\sqrt{3}$.

Suurin janan pituus on $2e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)=3,044...\approx 3,04$

Vastaus $2e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)\approx 3,04$

341



$f(x) = \ln x$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Funktion f kuvaajalle kohtaan a piirretyn normaalin kulmakerroin on $-\dfrac{1}{f'(a)}$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pisteeseen $(a, \ln a)$ piirretyn normaalin kulmakerroin on

$k = -\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = -a$.

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$y - \ln a = -a(x - a), \quad a > 1$

Ratkaistaan normaalin ja x –akselin leikkauspiste.

$$
\begin{aligned}
0-\ln a &= -a(x-a) \\
-\ln a &= -ax+a^2 \\
ax &= a^2+\ln a \qquad |:a \\
x &= a+\frac{\ln a}{a}
\end{aligned}
$$

Kolmion kannan pituus on

$$a+\frac{\ln a}{a}-a=\frac{\ln a}{a}.$$

Kolmion korkeus on $\ln a$.

Kolmion pinta-alan ilmaisee funktio

$$A(a)=\frac{1}{2}\frac{\ln a}{a}\cdot\ln a=\frac{(\ln a)^2}{2a}.$$

Funktio A on määritelty, kun $a > 1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$A'(a)=\frac{2\ln a-(\ln a)^2}{a^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2\ln a-(\ln a)^2}{a^2}=0$$

$a=1$ tai $a=e^2$

Ratkaisu $a=e^2$ toteuttaa määrittelyehdon $a > 1$.

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $a > 1$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	1	e^2	
$A'(a)$	+		−
$A(a)$	↗		↘

a	$A'(a)$	merkki
2	0,226…	+
10	–0,69…	–

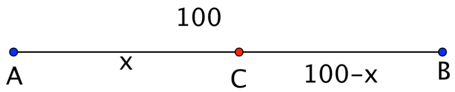
Funktio A saa suurimman arvonsa, kun $a = e^2$.
Lasketaan suurin mahdollinen pinta-ala.

$$A(\mathrm{e}^2) = \frac{(\ln \mathrm{e}^2)^2}{2\mathrm{e}^2} = \frac{2}{\mathrm{e}^2}$$

Suurin mahdollinen pinta-ala on $\frac{2}{\mathrm{e}^2}$.

Vastaus $\frac{2}{\mathrm{e}^2}$

342



Merkitään kirjaimella *A* kohtaa, jota vartioi suurempi lohikäärme, kirjaimella *B* kohtaa, jota vartio pienempi lohikäärme.

Lasketaan lohikäärmeiden tuhovaikutusten summa kohdassa C, jonka etäisyys kohdasta *A* on *x*. Muuttuja *x* voidaan rajata välille [0, 100].

Jos pienemmän lohikäärmeen koko on *m*, on suuremman lohikäärmeen koko 4*m*. Lohikäärmeiden tuhovaikutukset ovat $4m\mathrm{e}^{-x}$ ja $m\mathrm{e}^{-(100-x)}$. Lohikäärmeiden tuhovaikutusten summa on $4m\mathrm{e}^{-x} + m\mathrm{e}^{-100+x} = m(4\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-100+x})$.

Koska *m* on positiivinen vakio, niin tuhovaikutusten summa saa pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-100+x}$.

Funktio *f* saa suljetulla välillä [0, 100] pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille]0, 100[kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} + 100\mathrm{e}^{-100+x}$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$-4e^{-x} + 100e^{-100+x} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(4e^{100}) = 50,69...$$

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$f(0) = 4,00...$$

$$f(100) = 1,00...$$

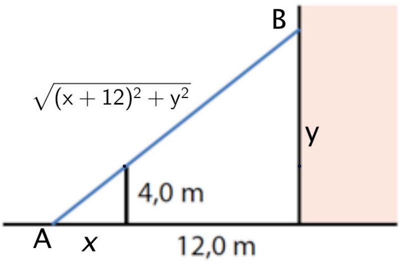
$$f(50,69...) = 7,71...\cdot 10^{-22}$$

Funktio f saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 50,69\ldots$.

Lohikäärmeiden tuhovaikutusten summa on pienin noin 51 kyynärän etäisyydellä suuremmasta lohikäärmeestä.

Vastaus noin 51 kyynärän etäisyydellä suuremmasta lohikäärmeestä

343



Käytetään kuvan merkintöjä.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella on

$$\frac{y}{x+12}=\frac{4}{x}.$$

Muuttuja x on määritelty, kun $x > 0$.
Ratkaistaan y.

$$y=4+\frac{48}{x}$$

Lasketaan tikkaiden pituus AB Pythagoraan lauseen avulla.

$$|AB|=\sqrt{(x+12)^2+y^2}=\sqrt{(x+12)^2+(4+\frac{48}{x})^2}$$

Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, saa tikkaiden pituus pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio

$$f(x)=(x+12)^2+(4+\frac{48}{x})^2,\quad 0<x<12$$

Määritetään derivaattafunktio

$$f'(x)=2(x+12)-\frac{384(x+12)}{x^3}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$2(x+12)-\frac{384(x+12)}{x^3}=0$$

$x=-12$ tai $x=4\sqrt[3]{3}=5{,}768...$

Ratkaisu $x=4\sqrt[3]{3}=5{,}768...$ toteuttaa määrittelyehdon $x>0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $x>0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	0	$4\sqrt[3]{3}$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

x	$f'(x)$	merkki
1	–4966	–
10	35.552	+

Funktio f saa pienimmän arvonsa kohdassa $x=4\sqrt[3]{3}=5{,}768...$.
Tikkaiden pituus on tällöin

$$\sqrt{(4\sqrt[3]{3}+12)^2+(4+\frac{48}{4\sqrt[3]{3}})^2} = 21{,}622...$$

Tikkaiden pituuden tulee olla vähintään 21,6 m.

Vastaus 21,6 m