232

a) $\mathrm{D}(3\mathrm{e}^x - 7x) = 3\mathrm{e}^x - 7$

b) $$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{\mathrm{e}^x}{6} + 4) &= \mathrm{D}(\frac{1}{6}\mathrm{e}^x + 4)\\ &= \frac{1}{6}\mathrm{e}^x \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{6}\end{aligned}$$

Vastaus

a) $3\mathrm{e}^x - 7$

b) $\frac{\mathrm{e}^x}{6}$

233

a)

$$\mathrm{D}\frac{\mathrm{e}^x}{5x} = \mathrm{D}\frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{D}\frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^x\cdot x - 1\cdot\mathrm{e}^x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2}$$

$$= \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{5x^2} \quad (\text{missä } x \neq 0)$$

b) $\mathrm{D}(x\mathrm{e}^x - 6) = 1\cdot\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 0$

$$= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$$

Vastaus

a) $\dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{5x^2}$

b) $\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$

234

a) $$\mathrm{D}(\mathrm{e}^x+2)^2 = 2(\mathrm{e}^x+2)\cdot D(\mathrm{e}^x+2)$$
$$= 2(\mathrm{e}^x+2)\mathrm{e}^x$$
$$= 2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 4\mathrm{e}^x$$
$$= 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x$$

b) $$\mathrm{D}(3\mathrm{e}^x-4x)^6 = 6(3\mathrm{e}^x-4x)^5 D(3\mathrm{e}^x-4x)$$
$$= 6(3\mathrm{e}^x-4x)^5(3\mathrm{e}^x-4)$$

Vastaus

a) $2\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x$

b) $6(3\mathrm{e}^x-4x)^5(3\mathrm{e}^x-4)$

235

a) $\mathrm{e}^x = 3$

$x = \ln 3$

b) $2\mathrm{e}^x = 8 \quad |:2$

$\mathrm{e}^x = 4$

$x = \ln 4$

c) $3\mathrm{e}^{2x} = 75 \quad |:3$

$\mathrm{e}^{2x} = 25$

$2x = \ln 25 \quad |:2$

$$x = \frac{1}{2}\ln 25$$

$x = \ln\sqrt{25}$

$x = \ln 5$

Vastaus

a) $x = \ln 3$

b) $x = \ln 4$

c) $x = \ln 5$

236

a) $4e^{x-1} = 12 \quad |:4$

$e^{x-1} = 3$

$x - 1 = \ln 3$

$x = \ln 3 + 1$

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$2x+1>0 \qquad \text{ja} \qquad x>0$$
$$2x>-1 \qquad |:2$$
$$x>-\frac{1}{2}$$

Yhdistämällä saadut ehdot, saadaan yhtälön määrittelyehdoksi $x > 0$.

$$\ln(2x+1)-2=\ln x$$
$$\ln(2x+1)-\ln x=2$$
$$\ln\frac{2x+1}{x}=2$$
$$\log_e\frac{2x+1}{x}=\log_e e^2$$

$$\frac{2x+1}{x}=e^2 \qquad |\cdot x \quad (\neq 0)$$
$$2x+1=e^2x$$
$$2x-e^2x=-1$$
$$(2-e^2)x=-1 \qquad |\cdot(2-e^2\neq 0)$$
$$x=^{-1)}\frac{-1}{2-e^2}$$
$$x=\frac{1}{e^2-2} \qquad (\approx 0{,}186)$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus

a) $x = \ln 3 + 1$

b) $x = \dfrac{1}{e^2 - 2}$

237

$$97(e^x - 1)(2e^{3x+1} - 6) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.
Tulo saa arvon on nolla, kun jokin sen tekijöistä saa arvon nolla.

$$\begin{aligned} e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= 1 \\ x &= \log_e 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} 2e^{3x+1} - 6 &= 0 \\ 2e^{3x+1} &= 6 && |:2 \\ e^{3x+1} &= 3 \\ 3x + 1 &= \log_e 3 \\ 3x &= \ln 3 - 1 && |:3 \\ x &= \frac{\ln 3 - 1}{3} \end{aligned}$$

Vastaus

$x = 0$ tai $x = \dfrac{\ln 3 - 1}{3}$

238

$$f(x)=\frac{2x-\mathrm{e}^x}{7}$$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{D}\frac{2x-\mathrm{e}^x}{7}\\&=\mathrm{D}\frac{1}{7}(2x-\mathrm{e}^x)\\&=\frac{1}{7}(2-\mathrm{e}^x)\end{aligned}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}\frac{1}{7}(2-\mathrm{e}^x)&=0\quad|\cdot 7\\2-\mathrm{e}^x&=0\\-\mathrm{e}^x&=-2\\\mathrm{e}^x&=2\\x&=\log_{\mathrm{e}}2\\x&=\ln 2\end{aligned}$$

Vastaus
$x=\ln 2$

239

$$g(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$$

a) Selvitetään ensin funktion g määrittelyehto.
Funktiota g ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.

$$\begin{aligned}1-e^x&=0\\ -e^x&=-1\\ e^x&=1\\ x&=\ln 1\\ x&=0\end{aligned}$$

Funktio g on määritelty, kun $x\neq 0$.

Derivoidaan funktio.
Käytetään osamäärän derivoimissääntöä $D\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{e^x(1-e^x)-e^x(-e^x)}{(1-e^x)^2},\quad x\neq 0\\ &=\frac{e^x-(e^x)^2+(e^x)^2}{(1-e^x)^2}\\ &=\frac{e^x}{(1-e^x)^2},\text{ missä } x\neq 0\end{aligned}$$

b) Koska funktiota g ei ole määritelty kohdassa 0, ei sillä voi olla derivaattaa kohdassa 0.
Siis funktio g ei ole derivoituva kaikkialla.

c) $$g'(x) = 0$$

$$\frac{e^x}{(1-e^x)^2} = 0 \quad |\cdot(1-e^x)^2 \ (\neq 0)$$

$$\underbrace{e^x}_{>0} = 0$$

Ei ratkaisua, koska $e^x > 0$ kaikilla muuttujan arvoilla.

Derivaatalla ei ole nollakohtia.

Vastaus

a) $g'(x) = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$, kun $x \neq 0$

b) Ei ole.

c) Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

240

a) $\ln 8 - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 9 = \ln\frac{8}{2} + \ln 9^{\frac{1}{2}}$

$= \ln 4 + \ln\sqrt{9}$

$= \ln 4 + \ln 3$

$= \ln(4\cdot 3)$

$= \ln 12$

b) $\ln 16 - \ln 2^3 - \ln 2 = \ln 2^4 - \ln 2^3 - \ln 2$

$= 4\ln 2 - 3\ln 2 - \ln 2$

$= 0$

c) $\ln\frac{4\cdot 9}{25} - 2\ln\frac{2\cdot 3}{5} = \ln\frac{4\cdot 9}{25} - \ln\left(\frac{2\cdot 3}{5}\right)^2$

$= \ln\frac{4\cdot 9}{25} - \ln\frac{2^2\cdot 3^2}{5^2}$

$= \ln\frac{4\cdot 9}{25} - \ln\frac{4\cdot 9}{25}$

$= 0$

Vastaus

a) $\ln 12$

b) 0

c) 0

241

a) $\ln e^2 - 2\ln 1 = 2\ln e - 2\cdot 0$

$$= 2\cdot 1 - 0$$

$$= 2$$

b) $\ln \frac{x+1}{x} + \ln x = \ln(x+1) - \ln x + \ln x$

$$= \ln(x+1)$$

c) $\ln 2x - \ln x^3 + \ln x^2 = \ln 2 + \ln x - 3\ln x + 2\ln x$

$$= \ln 2$$

Vastaus

a) 2

b) $\ln(x+1)$

c) $\ln 2$

242

$$f(x)=\ln(\mathrm{e}^{-x}-x^2+1)$$

a) $f(1)=\ln(\mathrm{e}^{-1}-1^2+1)$
$=\ln(\mathrm{e}^{-1}-1+1)$
$=\ln(\mathrm{e}^{-1})$
$=-1$

b) $f(-1)=\ln(\mathrm{e}^{-(-1)}-(-1)^2+1)$
$=\ln(\mathrm{e}^{1}-1+1)$
$=\ln(\mathrm{e}^{1})$
$=1$

c) $f(0)=\ln(\mathrm{e}^{-0}-0^2+1)$
$=\ln(\mathrm{e}^{0}-0+1)$
$=\ln(1+1)$
$=\ln 2$

Vastaus

a) -1
b) 1
c) $\ln 2$

243

a) $e^{3x+1} \leq e^{13}$

Funktio $\ln x$ on aidosti kasvava, joten epäyhtälön suuruusjärjestys säilyy, kun epäyhtälön molemmille puolille merkitään logaritmit.

$$\begin{aligned}
\ln e^{3x+1} &\leq \ln e^{13} \\
3x+1 &\leq 13 \\
3x &\leq 13-1 \\
3x &\leq 12 && |:3 \\
x &\leq 4
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{3+e^x}{e^x} &> 6 && |\cdot e^x \\
3+e^x &> 6e^x \\
e^x-6e^x &> -3 \\
-5e^x &> -3 && |:(-5)<0 \\
e^x &< \frac{3}{5} \\
\ln e^x &< \ln\frac{3}{5} \\
x &< \ln\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

c) $\underbrace{e^{2x} + e^{x}}_{>0} < 0$

Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua, koska eksponenttifunktion e^{x} arvot ovat aina positiivisia, joten positiivisten lukujen summa $e^{2x} + e^{x}$ on aina positiivinen.

Vastaus
a) $x \leq 4$
b) $x < \ln\frac{3}{5}$
c) ei ratkaisua

244

a) $D(x^2 - e^x) = 2x - e^x$

b) $D(x^2 e^x) = 2xe^x + x^2 e^x$
$= e^x(2x + x^2)$

Tulon derivoimissääntö:

$Dfg = f'g + fg'$

c) $D\dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$
$= \dfrac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2}$
$= \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

Osamäärän derivoimissääntö:

$D\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Vastaus

a) $2x - e^x$

b) $e^x(2x + x^2)$

c) $\dfrac{2x - x^2}{e^x}$

245

a) $\mathrm{D}(3+4\mathrm{e}^x)^5 = 5(3+4\mathrm{e}^x)^4 \cdot 4\mathrm{e}^x$

$= 20\mathrm{e}^x(3+4\mathrm{e}^x)^4$

Yhdistetyn funktion derivointi:
$\mathrm{D}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

b) $$D\frac{\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2x) - (\mathrm{e}^x + x^2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x(e^x + 2x - \mathrm{e}^x - x^2)}{(\mathrm{e}^x)^2}$$

$$= \frac{2x - x^2}{\mathrm{e}^x}$$

c) $\mathrm{D}(\mathrm{e}^\pi + x) = 0 + 1$

$= 1$

Vastaus

a) $20\mathrm{e}^x(3+4\mathrm{e}^x)^4$

b) $\dfrac{2x - x^2}{\mathrm{e}^x}$

c) 1

246

a) $$\mathrm{e}^{3x+4} = \frac{1}{\mathrm{e}^{11}}$$

$$\mathrm{e}^{3x+4} = \mathrm{e}^{-11}$$ Funktio e^x on aidosti kasvava.

$$3x + 4 = -11$$

$$3x = -11 - 4$$

$$3x = -15 \quad |:3$$

$$x = -5$$

b) $\ln(x-3)+2=\ln(x^2-9)$

Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$\begin{array}{ccc} x-3>0 & \text{ja} & x^2-9>0 \\ x>3 & & x<-3 \quad \text{tai} \quad x>3 \end{array}$$

Yhtälö on määritelty, kun $x > 3$.

$$\begin{aligned} \ln(x-3)+2 &= \ln(x^2-9) \\ \ln(x-3)-\ln(x^2-9) &= -2 \\ \ln\frac{x-3}{x^2-9} &= -2 \\ \ln\frac{x-3}{x^2-9} &= \ln e^{-2} \quad \text{Funktio } \ln x \text{ on aidosti kasvava.} \\ \frac{x-3}{x^2-9} &= e^{-2} \\ \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} &= e^{-2} \\ \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{e^2} \\ x+3 &= e^2 \\ x &= e^2-3 \approx 4{,}39 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 3$.

Vastaus a) $x=-5$
b) $x=e^2-3$

247

a) $\ln(x-2) \leq -3$

Selvitetään epäyhtälön määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Epäyhtälö on määritelty, kun $x > 2$.

$$\begin{aligned} \ln(x-2) &\leq -3 \\ \log_e(x-2) &\leq \log_e e^{-3} \\ x-2 &\leq e^{-3} \\ x &\leq 2+\frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

$\log_e x$ on aidosti kasvava, joten suuruusjärjestys säilyy.

Kun yhdistetään määrittelyehto $x > 2$ ja ratkaisu $2+\frac{1}{e^3}$ saadaan

$$2 < x \leq 2+\frac{1}{e^3}.$$

b)

$$e^{2-x} < 3$$
$$e^{2-x} < e^{\log_e 3}$$
$$2 - x < \log_e 3$$
$$-x < -2 + \ln 3 \mid \cdot(-1)$$
$$x > 2 - \ln 3$$

$y = a^{\log_a y}$

Funktio e^x on aidosti kasvava, joten suuruusjärjestys säilyy.

Vastaus

a) $2 < x \leq 2 + \frac{1}{e^3}$

b) $x > 2 - \ln 3$

248

a) $\ln \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{\ln x^2} = \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{\log_{\mathrm{e}} x^2}$ $\quad y = \log_a a^y,\ y = a^{\log_a y}$

$$= x^2 - x^2$$

$$= 0$$

b) $\ln\sqrt{x} - \ln x + \dfrac{\ln x^2}{4} = \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln x + \dfrac{1}{4}\cdot \ln x^2$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \ln x + \frac{1}{4}\cdot 2\ln x$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \ln x + \frac{1}{2}\ln x$$

$$= 0$$

Vastaus

a) 0

b) 0

249

$$f(x) = 2x + 3\mathrm{e}^x$$

Funktio f on määritelty kaikkialla.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 + 3\underbrace{\mathrm{e}^x}_{>0} > 0$$

Koska eksponenttifunktio e^x on kaikkialla positiivinen, niin derivaattafunktio f' saa vain positiivisia arvoja, joten funktio f on aidosti kasvava. $\square$

250

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-3x}{x}$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(\mathrm{e}^x-3)x-(\mathrm{e}^x-3x)\cdot 1}{x^2}\\ &=\frac{\mathrm{e}^x x-3x-\mathrm{e}^x+3x}{x^2}\\ &=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2},\ \text{missä}\ x\neq 0\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}=0$$

$$\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}=0 \quad |\cdot x^2 \quad (>0)$$

$$(x-1)\mathrm{e}^x=0$$

$$\begin{array}{lcl} x-1=0 & \text{tai} & \mathrm{e}^x=0 \\ x=1 & & \text{ei ratkaisua} \end{array}$$

Derivaattafunktion ainoa nollakohta on $x = 1$.

Funktio on aidosti kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö $f'(x) \geq 0$.

$$\frac{(x-1)e^x}{x^2} \geq 0$$

$$x \geq 1$$

Vastaus
Derivaattafunktion nollakohta on $x = 1$.
Funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 1$.

251

$$a_n = \ln\frac{n}{n+1}$$

a) $a_1 = \ln\frac{1}{1+1} = \ln\frac{1}{2}$, $\quad a_2 = \ln\frac{2}{2+1} = \ln\frac{2}{3}$

$a_3 = \ln\frac{3}{3+1} = \ln\frac{3}{4}$, $\quad a_4 = \ln\frac{4}{4+1} = \ln\frac{4}{5}$

$a_5 = \ln\frac{5}{5+1} = \ln\frac{5}{6}$

b) $S_5 = a_1 + a_2 + \ldots + a_5$

$$= \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{5} + \ln\frac{5}{6}$$

$$= \ln(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6})$$

$$= \ln\frac{1}{6} (= -\ln 6)$$

c) $S_{1000} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000}$

$$= \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ldots + \ln\frac{999}{1000} + \ln\frac{1000}{1001}$$

$$= \ln(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{\cancel{999}}{\cancel{1000}} \cdot \frac{\cancel{1000}}{1001})$$

$$= \ln\frac{1}{1001} (= -\ln 1001)$$

d) Lukujono on aidosti kasvava, kun $a_{n+1} > a_n$, $n > 1$.
Muodostetaan lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \ln\frac{n+1}{n+1+1} - \ln\frac{n}{n+1} \\
&= \ln\frac{n+1}{n+2} - \ln\frac{n}{n+1} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n+2} : \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\frac{(n+1)^2}{n^2+2n} \\
&= \ln\underbrace{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}_{>1} > 0 \qquad \big|\ \ln x > 0 \text{ kaikilla } x > 1
\end{aligned}$$

Siis $a_{n+1} - a_n > 0$ ja siten $a_{n+1} > a_n$.
Lukujono on aidosti kasvava. □

Vastaus

a) $\ln\frac{1}{2}$, $\ln\frac{2}{3}$, $\ln\frac{3}{4}$, $\ln\frac{4}{5}$, $\ln\frac{6}{6}$

b) $S_5 = \ln\frac{1}{6} \quad (= -\ln 6)$

c) $S_{1000} = \ln\frac{1}{1001} \quad (= -\ln 1001)$

252

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x^2+1)-1}{\ln(x+\mathrm{e})}=\frac{2\ln(0+1)-1}{\ln(0+\mathrm{e})}$$
$$=\frac{2\ln 1-1}{\ln \mathrm{e}}$$
$$=\frac{2\cdot 0-1}{1}$$
$$=-1$$

b) $$\lim_{x\to 3}\frac{\ln x^2-\ln 9}{\ln x-\ln 3}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln x^2-\ln 3^2}{\ln x-\ln 3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2\ln x-2\ln 3}{\ln x-\ln 3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(\ln x-\ln 3)}{\ln x-\ln 3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{1}$$
$$=2$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{2e^{3x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\cdot 3x}-1}{2e^{3x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x})^2-1^2}{2e^{3x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}+1)\cancel{(e^{3x}-1)}}{2\cancel{(e^{3x}-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+1}{2}$$

$$=\frac{e^{3\cdot 0}+1}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}$$

$$=1$$

Vastaus

a) –1

b) 2

c) 1

253

a) $(\ln x^2 - 4)(6 - \ln x^6) = 0$

Selvitetään ensin määrittelyehdot.

$x^2 > 0$ ja $x^6 > 0$

Ehdot toteutuvat, kun $x \neq 0$.

Tulo saa arvon nolla, kun vähintään yksi tulontekijöistä on nolla.

$$\begin{aligned}
\ln x^2 - 4 &= 0 \\
\ln x^2 &= 4 \\
\ln x^2 &= \ln \mathrm{e}^4 \\
x^2 &= \mathrm{e}^4 \\
x &= \sqrt{\mathrm{e}^4} = \mathrm{e}^2 \\
&\text{tai} \\
x &= -\sqrt{\mathrm{e}^4} = -\mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}
6 - \ln x^6 &= 0 \\
-\ln x^6 &= -6 \\
\ln x^6 &= 6 \\
x^6 &= \mathrm{e}^6 \\
x &= \sqrt[6]{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e} \\
&\text{tai} \\
x &= -\sqrt[6]{\mathrm{e}^6} = -\mathrm{e}
\end{aligned}$$

b) $$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$
$$(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$$

Merkitään $t = e^x, t > 0$.

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$t = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$t = 1$ tai $t = 3$ | Sijoitetaan $t = e^x, t > 0$.

$e^x = 1$ tai $e^x = 3$
$x = 0$ $x = \ln 3$

Vastaus
a) $x = -e$, $x = e$, $x = e^2$ tai $x = -e^2$
b) $x = 0$ tai $x = \ln 3$

254

a) $f(x) = (\ln 3 + e^x)^2$

$$f'(x) = 2(\ln 3 + e^x) \cdot e^x$$
$$= 2e^x \ln 3 + 2e^{2x}$$

Derivaattafunktio on kasvava, jos sen derivaatta on epänegatiivinen.

Määritetään derivaattafunktion derivaattafunktio f''.

$$f''(x) = 2e^x \ln 3 + 4e^{2x}$$

$2e^x \ln 3 > 0$ ja $4e^{2x} > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, joten $f''(x) > 0$.

Koska funktion f toinen derivaatta saa vain positiivisia arvoja, on funktion f derivaattafunktio (aidosti) kasvava ja siten funktio f on konveksi.

b) $f(x) = x - xe^x$

$$f'(x) = 1 - (e^x + xe^x)$$
$$= 1 - e^x - xe^x$$

Määritetään derivaattafunktion derivaatta f''.

$$f''(x) = 0 - e^x - e^x - xe^x$$
$$= -2e^x - xe^x$$
$$= (-2 - x)e^x$$
$$= -(2 + x)e^x$$

$f''(x) < 0$, kun $x > -2$

ja

$f''(x) > 0$, kun $x < -2$

Koska funktion f toinen derivaatta saa myös negatiivisia arvoja, ei funktion f derivaattafunktio ole kasvava eikä funktio f ole siten konveksi.

Vastaus

a) Funktio on konveksi.

b) Funktio ei ole konveksi

255

$$f(x)=\frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}$$
$$=\frac{e^x}{1-e^{\frac{1}{2}x}}$$

Funktiota ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.

$$1-e^{\frac{1}{2}x}=0$$
$$x=0$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(1-e^{\frac{1}{2}x})-e^x\cdot(-\frac{1}{2}e^x)}{(1-e^{\frac{1}{2}x})^2}$$
$$=\frac{e^x(1-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x})}{(1-e^{\frac{1}{2}x})^2},\ \text{missä}\ x\neq 0$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{e^{x}(1-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x})}{(1-e^{\frac{1}{2}x})^{2}}=0$$

$$x=\ln 4=2\ln 2=1{,}386...$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdissa, jossa derivaattafunktiota ei ole määritelty. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	0	2ln 2	
$f'(x)$	+	+	–
$f(x)$	↗	↗	↘

x	$f\,'(x)$	merkki
–1	1,655…	+
1	1,13…	+
2	–0,898…	–

Funktio on aidosti kasvava, kun $x<0$ tai $0<x<2\ln 2$.

Vastaus
välillä $x<0$ ja välillä $0<x<2\ln 2$

256

$$f'(t) = -\lambda \cdot f(t)$$

a) $f(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= C \cdot (-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= -\lambda \cdot C\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= -\lambda \cdot f(t) \end{aligned}$$

Siis funktio f toteuttaa ehdon.

b)
$$\begin{aligned} f(0) &= C\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} \\ &= C\mathrm{e}^{0} \\ &= C \cdot 1 \\ &= C \end{aligned}$$

Koska $f(0) = C$, niin vakio C kuvaa aineen määrää hetkellä 0.

c) $f(T)=\frac{1}{2}f(0)$

$$Ce^{-\lambda T}=\frac{1}{2}C \qquad |:C \ \ (\neq 0)$$

$$e^{-\lambda T}=\frac{1}{2}$$

$$-\lambda T=\ln\frac{1}{2}$$

$$-\lambda T=-\ln 2 \ |:(-T)$$

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T}$$

Vastaus

b) C on aineen alkuperäinen määrä.

c) $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$

257

a) $D3e^{x} = 3e^{x}$

b)

$$\begin{aligned} De^{3x} &= e^{3x} \cdot 3 \\ &= 3e^{3x} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} De^{\frac{x}{3}} &= e^{\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} De^{-x} &= e^{-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

Vastaus a) $3e^{x}$ b) $3e^{3x}$ c) $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$ d) $-e^{-x}$

258

a)

$$\mathrm{D}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

b)

$$\mathrm{D}e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x$$
$$= xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

c)

$$\mathrm{D}\frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} \cdot 2x$$
$$= xe^{x^2}$$

d)

$$\mathrm{D}e^{-x^2+x} = e^{-x^2+x} \cdot (-2x+1)$$
$$= (-2x+1)e^{-x^2+x}$$

Vastaus a) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

b) $xe^{\frac{1}{2}x^2}$

c) xe^{x^2}

d) $(-2x+1)e^{-x^2+x}$

259

a)

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x} + \frac{1}{e^{x}}$$

$$= e^{2x} - 2e^{x} + e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 - 2e^{x} + e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 2e^{2x} - 2e^{x} - \frac{1}{e^{x}}$$

b)

$$f'(0) = 2e^{2\cdot 0} - 2e^{0} - \frac{1}{e^{0}}$$

$$= 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - \frac{1}{1}$$

$$= -1$$

Vastaus a) $2e^{2x} - 2e^{x} - \frac{1}{e^{x}}$ b) -1

260

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}2^x &= \mathrm{D}(\mathrm{e}^{\ln 2})^x \\
&= \mathrm{De}^{x\ln 2} \\
&= \mathrm{e}^{x\ln 2} \cdot \mathrm{D}(x \cdot \ln 2) \\
&= 2^x \ln 2
\end{aligned}$$

261

a) $D15^x = 15^x \ln 15$

b) $D\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}$

c) $D2^{3x} = 2^{3x} \ln 2 \cdot 3 = 2^{3x} \cdot 3\ln 2$

d) $D0{,}14^{2x} = 0{,}14^{2x} \ln 0{,}14 \cdot 2 = 0{,}14^{2x} \cdot 2\ln 0{,}14$

Vastaus
a) $15^x \ln 15$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}$
c) $2^{3x} \cdot 3\ln 2$
d) $0{,}14^{2x} \cdot 2\ln 0{,}14$

262

a) $f(x) = x^2 e^{2x}$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot 2$$
$$= 2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x} = 0$$
$$2e^{2x} x(1+x) = 0$$

$2xe^{2x} = 0$ tai $1 + x = 0$

Koska $e^{2x} > 0$, niin ratkaisu on $x = 0$

$x = -1$

Derivaatan nollakohdat ovat 0 ja –1.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{2xe^{2x} - x^2 e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2}$$
$$= \frac{e^{2x}(2x - 2x^2)}{(e^{2x})^2} \qquad |: e^{2x}\ (> 0)$$
$$= \frac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{2x-2x^2}{e^{2x}} &= 0 \quad |: e^{2x}\ (>0) \\
2x-2x^2 &= 0 \\
2x(1-x) &= 0
\end{aligned}
$$

$2x = 0$ tai $1 - x = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Vastaus a) $x = 0$ tai $x = -1$

b) $x = 0$ tai $x = 1$

263

$$f(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 1)$$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x(x^2 + 1) + \mathrm{e}^x \cdot 2x \\ &= \mathrm{e}^x(x^2 + 2x + 1) \\ &= \mathrm{e}^x(x + 1)^2 \end{aligned}$$

Derivaattafunktio f on kaikkialla epänegatiivinen, koska $\mathrm{e}^x > 0$ kaikilla muuttujan arvoilla ja $(x+1)^2 \geq 0$, missä yhtäsuuruus on voimassa vain kohdassa $x = -1$. Näin funktio f on aidosti kasvava kaikkialla.

264

$$f(x) = e^x - x$$

Tangentin kulmakerroin kohdassa x on $f'(x)$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = e^x - 1$$

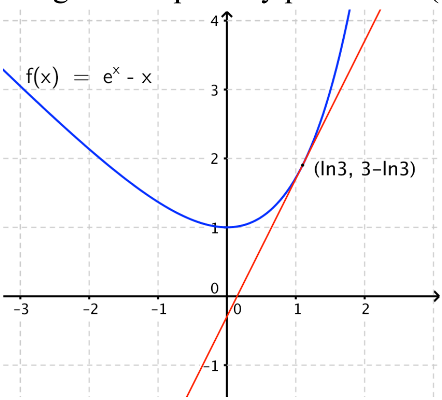
Ratkaistaan, mihin kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on 2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ e^x - 1 &= 2 \\ e^x &= 3 \\ x &= \ln 3 \end{aligned}$$

Tangentti on piirretty pisteeseen $(\ln 3, f(\ln 3))$.

$$\begin{aligned} f(\ln 3) &= e^{\ln 3} - \ln 3 \\ &= 3 - \ln 3 \end{aligned}$$

Tangentti on piirretty pisteeseen $(\ln 3, 3 - \ln 3)$.



Vastaus $\quad (\ln 3, 3 - \ln 3)$

265

$$f(t) = N \cdot 1{,}108^t$$

a) Peurojen määrä 10 vuoden kuluttua on $f(10)$.

$$\begin{aligned} f(10) &= 120 \cdot 1{,}108^{10} \\ &= 334{,}640... \\ &\approx 330 \end{aligned}$$

b) Peurojen määrän kasvunopeuden hetkellä t ilmaisee derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 120 \cdot 1{,}108^t \cdot \ln 1{,}108 \\ f'(10) &= 120 \cdot 1{,}108^{10} \cdot \ln 1{,}108 \\ &= 34{,}319... \\ &\approx 34 \end{aligned}$$

Peurojen määrää kasvaa 34 peuraa/vuosi.

Vastaus a) noin 330 peuraa
b) noin 34 peuraa/vuosi

266

a) Kofeiinin määrä on kuuden tunnin kuluttua puolet alkuperäisestä määrästä. Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee, kuinka moninkertaiseksi kofeiinin määrä muuttuu yhdessä tunnissa.
Kun alkuperäinen määrä on m, on tunnin kuluttua kofeiinista jäljellä qm. Kuuden tunnin kuluttua määrä on $q^6m = 0,5m$.

Ratkaistaan kerroin q.

$$\begin{aligned} q^6m &= 0,5m \qquad |:m \\ q^6 &= 0,5 \qquad q > 0 \\ q &= \sqrt[6]{0,5} \end{aligned}$$

Kofeiinia on tölkillisessä juomaa $3,3 \cdot 32 \text{ mg} = 105,6 \text{ mg}$.
$m = 105,6$

Määritetään kofeiinin määrä t tunnin kuluttua.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt[6]{0,5}^{\,t} \cdot 105,6 \\ &= 105,6 \cdot 0,5^{\frac{t}{6}} \\ &\approx 105,6 \cdot 0,891^t \end{aligned}$$

b) Klo 19.30:sta klo 23.30 on kulunut aikaa 4 h. Kofeiinin määrän pienenemisnopeuden ilmaisee derivaattafunktio.

$$f(t) = 105{,}6 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{6}t}$$

$$f'(t) = 105{,}6 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{6}t} \ln 0{,}5 \cdot \frac{1}{6}$$

$$f'(4) = 105{,}6 \cdot 0{,}5^{\frac{4}{6}} \ln 0{,}5 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= -7{,}685...$$

$$\approx -7{,}7$$

Kofeiinin määrä vähenee noin 7,7 mg/h.

Vastaus a) $105{,}6 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{6}} \approx 105{,}6 \cdot 0{,}891^t$

b) noin 7,7 mg/h.

267

Salma: $D(e^x)^3 = De^{3x} = e^{3x} \cdot D3x = 3e^{3x}$
Salman ratkaisu on oikein.

Aatos: $D(e^x)^3 = 3(e^x)^2 \cdot De^x = 3e^{2x} \cdot e^x = 3e^{3x}$
Ida: $D(e^x)^3 = De^{3x} = e^{3x} \cdot D3x = 3e^{3x}$

Vastaus Salman ratkaisu on oikein.

268

a) $\mathrm{D}\mathrm{e}^{-10x} = \mathrm{e}^{-10x} \cdot \mathrm{D}(-10x) = \mathrm{e}^{-10x} \cdot (-10) = -10\mathrm{e}^{-10x}$

b) $\mathrm{D}\mathrm{e}^{x^5} = \mathrm{e}^{x^5} \cdot \mathrm{D}x^5 = \mathrm{e}^{x^5} \cdot 5x^4 = 5x^4\mathrm{e}^{x^5}$

c) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x^2}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x^2} \cdot (-3 \cdot 2x) = -x\mathrm{e}^{-3x^2}$

d) $\mathrm{D}\mathrm{e}^{2x3-x} = \mathrm{e}^{2x^3-x} \cdot \mathrm{D}(2x^3 - x) = \mathrm{e}^{2x^3-x} \cdot (6x^2 - 1) = (6x^2 - 1)\mathrm{e}^{2x^2-x}$

Vastaus
a) $-10\mathrm{e}^{-10x}$
b) $5x^4\mathrm{e}^{x^5}$
c) $-x\mathrm{e}^{-3x^2}$
d) $(6x^2 - 1)\mathrm{e}^{2x^2-x}$

269

a) $D7^x = 7^x \ln 7$

b)

$$\begin{aligned} D3^{-x} &= 3^{-x} \ln 3 \cdot D(-x) \\ &= 3^{-x} \ln 3 \cdot (-1) \\ &= -3^{-x} \ln 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} D0{,}5^{2x} &= 0{,}5^{2x} \ln 0{,}5 \cdot D(2x) \\ &= 0{,}5^{2x} \ln 0{,}5 \cdot 2 \\ &= 0{,}5^{2x} \cdot 2 \ln 0{,}5 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D1{,}2^{-5x} &= 1{,}2^{-5x} \ln 1{,}2 \cdot D(-5x) \\ &= 1{,}2^{-5x} \cdot (-5 \ln 1{,}2) \\ &= -1{,}2^{-5x} \cdot 5 \ln 1{,}2 \end{aligned}$$

Vastaus
a) $7^x \ln 7$
b) $-3^{-x} \ln 3$
c) $0{,}5^{2x} \cdot 2 \ln 0{,}5$
d) $-1{,}2^{-5x} \cdot 5 \ln 1{,}2$

270

a) $f(x) = x^2e^{-x}$

Määritetään funktion f derivaattavunktio.

$$f'(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} \cdot (-1)x^2$$
$$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

Ratkaistaan derivaattafunktioon nollakohdat.

$$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$$
$$e^{-x}(2x - x^2) = 0$$

$e^{-x} = 0$ tai $2x - x^2 = 0$

ei ratkaisua

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$ tai $x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Funktio on määritelty, kun $x \neq 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} \cdot x - e^{-x} \cdot (-1)}{x^2}, x \neq 0$$
$$= \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} = 0 \quad |\cdot x^2 \ (\neq 0)$$

$$e^{-x}(x+1) = 0$$

$e^{-x} = 0$ tai $x + 1 = 0$

ei ratkaisua $x = -1$

Vastaus a) $x = 0$ tai $x = 2$

b) $x = -1$

271

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+x$$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2-2\mathrm{e}^{x}+1\\&=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+1\\&=(\mathrm{e}^{x})^{2}-2\mathrm{e}^{x}+1\\&=(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}&=0\\\mathrm{e}^{x}-1&=0\\\mathrm{e}^{x}&=1\\x&=0\end{aligned}$$

Derivaattafunktio saa arvon nolla vain, kun $x = 0$, muulloin arvot ovat positiivisia. Siten funktio f on aidosti kasvava.

272

$$f(x) = 2^x - x$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2^x \ln 2 - 1 = 0$$

$$2^x \ln 2 = 1 \quad |: \ln 2$$

$$2^x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$x = \log_2 \frac{1}{\ln 2} = -\log_2 \ln 2 = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$$

Vastaus $\quad x = -\log_2 \ln 2 = -\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$

273

a) Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee, kuinka moninkertaiseksi fenoksihapon määrä pienenee viikossa. Kun määrä on alussa 250 g, niin t viikon kuluttua määrä on $250q^t$.

Kun $t = 3$, on määrä $0,50 \cdot 250\text{ g} = 125\text{ g}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan q.

$$\begin{aligned} 250q^3 &= 125 \quad |:125 \\ q^3 &= 0,5 \\ q &= 0,5^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Fenoksihapon määrä t viikon kuluttua saadaan funktion f avulla.

$$\begin{aligned} f(t) &= 250 \cdot (0,5^{\frac{1}{3}})^t \\ &= 250 \cdot 0,5^{\frac{t}{3}} \\ &\approx 250 \cdot 0,794^t \end{aligned}$$

b)

$$0,5 = \mathrm{e}^{\ln 0,5}$$

$$f(t) = 250 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln 0,5}{3}t}$$

$$\approx 250 \cdot \mathrm{e}^{-0,231t}$$

c) Fenoksihapon määrän vähenemisen hetkellä t ilmaisee derivaattafunktio. Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(t) = 250 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln 0,5}{3}t} \cdot \frac{\ln 0,5}{3}$$

$$f'(1,5) = 250 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln 0,5}{3} \cdot 1,5} \cdot \frac{\ln 0,5}{3}$$

$$= -40,844...$$

$$\approx -41$$

Määrä vähenee noin 41 g/viikko.

Vastaus

a) $f(t) = 250 \cdot 0,5^{\frac{t}{3}} \approx 250 \cdot 0,794^{t}$

b) $f(t) = 250 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln 0,5}{3}t} \approx 250 \cdot \mathrm{e}^{-0,231t}$

c) noin 41 g/viikko

274

$$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

Pisteeseen $P(x, f(x))$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa x.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

Pisteen P x- ja y-koordinaattien tulo on $x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}=f'(x)$.

275

$$f(x) = k^x$$

Funktion kuvaajalle pisteeseen (a, k^a) piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(a)$.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = k^x \cdot \ln k$$
$$f'(a) = k^a \cdot \ln k$$

Muodostetaan funktion f kuvaajalle pisteeseen (a, k^a) piirretyn tangentin yhtälö.

$$y - k^a = k^a \cdot \ln k(x - a)$$
$$y - k^a = k^a \cdot \ln k \cdot x - ak^a \ln k$$
$$y = k^a \cdot \ln k \cdot x - ak^a \ln k + k^a$$

Koska tangentti kulkee origon kautta, niin täytyy suoran yhtälön vakion tulee olla 0.

$$-ak^a \ln k + k^a = 0$$

$$k^a(-a \ln k + 1) = 0 \qquad |: k^a \neq 0$$
$$-a \ln k = -1$$
$$a \ln k = 1$$
$$\ln k^a = 1$$
$$k^a = \mathrm{e}$$

Koska k^a on sivuamispisteen y-koordinaatti, on sivuamispisteen y-koordinaatti aina e.

276

$$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$$

a) Derivoidaan funktio $\sinh x$.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\sinh x &= \mathrm{D}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\cdot(-1)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

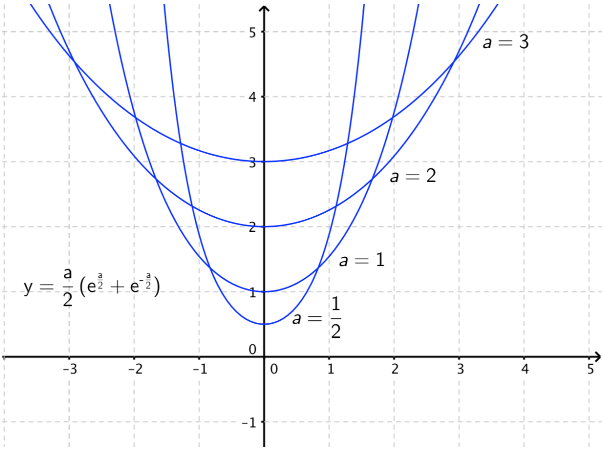
b)

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\cdot(-1)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

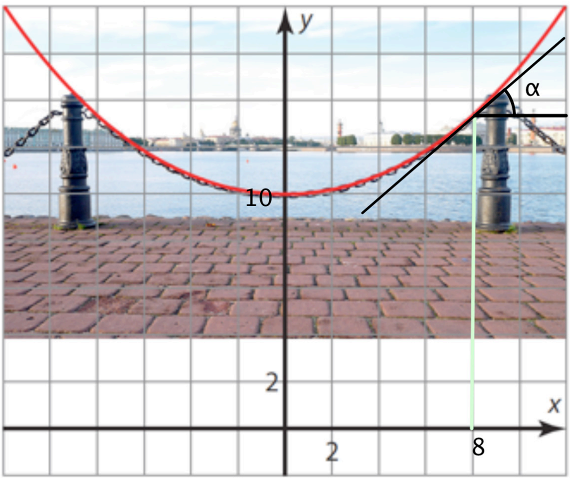
Laskin saattaa antaa vastauksen suoraan muodossa $\sinh x$.

277

a)



b) $f(x)=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$



Kuvan perusteella $f(0) = 10$.

Ratkaistaan a.

$$f(0)=10$$

$$\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{0}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{0}{a}})=10$$

$$\frac{a}{2}\cdot 2=10$$

$$a=10$$

Sijoitetaan saatu vakion a arvo käyrän yhtälöön.

$$f(x)=\frac{10}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}})$$

$$=5(\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}})$$

Nousukulman α tangentti on funktion f derivaatan arvo kohdassa 8.

$$f'(x)=5(\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}\cdot\frac{1}{10}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\cdot(-\frac{1}{10}))$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}$$

$$f'(8)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{8}{10}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{8}{10}}$$

$$=0,8881...$$

$$\tan\alpha=0,8881...$$

$$\alpha=41,60....^\circ\approx 42^\circ$$

Vastaus b) 42º

278

$$e^{x+a} = x$$

Tutkitaan funktion $f(x) = e^{x+a} - x$ kulkua.
Muodostetaan funktion f derivaattafunktio.

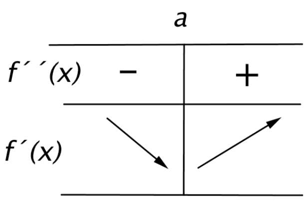
$$f'(x) = e^{x+a} - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
e^{x+a} - 1 &= 0 \\
e^{x+a} &= 1 \\
e^{x+a} &= e^0 \\
x + a &= 0 \\
x &= -a
\end{aligned}
$$

Kun $x < -a$, on $0 < e^{x+a} < 1$ ja siten $f'(x) < 0$. Kun $x > -a$, on $e^{x+a} > 1$ ja siten $f'(x) > 0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio.



Funktio f saa pienimmän arvonsa minimikohdassa.
$f(-a) = e^{-a+a} - (-a) = e^0 + a = 1 + a$

Funktio f aidosti vähenevä, kun $x < –a$, ja aidosti kasvava, kun .
Funktion f nollakohtien lukumäärää riippuu funktion pienimmän arvon arvosta.

Funktiolla f ei ole nollakohtia, kun pienin arvo on positiivinen.

$$f(-a) > 0$$
$$1 + a > 0$$
$$a > -1$$

Funktiolla f on yksi nollakohta, kun pienin arvo on nolla.

$$f(-a) = 0$$
$$1 + a = 0$$
$$a = -1$$

Funktiolla f on kaksi nollakohtaa, kun pienin arvo on negatiivinen

$$f(-a) < 0$$
$$1 + a < 0$$
$$a < -1$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $a < –1$, yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun $a = –1$, ja kaksi ratkaisua, kun $< –1$.

Vastaus ei ratkaisuja, kun $a > –1$
yksi ratkaisu, kun $a = –1$
kaksi ratkaisua, kun $a > –1$

279

a) $D3\ln x = 3\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

b) $D\ln 4x = \frac{1}{4x}\cdot 4 = \frac{1}{x}$

c) $D\ln\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

Vastaus a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{x}$

280

a)

$$\mathrm{D}\ln\frac{5}{x} = \mathrm{D}(\ln 5 - \ln x)$$
$$= 0 - \frac{1}{x}$$
$$= -\frac{1}{x}$$

b)

$$\mathrm{D}\ln\frac{5}{2x} = \mathrm{D}(\ln 5 - \ln 2x)$$
$$= 0 - \frac{1}{2x}\cdot 2$$
$$= -\frac{1}{x}$$

c)

$$\mathrm{D}\ln x^3 = \mathrm{D}(3\ln x)$$
$$= 3\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \frac{3}{x}$$

Vastaus a) $-\frac{1}{x}$ b) $-\frac{1}{x}$ c) $\frac{3}{x}$

281

a) $f(x)=\ln(3x+2)$

Funktio f on määritelty, kun $3x + 2 > 0$.

$$
\begin{aligned}
3x+2 &> 0 \\
3x &> -2 \qquad |:3 \\
x &> -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Funktion f määrittelyehto on $x>-\frac{2}{3}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{1}{3x+2}\cdot 3=\frac{3}{3x+2}$$

b) $f(x)=\ln(x^2+3)$

Koska $x^2+3>0$ kaikilla muuttujan arvoilla, on funktion f määrittelyjoukko **R**.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+3}$$

Vastaus a) $x>-\frac{2}{3}$, $f'(x)=\frac{3}{3x+2}$

b) **R**, $f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$

282

a) $f(x) = x \ln x$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1, \text{ kun } x > 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ \log_e x &= \log_e e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon. Derivaattafunktion nollakohta on $x = \frac{1}{e}$.

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{1-\ln x}{x^2},\ \text{kun } x>0$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \qquad |\cdot x^2\ (\neq 0)$$

$$1-\ln x=0$$

$$\ln x=1$$

$$\log_e x=\log_e e^1$$

$$x=e$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon. Derivaattafunktion nollakohta on $x = e$.

Vastaus a) $\dfrac{1}{e}$ b) e

283

$$f(x) = \ln(e^x + 3)$$

Funktion f määrittelyjoukko on **R**.

Määritetään funktion f derivaattafunktio f'.

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + 3} \cdot e^x$$
$$= \frac{e^x}{e^x + 3}$$

Koska e^x saa vain positiivisia arvoja, on $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla ja siten funktio f on aidosti kasvava.

284

$$f(x) = \ln \frac{3x+1}{e^x}$$

Funktio f on määritelty, kun $\frac{3x+1}{e^x} > 0$.

$$\frac{3x+1}{e^x} > 0 \quad | \cdot e^x \ (> 0)$$

$$3x + 1 > 0$$

$$3x > -1 \ |: 3$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

Funktio f on määritelty, kun $x > -\frac{1}{3}$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio f'.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{3x+1}{e^x}, \ x > -\frac{1}{3} \\ &= \ln(3x+1) - \ln e^x \\ &= \ln(3x+1) - x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1} - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{3}{3x+1} - 1 = 0 \qquad | \cdot (3x+1) \ (> 0)$$

$$3 - (3x+1) = 0$$

$$3 - 3x - 1 = 0$$

$$-3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Ratkaisu toteuttaa funktion f määrittelyehdon. Derivaattafunktion nollakohta on $x = \frac{2}{3}$.

Vastaus $\quad x = \frac{2}{3}$

285

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\log_3 x &= \mathrm{D}\frac{\ln x}{\ln 3} \\
&= \mathrm{D}(\frac{1}{\ln 3}\cdot \ln x) \\
&= \frac{1}{\ln 3}\cdot \mathrm{D}\ln x \\
&= \frac{1}{\ln 3}\cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x\ln 3},\ \text{ kun } x > 0
\end{aligned}
$$

286

a)

$$\mathrm{D}\log_5 2x = \frac{1}{2x\ln 5}\cdot 2$$
$$= \frac{1}{x\ln 5},\ \text{kun } x > 0$$

b)

$$\mathrm{D}\lg x = \mathrm{D}\log_{10} x$$
$$= \frac{1}{x\ln 10},\ \text{kun } x > 0$$

c)

$$\mathrm{D}\lg 5x = \mathrm{D}\log_{10} 5x$$
$$= \frac{1}{5x\ln 10}\cdot 5$$
$$= \frac{1}{x\ln 10},\ \text{kun } x > 0$$

Vastaus a) $\frac{1}{x\ln 5}$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{x\ln 10}$, kun $x > 0$

c) $\frac{1}{x\ln 10}$, kun $x > 0$

287

$$f(x) = \lg(5 - x)$$

Funktion f määrittelyehto on $5 - x > 0$, josta saadaan määrittelyehdoksi $x < 5$.

a) Funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa, jossa $f(x) = 0$.

Ratkaistaan nollakohta.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \lg(5 - x) &= 0 \\ \log_{10}(5 - x) &= \log_{10} 1 \\ 5 - x &= 1 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa funktion f määrittelyehdon, joten funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä (4, 0).

b) Funktion kuvaajan ja x-akselin välinen leikkauskulma α on funktion kuvaajalle pisteeseen (4,0) piirretyn tangentin ja x-akselin välinen kulma. Tämän kulman tangentti on funktion f derivaattafunktion arvo kohdassa 4.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{1}{(5-x)\ln 10} \cdot (-1)$$

$$f'(4) = -\frac{1}{\ln 10} = -0,434...$$

Ratkaistaan kulma α.

$$\tan\alpha = f'(4)$$
$$\tan\alpha = -4,34...$$
$$\alpha = -23,475...^\circ$$

Käyrä leikkaa x-akselin 23 asteen kulmassa.

Vastaus a) (4, 0) b) 23º

288

$y = \ln x$, määrittelyehto $x > 0$.

$y = \ln \frac{1}{x}$, määrittelyehto $x > 0$.

Ratkaistaan käyrien leikkauskohta.

$$\ln x = \ln \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$x = \frac{1}{x} \qquad | \cdot x \; (< 0)$$

$$x^2 = 1$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$x = 1$ tai $x = -1$

Ainoastaan $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon, joten käyrät leikkaavat kohdassa 1.

Määritetään leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$y' = -\frac{1}{x}$$

$$y'(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

Tangenttien kulmakertoimet ovat $k_1 = 1$ ja $k_2 = -1$.

Kulmakertoimien tulo on $k_1 \cdot k_2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Koska tangenttien kulmakertoimien tulo on –1, ovat tangentit kohtisuorassa ja siten käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

289

a) Funktio $\frac{1}{3}\ln x$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$D\frac{1}{3}\ln x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}, \text{ kun } x > 0$$

b) Funktio $\ln 4x$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$D\ln 4x = \frac{1}{4x}\cdot 4 = \frac{1}{x}, \text{ kun } x > 0$$

c) Funktio $\ln\frac{x}{2}$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$D\ln\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{x}{1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{x}, \text{ kun } x > 0$$

d) Funktio $\ln\frac{7x}{3}$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$D\ln\frac{7x}{3} = \frac{1}{\frac{7x}{3}}\cdot\frac{7}{3} = \frac{3}{x}\cdot\frac{7}{3} = \frac{1}{x}, \text{ kun } x > 0$$

Vastaus
a) $\frac{1}{3x}$, kun $x > 0$
b) $\frac{1}{x}$, kun $x > 0$
c) $\frac{1}{x}$, kun $x > 0$
d) $\frac{1}{x}$, kun $x > 0$

290

a) Funktio $\ln x^5$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$\mathrm{D}\ln x^5 = \mathrm{D}5\ln x = 5\cdot\frac{1}{x} = \frac{5}{x}, \text{ kun } x > 0$$

b) Funktio $\ln\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x > 0$.

Sievennetään funktiota.

$$\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\mathrm{D}\ln\sqrt{x} = \mathrm{D}(\frac{1}{2}\ln x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}, \text{ kun } x > 0$$

c) Funktio $\ln\sqrt[3]{x}$ on määritelty, kun $x > 0$.
Sievennetään funktiota.

$$\ln\sqrt[3]{x} = \ln x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln x$$

$$\mathrm{D}\ln\sqrt[3]{x} = \mathrm{D}(3\ln x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3x}, \text{ kun } x > 0$$

d) Funktio $\ln 2^x$ on määritelty kaikkialla.

Sievennetään funktiota.

$$\ln 2^x = x\ln 2$$

$$\mathrm{D}\ln 2^x = \mathrm{D}(\ln 2\cdot x) = \ln 2$$

Vastaus

a) $\frac{5}{x}$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{2x}$, kun $x > 0$

c) $\frac{1}{3x}$, kun $x > 0$

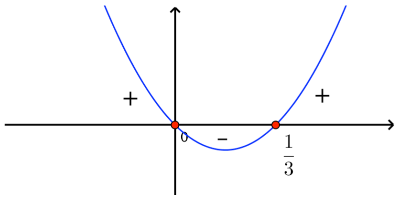
d) $\ln 2$

291

a) $f(x) = \ln(3x^2 - x)$

Funktio on määritelty, kun $3x^2 - x > 0$.

Ratkaistaan määrittelyehto funktion $3x^2 - x$ nollakohtien ja kuvaajan avulla.



$3x^2 - x = 0$

$x(3x-1) = 0$

$x \ =$ tai $\ x = \dfrac{1}{3}$

Funktion f määrittelyehto on $x < 0$ tai $x > \dfrac{1}{3}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\ln(3x^2 - x) \\
&= \frac{1}{3x^2 - x} \cdot (6x - 1) \\
&= \frac{6x - 1}{3x^2 - x}, \text{ kun } x < 0 \text{ tai } x > \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

b) $f(x)=\ln(e^x-1)$

Funktio f on määritelty, kun $e^x-1>0$.
Ratkaistaan määrittelyehto.

$$e^x-1>0$$
$$e^x>1$$
$$e^x>e^0$$
$$x>0$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{D}\ln(e^x-1)\\&=\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x\\&=\frac{e^x}{e^x-1},\ \text{kun } x>0\end{aligned}$$

Vastaus a) $x<0$ tai $x>\frac{1}{3}$, $\frac{6x-1}{3x^2-x}$

b) $x>0$, $\frac{e^x}{e^x-1}$

292

a) $f(x) = x\ln x + x$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D(x\ln x + x) \\
&= 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} + 1 \\
&= \ln x + 2, \text{ kun } x > 0
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
\ln x + 2 &= 0 \\
\ln x &= -2 \\
\log_{\mathrm{e}} x &= \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-2} \\
x &= \mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}
\end{aligned}
$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Derivaattafunktion nollakohta on $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}\frac{\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{x-2x\ln x}{x^4}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x-2x\ln x}{x^4}=0 \mid \cdot x^4 \quad (>0)$$
$$x-2x\ln x=0$$
$$x(1-2\ln x)=0$$

$x=0$

Ratkaisu ei toteuta määrittelyehtoa.

tai

$$1-2\ln x=0$$
$$-2\ln x=-1$$
$$\ln x=\frac{1}{2}$$
$$\log_e x=\log_e e^{\frac{1}{2}}$$
$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Derivaattafunktion nollakohta on $\sqrt{e}$.

Vastaus a) $\frac{1}{e^2}$ b) $\sqrt{e}$

293

a) $\mathrm{D}\log_4 x = \dfrac{1}{x\ln 4}$, kun $x > 0$

b) $\mathrm{D}\lg 2x = \mathrm{D}\log_{10} 2x = \dfrac{1}{2x\ln 10}\cdot 2 = \dfrac{1}{x\ln 10}$, kun $x > 0$

c) $\mathrm{D}\lg \mathrm{e}^x = \mathrm{D}(x\lg \mathrm{e}) = \lg \mathrm{e}$

d) $\mathrm{D}\lg x^2 = \mathrm{D}\left(\log_{10} x^2\right) = \dfrac{1}{x^2\ln 10}\cdot 2x = \dfrac{2}{x\ln 10}$, kun $x \neq 0$

Vastaus
a) $\dfrac{1}{x\ln 4}$, kun $x > 0$
b) $\dfrac{1}{x\ln 10}$, kun $x > 0$
c) $\lg \mathrm{e}$
d) $\dfrac{2}{x\ln 10}$, kun $x \neq 0$

294

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

Funktio f on määritelty kaikkialla.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\ln(e^{-x} + 1) \\ &= \frac{1}{e^{-x} + 1} \cdot (-e^{-x}) \\ &= -\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

Koska $e^{-x} > 0$, niin $f'(x) < 0$ kaikilla x. Siten funktio f on aidosti vähenevä.

295

$$y = \ln x^2$$

Märittelyehto on $x \neq 0$.

Määritetään funktion $f(x) = \ln x^2$ derivaattafunktio.

$f'(x) = \mathrm{D} \ln x^2 = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$, kun $x \neq 0$.

Kun tangentin sivuamispiste on $(a, \ln a^2)$, on tangentin kulmakerroin $k = f'(a) = \frac{2}{a}$.

Koska tangentti kulkee origon kautta, on tangentin yhtälö muotoa $y = kx$. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y = \frac{2}{a} x$.

Kun $x = a$, on $y = \ln a^2$. Toisaalta piste $(a, \ln a^2)$ toteuttaa tangentin yhtälön, jolloin $\frac{2}{a} \cdot a = \ln a^2$.

Ratkaistaan yhtälöstä a.

$$\begin{aligned}
\ln a^2 &= \frac{2}{a} \cdot a \\
\ln a^2 &= 2 \\
\log_e a^2 &= \log_e e^2 \\
a^2 &= e^2 \\
a &= e \text{ tai } a = -e
\end{aligned}$$

Sivuamispisteen x-koordinaatti on e tai –e. Sivuamispisteen y-koordinaatti on kummassakin tapauksessa $\ln \mathrm{e}^2 = 2$.
Tangentti sivuaa käyrää pisteessä (–e, 2) tai (e, 2).

Vastaus (–e, 2) tai (e, 2)

296

$$f(x)=\ln\frac{x^2-x}{x^2+1}$$

Funktio f on määritelty, kun $\dfrac{x^2-x}{x^2+1}>0$.

$$\frac{x^2-x}{x^2+1}>0 \qquad |\cdot(x^2+1)\ (>0)$$

$$x^2-x>0$$

$$x<0 \text{ tai } x>1$$

Funktio f on määritelty, kun $x<0$ tai $x>1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}\ln\frac{x^2-x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+2x-1}{\left(x^2-x\right)\left(x^2+1\right)}, \qquad x<0 \text{ tai } x>1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2-x)(x^2+1)}=0$$

$x=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}412$ tai $x=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}412$

Ratkaisu $-1-\sqrt{2}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus $\quad -1-\sqrt{2}$

297

a) $f(x) = \ln(\ln x)$

Funktio f on määritelty, kun $\ln x > 0$.

Ratkaistaan määrittelyehto.

$$\ln x > 0$$
$$\ln x > \ln 1 \qquad \text{ln } x \text{ on aidosti kasvava funktio}$$
$$x > 1$$

Funktio f on määritelty, kun $x > 1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\ln(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln x},\ x > 1 \end{aligned}$$

b) $f(x) = \lg(\ln x)$

Funktio f on määritelty, kun $\ln x > 0$ siis, kun $x > 1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\lg(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln x \ln 10} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln x \ln 10}, \qquad x > 1 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x > 1$, $\dfrac{1}{x \ln x}$

b) $x > 1$, $\dfrac{1}{x \ln x \ln 10}$

298

a) $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

$$Dx^x = De^{x \ln x}$$

$$= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

b) $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$

$$Dx^x = De^{x^2 \ln x}$$

$$= e^{x^2 \ln x} \cdot (2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{x^2} (2x \ln x + x)$$

Vastaus a) $x^x (\ln x + 1)$ b) $x^{x^2} (2x \ln x + x)$

299

$$f(x) = x^{x^x}$$

$$x^{x^x} = e^{x^x \cdot \ln x} = e^{e^{x \ln x} \cdot \ln x}$$

$$\begin{aligned}
Dx^{x^x} &= De^{e^{x \ln x} \cdot \ln x} \\
&= e^{e^{x \ln x} \cdot \ln x} \cdot D(e^{x \ln x} \cdot \ln x) \\
&= e^{e^{x \ln x} \cdot \ln x}(e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \ln x + e^{x \ln x} \cdot \frac{1}{x}) \\
&= x^{x^x}(x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}) \\
&= x^{x^x} x^x \cdot ((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Vastaus $\quad x^{x^x} x^x \cdot ((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x})$

300

a) $f(x)=\mathrm{e}^x$

$f(0)=\mathrm{e}^0=1$

$f'(x)=\mathrm{e}^x \qquad f'(0)=1$

$f''(x)=\mathrm{e}^x \qquad f''(0)=1$

$f'''(x)=\mathrm{e}^x \qquad f'''(0)=1$

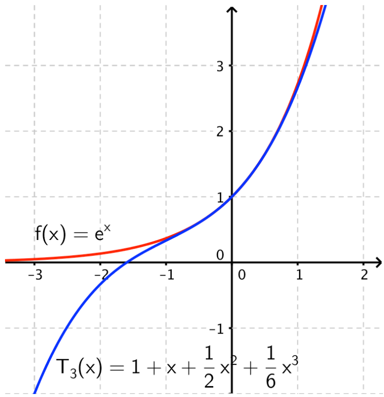
Funktion f kolmannen asteen Taylorin polynomi on muotoa
$T_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

Ratkaistaan kertoimet a_0, a_1, a_2 ja a_3.

$$T_3(0)=f(0)$$
$$a_0=1$$
$$T_3'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$$
$$T_3'(0)=a_1=f'(0)$$
$$a_1=1$$
$$T_3''(x)=2a_2+6a_3x$$
$$T_3''(0)=2a_2=f''(0)$$
$$2a_2=1$$
$$a_2=\frac{1}{2}$$
$$T_3'''(x)=6a_3$$
$$T_3'''(0)=6a_3=f'''(0)$$
$$6a_3=1$$
$$a_3=\frac{1}{6}$$

Muodostetaan funktion f kolmannen asteen Taylorin polynomi.

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$



b) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

Funktion f kolmannen asteen Taylorin polynomi on muotoa
$T_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ratkaistaan kertoimet a_0, a_1, a_2 ja a_3.

$$T_3(0) = f(0)$$

$$a_0 = 0$$

$$T_3'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$T_3'(0) = a_1 = f'(0)$$

$$a_1 = 1$$

$$T_3''(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

$$T_3''(0) = 2a_2 = f''(0)$$

$$2a_2 = -1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$T_3'''(x) = 6a_3$$

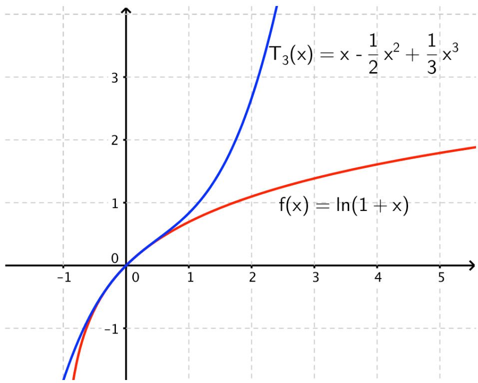
$$T_3'''(0) = 6a_3 = f'''(0)$$

$$6a_3 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

Muodostetaan funktion f kolmannen asteen Taylorin polynomi.

$$T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$



Vastaus a) $T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

b) $T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

301

$$f(x) = e^{x^2-4x}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= De^{x^2-4x} \\ &= e^{x^2-4x} \cdot (2x-4) \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$e^{x^2-4x}\left(2x-4\right) = 0$$

$e^{x^2-4x} = 0$ tai $2x - 4 = 0$

ei ratkaisua

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Koska $e^{x^2-4x} > 0$ kaikilla muuttujan arvoilla, derivaatan merkin määrää lauseke $2x - 4$.

		2	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

x	$2x - 4$	merkki
1	-2	$-$
3	2	$+$

Kulkukaavion perusteella funktio f on kasvava, kun $x \geq 2$.

Vastaus välillä $x \geq 2$

302

$$f(x) = xe^x$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(xe^x) \\ &= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x) \end{aligned}$$

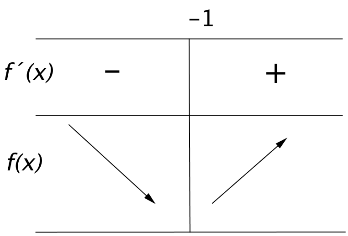
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$
$$e^x(1 + x) = 0$$

$e^x = 0$ tai $1 + x = 0$

ei ratkaisua $\quad x = -1$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Koska $e^x > 0$ kaikilla muuttujan arvoilla, derivaatan merkin määrää lauseke $1 + x$.



x	$1 + x$	merkki
-2	-1	$-$
0	1	$+$

Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä, kun $x \leq -1$.

Vastaus välillä $x \leq -1$

303

$$f(x) = x^2 e^{x-1}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^2 e^{x-1}) \\ &= 2x \cdot e^{x-1} + x^2 \cdot e^{x-1} \\ &= (2x + x^2)e^{x-1} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$(2x + x^2)\underbrace{e^{x-1}}_{\neq 0 \text{ aina}} = 0$$

$x = 0$ tai $x = -2$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdissa 0 ja –2. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	–2	0	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

x	$f'(x)$	merkki
–3	0,054…	+
–1	–0,135…	–
1	3	+

Funktion f maksimikohta on -2 ja minimikohta 0.

Vastaus maksimikohta -2, minimikohta 0

304

$$f(x) = \frac{e^{2x^2}}{x}$$

Funktiota ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = 0$.
Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\frac{e^{2x^2}}{x} \\ &= \frac{(e^{2x^2} \cdot 4x) \cdot x - e^{2x^2} \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{e^{2x^2}(4x^2 - 1)}{x^2}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

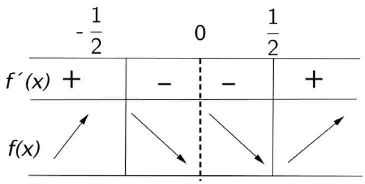
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^{2x^2}(4x^2 - 1)}{x^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua derivaatan nollakohdissa $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$ tai kohdassa 0, jossa derivaattafunktiota ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f\,'(x)$	merkki
–1	22.1…	+
–0,4	–3,098…	–
0,4	–3,098…	–
1	22.1…	+

Funktion f maksimiarvo on $f(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{e}$ ja minimiarvo $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{e}$.

Vastaus maksimiarvo $f(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{e}$, minimiarvo $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{e}$

305

$$f(x) = 2x^2 - \ln x$$

Funktion f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

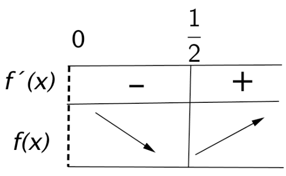
$$f'(x) = \mathrm{D}(2x^2 - \ln x)$$
$$= 4x - \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x - \frac{1}{x} = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

Vain ratkaisu $x = \frac{1}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdassa $\frac{1}{2}$. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f'(x)$	merkki
0,4	–0,9…	–
1	3	+

Funktiolla f on minimiarvo $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \ln 2$

Vastaus minimiarvo $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \ln 2$

306

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Funktion f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{D}\frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \qquad | \cdot x^2 \quad (> 0)$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = \mathrm{e}$$

Ratkaisu $x = \mathrm{e}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdassa e.

	0	e	
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

x	$f'(x)$	merkki
$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\dfrac{1-\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\mathrm{e}^2}} = 2\mathrm{e}^2$	$+$
e^2	$\dfrac{1-\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^4} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$	$-$

Funktio f saa suurimman arvonsa maksimikohdassa e.

Suurin arvo on $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Vastaus $\quad f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

307

$$f(x) = \ln x - \ln(12 - x)$$

Selvitetään funktion f määrittelyehto.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} 12 - x &> 0 \\ x &< 12 \end{aligned}$$

Funktion f on määritelty, kun $0 < x < 12$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

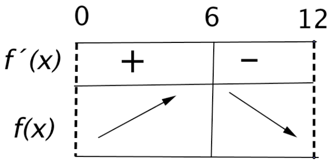
$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(\ln x + \ln(12 - x)) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{-1}{12 - x} \\ &= {}^{12-x)}\frac{1}{x} - {}^{x)}\frac{1}{12 - x} \\ &= \frac{12 - x - x}{x(12 - x)} \\ &= \frac{12 - 2x}{x(12 - x)}, \qquad 0 < x < 12 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \frac{12 - 2x}{x(12 - x)} &= 0 \quad |\cdot x(12 - x) \quad (\neq 0) \\ 12 - 2x &= 0 \\ -2x &= -12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Ratkaisu $x = 6$ toteuttaa määrittelyehdon $0 < x < 12$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdassa 6.



x	$f\,'(x)$	merkki
4	0,125	+
8	–0,125	–

Funktio f on kasvava välillä $0 < x \leq 6$.

Vastaus välillä $0 < x \leq 6$

308

$$g(x) = 2x - x\ln x$$

Funktio g on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion g derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}(2x - x\ln x) \\ &= 2 - (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= 2 - \ln x - 1 \\ &= 1 - \ln x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 1 - \ln x &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ x &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Esimerkiksi kohdassa $x = \mathrm{e}^2$ on $g'(\mathrm{e}^2) = 1 - \ln \mathrm{e}^2 = 1 - 2 = -1 < 0$, joten g ei ole aidosti kasvava. (Itse asiassa funktion g derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia kaikilla $x > \mathrm{e}$.)

Vastaus ei ole

309

$$f(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{x^2},\quad 1\le x\le 4$$

Funktio f on määritelty suljetulla välillä $1\le x\le 4$.

Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välillä $1<x<4$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{-2\ln x+2\ln 2+1}{x^3}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{-2\ln x+2\ln 2+1}{x^3}=0$$

$$x=2\sqrt{\mathrm{e}}=3,29...$$

Derivaatan nollakohta on välillä $]1,4[$.

Lasketaan funktion f arvo derivaatan nollakohdassa.

$$f(2\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}^2}=\frac{1}{8\mathrm{e}}=0,0459...$$

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä.

$$f(1)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{1^2}=-\ln 2=-0,693...$$

$$f(4)=\frac{\ln\frac{4}{2}}{4^2}=\frac{\ln 2}{16}=0,0433...$$

Funktion f suurin arvo on $f(2\sqrt{\mathrm{e}})=\dfrac{1}{8\mathrm{e}}$ ja pienin arvo on $f(1)=-\ln 2$.

Vastaus suurin arvo $\dfrac{1}{8\mathrm{e}}$, pienin arvo $-\ln 2$

310

$$f(x) = x^2 \cdot 3^{-x}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^2 \cdot 3^{-x}) \\ &= \frac{-(x^2 \ln 3 - 2x)}{3^x} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{-(x^2 \ln 3 - 2x)}{3^x} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{\ln 3} = 1{,}820...$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.

Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

		0		$\frac{2}{\ln 3}$	
$f'(x)$	–		+		–
$f(x)$	↘		↗		↘

x	$f'(x)$	merkki
–1	–9,295…	–
1	0,300…	+
2	–0,0438…	–

Funktion f minimiarvo on $f(0) = 0$. Funktion f maksimiarvo on

$$f\left(\frac{2}{\ln 3}\right) = \frac{4}{3^{\frac{2}{\ln 3}} \cdot (\ln 3)^2}.$$

Vastaus minimiarvo $f(0)$, maksimiarvo $f(\frac{2}{\ln 3}) = \frac{4}{3^{\frac{2}{\ln 3}} \cdot (\ln 3)^2}$

311

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}$$

Tehtävänä on määrittää funktion f suurin arvo välillä [1,e].

Funktio f saa suurimman arvonsa joko suljetun välin [1,e] päätepisteissä tai avoimella välillä]1, e[olevassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = 2$$

Ratkaisu kuuluu tarkasteltavalle välille [1, e].

Lasketaan funktion f arvo derivaatan nollakohdassa.

$$f(2) = \ln 2 - 1 = -0,306...$$

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(1) = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$f(\mathrm{e}) = 1 - \frac{\mathrm{e}}{2} = -0,359...$$

Arvoista suurin on $f(2) = \ln 2 - 1$, joten funktion suurin arvo on $f(2) = \ln 2 - 1$.

312

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$$

a) Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}x^2\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + x^2 \cdot (\mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x)) \\ &= \mathrm{e}^{-x^2}(2x - 2x^3) \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\mathrm{e}^{-x^2}(2x - 2x^3) = 0$$

$\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ tai $2x - 2x^3 = 0$

ei ratkaisua

$$2x(1 - x^2) = 0$$

$2x = 0$ tai $1 - x^2 = 0$

$x = 0$ $\quad x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$

Derivaattafunktion nollakohdat ovat 0, 1 ja –1.
Laaditaan funktion f kulkukaavio. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

	-1	0	1	
f´(x)	+	–	+	–
f(x)	↗	↘	↗	↘

x	$f'(x)$	merkki
-2	$\mathrm{e}^{-4} \cdot 12$	+
$-\frac{1}{2}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \cdot (-\frac{3}{2})$	–
$\frac{1}{2}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{2}$	+
2	$\mathrm{e}^{-4} \cdot (-12)$	–

Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä väleillä $-1 \le x \le 0$ ja $x \ge 1$.

b) Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimiarvot

$f(-1)=(-1)^2\cdot \mathrm{e}^{-(-1)^2}=\mathrm{e}^{-1}$ ja $f(1)=1^2\cdot \mathrm{e}^{-1^2}=\mathrm{e}^{-1}$.

Funktion minimiarvo on $f(0)=0^2\mathrm{e}^{-0^2}=0$.

Vastaus

a) välillä $-1\le x\le 0$ ja välillä $x\ge 1$

b) minimiarvo $f(0)=0$

maksimiarvot $f(-1)=f(1)=\mathrm{e}^{-1}$

313

$$g(x) = x\ln 2 - 2^{2x}$$

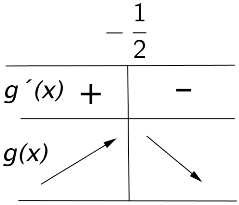
Määritetään funktion g derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}(x\ln 2 - 2^{2x}) \\ &= \ln 2 - 2^{2x}\ln 2 \cdot 2 \\ &= \ln 2(1 - 2\cdot 2^{2x}) \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \ln 2(1 - 2\cdot 2^{2x}) &= 0 \qquad |:\ln 2 \\ 1 - 2\cdot 2^{2x} &= 0 \\ 2\cdot 2^{2x} &= 1 \\ 2^{2x} &= \frac{1}{2} \\ 2^{2x} &= 2^{-1} \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Laaditaan funktion g kulkukaavio. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$g\,'(x)$	merkki
-1	$\ln 2\cdot\frac{1}{2}$	$+$
0	$\ln 2\cdot(-1)$	$-$

Funktiolla g ei minimikohtaa, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

Funktion suurin arvo on $g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\ln 2 - 2^{2\cdot(-\frac{1}{2})} = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}$

Vastaus suurin arvo $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}$, pienintä arvoa ei ole

314

$$f(x)=\ln(x^2+2)-\ln 2x$$

Selvitetään ensin funktion f määrittelyehto.

$x^2+2>0$ ja $2x>0$
aina tosi $x>0$

Funktion f määrittelyehto on $x>0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{D}(\ln(x^2+2)-\ln 2x)\\&=\frac{2x}{x^2+2}-\frac{2}{2x}\\&=\frac{2x}{x^2+2}-\frac{1}{x}\qquad ,x>0\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2x}{x^2+2}-\frac{1}{x}=0\qquad |\cdot x(x^2+2)\ (\neq 0)$$

$$2x^2-(x^2+2)=0$$

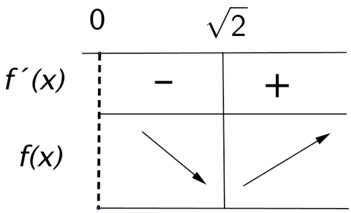
$$x^2-2=0$$

$$x^2=2$$

$$x=\sqrt{2}\quad \text{tai}\quad x=-\sqrt{2}$$

Ratkaisuista vain $x=\sqrt{2}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f'(x)$	merkki
1	$\frac{2\cdot 1}{1^2+2}-\frac{1}{1}=-\frac{1}{3}$	–
2	$\frac{2\cdot 2}{2^2+2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	+

Kulkukaavion perusteella funktio f on kasvava välillä $x \geq \sqrt{2}$.

Vastaus $\quad x \geq \sqrt{2}$

315

$f(x) = \ln(x^3 - x)$

Funktio f on määritelty, kun $x^3 - x > 0$.
Ratkaistaan määrittelyehto funktion $x^3 - x$ nollakohtien avulla.

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \qquad \text{tai} \quad x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \quad \text{tai } x = -1$$

Laaditaan merkkikaavio testipisteiden avulla.

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

−	+	−	+

x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$x^3 - x$	-6	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	6

Määrittelyehto on $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{D}\ln(x^3 - x)$$
$$= \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{3x^2-1}{x^3-x}=0 \qquad |\cdot(x^3-x) \quad (\neq 0)$$

$$3x^2-1=0$$

$$3x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{tai} \quad x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vain ratkaisu $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx -0,6$ toteuttaa määrittelyehdon.

Laaditaan funktion f kulkukaavio välillä $-1<x<0$.
Derivaattafunktio on jatkuva välillä $-1<x<0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa.

	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$f'(x)$	+	−	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

x	$f'(x)$	merkki
–0,8	3,19…	+
–0,4	–1,54…	–

Funktiolla on maksimikohta $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Maksimiarvo on

$$\ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\ln\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\frac{3}{3\sqrt{3}}.$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia, kun $x>1$, joten funktiolla ei ole ääriarvoja tällä välillä.

Vastaus määrittelyehto $-1 < x < 0$ tai $x > 1$

maksimiarvo on $\ln\frac{3}{3\sqrt{3}}$.

316

$$a_n = \ln 3n + \frac{9}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lukujonon suurin ja pienin luku saadaan selville tutkimalla funktion $f(x) = \ln 3x + \frac{9}{x^2}$, missä $x \geq 1$, kulkua.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{18}{x^3}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{1}{x} - \frac{18}{x^3} = 0$$

$x = 3\sqrt{2}$ tai $x = -3\sqrt{2}$

Ratkaisuista vain $x = 3\sqrt{2} = 4,24...$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 1$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Selvitetään derivaatan merkit testaamalla.

	1		$3\sqrt{2}$	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

x	$f'(x)$	merkki
2	$-1,75$	$-$
10	0,082	$+$

Funktio f saa pienimmän arvonsa, kun $x = 3\sqrt{2} = 4,24...$.

Tällöin lukujono saa pienimmän arvonsa, kun n on joko 4 tai 5.

$$a_4 = \ln 12 + \frac{9}{16} = 3{,}047...$$
$$a_5 = \ln 15 + \frac{9}{25} = 3{,}068...$$

Lukujonon pienin luku on $a_4 = \ln 12 + \dfrac{9}{16}$.

Funktio f on aidosti kasvava, kun $x > 3\sqrt{2}$, joten tällä välillä funktiolla ei ole ääriarvoja eikä siten myöskään suurinta arvoa saavuteta tällä välillä. Funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa 1 tai suurinta arvoa ei ole, Lukujonon suurin luku on joko a_1 tai suurinta jäsentä ei ole.

$$a_1 = \ln 3 + 9 = 10{,}098...$$

Tutkitaan, onko lukujonossa jäsentä a_1 suurempia lukuja.

Esimerkiksi $a_{10^5} = \ln(3 \cdot 10^5) + \dfrac{9}{10^{10}} = 11{,}51... > a_1$.

Koska lukujonossa on jäsentä a_1 suurempia jäseniä, ei lukujonolla ole suurinta lukua.

Vastaus pienin luku $a_4 = \ln 12 + \dfrac{9}{16}$, ei suurinta lukua

317

$$f(x)=\frac{\lg 2x}{x^2}$$

Funktio on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktio f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{\lg 2x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-2x\ln 10\cdot\ln(2x)+x^2\cdot\frac{\ln 10}{x}}{(x^2\ln 10)^2}$$

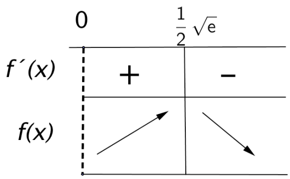
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{-2x\ln 10\cdot\ln(2x)+x^2\cdot\frac{\ln 10}{x}}{(x^2\ln 10)^2}=0$$

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}=0{,}824...$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Laaditaan funktion kulkukaavio. Päätellään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f'(x)$	merkki
0,5	3,474…	+
1	–0,167…	–

Funktiolla ei ole minimiarvoa. Funktion maksimiarvo on

$$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)=\frac{2\lg e}{e}=\frac{2}{e\ln 10}.$$

Vastaus maksimiarvo $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)=\frac{2\lg e}{e}=\frac{2}{e\ln 10}$

318

Muokataan epäyhtälöä.

$$\mathrm{e}^{2x} \geq 1 + 2x$$
$$e^{2x} - 1 - 2x \geq 0$$

Tutkitaan funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x$ kulkua.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(\mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{2x} - 2 &= 0 \\ 2\mathrm{e}^{2x} &= 2 \quad |:2 \\ \mathrm{e}^{2x} &= 1 \\ \mathrm{e}^{2x} &= \mathrm{e}^{0} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

	0	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

x	$f'(x)$	merkki
-1	$\approx -1,7$	$-$
1	$\approx 12,8$	$+$

Funktion f pienin arvo on $f(0) = e^{2\cdot 0} - 2\cdot 0 - 1 = 0$, joten $f(x) \geq 0$ kaikilla x, eli $e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$ kaikilla x.
Siis kaikilla x on voimassa $e^{2x} \geq 1 + 2x$.

319

$$f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-x}, \; x \geq 0$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(x^2 - x - 5)e^{-x} \\ &= (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)e^{-x} \cdot (-1) \\ &= (2x - 1 - x^2 + x + 5)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 3x + 4)e^{-x} \end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$(-x^2 + 3x + 4)e^{-x} = 0$$

$-x^2 + 3x + 4 = 0$ tai $e^{-x} = 0$

ei ratkaisua

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$x = 4$ tai $x = -1$

Ratkaisuista vain $x = 4$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva välillä $x \geq 0$, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	0	4
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

x	$f'(x)$	merkki
1	$(-1^2+3\cdot 1+4)e^{-1} = 6e^{-1}$	$+$
5	$(-5^2+3\cdot 5+4)e^{-1} = -6e^{-1}$	$-$

Funktion suurin arvo on $f(4) = (4^2-4-5)e^{-4} = \dfrac{7}{e^4}$.

Merkitään $g(x) = x^2 - x - 5$. Tällöin $g'(x) = 2x - 1 > 0$ kaikilla $x \geq 4$. Tämä tarkoittaa, että $g(x) \geq g(4) = 7$ kaikilla $x \geq 4$.

Koska $e^{-x} > 0$ kaikilla x, on $f(x) = g(x)e^{-x} \geq 7 \cdot 0 = 0$ kaikilla $x \geq 4$.

Koska $f(0) = -5 \cdot e^{-0} = -5$ on negatiivinen, niin tämä funktion pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 4$ on samalla funktion pienin arvo koko määrittelyjoukossa $x \geq 0$.

Vastaus suurin arvo $\dfrac{7}{e^4}$, pienin arvo -5

320

$$f(t)=\frac{150}{1+149\mathrm{e}^{-0,5t}},\ \ t\geq 0$$

Sairastuneiden määrän kasvun hetkellä t ilmaisee funktion f derivaattafunktio.

Määritetään derivaattafunktio laskimella.

$$f'(t)=\mathrm{D}(\frac{150}{1+149\mathrm{e}^{-0,5t}})$$
$$=\frac{11175\mathrm{e}^{0,5t}}{(\mathrm{e}^{0,5t}+149)^2}$$

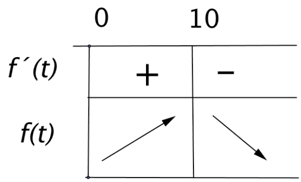
Kasvunopeus saa suurimman arvonsa, kun derivaattafunktio saa suurimman arvonsa. Määritetään funktion f toinen derivaatta.

$$f''(t)=\mathrm{D}(\frac{11175\mathrm{e}^{0,5t}}{(\mathrm{e}^{0,5t}+149)^2})$$
$$=\frac{-0,5(11175\mathrm{e}^{t}-1665075\mathrm{e}^{0,5t})}{(\mathrm{e}^{0,5t}+149)^3}$$

Määritetään toisen derivaatan nollakohdat.

$$\frac{-0,5(11175\mathrm{e}^{t}-1665075\mathrm{e}^{0,5t})}{(\mathrm{e}^{0,5t}+149)^3}=0$$
$$x\approx 10,007$$

Laaditaan derivaattafunktion $f\,'$ kulkukaavio.



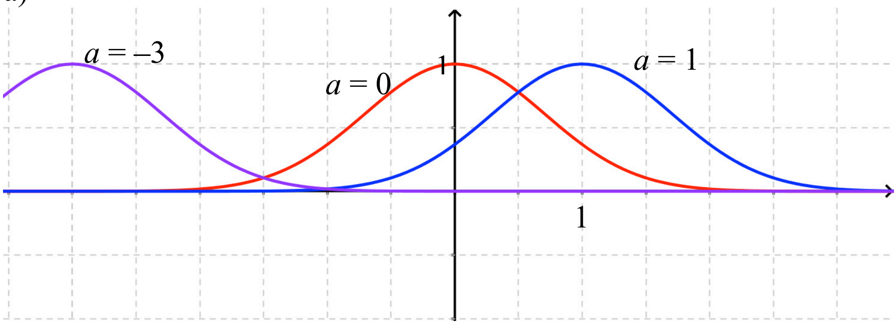
x	$f\,'(x)$	merkki
1	$\approx 0{,}4$	+
11	$\approx -2{,}1$	–

Sairastuneiden määrä kasvaa nopeimmin 10 vuorokauden kuluttua.

Vastaus 10 vuorokauden kuluttua.

321

a)



Kuvaaja on symmetrinen suoran $x = a$ suhteen.

b) Tutkitaan funktion arvoja kohdissa $a + d$ ja $a – d$, nämä kohdat sijaitsevat symmetrisesti kohdan a molemmilla puolilla.

$$f(a+d) = \mathrm{e}^{-(a+d-a)^2} = \mathrm{e}^{-d^2}$$

$$f(a-d) = \mathrm{e}^{-(a-d-a)^2} = \mathrm{e}^{-d^2}$$

Funktion arvot ovat samat samalla etäisyydellä suorasta $x = a$.

c) Funktion arvot kasvavat kohdassa, missä funktion derivaatta saa suurimman arvonsa.

Tutkitaan funktion f derivaattafunktion kulkua toisen derivaatan avulla.

$$f'(x) = \mathrm{D}\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$$
$$= -2(x-a)\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$$
$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-(x-a)^2} + 4(x-a)^2\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$$

Määritetään toisen derivaatan nollakohdat laskimella

$$x = a - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tai} \quad x = a + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Laaditaan derivaattafunktion kulkukaavio.

		$a - \frac{\sqrt{2}}{2}$		$a + \frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f''(x)$	+		−		+
$f'(x)$	↗		↘		↗

x	$f''(x)$	merkki
$a-1$	$2\mathrm{e}^{-1}$	+
a	-2	−
$a+1$	$2\mathrm{e}^{-1}$	+

Funktion kasvunopeus on suurin kohdassa $x = a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vastaus
a) Kuvaaja on symmetrinen suoran $x = a$ suhteen.
c) kohdassa $x = a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

322

$$f(x)=\mathrm{e}^x-a|x-1|$$

Esitetään funktio ilman itseisarvoja.

$$|x-1|=\begin{cases}-(x-1), \text{ kun } x<1\\ x-1, \text{ kun } x\geq 1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+a(x-1), \text{ kun } x<1\\ \mathrm{e}^x-a(x-1), \text{ kun } x\geq 1\end{cases}$$

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+a, \text{ kun } x<1\\ \mathrm{e}^x-a, \text{ kun } x>1\end{cases}$$

Funktio on kaikkialla jatkuva, mutta funktiolla f ei välttämättä ole derivaattaa kohdassa 1. Jatkuva funktio f on kuitenkin kaikkialla kasvava, jos se on kasvava sekä välillä $x<1$ että välillä $x>1$.

Funktio on kasvava, kun derivaattafunktion arvot ovat epänegatiiviset.

Väli $x < 1$:

$f'(x) = \mathrm{e}^x + a$ on aidosti kasvava ja $\mathrm{e}^x > 0$ kaikilla x. Kun x:n arvot pienenevät rajatta, lausekkeen e^x arvot lähestyvät nollaa. Tällöin lausekkeen $f'(x)$ lähestyvät lukua a. Jotta arvot ovat kaikkialla epänegatiiviset, on oltava $a \geq 0$. (Muussa tapauksessa arvot olisivat negatiivista a:ta lähestyessään jossakin vaiheessa itsekin negatiivisia.)

Väli $x > 1$:

$f'(x) = \mathrm{e}^x - a$ on aidosti kasvava, joten kaikilla x on $f'(x) \geq f(1) = \mathrm{e} - a$.

Ehto $f'(x) \geq 0$ täyttyy, kun $\mathrm{e} - a \geq 0$ eli $a \leq \mathrm{e}$

Funktio f on siis kaikkialla kasvava, kun $a \geq 0$ ja kun $a \leq \mathrm{e}$ eli kun $0 \leq a \leq \mathrm{e}$.

Vastaus $\quad 0 \leq a \leq \mathrm{e}$

323

$$f(x) = 2x^2 - ax + \ln x$$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.
Funktio on aidosti monotoninen, jos kaikilla muuttujan arvoilla joko $f'(x) > 0$ tai $f'(x) < 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2x^2 - ax + \ln x) \\ &= 4x - a + \frac{1}{x} \\ &= \frac{4x^2 - ax + 1}{x} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, derivaatan merkit määräytyvät polynomista $g(x) = 4x^2 - ax + 1$. Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten sen merkki on muuttumaton välillä $x > 0$ seuraavissa tapauksissa.

1) g:llä on korkeintaan yksi nollakohta (jolloin sen arvot ovat kaikkialla ≥ 0) TAI
2) g:llä on kaksi nollakohtaa, jotka ovat molemmat epäpositiivisia (jolloin g:n arvot ovat > 0 välillä $x > 0$)

1) Nollakohtia on korkeintaan yksi, kun yhtälön $g(x) = 0$ diskriminantti on epäpositiivinen.

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = a^2 - 16 \leq 0$, kun $-4 \leq a \leq 4$.

2) Funktion g nollakohdat ovat

$$\frac{-(-a) \pm \sqrt{a2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{8} \quad .$$

Näistä suurempi on

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{8} \quad .$$

Tämä on epäpositiivinen, kun
$a + \sqrt{a^2 - 16} \leq 0$, josta laskimella $a \leq -4$.

Yhdessä saatiin, että ehto täyttyy, kun $-4 \leq a \leq 4$ tai $a \leq -4$, eli lyhyemmin $a \leq 4$.

Vastaus $\quad a \leq 4$

324

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}e^{x\ln x} \\ &= e^{x\ln x}(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= e^{x\ln x}(\ln x + 1) \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$e^{x\ln x}(\ln x + 1) = 0$$

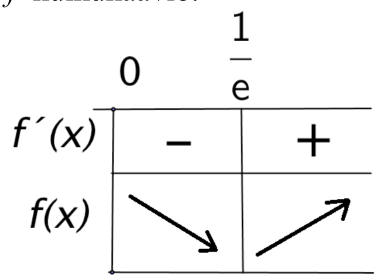
$\ln x + 1 = 0$ tai $e^{x\ln x} = 0$

ei ratkaisua

$$\ln x = -1$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Ratkaisu $x = \frac{1}{e} \approx 0,4$ toteuttaa määrittelyehdon. Laaditaan funktion f kulkukaavio.



x	$f'(x)$	merkki
0,2	$\approx -0,4$	–
1	1	+

Funktiolla ei ole maksimikohtaa, minimiarvo on $f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$.

Vastaus $\quad f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

325

$$x^x - e^{x-1} \geq 0$$

$$e^{x \ln x} \geq e^{x-1}$$

Koska funktio e^x on aidosti kasvava funktio, epäyhtälö on tosi, kun $x \ln x \geq x - 1$.

Tutkitaan funktion $f(x) = x \ln x - (x-1)$, $x \geq 1$, kulkua.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(x \ln x - (x-1)) \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

Koska $\ln x > 0$, kun $x > 1$, ovat derivaattafunktion arvot positiivisia välillä $x > 1$. Tällöin funktio f on aidosti kasvava ja sen pienin arvo on $f(1) = 1 \cdot \ln 1 - (1 - 1) = 0$.
Täten kaikilla $x \geq 1$ on voimassa epäyhtälö

$$f(x) \geq 0$$

$$x \ln x - (x-1) \geq 0$$

Siten $e^{x \ln x} \geq e^{x-1}$ eli $x^x - e^{x-1} \geq 0$.

Yhtäsuuruus on voimassa vain kohdassa 1.

$$1^1 - e^{1-1} = 1 - 1 = 0$$

Vastaus yhtäsuuruus on voimassa kohdassa $x = 1$.