153

A) $\log_2 3 - \log_2 5 = \log_2 \frac{3}{5}$ eli vaihtoehto 3

B) $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 15$ eli vaihtoehto 2

C) $\log_2 5 - \log_2 3 = \log_2 \frac{5}{3}$ eli vaihtoehto 4

D) $3\log_2 5 = \log_2 5^3$ eli vaihtoehto 1

Vastaus 1-D, 2-B, 3-A, 4-C

154

a) $\log_2 20 - \log_2 5 = \log_2 \frac{20}{5}$

$= \log_2 4 \qquad 2^2 = 4$

$= 2$

b) $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 8 \cdot 2$

$= \log_4 16 \qquad 4^2 = 16$

$= 2$

Vastaus a) 2 b) 2

155

a) $$\begin{aligned}\log_{12} 3 + 2\log_{12} 2 &= \log_{12} 3 + \log_{12} 2^2 \\ &= \log_{12}(3 \cdot 2^2) \\ &= \log_{12} 12 \\ &= 1\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}5\log_2 \sqrt[5]{8} &= \log_2 \left(\sqrt[5]{8}\right)^5 \\ &= \log_2 8 \\ &= 3\end{aligned}$$

Vastaus a) 1 b) 3

156

a) $$\begin{aligned}\log_3 2 - \log_3 6 &= \log_3 \frac{2}{6} \\ &= \log_3 \frac{1}{3} \\ &= \log_3 1 - \log_3 3 \\ &= 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}2\lg 2 - \lg 40 &= \lg 2^2 - \lg 40 \\ &= \lg \frac{4}{40} \\ &= \lg \frac{1}{10} \\ &= \lg 1 - \lg 10 \\ &= \log_{10} 1 - \log_{10} 10 \\ &= 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

Vastaus a) –1 b) –1

157

Sievennetään lauseke.

$$\frac{\log_3 x^4 + \log_3 x^3}{\log_3 x^2 - \log_3 x} = \frac{4\log_3 x + 3\log_3 x}{2\log_3 x - \log_3 x}$$

$$= \frac{7\,\cancel{\log_3 x}^{\,1}}{\cancel{\log_3 x}_{\,1}}$$

$$= 7$$

Lausekkeen arvo on aina 7. On siis osoitettu, että lausekkeen arvo ei riipu muuttujan x arvosta. □

158

a) Logaritmilauseke on määritelty, kun $x > 0$.

Sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
& 3\log_5 x + 2\log_5 3 - \log_5 4 \\
&= \log_5 x^3 + \log_5 3^2 - \log_5 4 \\
&= \log_5 (x^3 \cdot 3^2) - \log_5 4 \\
&= \log_5 \frac{x^3 \cdot 3^2}{4} \\
&= \log_5 \frac{9x^3}{4}, \text{ kun } x > 0
\end{aligned}
$$

b) Logaritmilauseke on määritelty, kun $x > 0$.

Sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
1 + 2\log_4 x &= 1 + \log_4 x^2 \qquad\qquad 1 = \log_4 4 \\
&= \log_4 4 + \log_4 x^2 \\
&= \log_4 (4 \cdot x^2) \\
&= \log_4 4x^2, \text{ kun } x > 0
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $\log_5 \frac{9x^3}{4}$, kun $x > 0$ b) $\log_4 4x^2$, kun $x > 0$

159

Sievennetään lauseke.

$\log_9 36 - \log_3 2$ Muutetaan logaritmin kantaluvuksi 3.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\log_3 36}{\log_3 9} - \log_3 2 \\
&= \frac{\log_3 36}{2} - \log_3 2 \\
&= \frac{1}{2}\log_3 36 - \log_3 2 \\
&= \log_3 36^{\frac{1}{2}} - \log_3 2 \\
&= \log_3 \sqrt{36} - \log_3 2 \\
&= \log_3 6 - \log_3 2 \\
&= \log_3 \frac{6}{2} \\
&= \log_3 3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

160

a) $\log_3 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3} = \dfrac{\lg 7}{\lg 3}$

b) $\log_{100} 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 100}$ $\quad 100 = 10^2$

$= \dfrac{\lg 5}{2}$

c) $\log_{15} 1000 = \dfrac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 15}$ $\quad 1000 = 10^3$

$= \dfrac{3}{\lg 15}$

Vastaus a) $\dfrac{\lg 7}{\lg 3}$ b) $\dfrac{\lg 5}{2}$ c) $\dfrac{3}{\lg 15}$

161

a) Aritmeettisen lukujonon differenssi eli erotusluku on peräkkäisten jäsenten erotus, $d = a_n - a_{n-1}$.

$$\begin{aligned} d &= a_2 - a_1 \\ &= \log_2 80 - \log_2 5 \\ &= \log_2 \frac{80}{5} \\ &= \log_2 16 \qquad\qquad 16 = 2^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

b) Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Viides jäsen on siis

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1)\cdot d \\ &= \log_2 5 + 4 \cdot 4 \\ &= \log_2 5 + 16. \end{aligned}$$

Vastaus a) $d = 4$ b) $a_5 = \log_2 5 + 16$

162

Lasketaan geometrisen keskiarvon $\sqrt{ab}$ k -kantainen logaritmi ($k > 0$ ja $k \neq 1$).

$$\log_k \sqrt{ab} \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_k (ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_k ab$$

$$= \frac{1}{2} (\log_k a + \log_k b)$$

Nyt on osoitettu, että geometrisen keskiarvon logaritmi on yhtä suuri kuin lukujen a ja b logaritmien aritmeettinen keskiarvo, kaikilla logaritmin kantaluvuilla k. $\square$

163

A) $\log_a x^3 = 3\log_a x$

B) $\log_a \frac{1}{3x} = \log_a 1 - \log_a 3x = 0 - \log_a 3x = -\log_a 3x$

C) $-\log_a \frac{3}{x} = -\left(\log_a 3 - \log_a x\right) = \log_a x - \log_a 3 = \log_a \frac{x}{3}$

D) $\log_a \frac{x}{3}$

E) $-\log_a 3x$

F) $-\log_a x - \log_a 3 = -\left(\log_a x + \log_a 3\right) = -\log_a x \cdot 3 = -\log_a 3x$

G) $\log_a x - \log_a 3 = \log_a \frac{x}{3}$

H) $3\log_a x$

Vastaus A-H, B-E-F ja C-D-G

164

a) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
&\log_6 4 + \log_6 15 - \log_6 5 + \log_6 3 \\
&= \log_6 (4 \cdot 15) - \log_6 5 + \log_6 3 \\
&= \log_6 \frac{4 \cdot 15}{5} + \log_6 3 \\
&= \log_6 (\frac{4 \cdot 15}{5} \cdot 3) \\
&= \log_6 36 \\
&= 2
\end{aligned}$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
&\log_{49} 5 + 2\log_{49} 7 - \log_{49} 35 \\
&= \log_{49} 5 + \log_{49} 7^2 - \log_{49} 35 \\
&= \log_{49} 5 \cdot 7^2 - \log_{49} 35 \\
&= \log_{49} \frac{5 \cdot 7^2}{35} \\
&= \log_{49} 7 \qquad\qquad 7 = \sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vastaus a) 2 b) $\frac{1}{2}$

165

a) Sievennetään lauseke.

$$\log_9\left(\sqrt{10}+1\right)+\log_9\left(\sqrt{10}-1\right)$$
$$=\log_9\left(\left(\sqrt{10}+1\right)\cdot\left(\sqrt{10}-1\right)\right) \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$=\log_9(10-1)$$
$$=\log_9 9$$
$$=1$$

b) Sievennetään lauseke.

$$2\log_3\sqrt{2}-\frac{1}{3}\log_3 216$$
$$=\log_3\left(\sqrt{2}\right)^2-\log_3 216^{\frac{1}{3}}$$
$$=\log_3 2-\log_3\sqrt[3]{216}$$
$$=\log_3 2-\log_3 6$$
$$=\log_3\frac{2}{6}$$
$$=\log_3\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}=3^{-1}$$
$$=-1$$

Vastaus a) 1 b) –1

166

$$
\begin{aligned}
\log\left(xy^2\right) - 2\log y &= \log\left(xy^2\right) - \log y^2 \\
&= \log \frac{x\,\cancelto{1}{y^2}}{\cancelto{1}{y^2}} \\
&= \log x, \text{ kun } x > 0 \text{ ja } y > 0
\end{aligned}
$$

167

Sievennetään lauseke.

$$\frac{\lg\sqrt{x}-\lg\sqrt{x^3}}{\lg x+\lg x^3}=\frac{\lg x^{\frac{1}{2}}-\lg x^{\frac{3}{2}}}{\lg x+\lg x^3}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\lg x-\frac{3}{2}\lg x}{\lg x+3\lg x}$$

$$=\frac{-\overset{1}{\cancel{\lg x}}}{4\underset{1}{\cancel{\lg x}}}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

Lausekkeen arvo on aina $-\frac{1}{4}$. On siis osoitettu, että lausekkeen arvo ei riipu muuttujan x arvosta. □

168

a) $4^{\log_2 7} = \left(2^2\right)^{\log_2 7}$

$= 2^{2\cdot\log_2 7}$

$= 2^{\log_2 7^2}$ $\qquad a^{\log_a y} = y$

$= 7^2$

$= 49$

b) $2^{\frac{4}{\log_5 4}+\frac{3}{\log_6 8}} = 2^{\frac{4}{\log_5 4}} \cdot 2^{\frac{3}{\log_6 8}}$

$= 2^{\frac{\log_5 5^4}{\log_5 4}} \cdot 2^{\frac{\log_6 6^3}{\log_6 8}}$

$= 2^{\log_4 5^4} \cdot 2^{\log_8 6^3}$

$= 2^{\log_4 (5^2)^2} \cdot 2^{\log_8 6^3}$

$= 2^{2\log_4 5^2} \cdot 2^{3\log_8 6}$

$= \left(2^2\right)^{\log_4 5^2} \cdot \left(2^3\right)^{\log_8 6}$

$= 4^{\log_4 5^2} \cdot 8^{\log_8 6}$

$= 5^2 \cdot 6$

$= 150$

Vastaus a) 49 b) 150

169

a) Sievennetään lauseke.

$$\frac{\log_5 27 - \log_5 2}{\log_5 3} + \log_3 6 = \frac{\log_5 27 - \log_5 2}{\log_5 3} + \frac{\log_5 6}{\log_5 3}$$

$$= \frac{\log_5 27 - \log_5 2 + \log_5 6}{\log_5 3}$$

$$= \frac{\log_5 \frac{27}{2} + \log_5 6}{\log_5 3}$$

$$= \frac{\log_5 \left(\frac{27}{2} \cdot 6\right)}{\log_5 3}$$

$$= \frac{\log_5 81}{\log_5 3}$$

$$= \log_3 81 \qquad 81 = 3^4$$

$$= 4$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\frac{\lg 50 - \dfrac{\log_2 5}{\log_2 10}}{\log_4 8 + \log_4 2} = \frac{\log_{10} 50 - \log_{10} 5}{\log_4 (8 \cdot 2)}$$

$$= \frac{\log_{10} \dfrac{50}{5}}{\log_4 16}$$

$$= \frac{\log_{10} 10}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Vastaus a) 4 b) $\frac{1}{2}$

170

Lukujono voi olla aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina yhtä suuri. Lasketaan molemmissa kohdissa toisen ja ensimmäisen jäsenen erotus, ja tarkistetaan, onko se yhtä suuri kuin kolmannen ja toisen jäsenen erotus.

a) $$a_2 - a_1 = \log_7 14 - \log_7 2 = \log_7 \frac{14}{2} = \log_7 7 = 1$$

$$a_3 - a_2 = \log_7 98 - \log_7 14 = \log_7 \frac{98}{14} = \log_7 7 = 1$$

Luvut voivat olla aritmeettisen lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä, koska kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina 1.

b) $$a_2 - a_1 = \lg 8 - \lg 4 = \lg \frac{8}{4} = \lg 2$$

$$a_3 - a_2 = \lg 12 - \lg 8 = \lg \frac{12}{8} = \lg \frac{3}{2}$$

Luvut eivät voi olla aritmeettisen lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä, sillä toisen ja ensimmäisen jäsenen erotus on erisuuri kuin kolmannen ja toisen jäsenen erotus.

Vastaus a) voi olla b) ei voi olla

171

Sievennetään lauseke.

$$\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+\ldots+\lg\frac{98}{99}+\lg\frac{99}{100}$$
$$=\lg\left(\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{98}^{1}}{\cancel{99}_{1}}\cdot\frac{\cancel{99}^{1}}{100}\right)$$
$$=\lg\frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2}$$
$$=-2$$

Vastaus –2

172

Oletetaan, että $\log_a x = t_1$ ja $\log_a y = t_2$.
Tällöin $x = a^{t_1}$ ja $y = a^{t_2}$.

Tarkastellaan logaritmia $\log_a \frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned}\log_a \frac{x}{y} &= \log_a \frac{a^{t_1}}{a^{t_2}} \qquad\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ &= \log_a a^{t_1 - t_2} \\ &= t_1 - t_2 \\ &= \log_a x - \log_a y\end{aligned}$$

Siis $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. □

173

a) Muokataan yhtälön vasenta puolta logaritmin laskusäännöillä.

$$\log_{ak} x = \frac{\log_a x}{\log_a ak} \qquad \text{Vaihdetaan logaritmin kantaluvuksi } a.$$

$$= \frac{\log_a x}{\log_a a + \log_a k}$$

$$= \frac{\log_a x}{1 + \log_a k}$$

On osoitettu, että $\log_{ak} x = \dfrac{\log_a x}{1 + \log_a k}$. □

b) Käytetään a-kohdan sääntöä.

$$\log_6 15 = \log_{2\cdot 3} 15 \qquad \log_{ak} x = \frac{\log_a x}{1 + \log_a k}, \text{ missä } a = 2 \text{ ja } k = 3.$$

$$= \frac{\log_2 15}{1 + \log_2 3}$$

174

a) Muokataan yhtälön vasenta puolta muuttamalla logaritmin kantaluvuksi x.

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$$

On osoitettu, että $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$. □

b) Muokataan yhtälön vasenta puolta muuttamalla logaritmin kantaluvuksi a.

$$\log_{a^n} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^n} = \frac{\log_a x}{n}$$

On osoitettu, että $\log_{a^n} x = \dfrac{\log_a x}{n}$. □

c) Muokataan yhtälön vasenta puolta muuttamalla logaritmin kantaluvuksi $\frac{1}{a}$.

$$-\log_a x = -\frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} \qquad a = a^1 = \frac{1}{a^{-1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1}$$

$$= \log_{\frac{1}{a}} x$$

On osoitettu, että $-\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$. □

d) Muokataan yhtälön vasenta puolta muuttamalla logaritmin kantaluvuksi a.

$$\log_{xy} a = \frac{\log_a a}{\log_a xy} = \frac{1}{\log_a x + \log_a y}$$

On osoitettu, että $\log_{xy} a = \frac{1}{\log_a x + \log_a y}$. □

175

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x-1 &> 0 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} \log_4(x-1) &= 2 \\ x-1 &= 4^2 \\ x-1 &= 16 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Ratkaisu $x = 17$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 1$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$2x + 5 > 0$$
$$2x > -5 \quad \Big| : 2$$
$$x > -\frac{5}{2}$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_7 (2x + 5) = 1$$
$$2x + 5 = 7^1$$
$$2x = 7 - 5$$
$$2x = 2 \quad \Big| : 2$$
$$x = 1$$

Ratkaisu $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon $x > -\frac{5}{2}$.

Vastaus a) $x = 17$ b) $x = 1$

176

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x+3>0$$
$$x>-3$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_8(x+3)=\frac{1}{3}$$
$$x+3=8^{\frac{1}{3}}$$
$$x+3=\sqrt[3]{8}$$
$$x+3=2$$
$$x=-1$$

Ratkaisu $x=-1$ toteuttaa määrittelyehdon $x>-3$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$4x^2 \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla, joten määrittelyehdoksi riittää

$$4x^2 \neq 0$$
$$x \neq 0.$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_6 4x^2 - 2 = 0$$
$$\log_6 4x^2 = 2$$
$$4x^2 = 6^2$$
$$4x^2 = 36 \quad \Big| :4$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9} = -3$$

Kummatkin ratkaisut $x = -3$ ja $x = 3$ toteuttavat määrittelyehdon $x \neq 0$.

Vastaus a) $x = -1$ b) $x = -3$ tai $x = 3$

177

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x+1>0 \qquad \text{ja} \qquad x+4>0$$
$$x>-1 \qquad\qquad\qquad x>-4$$

Määrittelyehto on $x>-1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\log_2(x+1)+\log_2(x+4)&=2\\
\log_2((x+1)(x+4))&=2\\
(x+1)(x+4)&=2^2\\
x^2+4x+x+4&=4\\
x^2+5x&=0\\
x(x+5)&=0\\
x=0 \quad \text{tai} \quad x+5&=0\\
x&=-5
\end{aligned}$$

Ratkaisuista vain $x=0$ toteuttaa määrittelyehdon $x>-1$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$x > 0$ ja $x - 1 > 0$

$x > 1$

Määrittelyehto on $x > 1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} \log_6 x + \log_6 (x-1) &= 1 \\ \log_6 \left(x(x-1) \right) &= 1 \\ x(x-1) &= 6^1 \\ x^2 - x &= 6 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ratkaisuista vain $x = 3$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 1$.

Vastaus a) $x = 0$ b) $x = 3$

178

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad x - 5 > 0$$
$$x > 5$$

Määrittelyehto on $x > 5$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_6 x = 1 - \log_6 (x - 5)$$
$$\log_6 x + \log_6 (x - 5) = 1$$
$$\log_6 \left(x(x - 5)\right) = 1$$
$$x(x - 5) = 6^1$$
$$x^2 - 5x = 6$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$
$$x = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ratkaisuista vain $x = 6$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 5$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x-1>0$$
$$x>1$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$2\lg(x-1)+\lg 4=0$$
$$\lg(x-1)^2+\lg 4=0$$
$$\lg\left((x-1)^2\cdot 4\right)=0$$
$$\log_{10}\left(4(x-1)^2\right)=0$$
$$4(x-1)^2=10^0$$
$$4(x^2-2x+1)=1$$
$$4x^2-8x+4=1$$
$$4x^2-8x+3=0$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{8\pm 4}{8}$$

$$x=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Ratkaisuista vain $x=\frac{3}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon $x>1$.

Vastaus a) $x=6$ b) $x=\frac{3}{2}$

179

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x-2>0 \qquad \text{ja} \qquad x-3>0$$
$$x>2 \qquad\qquad\qquad x>3$$

Määrittelyehto on $x>3$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\log_5(x-2)+\log_5(x-3) &= \log_5 6 \\
\log_5\big((x-2)(x-3)\big) &= \log_5 6 \\
(x-2)(x-3) &= 6 \\
x^2-3x-2x+6 &= 6 \\
x^2-5x &= 0 \\
x(x-5) &= 0
\end{aligned}$$

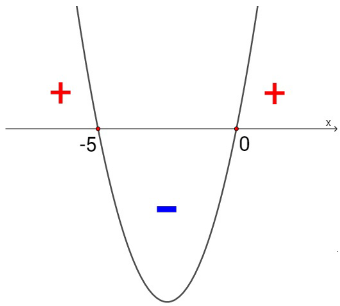
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x-5=0$$
$$x=5$$

Ratkaisuista vain $x=5$ toteuttaa määrittelyehdon $x>3$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$x^2+5x>0$ ja $x>0$

Selvitetään funktion x^2+5x nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.



$$x^2+5x=0$$
$$x(x+5)=0$$
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x+5=0$$
$$x=-5$$

Siis $x^2+5x>0$, kun $x<-5$ tai $x>0$.

Yhtälön määrittelyehto on $x>0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_7(x^2+5x)-\log_7 x=\log_7 18$$
$$\log_7\frac{x^2+5x}{x}=\log_7 18$$
$$\frac{x^2+5x}{x}=18$$
$$\frac{\cancel{x}(x+5)}{\cancel{x}}=18$$
$$x+5=18$$
$$x=18-5=13$$

Ratkaisu $x=13$ toteuttaa määrittelyehdon $x>0$.

Vastaus a) $x = 5$ b) $x = 13$

180

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x-1>0 \quad \text{ja} \quad x-2>0 \quad \text{ja} \quad x+3>0$$
$$x>1 \qquad\qquad x>2 \qquad\qquad x>-3$$

Määrittelyehto on $x>2$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\lg(x-1)+\lg(x-2)+\lg(x+3)&=\lg 6\\
\lg\big((x-1)(x-2)(x+3)\big)&=\lg 6\\
(x-1)(x-2)(x+3)&=6\\
(x^2-3x+2)(x+3)&=6\\
x^3+3x^2-3x^2-9x+2x+6&=6\\
x^3-7x&=0\\
x(x^2-7)&=0
\end{aligned}$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-7=0$$
$$x^2=7$$
$$x=\sqrt{7} \ \text{ tai } \ x=-\sqrt{7}$$

Ratkaisuista vain $x=\sqrt{7}$ toteuttaa määrittelyehdon $x>2$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x+1>0 \quad \text{ja} \quad x+7>0 \quad \text{ja} \quad x>0$$
$$x>-1 \qquad\qquad x>-7$$

Määrittelyehto on $x>0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
2\log_3(x+1) &= \log_3(x+7)+\log_3 x \\
\log_3(x+1)^2 &= \log_3((x+7)\cdot x) \\
(x+1)^2 &= x(x+7) \\
x^2+2x+1 &= x^2+7x \\
-5x &= -1 \\
x &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Ratkaisu $x=\frac{1}{5}$ toteuttaa määrittelyehdon $x>0$.

Vastaus a) $x=\sqrt{7}$ b) $x=\frac{1}{5}$

181

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 2 - x > 0$$

$$-x > -2 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$x < 2$$

Määrittelyehto on $0 < x < 2$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_2 x - \log_2 (2 - x) = 0$$

$$\log_2 x = \log_2 (2 - x)$$

$$x = 2 - x$$

$$2x = 2 \quad \Big| : 2$$

$$x = 1$$

Ratkaisu $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon $0 < x < 2$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 2 - x > 0$$
$$-x > -2 \qquad \Big| \cdot (-1)$$
$$x < 2$$

Määrittelyehto on $0 < x < 2$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_2 x - \log_2 (2 - x) = 1$$
$$\log_2 \frac{x}{2 - x} = 1$$
$$\frac{x}{2 - x} = 2^1 \qquad \Big| \cdot (2 - x) \quad (\neq 0)$$
$$x = 2(2 - x)$$
$$x = 4 - 2x$$
$$3x = 4 \qquad \Big| : 3$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Ratkaisu $x = \frac{4}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon $0 < x < 2$.

Vastaus a) $x = 1$ b) $x = \frac{4}{3}$

182

a) Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
2\log_3 x &= 4 \\
\log_3 x^2 &= 4 \\
x^2 &= 3^4 \\
x^2 &= 81 \\
x &= \sqrt{81} = 9 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{81} = -9
\end{aligned}
$$

Ratkaisuista vain $x = 9$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$x^2 \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla, joten määrittelyehdoksi riittää

$$x^2 \neq 0$$
$$x \neq 0.$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_3 x^2 = 4$$
$$x^2 = 3^4$$
$$x^2 = 81$$
$$x = \sqrt{81} = 9 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{81} = -9$$

Kummatkin ratkaisut $x = -9$ ja $x = 9$ toteuttavat määrittelyehdon $x \neq 0$.

Vastaus a) $x = 9$ b) $x = -9$ tai $x = 9$

183

Jotta logaritmi $\lg x$ on määritelty, on oltava $x > 0$.

Lukujono voi olla aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina yhtä suuri. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$
$$\lg x - \lg 4 = \lg 16 - \lg x$$
$$\lg \frac{x}{4} = \lg \frac{16}{x}$$
$$\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$x^2 = 4 \cdot 16$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \sqrt{64} = 8 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{64} = -8$$

Ratkaisuista vain $x = 8$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus Luvut voivat olla aritmeettisen lukujonon kolme peräkkäistä jäsentä kun $x = 8$.

184

a) Sijoitetaan tulokset muunnoskaavaan $T = t + k\lg\frac{a}{35}$, ja lasketaan muunnetun tuloksen T arvot.

19-vuotiaana $t = 196$ (cm) ja $a = 19$ (vuotta).

$$\begin{aligned} T &= 196 + 201{,}4 \cdot \lg\frac{19}{35} \\ &= 142{,}5656... \\ &\approx 143 \end{aligned}$$

Muunnettu tulos on 143 cm.

23-vuotiaana $t = 200$ ja $a = 23$.

$$\begin{aligned} T &= 200 + 201{,}4 \cdot \lg\frac{23}{35} \\ &= 163{,}2766... \\ &\approx 163 \end{aligned}$$

Muunnettu tulos on 163 cm.

40-vuotiaana $t = 175$ ja $a = 40$.

$$T = 175 + 201{,}4 \cdot \lg \frac{40}{35}$$
$$= 186{,}6795...$$
$$\approx 187$$

Muunnettu tulos on 187 cm.

Paremmuusjärjestyksessä tulokset ovat:

1. 175 cm 40-vuotiaana ($T = 187$ cm)
2. 200 cm 23-vuotiaana ($T = 163$ cm)
3. 196 cm 19-vuotiaana ($T = 143$ cm).

b) Ratkaistaan muunnoskaavasta tuntematon ikä a, kun todellinen hypätty tulos on $t = 175$ (cm) ja muunnettu tulos on $T = 233$ (cm).

$$233 = 175 + 201{,}4 \cdot \lg \frac{a}{35}$$
$$a = 67{,}9285... \approx 68$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

68-vuotiaana hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm.

Vastaus

a)
1. 175 cm 40-vuotiaana ($T = 187$ cm)
2. 200 cm 23-vuotiaana ($T = 163$ cm)
3. 196 cm 19-vuotiaana ($T = 143$ cm)

b) 68-vuotiaana

185

a) Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
2\log_2 x - 6 &= 0 \\
\log_2 x^2 - 6 &= 0 \\
\log_2 x^2 &= 6 \\
x^2 &= 2^6 \\
x^2 &= (2^3)^2 \\
x &= \sqrt{8^2} = 8 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{8^2} = -8
\end{aligned}
$$

Ratkaisuista vain $x = 8$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\log_3(x-1) &= 2 - \log_3 6 \\
\log_3(x-1) + \log_3 6 &= 2 \\
\log_3\big((x-1)\cdot 6\big) &= 2 \\
6(x-1) &= 3^2 \\
6x - 6 &= 9 \\
6x &= 15 \qquad \big|:6 \\
x &= \frac{15}{6} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ratkaisu $x = \dfrac{5}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 1$.

Vastaus a) $x = 8$ b) $x = \dfrac{5}{2}$

186

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x^2 + x > 0 \qquad \text{ja} \qquad 5x + 9 > 0$$

$$5x > -9 \qquad |:5$$

$$x > -\frac{9}{5}$$

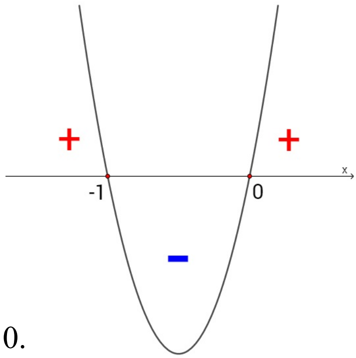
Selvitetään funktion $x^2 + x$ nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \qquad \text{tai} \qquad x + 1 = 0$$

$$x = -1$$



Siis $x^2 + x > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 0$.

Yhtälön määrittelyehto on $-\frac{9}{5} < x < -1$ tai $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_{0,5} 2 + \log_{0,5}\left(x^2 + x\right) = \log_{0,5}(5x+9)$$
$$\log_{0,5}\left(2\cdot\left(x^2 + x\right)\right) = \log_{0,5}(5x+9)$$
$$2\left(x^2 + x\right) = 5x+9$$
$$2x^2 + 2x = 5x + 9$$
$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm\sqrt{81}}{4} = \frac{3\pm 9}{4}$$

$$x = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Kummatkin ratkaisut $x = -\frac{3}{2}$ ja $x = 3$ toteuttavat määrittelyehdon $-\frac{9}{5} < x < -1$ tai $x > 0$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x-4>0 \qquad \text{ja} \qquad 5-2x>0$$

$$x>4 \qquad\qquad -2x>-5 \quad |:(-2)$$

$$x<\frac{5}{2}$$

Yhtälö ei siis ole määritelty millään x:n arvolla, joten sillä ei myöskään ole yhtään ratkaisua.

Vastaus a) $x=-\frac{3}{2}$ tai $x=3$ b) ei ratkaisua

187

a) Selvitetään funktion $f(x)$ määrittelyehto.

$$x+3>0 \quad \text{ja} \quad x-3>0$$
$$x>-3 \qquad\qquad x>3$$

Määrittelyehto on $x>3$.

Ratkaistaan yhtälö.

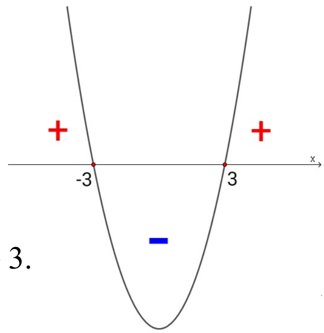
$$\begin{aligned}
f(x) &= 4 \\
\log_2(x+3)+\log_2(x-3) &= 4 \\
\log_2\left((x+3)(x-3)\right) &= 4 \\
(x+3)(x-3) &= 2^4 \\
x^2-9 &= 16 \\
x^2 &= 25 \\
x &= \sqrt{25}=5 \ \text{ tai } \ x=-\sqrt{25}=-5
\end{aligned}$$

Ratkaisuista vain $x=5$ toteuttaa määrittelyehdon $x>3$.

b) Selvitetään funktion $g(x)$ määrittelyehto.

$$x^2 - 9 > 0$$

Selvitetään funktion $x^2 - 9$ nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.



$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Siis $x^2 - 9 > 0$, kun $x < -3$ tai $x > 3$.

Määrittelyehto on $x < -3$ tai $x > 3$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$g(x) = 4$$
$$\log_2\left(x^2 - 9\right) = 4$$
$$x^2 - 9 = 2^4$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25} = 5 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{25} = -5$$

Kummatkin ratkaisut $x = -5$ ja $x = 5$ toteuttavat määrittelyehdon $x < -3$ tai $x > 3$.

c) Funktioilla f ja g on eri määrittelyjoukko, joten funktiot eivät ole sama funktio

Vastaus a) $x = 5$ b) $x = -5$ tai $x = 5$ c) ei ole

188

Selvitetään funktion $f(x)$ määrittelyehto.

$x > 0$ ja $x^3 > 0$

$x > 0$

Määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$f(x) = 0$$

$$x\left(\log_5 x\right)^2 - x\log_5 x^3 = 0$$

$$x\left(\left(\log_5 x\right)^2 - \log_5 x^3\right) = 0$$

$x = 0$ tai $\left(\log_5 x\right)^2 - \log_5 x^3 = 0$

$$\log_5 x \cdot \log_5 x - 3\log_5 x = 0$$

$$\left(\log_5 x\right)\left(\log_5 x - 3\right) = 0$$

$\log_5 x = 0$ tai $\log_5 x - 3 = 0$

$x = 5^0$ $\qquad$ $\log_5 x = 3$

$x = 1$ $\qquad$ $x = 5^3$

$x = 125$

Ratkaisuista vain $x = 1$ ja $x = 125$ toteuttavat määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus $x = 1$ tai $x = 125$

189

a) Selvitetään epäyhtälön määrittelyehto.

$$x + 2 > 0$$
$$x > -2$$

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\log_3(x+2) > 4$$
$$\log_3(x+2) > \log_3 3^4 \quad \text{Funktio } \log_3 x \text{ on aidosti kasvava.}$$
$$x + 2 > 3^4$$
$$x > 81 - 2$$
$$x > 79$$

Kun yhdistetään määrittelyehto $x > -2$ ja ratkaisu $x > 79$, saadaan $x > 79$.

b) Selvitetään epäyhtälön määrittelyehto.

$$x-1>0$$
$$x>1$$

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\log_{0,5}(x-1)\geq 2$$

$$\log_{0,5}(x-1)\geq \log_{0,5} 0,5^2$$

Funktio $\log_{0,5} x$ on aidosti vähenevä, joten suuruusjärjestys kääntyy.

$$x-1\leq 0,5^2$$
$$x\leq 0,25+1$$
$$x\leq 1,25=\frac{5}{4}$$

Kun yhdistetään määrittelyehto $x>1$ ja ratkaisu $x\leq\frac{5}{4}$, saadaan $1<x\leq\frac{5}{4}$.

Vastaus a) $x>79$ b) $1<x\leq\frac{5}{4}$

190

a) Selvitetään epäyhtälön määrittelyehto.

$$x^2 + 100 > 0$$

Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla x, on $x^2 + 100 > 0$ kaikilla x.
Epäyhtälö on siis määritelty kaikilla x.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\lg\left(x^2 + 100\right) \leq 3$$

$$\log_{10}\left(x^2 + 100\right) \leq \log_{10} 10^3$$

Funktio $\log_{10} x$ on aidosti kasvava.

$$x^2 + 100 \leq 1000$$

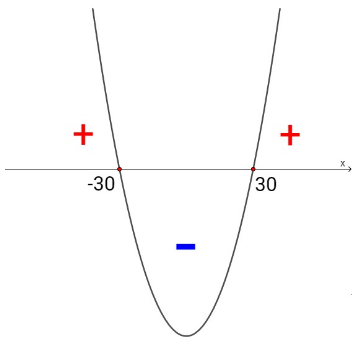
$$x^2 - 900 \leq 0$$

Selvitetään funktion $x^2 - 900$ nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.

$$x^2 - 900 = 0$$

$$x^2 = 900$$

$$x = \pm\sqrt{900} = \pm 30$$



$x^2 - 900 \leq 0$, kun $-30 \leq x \leq 30$.

Epäyhtälön ratkaisu on $-30 \leq x \leq 30$.

b) Selvitetään epäyhtälön määrittelyehto.

$x-5>0$ ja $x>0$

$x>5$

Määrittelyehto on $x>5$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\log_5(x-5)-\log_5 x<2$$

$$\log_5\frac{x-5}{x}<2$$

$$\log_5\frac{x-5}{x}<\log_5 5^2$$ Funktio $\log_5 x$ on aidosti kasvava.

$$\frac{x-5}{x}<5^2 \quad \Big|\cdot x \ (>0)$$

$$x-5<25x$$

$$-24x<5 \quad \Big|:(-24)$$

$$x>-\frac{5}{24}$$

Kun yhdistetään määrittelyehto $x>5$ ja ratkaisu $x>-\dfrac{5}{24}$, saadaan $x>5$.

Vastaus a) $-30\le x\le 30$ b) $x>5$

191

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x+1>0 \quad \text{ja} \quad 4x>0 \quad |:4$$
$$x>-1 \qquad\qquad x>0$$

Määrittelyehto on $x>0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\text{lb}(x+1)-\text{lb}\ 4x &= 1 \\
\text{lb}\frac{x+1}{4x} &= 1 \\
\log_2\frac{x+1}{4x} &= 1 \\
\frac{x+1}{4x} &= 2^1 && |\cdot 4x\ (\neq 0) \\
x+1 &= 8x \\
7x &= 1 && |:7 \\
x &= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Ratkaisu $x=\frac{1}{7}$ toteuttaa määrittelyehdon $x>0$.

b) $2 = \log_2 2^2 = \text{lb } 4$ ja $3 = \log_2 2^3 = \text{lb } 8$

Koska kaksikantainen logaritmifunktio on aidosti kasvava, niin

$$\begin{aligned} 2 &\le \text{lb } n \le 3 \\ \text{lb } 4 &\le \text{lb } n \le \text{lb } 8 \\ 4 &\le \quad n \quad \le 8. \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \dfrac{1}{7}$ b) $n = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

192

a) Ratkaistaan yhtälöstä $M = 0,67 \lg E - 4,8$ energia E, kun $M = 4,1$.

$$4,1 = 0,67 \lg E - 4,8 \qquad \text{Ratkaistaan yhtälö laskimella.}$$
$$E = 1,92124... \cdot 10^{13}$$
$$E \approx 1,9 \cdot 10^{13}$$

Maanjäristyksessä vapautui energiaa noin
$1,9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = 19 \cdot 10^{12}\,\text{J} = 19\ \text{TJ}.$

b) $1,92124... \cdot 10^{13}\ \text{J} = 19\,212,4... \cdot 10^{9}\ \text{J} = 19\,212,4...\ \text{GJ}$

Koska $3,6\ \text{GJ} = 1\ \text{MWh}$, niin maanjäristyksessä vapautunut energia on

$$19\,212,4...\ \text{GJ} = \frac{19\,212,4...}{3,6}\ \text{MWh} \approx 5336,78...\ \text{MWh}.$$

Imatran vesivoimalaitos tuottaa $192\ \text{MWh}$ tunnissa, eli maanjäristyksen vapautuneen energian tuottamiseen kuluu

$$\frac{5336,78...}{192} = 27,7957...$$
$$\approx 28\ \text{tuntia.}$$

c) Lasketaan Japanin maanjäristyksessä vapautunut energia kuten a-kohdassa.

$$9{,}0 = 0{,}67\lg E - 4{,}8$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$E = 3{,}95380...\cdot 10^{20}$$

Lasketaan kuinka moninkertainen energia on Perämeren maanjäristyksessä vapautuneeseen energiaan verrattuna.

$$\frac{3{,}95380...\cdot 10^{20}}{1{,}92124...\cdot 10^{13}} = 20\,579\,406{,}0...$$

$$\approx 21\,000\,000$$

Vastaus a) $1{,}9\cdot 10^{13}\,\mathrm{J} = 19\ \mathrm{TJ}$.
b) 28 tunnissa
c) noin 21 000 000 -kertainen

193

Määritetään yhtälön $T - T_0 = C \cdot 10^{kt}$ vakiot C ja k niin, että jäähtymisajan alkuhetki on klo 9.30. Tarkastellaan aluksi jäähtymistä kello 9.30 ja kello 11.30 välisenä aikana.

Kello 9.30 $t = 0$ ja $T = 33{,}5$ ºC.
Kello 11.30 $t = 2$ ja $T = 30{,}5$ ºC.

Sijoitetaan yhtälöön $T - T_0 = C \cdot 10^{kt}$ muuttujien arvot kello 9.30.

$$\begin{aligned} T - T_0 &= C \cdot 10^{kt} \qquad T = 33{,}5\,^\circ C,\ T_0 = 20{,}5\,^\circ C,\ t = 0 \\ 33{,}0 - 20{,}5 &= C \cdot 10^{k \cdot 0} \\ C &= 13 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön $T - T_0 = 16{,}5 \cdot 10^{kt}$ muuttujien arvot kello 11.30.

$$\begin{aligned} T - T_0 &= 13 \cdot 10^{kt} \qquad T = 30{,}5\,^\circ C,\ T_0 = 20{,}5\,^\circ C,\ t = 2 \\ 30{,}0 - 20{,}5 &= 13 \cdot 10^{k \cdot 2} \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.} \\ k &= \frac{1}{2} - \frac{\lg 13}{2} \end{aligned}$$

Kun jäähtymisen alkuhetki on klo 9.30, niin jäähtymisajan t ja lämpötilan T välillä pätee yhtälö $T - 20{,}5 = 13 \cdot 10^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\lg 13}{2}\right) \cdot t}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan millä ajanhetkellä ruumiinlämpö oli 37,0 ºC.

$$T - 20,5 = 13 \cdot 10^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\lg 13}{2}\right) \cdot t} \qquad \left| T = 37,0\,^{\circ}C \right.$$

$$37,0 - 20,5 = 13 \cdot 10^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\lg 13}{2}\right) \cdot t} \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$t = -1,8174...$$

Murha tapahtui siis 1,8174… tuntia ennen kello 9.30. Muutetaan aika 1,8174… tuntia tunneiksi ja minuuteiksi.

$$1,8174...\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{h} + 0,8174... \cdot 60\ \mathrm{min} = 1\ \mathrm{h} + 49,044...\ \mathrm{min}$$

Murha tapahtui kymmenen minuutin tarkkuudella 1h 50 min ennen klo 9.30. Murha tapahtui siis klo 7.40.

Vastaus Kello 7.40

Huomaa: Jos sovit jäähtymisajan alkuhetkeksi eri kellonajan, niin vakion C arvo yhtälössä muuttuu.

194

Oletetaan, että logaritmit on määritelty, eli $a > 0$ ja $a \neq 1$ (ja $x > 0$). Ratkaistaan yhtälöstä kantaluku a.

$$\log_a x = 3\lg x$$

$$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = 3\log_{10} x \qquad \bigg| \cdot \log_{10} a \ (\neq 0)$$

$$\log_{10} x = 3\log_{10} x \cdot \log_{10} a$$

$$\log_{10} x - 3\log_{10} x \cdot \log_{10} a = 0$$

$$\log_{10} x\left(1 - 3\log_{10} a\right) = 0$$

$$\log_{10} x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 3\log_{10} a = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad 3\log_{10} a = 1$$

$$\log_{10} a^3 = 1$$

$$a^3 = 10^1$$

$$a = \sqrt[3]{10}$$

Koska yhtälö piti paikkansa kaikilla x:n arvoilla, kantaluvun a täytyy olla $\sqrt[3]{10}$.

Vastaus $\quad a = \sqrt[3]{10}$

195

Koska yhtälössä x on logaritmin kantalukuna, yhtälön määrittelyehto on $x > 0$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_3 x - 4\log_x 3 + 3 = 0$$
$$\log_3 x - 4 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} + 3 = 0$$
$$\log_3 x - 4 \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 3 = 0$$
$$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x} + 3 = 0$$

Käytetään apumuuttujaa $t = \log_3 x \;\; (\neq 0)$.

$$t - \frac{4}{t} + 3 = 0 \qquad \Big| \cdot t$$
$$t^2 - 4 + 3t = 0$$
$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$
$$t = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $t = \log_3 x$.

$$
\begin{array}{lcl}
t = 1 & \text{tai} & t = -4 \\
\log_3 x = 1 & & \log_3 x = -4 \\
x = 3^1 = 3 & & x = 3^{-4} \\
 & & x = \dfrac{1}{3^4} \\
 & & x = \dfrac{1}{81}
\end{array}
$$

Kummatkin ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon $x > 0$ ja $x \neq 1$.

Vastaus $\quad x = \dfrac{1}{81}$ tai $x = 3$

196

Koska x ja y ovat logaritmien kantalukuja, niin $x>0$ ja $x\neq 1$, ja $y>0$ ja $y\neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö y:n suhteen.

$$\log_y x = \log_x y$$

$$\frac{\log_x x}{\log_x y} = \log_x y$$

$$\frac{1}{\log_x y} = \log_x y \qquad \Big| \cdot \log_x y \ (\neq 0)$$

$$1 = (\log_x y)^2$$

$$(\log_x y)^2 = 1$$

$$\log_x y = \sqrt{1} \quad \text{tai} \quad \log_x y = -\sqrt{1}$$

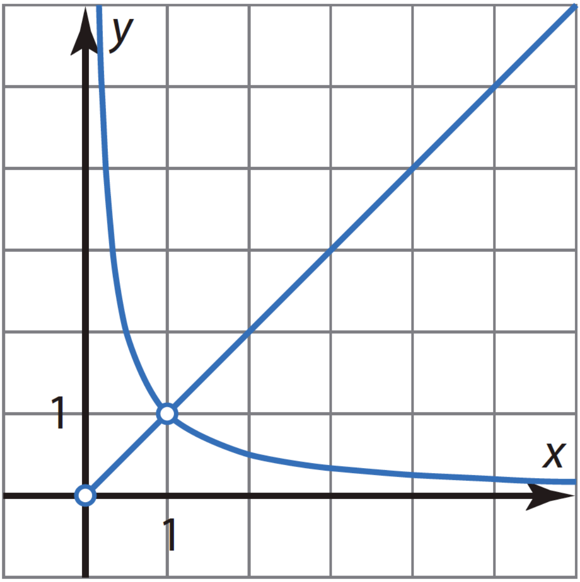
$$\log_x y = 1 \qquad \log_x y = -1$$

$$y = x^1 = x \qquad y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Yhtälön toteuttavat ne tason pisteet (x, y), joille pätee, että

$y = x$ tai $y = \frac{1}{x}$, kun $x>0$ ja $x\neq 1$.

Piirretään kuva.



197

a) $2^{2x} = 16$

$2^{2x} = 2^4$

$2x = 4 \qquad |:2$

$x = 2$

b) $4^{x-1} = 16$

$4^{x-1} = 4^2$

$x - 1 = 2$

$x = 3$

Vastaus a) $x = 2$ b) $x = 3$

198

a) $5^x = \frac{1}{25}$

$5^x = \frac{1}{5^2}$

$5^x = 5^{-2}$

$x = -2$

b) $8^x = \frac{1}{16}$

$\left(2^3\right)^x = \frac{1}{2^4}$

$2^{3x} = 2^{-4}$

$3x = -4 \quad \Big| :3$

$x = -\frac{4}{3}$

Vastaus a) $x = -2$ b) $x = -\frac{4}{3}$

199

a)

$$3^{11x} = 2187$$

$$11x = \log_3 2187 \qquad |:11$$

$$x = \frac{\log_3 2187}{11}$$

$$x = \frac{7}{11}$$

$$= 0,6363... \approx 0,64$$

b)

$$4 \cdot 15^x = 28 \qquad |:4$$

$$15^x = 7$$

$$x = \log_{15} 7$$

$$= 0,7185... \approx 0,72$$

Vastaus a) $x = \dfrac{7}{11} \approx 0,64$ b) $x = \log_{15} 7 \approx 0,72$

200

a)

$$\begin{aligned} 3+5^{x+3} &= 21 && \Big| -3 \\ 5^{x+3} &= 18 \\ x+3 &= \log_5 18 && \Big| -3 \\ x &= \log_5 18 - 3 \\ &= -1{,}2041... \approx -1{,}2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3^x}{2} - 98 &= 0 \\ \frac{3^x}{2} &= 98 && \Big| \cdot 2 \\ 3^x &= 196 \\ x &= \log_3 196 \\ &= 4{,}8043... \approx 4{,}8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \log_5 18 - 3 \approx -1{,}2$ b) $x = \log_3 196 \approx 4{,}8$

201

a)

$$\begin{aligned}
3\cdot 7^{x-2}-4032&=0\\
3\cdot 7^{x-2}&=4032 \qquad \big|:3\\
7^{x-2}&=1344\\
x-2&=\log_7 1344\\
x&=\log_7 1344+2\\
&=5,7018\ldots\approx 5,70
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
5^{2x}\cdot 5^{x-1}&=45 \qquad {\color{blue}a^m\cdot a^n=a^{m+n}}\\
5^{2x+(x-1)}&=45\\
2x+x-1&=\log_5 45\\
3x&=\log_5 45+1 \qquad \big|:3\\
x&=\frac{\log_5 45+1}{3}\\
&=1,1217\ldots\approx 1,12
\end{aligned}$$

Vastaus a) $x\approx 5,70$ b) $x\approx 1,12$

202

a)

$$\underbrace{4^x}_{>0} \le \underbrace{65536}_{>0}$$

lg x on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg 4^x \le \lg 65536$$

$$x \cdot \lg 4 \le \lg 65536 \quad \big| : \lg 4 \ (> 0)$$

$$x \le \frac{\lg 65536}{\lg 4}$$

$$x \le 8$$

b)

$$16 \cdot 0{,}5^x > 2 \quad \big| : 16$$

$$\underbrace{0{,}5^x}_{x>0} > \frac{2}{\underbrace{16}_{x>0}}$$

lg x on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg 0{,}5^x > \lg \frac{2}{16}$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 > \lg \frac{1}{8} \quad \big| : \lg 0{,}5 \ (< 0)$$

$$x < \frac{\lg \frac{1}{8}}{\lg 0{,}5}$$

$$x < 3$$

Vastaus a) $x \le 8$ b) $x < 3$

203

a)

$$\underbrace{2^x}_{>0} > \underbrace{16}_{>0}$$

$$\lg 2^x > \lg 16$$

$$x \lg 2 > \lg 16 \qquad \Big| : \lg 2 \ (>0)$$

$$x > \frac{\lg 16}{\lg 2}$$

$$x > 4$$

b)

$$x^2 > 16$$

$$x^2 - 16 > 0$$

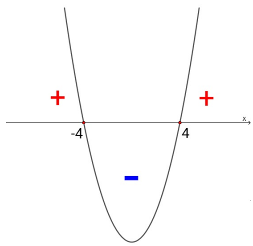
Huomaa, että kyseessä on toisen asteen epäyhtälö.

Ratkaistaan funktion $x^2 - 16$ nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$



Siis $x^2 - 16 > 0$, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

Vastaus a) $x > 4$ b) $x < -4$ tai $x > 4$

204

$$5 \cdot 4^n < 54\,145 \qquad |:5$$

$$\underbrace{4^n}_{>0} < \underbrace{10\,829}_{>0}$$

$$\lg 4^n < \lg 10\,829$$

$$n \cdot \lg 4 < \lg 10\,829 \qquad |:\lg 4 \ (>0)$$

$$n < \frac{\lg 10829}{\lg 4}$$

$$n < 6{,}7013...$$

Luonnolliset luvut, jotka toteuttavat epäyhtälön ovat
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Vastaus $\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

205

a) Kanien määrä kasvaa vuodessa 12 % eli vuoden kuluttua kanien määrä on 100 % + 12 % = 112 % eli 1,12 -kertainen alkuperäiseen nähden. Lasketaan kanien määrä.

$$96 \cdot 1{,}12 = 107{,}52 \approx 108$$

Koska vuosittain kanien määrä tulee vuosittain 1,12-kertaiseksi, niin viiden vuoden jälkeen kanien määrä on $1{,}12^5$ -kertainen. Lasketaan kanien määrä.

$$96 \cdot 1{,}12^5 = 169{,}1848... \approx 169$$

b) Kanien määrä tulee joka vuosi 1,12-kertaiseksi, joten kanien määrän t vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(t) = 96 \cdot 1{,}12^t.$$

c) Kanien määrä on

$$\begin{aligned} f(3{,}5) &= 96 \cdot 1{,}12^{3{,}5} \\ &= 142{,}7362... \\ &\approx 143. \end{aligned}$$

d) Kanien määrä on

$$
\begin{aligned}
f(-0,5) &= 96 \cdot 1,12^{-0,5} \\
&= 90,7114... \\
&\approx 91.
\end{aligned}
$$

Vastaus	a) 108 ja 169	b) $f(t) = 96 \cdot 1,12^t$.
	c) 143	d) 91

206

Koska massa on nyt 24 g, ja se 1,9-kertaistuu tunnissa, ilmaisee viljelmän massan grammoina x tunnin kuluttua funktio

$$f(x) = 24 \cdot 1{,}9^x.$$

a) Lasketaan massa kolmen tunnin kuluttua.

$$\begin{aligned} f(3) &= 24 \cdot 1{,}9^3 \\ &= 164{,}616 \\ &\approx 160 \end{aligned}$$

b) Lasketaan massa 1,5 tuntia sitten.

$$\begin{aligned} f(-1{,}5) &= 24 \cdot 1{,}9^{-1{,}5} \\ &= 9{,}1639... \\ &\approx 9{,}2 \end{aligned}$$

c) Lasketaan massa ajanhetkellä 45 min $= \frac{45}{60}\,h = \frac{3}{4}\,h$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) &= 24 \cdot 1{,}9^{\frac{3}{4}} \\ &= 38{,}8397... \\ &\approx 39 \end{aligned}$$

d) Lasketaan massa 25 minuuttia sitten eli ajanhetkellä
$25 \text{ min} = \dfrac{25}{60}h = \dfrac{5}{12}h$.

$$f\left(-\frac{5}{12}\right) = 24 \cdot 1{,}9^{-\frac{5}{12}}$$
$$= 18{,}3680...$$
$$\approx 18$$

Vastaus a) 160 g b) 9,2 g
c) 39 g d) 18 g

207

Metrin matkalla valaistusvoimakkuus heikkenee $72\ \%$, eli voimakkuus metrin syvyydessä on $100\ \% - 72\ \% = 28\ \%$ valaistuksen voimakkuudesta pinnalla. Joka metri valaistusvoimakkuus tulee siis $0{,}28$-kertaiseksi.

a) Lasketaan valaistus yhden metrin syvyydessä.

$$70\,000 \cdot 0{,}28 = 19\,600\ (\text{lx})$$

b) Koska valaistusvoimakkuus on pinnalla $70\,000$ lx, ja joka metri syvemmälle mentäessä se tulee $0{,}28$-kertaiseksi, valaistusvoimakkuuden x metrin syvyydessä ilmaisee funktio

$$f(x) = 70\,000 \cdot 0{,}28^x.$$

c) Ratkaistaan milloin valaistusvoimakkuus on 100 lx.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 100 \\
70\,000 \cdot 0{,}28^x &= 100 \qquad \big|: 70\,000 \\
0{,}28^x &= \frac{1}{700} \\
x &= \log_{0{,}28} \frac{1}{700} \\
&= 5{,}1463\ldots \\
&\approx 5{,}1\ (\text{m})
\end{aligned}$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

Vastaus a) $19\,600$ lx b) $f(x) = 70\,000 \cdot 0{,}28^x$

c) $5{,}1$ m syvyydessä

208

a) Auton arvo alenee vuosittain $14\ \%$, joten vuoden jälkeen auton arvo on $100\ \% - 14\ \% = 86\ \%$ alkuperäisestä. Auton arvo tulee joka vuosi $0{,}86$-kertaiseksi. Koska auton arvo on aluksi 28 300 €, ilmaisee auton arvon x vuoden kuluttua funktio

$$f(x) = 28\,300 \cdot 0{,}86^x.$$

b) Lasketaan auton arvo 10 vuoden kuluttua.

$$\begin{aligned} f(10) &= 28\,300 \cdot 0{,}86^{10} \\ &= 6262{,}8346... \\ &\approx 6300\ \ (€) \end{aligned}$$

c) Ratkaistaan milloin auton arvo on $\frac{28\,300}{2} = 14\,150$ euroa.

$$f(x) = 14\,150$$

$$28\,300 \cdot 0{,}86^x = 14\,150 \qquad |: 28\,300$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

$$0{,}86^x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= \log_{0{,}86} \frac{1}{2} \\ &= 4{,}5657... \text{ (vuotta)} \end{aligned}$$

Muutetaan aika vuosiksi ja kuukausiksi.

$$\begin{aligned} 4{,}5657... \text{ vuotta} &= 4 \text{ vuotta} + 0{,}5657... \cdot 12 \text{ kk} \\ &= 4 \text{ vuotta} + 7{,}1492... \text{kk} \\ &\approx 4 \text{ vuotta } 7 \text{ kk} \end{aligned}$$

Vastaus a) $f(x) = 28\,300 \cdot 0{,}86^x$
b) 6300 €
c) 4 vuoden ja 7 kuukauden kuluttua

209

a) Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee merimetsoparien määrän yhden vuoden kuluttua. 4 vuoden jälkeen määrä on q^4-kertainen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$17300 \cdot q^4 = 25500 \quad \big| :17300$$

$$q^4 = \frac{255}{173}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{255}{173}} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[4]{\frac{255}{173}}$$

Muutoskerroin on positiivinen, joten

$$q = \sqrt[4]{\frac{255}{173}} = 1{,}10185... \approx 1{,}102 = 110{,}2\ \%$$

Vuotuinen kasvu on ollut $110{,}2\ \% - 100\ \% = 10{,}2\ \%$.

b) Lasketaan merimetsoparien määrä vuonna 2020.

$$25\,500 \cdot 1{,}102^4 = 37\,606{,}8154...$$

$$\approx 37\,600$$

Vuodesta 2016 vuoteen 2020 on neljä vuotta

c) Kun aikaa on kulunut t vuotta merimetsoparien määrä on q^t-kertainen. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kuinka monen vuoden kuluttua määrä ylittäisi miljoonan.

$$25\,500 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{255}{173}}\right)^t > 1000000$$

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$t > 37{,}7761...$$

Merimetsoparien määrä ylittäisi miljoonan vuonna 2016 + 37,7761 = 2053,7761… eli vuoden 2053 aikana.

Vastaus a) 10,2 % b) 37 600 c) vuonna 2053

210

a) Merkitään Rn-222:n alkuperäistä määrää kirjaimella m.
$3{,}82$ vuorokauden kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0{,}5m$.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee Rn-222:n jäljellä olevan osuuden yhden vuorokauden kuluttua.
3,82 vuorokauden kuluttua radonin määrä on $q^{3{,}82}$ -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$
\begin{aligned}
q^{3{,}82}\cdot m &= 0{,}5m && \big|:m\ \ (\neq 0)\\
q^{3{,}82} &= 0{,}5 && \text{Ratkaistaan yhtälö laskimella.}\\
q &= 0{,}83405...
\end{aligned}
$$

Kahden viikon kuluttua radonin määrä on q^{14} -kertainen. Koska alkuperäinen määrä oli m, kahden viikon kuluttua määrä on

$$
\begin{aligned}
q^{14}\cdot m &= 0{,}83405...^{14}\cdot m\\
&= 0{,}07884...\cdot m\\
&\approx 0{,}079m.
\end{aligned}
$$

Radonista on jäljellä 7,9 % alkuperäisestä määrästä.

b) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen vuorokauden kuluttua määrästä on jäljellä alle 1,0 %.

$$0{,}83405...^t \cdot m < 0{,}01m \quad \Big| : m \ (> 0)$$

$$0{,}83405...^t < 0{,}01$$

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$t > 25{,}3795...$$

Radonista on jäljellä alle 1,0 %, kun aikaa on kulunut vähintään 26 vuorokautta.

Vastaus a) 7,9 % b) 26 vuorokauden kuluttua

TAPA 2

a) Merkitään Rn-222:n alkuperäistä määrää kirjaimella m.
Kun puoliintumisaikoja on kulunut n kappaletta, niin määrä on pienentynyt $0,5^n$ -kertaiseksi eli määrästä on jäljellä $0,5^n \cdot m$.

Kahden viikon eli 14 vuorokauden kuluttua puoliintumisaikoja on kulunut $\dfrac{14}{3,82}$ kappaletta. Siis $n = \dfrac{14}{3,82}$. Kahden viikon kuluttua Rn-222:n määrä on

$$0,5^{\frac{14}{3,82}} \cdot m = 0,07884...m \approx 0,079m.$$

Radonista on jäljellä 7,9 % alkuperäisestä määrästä.

b) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen puoliintumisajan jälkeen määrästä on jäljellä alle $1,0$ %.

$$0,5^n \cdot m < 0,01m \qquad \Big| : m \ (> 0)$$

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$0,5^n < 0,01$$

$$n > 6,6438...$$

Muutetaan puoliintumisaikojen lukumäärä vuorokausiksi.

$$6,6438... \cdot 3,82 \text{ vrk} = 25,3795...$$

Radonista on jäljellä alle $1,0\ \%$, kun aikaa on kulunut vähintään 26 vuorokautta.

211

Vuodesta 1974 vuoteen 2016 on kulunut 42 vuotta, siis suorituskyky on kaksinkertaistunut 21 kertaa. Intel Core i7-7500U prosessorin suorituskyky on siis Intel8080 prosessoriin verrattuna 2^{21} -kertainen.

$$2^{21} = 2\,097\,152 \approx 2\,100\,000$$

Vastaus noin 2 100 000 -kertainen

212

Merkitään C-14 -isotoopin alkuperäinen aktiivisuus grammaa kohti on 13,6 Bq. 5730 vuoden kuluttua aktiivisuus on pienentynyt puoleen.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee C-14 -isotoopin aktiivisuuden vuoden kuluttua. 5730 vuoden kuluttua aktiivisuus on q^{5730} -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$q^{5730} \cdot 13,6 = 0,5 \cdot 13,6 \qquad |:13,6$$
$$q^{5730} = 0,5$$
$$q = \sqrt[5730]{0,5} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[5730]{0,5}$$

Muutoskerroin on positiivinen, joten $q = \sqrt[5730]{0,5}$.

Kun aikaa kuluu t vuotta, aktiivisuus on q^t -kertainen.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuinka monessa vuodessa aktiivisuus pienenee 13,6 Bq:stä 12,9 Bq:iin.

$$q^t \cdot 13,6 = 12,9$$
$$\left(\sqrt[5730]{0,5}\right)^t \cdot 13,6 = 12,9 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$
$$t = 436,8299...$$

Puuesine on noin 440 vuotta vanha.

Vastaus 440 vuotta

TAPA 2

Kun puoliintumisaikoja kuluu n kappaletta pienenee C-14 -isotoopin aktiivisuus $0,5^n$ -kertaiseksi.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuinka monen puoliintumisajan kuluttua aktiivisuus on pienentynyt 13,6 Bq:stä 12,9 Bq:iin.

$$0,5^n \cdot 13,6 = 12,9 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$
$$n = 0,07623...$$

Muutetaan puoliintumisaikojen lukumäärä vuosiksi.

$$0,07623... \cdot 5730 \text{ vuotta} = 436,829... \text{ vuotta}$$

Puuesine on noin 440 vuotta vanha.

213

a)

$$25^x = \frac{1}{5}$$

$$\left(5^2\right)^x = 5^{-1}$$

$$5^{2x} = 5^{-1}$$

$$2x = -1 \qquad \Big|:2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

b)

$$5^{2x+1} = \sqrt{5}$$

$$5^{2x+1} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$2x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{1}{2} \qquad \Big|:2$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Vastaus a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{1}{4}$

214

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 5^n+5^n+5^n+5^n+5^n &= 5^{25} \\ 5\cdot 5^n &= 5^{25} \\ 5^1\cdot 5^n &= 5^{25} \\ 5^{n+1} &= 5^{25} \\ n+1 &= 25 \\ n &= 24 \end{aligned}$$

Vastaus $n = 24$

215

a)

$$\begin{aligned} 9 \cdot 100^x &= 10 \qquad \qquad \Big|:9 \\ 100^x &= \frac{10}{9} \\ x &= \log_{100} \frac{10}{9} \\ &= 0{,}02287... \\ &\approx 0{,}023 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1{,}5^x &= 84 \qquad \qquad \Big|:4 \\ 1{,}5^x &= 21 \\ x &= \log_{1{,}5} 21 \\ &= 7{,}5087... \\ &\approx 7{,}5 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \log_{100} \frac{10}{9} \approx 0{,}023$ b) $x = \log_{1{,}5} 21 \approx 7{,}5$

216

a)

$$\begin{aligned}
48-3^{2x} &= 5 \\
-3^{2x} &= -43 && \big|\cdot(-1) \\
3^{2x} &= 43 \\
2x &= \log_3 43 && \big|:2 \\
x &= \frac{\log_3 43}{2} \\
&= 1{,}71179... \\
&\approx 1{,}71
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{81}{6^x} &= 3 && \big|\cdot 6^x \quad (\neq 0) \\
81 &= 3\cdot 6^x && \big|:3 \\
27 &= 6^x \\
6^x &= 27 \\
x &= \log_6 27 \\
&= 1{,}83944... \\
&\approx 1{,}84
\end{aligned}$$

Vastaus a) $x \approx 1{,}71$ b) $x \approx 1{,}84$

217

$$10^{2x} - 2\cdot 10^{x} = 8$$

$$\left(10^{x}\right)^{2} - 2\cdot 10^{x} - 8 = 0 \qquad \Big| \text{Merkitään } 10^{x} = t.$$

$$t^{2} - 2t - 8 = 0$$

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^{2} - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$t = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad t = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Koska $10^{x} = t$, niin saadaan kaksi yhtälö. Ratkaistaan muuttuja x.

$t = 4$	tai	$t = -2$
$10^{x} = 4$		$10^{x} = -2$
$x = \log_{10} 4$		ei ratkaisuja, sillä $10^{x} > 0$ kaikilla x
$= \lg 4$		
$= 0{,}6020...$		
$\approx 0{,}6$		

Vastaus $\quad x = \lg 4 \approx 0{,}6$

218

a)

$$5 \cdot 3^x - 32\,805 < 0$$

$$5 \cdot 3^x < 32\,805 \qquad |:5$$

$$3^x < 6561$$

Funktio $\lg x$ on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg 3^x < \lg 6561$$

$$x \cdot \lg 3 < \lg 6561 \qquad |:\lg 3 \ (>0)$$

$$x < \frac{\lg 6561}{\lg 3}$$

$$x < 8$$

b)

$$0,5^{x-1} \geq 4$$

Funktio $\lg x$ on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg 0,5^{x-1} \geq \lg 4$$

$$(x-1) \cdot \lg 0,5 \geq \lg 4 \qquad |:\lg 0,5 \ (<0)$$

$$x - 1 \leq \frac{\lg 4}{\lg 0,5}$$

$$x \leq \frac{\lg 4}{\lg 0,5} + 1$$

$$x \leq -1$$

Vastaus a) $x < 8$ b) $x \leq -1$

219

a) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\frac{4^n}{5} < 100000 \quad \Big| \cdot 5$$

$$4^n < 500000$$

Funktio $\lg x$ on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg 4^n < \lg 500000$$

$$n \cdot \lg 4 < \lg 500000 \quad \Big| : \lg 4 \ (> 0)$$

$$n < \frac{\lg 500000}{\lg 4}$$

$$n < 9{,}46578\ldots$$

Epäyhtälön toteuttavat luonnolliset luvut
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9.

b) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$4\cdot 4^n \geq 3\cdot 5^n$$

Funktio $\lg x$ on aidosti kasvava, suuruusjärjestys säilyy.

$$\lg\left(4\cdot 4^n\right) \geq \lg\left(3\cdot 5^n\right)$$
$$\lg 4 + \lg 4^n \geq \lg 3 + \lg 5^n$$
$$\lg 4^n - \lg 5^n \geq \lg 3 - \lg 4$$
$$n\cdot \lg 4 - n\cdot \lg 5 \geq \lg 3 - \lg 4$$
$$n\cdot\left(\lg 4 - \lg 5\right) \geq \lg 3 - \lg 4 \qquad \Big| : \left(\lg 4 - \lg 5\right)\ \left(< 0\right)$$
$$n \leq \frac{\lg 3 - \lg 4}{\lg 4 - \lg 5}$$
$$n \leq 1{,}2892...$$

Epäyhtälön toteuttavat luonnolliset luvut 0 ja 1.

Vastaus a) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ b) $n = 0,\ 1$

220

a)

$$\begin{aligned} 5^x &= 4^{3x+1} \\ \lg 5^x &= \lg 4^{3x+1} \\ x \cdot \lg 5 &= (3x+1) \cdot \lg 4 \\ x \cdot \lg 5 &= 3x \cdot \lg 4 + \lg 4 \\ x \cdot \lg 5 - 3x \cdot \lg 4 &= \lg 4 \\ x \cdot (\lg 5 - 3\lg 4) &= \lg 4 \qquad \qquad |:(\lg 5 - 3\lg 4) \\ x &= \frac{\lg 4}{\lg 5 - 3\lg 4} \\ &= -0,54376... \\ &\approx -0,544 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5^x &= 4^{3x+1} \\ \lg(2 \cdot 5^x) &= \lg 4^{3x+1} \\ \lg 2 + \lg 5^x &= \lg 4^{3x+1} \\ \lg 2 + x \cdot \lg 5 &= (3x+1) \cdot \lg 4 \\ \lg 2 + x \cdot \lg 5 &= 3x \cdot \lg 4 + \lg 4 \\ x \cdot \lg 5 - 3x \cdot \lg 4 &= \lg 4 - \lg 2 \\ x \cdot (\lg 5 - 3\lg 4) &= \lg 4 - \lg 2 \qquad \qquad |:(\lg 5 - 3\lg 4) \\ x &= \frac{\lg 4 - \lg 2}{\lg 5 - 3\lg 4} \\ &= -0,27188... \\ &\approx -0,272 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x \approx -0,544$ b) $x \approx -0,272$

221

Selvitetään ensin logaritmien määrittelyehto.

$$2^x - 2 > 0 \quad \text{ja} \quad 2^x + 2 > 0$$

$$2^x > 2 \qquad\qquad 2^x > -2$$

$$x > 1 \qquad\qquad \text{kaikilla } x$$

Määrittelyehto on $x > 1$.

Lukujono voi olla aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina yhtä suuri. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$\lg\left(2^x - 2\right) - \lg 2 = \lg\left(2^x + 2\right) - \lg\left(2^x - 2\right)$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

$$\lg\frac{2^x - 2}{2} = \lg\frac{2^x + 2}{2^x - 2}$$

$$\frac{2^x - 2}{2} = \frac{2^x + 2}{2^x - 2}$$

$$\left(2^x - 2\right)^2 = 2\left(2^x + 2\right)$$

$$\left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x + 4 = 2\cdot 2^x + 4$$

$$\left(2^x\right)^2 - 6\cdot 2^x = 0$$

$$2^x\left(2^x - 6\right) = 0$$

$$2^x = 0 \quad \text{tai} \quad 2^x - 6 = 0$$

ei ratkaisua

$$2^x = 6$$

$$x = \log_2 6 \ \ (\approx 2{,}6)$$

Ratkaisu $x = \log_2 6$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 1$.

Vastaus $\quad x = \log_2 6$

222

Vesihyasinttikasvuston pinta-ala kasvaa viikossa 1,5-kertaiseksi, ja aluksi sen pinta-ala on $1{,}0\ \mathrm{m}^2$, joten sen pinta-alan neliömetreinä x viikon kuluttua ilmaisee funktio

$$\begin{aligned} f(x) &= 1{,}0 \cdot 1{,}5^x \\ &= 1{,}5^x. \end{aligned}$$

a) Lasketaan alueen pinta-ala kolmen viikon kuluttua.

$$\begin{aligned} f(3) &= 1{,}5^3 \\ &= 3{,}375 \\ &\approx 3{,}4 \end{aligned}$$

b) Lasketaan alueen pinta-ala 60 päivän kuluttua eli ajanhetkellä $\frac{60}{7}$ viikkoa.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{60}{7}\right) &= 1{,}5^{\frac{60}{7}} \\ &= 32{,}3112... \\ &\approx 32 \end{aligned}$$

c) Lasketaan alueen pinta-ala kaksi päivää sitten eli ajanhetkellä $-\frac{2}{7}$ viikkoa.

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{2}{7}\right) &= 1{,}5^{-\frac{2}{7}} \\
&= 0{,}8906... \\
&\approx 0{,}89
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $3{,}4\ \mathrm{m}^2$ b) $32\ \mathrm{m}^2$ c) $0{,}89\ \mathrm{m}^2$

223

Yhden senttimetrin paksuinen suodatin pidättää ilman pölyhiukkasista 74 %, , joten pölyhiukkasista on jäljellä 26 %. Yhden senttimetrin paksuisen suodattimen jälkeen pölyhiukkasten määrä on 0,26-kertainen.

a) Kun suodattimen paksuus on $3{,}5$ cm, on ilmanpölyhiukkasten määrä suodatuksen jälkeen $0{,}26^{3{,}5}$ -kertainen. Lasketaan pölyhiukkasten lukumäärä.

$$16\,000 \cdot 0{,}26^{3{,}5} = 143{,}3925... \approx 140$$

b) Kun suodattimen paksuus on x senttimetriä, niin pölyhiukkasten määrä suodatuksen jälkeen on $16\,000 \cdot 0{,}26^{x}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan suodattimen paksuus x.

$$\begin{aligned} 16\,000 \cdot 0{,}26^{x} &= 0{,}001 \cdot 16\,000 \qquad \Big| : 16\,000 \\ 0{,}26^{x} &= 0{,}001 \\ x &= \log_{0{,}26} 0{,}001 \\ &= 5{,}1279... \\ &\approx 5{,}1 \end{aligned}$$

Vastaus a) 140 b) $5{,}1\ \text{cm}^2$

224

Isotoopin I-131 määrä vähenee vuorokaudessa 8,3 % eli vuorokauden jälkeen määrästä on jäljellä 100 % – 8,3 % = 91,7 % Vuorokaudessa määrä tulee 0,917-kertaiseksi.

a) Kahdessa viikossa eli 14 vuorokaudessa I-131:n määrä tulee $0,917^{14}$-kertaiseksi. Merkitään isotoopin alkuperäistä määrää kirjaimella m. Kahden viikon jälkeen määrä on

$$m \cdot 0,917^{14} = m \cdot 0,2972.... \approx 0,30m.$$

Kahden viikon jälkeen jäljellä oli 30 % alkuperäisestä määrästä.

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan missä ajassa t alkuperäinen määrä m puolittuu.

$$\begin{aligned} m \cdot 0,917^t &= 0,5m \qquad \qquad |: m \ \ (\neq 0) \\ 0,917^t &= 0,5 \\ t &= \log_{0,917} 0,5 \\ &= 7,9995... \\ &\approx 8,0 \end{aligned}$$

I-131:n puoliitumisaika on 8,0 vuorokautta.

Vastaus a) 30 % b) 8,0 vuorokautta

225

a) Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee väkiluvun muutoksen yhdessä vuodessa. 15 vuoden jälkeen maapallon väkiluku on q^{15} -kertainen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$\begin{aligned} 6{,}13 \cdot q^{15} &= 7{,}35 \qquad \Big| : 6{,}13 \\ q^{15} &= \frac{7{,}35}{6{,}13} \\ q &= \sqrt[15]{\frac{7{,}35}{6{,}13}} \\ &= 1{,}01217\ldots \\ &\approx 1{,}0122 = 101{,}22\ \% \end{aligned}$$

Väkiluku kasvoi keskimäärin $101{,}22\ \% - 100\ \% = 1{,}22\ \%$ vuodessa.

b) Vuonna 2015 väkiluku oli $7{,}35$ miljardia. Väkiluku tulee joka vuosi 1,0122-kertaiseksi. Väkiluvun miljardeina x vuoden kuluttua vuodesta 2015 ilmaisee funktio

$$f(x) = 7{,}35 \cdot 1{,}0122^x.$$

c) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kuinka monen vuoden kuluttua väkiluku ylittää 10 miljardia.

$$f(x) > 10$$

$$7{,}35 \cdot 1{,}0122^x > 10$$ Ratkaistaan laskimella.

$$x > 25{,}3900...$$

Väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna
2015 + 25,3900… = 2040,3900… eli vuoden 2040 aikana.

Vastaus a) $1{,}22\ \%$
b) $f(x) = 7{,}35 \cdot 1{,}0122^x$
c) vuonna 2040

226

Merkitään fenoksihapon alkuperäistä määrää kirjaimella m.
3 viikon kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0,5m$.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee fenoksihapon jäljellä olevan osuuden yhden viikon kuluttua. 3 viikon kuluttua fenoksihapon määrä on q^3 -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$\begin{aligned} m \cdot q^3 &= 0,5m \qquad \Big|: m \ (\neq 0) \\ q^3 &= 0,5 \\ q &= \sqrt[3]{0,5} \end{aligned}$$

Kun aikaa on kulunut t viikkoa, niin määrä on q^t-kertainen.
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen viikon kuluttua fenoksihapon määrä on alle $0,05m$.

$$\begin{aligned} m \cdot \left(\sqrt[3]{0,5}\right)^t &< 0,05m \qquad \Big|: m \ (> 0) \\ \left(\sqrt[3]{0,5}\right)^t &< 0,05 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.} \\ t &> 12,965... \end{aligned}$$

Fenoksihaposta on jäljellä alle $5,0\ \%$ alkuperäisestä määrästä 13 viikon kuluttua.

Vastaus $\quad$ 13 viikon

TAPA 2

Kun puoliintumisaikoja on kulunut n kappaletta, niin määrä on $0,5^n$ -kertainen. Ratkaistaan kuinka monen puoliintumisajan jälkeen alkuperäisestä määrästä m on jäljellä alle 5,0 % eli alle $0{,}05m$.

$$\begin{aligned} m\cdot 0,5^n &< 0,05m && \big|: m\ (>0) \\ 0,5^n &< 0,05 && \text{Ratkaistaan laskimella.} \\ n &> 4,3219... \end{aligned}$$

Muutetaan puoliintumisaikojen lukumäärä viikoiksi.

$4,3219...\cdot 3\text{ vko} = 12,9657...$

Fenoksihaposta on jäljellä alle 5,0 % alkuperäisestä määrästä 13 viikon kuluttua.

227

Ratkaistaan ensin kerroin q, joka ilmaisee kofeiinin jäljellä olevan osuuden yhden tunnin kuluttua. Merkitään kofeiinin alkuperäistä määrää elimistössä kirjaimella m. 6 tunnin kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0,5m$. Muodostetaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
q^6 \cdot m &= 0,5m \qquad \bigg|: m \ (\neq 0) \\
q^6 &= 0,5 \\
q &= \sqrt[6]{0,5} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[6]{0,5}
\end{aligned}
$$

Muutoskerroin on positiivinen, joten $q = \sqrt[6]{0,5}$.

Lasketaan erikseen kuinka paljon jokaisesta nautitusta kofeiininannoksesta on jäljellä klo 22.00.

1) Mukillisessa teetä kofeiinia on 100 mg. Lasketaan kuinka paljon siitä on jäljellä elimistössä klo 22.00 (14,5 tuntia nauttimisen jälkeen).

$$100 \cdot \left(\sqrt[6]{0,5}\right)^{14,5} = 18,7288... \approx 18,730 \text{ (mg)}$$

2) Puolessa litrassa kolajuomaa on 50 mg kofeiinia. Lasketaan kuinka paljon siitä on jäljellä klo 22.00 (6 tuntia nauttimisen jälkeen).

$$50 \cdot \left(\sqrt[6]{0,5}\right)^{6} = 25 \text{ (mg)}$$

3) Mai juo energiajuomaa 330 ml, joten siinä on kofeiinia $3,3 \cdot 32\ \text{mg} = 105,6\ \text{mg}$. Lasketaan, kuinka paljon siitä on jäljellä klo 22.00 (2,5 tuntia nauttimisen jälkeen).

$$105,6 \cdot \left(\sqrt[6]{0,5}\right)^{2,5} = 79,1106... \approx 79,111\ \text{(mg)}$$

Kello 22.00 Main elimistössä on kofeiinia yhteensä

$$18,730\ \text{mg} + 25\ \text{mg} + 79,111\ \text{mg} = 122,841\ \text{mg} \approx 120\ \text{mg}.$$

Vastaus 120 mg

228

Merkitään C-14:n alkuperäistä määrää kirjaimella m.
5730 vuoden kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0,5m$.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee C-14:n jäljellä olevan osuuden yhden vuoden kuluttua. 5730 vuoden kuluttua määrä on q^{5730} -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$
\begin{aligned}
q^{5730} \cdot m &= 0,5m \qquad \Big| : m \quad (\neq 0) \\
q^{5730} &= 0,5 \\
q &= \sqrt[5730]{0,5} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[5730]{0,5}
\end{aligned}
$$

Muutoskerroin on positiivinen, joten $q = \sqrt[5730]{0,5}$.

Kun aikaa kuluu t vuotta, aktiivisuus on q^t -kertainen.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuinka monessa vuodessa aktiivisuus pienenee 97 %:iin alkuperäisestä.

$$
\begin{aligned}
m \cdot \left(\sqrt[5730]{0,5}\right)^t &= 0,97m \qquad \Big| : m \quad (\neq 0) \\
\left(\sqrt[5730]{0,5}\right)^t &= 0,97 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.} \\
t &= 253,8114... \\
&\approx 250
\end{aligned}
$$

Esine on noin 250 vuotta vanha, joten se ei voi olla peräisin 1200-luvulta.

Vastaus Ei pidä paikkaansa

TAPA 2

Kun puoliintumisaikoja kuluu n kappaletta pienenee C-14 -isotoopin määrä $0,5^n$ -kertaiseksi.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuinka monen puoliintumisajan kuluttua määrä on pienentynyt 97 %:iin.

$$0,5^n \cdot m = 0,97m \qquad \Big| : m \ (\neq 0)$$

$$0,5^n = 0,97 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$n = 0,04394...$$

Muutetaan puoliintumisaikojen lukumäärä vuosiksi.

$$0,04394... \cdot 5730 \text{ vuotta} = 251,795... \text{ vuotta}$$

Esine on noin 250 vuotta vanha.

229

Merkitään C-14:n alkuperäistä määrää kirjaimella m.
5730 vuoden kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0,5m$.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee C-14:n jäljellä olevan osuuden yhden vuoden kuluttua. 5730 vuoden kuluttua radonin määrä on q^{5730} -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$
\begin{aligned}
q^{5730}\cdot m &= 0,5m \qquad \big|: m \quad (\neq 0)\\
q^{5730} &= 0,5\\
q &= \sqrt[5730]{0,5} \quad \text{tai} \quad q = -\sqrt[5730]{0,5}
\end{aligned}
$$

Muutoskerroin on positiivinen, joten $q = \sqrt[5730]{0,5}$.

Kun aikaa kuluu t vuotta, tulee isotooppisuhde q^t -kertaiseksi.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika t.

$$
\begin{aligned}
1,2\cdot 10^{-12}\cdot\left(\sqrt[5730]{0,5}\right)^t &= 6,7\cdot 10^{-13} \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}\\
t &= 4817,792...\\
&\approx 4800 \quad \text{(vuotta)}
\end{aligned}
$$

Muumion ikä olisi tämän tiedon perusteella 4800 vuotta.

Vastaus 4800 vuotta

TAPA 2

Kun puoliintumisaikoja kuluu n kappaletta pienenee isotooppisuhde $0,5^n$ -kertaiseksi.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan puoliintumisaikojen lukumäärä.

$$0,5^n \cdot 1,2 \cdot 10^{-12} = 6,7 \cdot 10^{-13}$$ Ratkaistaan laskimella.

$$n = 0,8408...$$

Muutetaan puoliintumisaikojen lukumäärä vuosiksi.

$$0,8408... \cdot 5730 \text{ vuotta} = 4817,79... \text{ vuotta}$$

Muumion ikä olisi tämän tiedon perusteella 4800 vuotta.

230

Koska $f(x) = k \cdot a^x$ on vakiolla kerrottu eksponenttifunktio, niin kantaluvulle a pätee, että $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Olkoon $g(x) = a^x$. Funktio g on eksponenttifunktio, joten se on aidosti kasvava, kun $a > 1$, ja aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.

Tutkitaan funktion $f(x) = k \cdot a^x$ ominaisuuksia funktion $g(x) = a^x$ avulla.

1) Tarkastellaan tilannetta, jossa $0 < a < 1$.

Olkoon $x_1 < x_2$. Koska $g(x)$ on aidosti vähenevä, niin

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &> g(x_2) \\
a^{x_1} &> a^{x_2} \qquad \Big| \cdot k \ (< 0) \\
k \cdot a^{x_1} &< k \cdot a^{x_2} \\
f(x_1) &< f(x_2)
\end{aligned}
$$

Siis $f(x)$ on aidosti kasvava, kun $0 < a < 1$.

2) Tarkastellaan tilannetta, jossa $a > 1$.

Olkoon $x_1 < x_2$. Koska $g(x)$ on aidosti kasvava, niin

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &< g(x_2) \\
a^{x_1} &< a^{x_2} && \Big| \cdot k \ (< 0) \\
k \cdot a^{x_1} &> k \cdot a^{x_2} \\
f(x_1) &> f(x_2)
\end{aligned}
$$

Siis $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun $a > 1$.

a) Funktio f on aidosti kasvava, kun $0 < a < 1$.

b) Funktio f on aidosti vähenevä, kun $a > 1$.

c) Koska $a^x > 0$ kaikilla x:n arvoilla ja $k < 0$, niin tulo $k \cdot a^x$ on negatiivinen kaikilla x. Funktion f kaikki arvot ovat negatiivisia.

Vastaus a) $0 < a < 1$ b) $a > 1$ c) negatiivinen

231

Merkitään vuoden 2014 louhintamäärää kirjaimella a. Jos joka vuosi louhittaisiin sama määrä, louhittavaa riittäisi 50 vuodeksi, eli koko kaivoksesta louhittava määrä on $50a$.

Louhintaa lisätään vuosittain $2{,}5\ \%$, eli louhintamäärä on aina edellisvuoteen verrattuna $1{,}025$-kertainen. Siis vuonna 2015 louhintamäärä on $a \cdot 1{,}025$, vuonna 2016 $a \cdot 1{,}025^2$ ja niin edelleen. Louhintamäärät muodostavat geometrisen jonon, missä $a_1 = a \cdot 1{,}025$ (vuosi 2015) ja $q = 1{,}025$.

Kun aikaa kuluu n vuotta, saadaan kaikkiaan louhittu määrä geometrisena summana

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a \cdot 1{,}025 \cdot (1-1{,}025^n)}{1-1{,}025} = -41a \cdot (1-1{,}025^n).$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka moneksi vuodeksi kivihiili $50a$ riittää.

$$\begin{aligned} S_n &= 50a \\ -41a \cdot (1-1{,}025^n) &= 50a && \big|: a\ (\neq 0) \\ -41 \cdot (1-1{,}025^n) &= 50 && \text{Ratkaistaan laskimella.} \\ n &= 32{,}2885\ldots \end{aligned}$$

Louhittava kivihiili loppuu vuonna 2015 + 32,2885… = 2047,288… eli vuoden 2047 aikana.

Vastaus vuoden 2047 aikana