## 106

a) Funktio $0,5^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on pienempi kuin 1. Siten se on aidosti vähenevä, mikä vastaa kuvaajaa 1.

b) Funktio $1,4^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on suurempi kuin 1. Siten se on aidosti kasvava.

Funktion arvo kohdassa 1 on $1,4^1 = 1,4$, mikä vastaa kuvaajaa 3.

c) Funktio $3,2^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on suurempi kuin 1. Siten se on aidosti kasvava.

Funktion arvo kohdassa 1 on $3,2^1 = 3,2$, mikä vastaa kuvaajaa 2.

Vastaus a) 1 b) 3 c) 2

## 107

a) Koska bakteerien lukumäärä kasvaa joka tunti kolminkertaiseksi, on muutosta kuvaava kerroin 3.

Lukumäärä kasvaa tunnissa 3-kertaiseksi, joten $x$ tunnin kuluessa se kasvaa $3^x$ -kertaiseksi.

Siis funktio $f(x) = 3^x$ ilmaisee, kuinka moninkertainen bakteerien lukumäärä on nykyhetkeen verrattuna $x$ tunnin kuluttua.

b) Lasketaan bakteerien määrä ajanhetkellä $x = 5{,}5$.

$$f(5{,}5) = 3^{5{,}5} = 420{,}8883... \approx 420$$

Vastaus a) $f(x) = 3^x$

b) 420-kertainen

**108**

a) Suodatin vähentää epäpuhtauksista 40 %, joten vähenemistä kuvaava prosenttikerroin on $100\ \% - 40\ \% = 60\ \% = 0,6$.

Yksi suodatin muuttaa epäpuhtauksien määrän 0,6-kertaiseksi, joten $x$ suodatinta muuttaa epäpuhtauksien määrän $0,6^x$ -kertaiseksi.

Siis funktio $f(x) = 0,6^x$ ilmaisee, kuinka suuri osa veden epäpuhtauksista on jäljellä $x$ suodattimen jälkeen.

b) Lasketaan vedessä olevien epäpuhtauksien osuus kolnen suodattimen jälkeen.

$$f(3) = 0,6^3 = 0,216 = 21,6\ \% \approx 22\ \%$$

Vastaus a) $f(x) = 0,6^x$

b) 22%

## 109

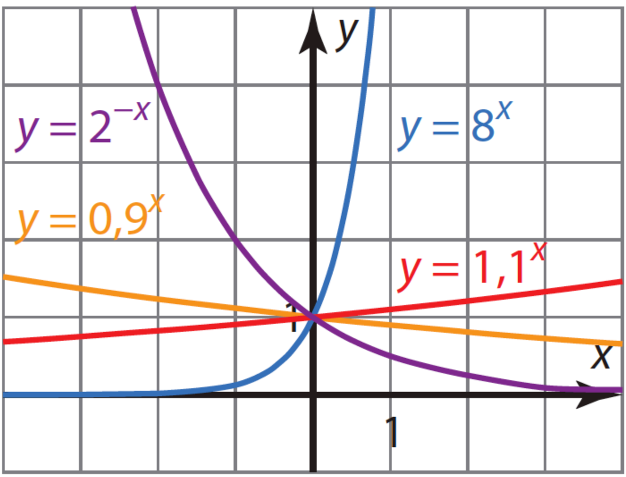
a) Funktio $f(x) = 8^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 8. Koska $8 > 1$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

b) Funktio $f(x) = 1{,}1^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 1,1. Koska $1{,}1 > 1$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

c) Funktio $f(x) = 0{,}9^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,9. Koska $0 < 0{,}9 < 1$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

d) Funktio $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on $\frac{1}{2}$. Koska $0 < \frac{1}{2} < 1$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

Piirretään funktioiden kuvaajat:



Vastaus a) aidosti kasvava
b) aidosti kasvava
c) aidosti vähenevä
d) aidosti vähenevä

**110**

a) Funktio $f(x) = 1,1^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 1,1. Koska 1,1 < 1, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

Näin ollen $f(2,5) < f(2,6)$ eli $1,1^{2,5} < 1,1^{2,6}$.

b) Funktio $f(x) = 0,9^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,9. Koska 0 < 0,9 < 1, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

Näin ollen $f(2,5) > f(2,6)$ eli $0,9^{2,5} > 0,9^{2,6}$.

Vastaus a) $1,1^{2,6}$ b) $0,9^{2,5}$

**111**

a) Funktio $f(x)=1,5^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 1,5. Koska 1,5 > 1, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

Näin ollen se saavuttaa pienimmän arvonsa suljetun välin $[2,4]$ alkupisteessä ja suurimman arvonsa välin loppupisteessä.

Pienin arvo on $f(2)=1,5^2=2,25$.

Suurin arvo on $f(4)=1,5^4=5,0625$.

b) Funktio $f(x)=0,5^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,5. Koska 0 < 0,5 < 1, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

Näin ollen se saavuttaa suurimman arvonsa välin $[2,4]$ alkupisteessä ja pienimmän arvonsa välin loppupisteessä.

Suurin arvo on $f(2)=0,5^2=0,25$.

Pienin arvo on $f(4)=0,5^4=0,0625$.

Vastaus a) suurin arvo $5,0625$, pienin arvo $2,25$
b) suurin arvo $0,25$, pienin arvo $0,0625$

**112**

Funktio $f(x) = a^x$ on

1) aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$,
2) vakiofunktio 1, kun $a = 1$
3) aidosti kasvava, kun $a > 1$.

Koska $f(3) > f(2)$, niin funktio $f(x) = a^x$ on aidosti kasvava.
Täten $a > 1$.

Vastaus $a > 1$

**113**

Eksponenttifunktio $f(x) = (2+k)^x$ on aidosti kasvava, kun kantaluku $2 + k$ on suurempi kuin 1. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} 2-k &> 1 \\ -k &> -1 \quad \big| :(-1) \\ k &< 1 \end{aligned}$$

Vastaus $k < 1$

**114**

Eksponenttifunktio $f(x) = (2k - 4)^x$ on aidosti vähenevä, kun kantaluku $2k - 4$ on lukujen $0$ ja $1$ välissä. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälöt.

$$\begin{aligned} 2k - 4 &> 0 \\ 2k &> 4 \quad \Big| :2 \\ k &> 2 \end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} 2k - 4 &< 1 \\ 2k &< 5 \quad \Big| :2 \\ k &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

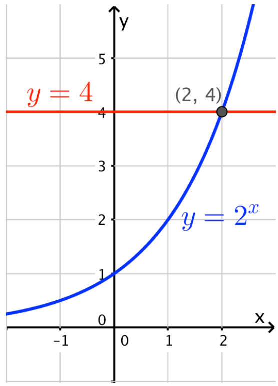
Yhdistämällä ehdot saadaan $2 < k < \dfrac{5}{2}$.

Vastaus $\quad 2 < k < \dfrac{5}{2}$

## 115

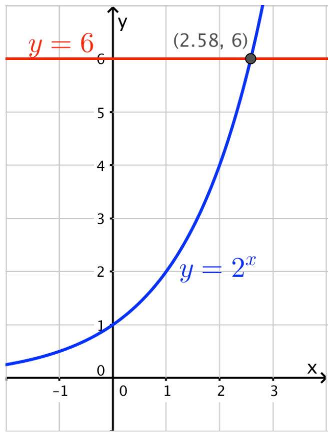
Piirretään jokaiseen kohtaan funktion $f(x) = 2^x$ kuvaaja.

a) Piirretään suora $y = 2$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



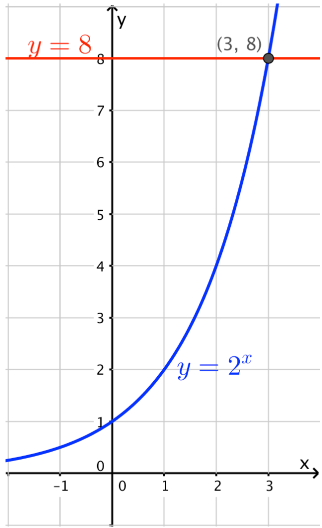

Kuvan perusteella $2^x = 4$, kun $x = 2$.

b) Piirretään suora $y = 6$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



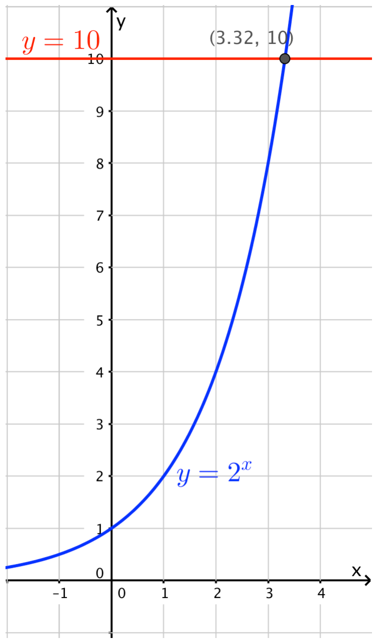

Kuvan perusteella $2^x = 6$, kun $x \approx 2{,}6$.

c) Piirretään suora $y = 8$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.




Kuvan perusteella $2^x = 8$, kun $x = 3$.

d) Piirretään suora $y = 10$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.




Kuvan perusteella $2^x = 10$, kun $x \approx 3{,}32$.

Vastaus a) $x = 2$ b) $x \approx 2{,}56$ c) $x = 3$ d) $x \approx 3{,}32$

## 116

a) Funktio $1,2^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on suurempi kuin $1$. Siten se on aidosti kasvava, mikä vastaa kuvaajaa 3.

b) Funktio $0,8^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on pienempi kuin $1$. Siten se on aidosti vähenevä.

Funktion arvo kohdassa $1$ on $0,8^1 = 0,8$, mikä vastaa kuvaajaa 2.

c) Funktio $0,2^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on pienempi kuin $1$. Siten se on aidosti vähenevä.

Funktion arvo kohdassa $1$ on $0,2^1 = 0,2$, mikä vastaa kuvaajaa 1.

Vastaus a) 3 b) 2 c) 1

**117**

a) Sijoituksen arvo kasvaa 2,8 % vuodessa. Kasvua vastaava prosenttikerroin on $100\% + 2,8\% = 102,8\% = 1,028$.

Sijoituksen arvo kasvaa joka vuosi 1,028-kertaiseksi, joten $x$ vuodessa sijoituksen arvo on $1,028^x$ -kertainen.

Siis funktio $f(x) = 1,028^x$ ilmaisee, kuinka moninkertainen sijoituksen arvo on nykyhetkeen verrattuna $x$ vuoden kuluttua.

b) Lasketaan kuinka moninkertainen sijoituksen arvo on ajanhetkellä $x = 10$.

$$f(10) = 1,028^{10} = 1,3180... \approx 1,3$$

Sijoitus on siis 10 vuoden päästä noin 1,3-kertainen.

c) Lasketaan kuinka moninkertainen sijoituksen arvo on ajanhetkellä $x = -2$.

$$f(-2) = 1,028^{-2} = 0,9462... \approx 0,95$$

Sijoituksen arvo kaksi vuotta sitten oli noin 0,95-kertainen nykyarvoon verrattuna eli noin 95% sijoituksen nykyarvosta.

Vastaus a) $f(x) = 1,028^x$
b) 1,3-kertainen
c) 95%

**118**

a) Isotoopin määrä vähenee 8,2% vuorokaudessa, joten muutosta kuvaava prosenttikerroin on $100\% - 8,2\% = 91,8\% = 0,918$.

Isotoopin määrä pienenee 0,918-kertaiseksi joka vuorokausi, joten $x$ vuorokaudessa määrä pienenee $0,918^x$-kertaiseksi.

Siis funktio $f(x) = 0,918^x$ ilmaisee, kuinka moninkertainen isotoopin määrä on nykyhetkeen verrattuna $x$ vuorokauden kuluttua.

b) Kolmessa viikossa on $3 \cdot 7 = 21$ vuorokautta, joten lasketaan kuinka moninkertainen isotoopin määrä on ajanhetkellä $x = 21$.

$f(21) = 0,918^{21} = 0,16584... \approx 0,17$

Isotoopin määrä on 0,17-kertainen eli alkuperäisestä määrästä on jäljellä 17 %.

c) Lasketaan kuinka moninkertainen isotoopin määrä oli vuorokausi nykyhetkeä aiemmin eli ajanhetkellä $x = -1$.

$f(-1) = 0,918^{-1} = 1,08932... \approx 1,089$

Isotoopin määrä oli 1,089-kertainen eli määrä oli 8,9 % nykyistä määrää suurempi.

Vastaus a) $f(x) = 0,918^x$ b) 17% c) 8,9%

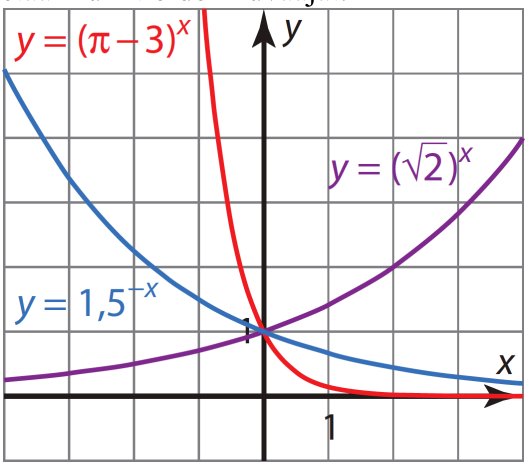
**119**

a) Funktio $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on $\sqrt{2}\approx 1,41$. Koska $\sqrt{2}>1$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

b) Funktio $f(x)=1,5^{-x}=\dfrac{1}{1,5^x}=\left(\dfrac{1}{1,5}\right)^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on $\dfrac{1}{1,5}\approx 0,67$. Koska $0<\dfrac{1}{1,5}<1$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

c) Funktio $f(x)=(\pi-3)^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on $\pi-3\approx 0,14$. Koska $0<\pi-3<1$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

Piirretään funktioiden kuvaajat.




Vastaus a) aidosti kasvava
b) aidosti vähenevä
c) aidosti vähenevä

**120**

Funktio $f(x)=0,4^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,4. Koska $0 < 0,4 < 1$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä.

Näin ollen se saavuttaa suurimman arvonsa suljetun välin $[-2,4]$ alkupisteessä ja pienimmän arvonsa välin loppupisteessä.

Suurin arvo on $f(2)=0,4^2=6,25$.

Pienin arvo on $f(4)=0,4^4=0,0256$

Koska funktio $f$ on kaikkialla jatkuva, niin se saavuttaa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

Funktion $f$ arvojoukko on [0,0256; 6,25].

Vastaus [0,0256; 6,25].

**121**

Funktio $f(x) = a^x$ on

1) aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$,
2) vakiofunktio 1, kun $a = 1$
3) aidosti kasvava, kun $a > 1$.

Koska $f(2{,}3) > f(3{,}2)$, niin funktio $f(x) = a^x$ on aidosti vähenevä.
Täten $0 < a < 1$.

Vastaus $0 < a < 1$

**122**

a) Eksponenttifunktio $f(x)=(k^2-2)^x$ on aidosti kasvava, kun kantaluku $k^2-2$ on suurempi kuin 1. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$k^2-2>1$ Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$k<-\sqrt{3}$ tai $k>\sqrt{3}$

b) Eksponenttifunktio $f(x)=(k^2-2)^x$ on aidosti vähenevä, kun kantaluku $k^2-2$ on lukujen 0 ja 1 välissä. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälöt.

$k^2-2>0$ ja $k^2-2<1$

$k<-\sqrt{2}$ tai $k>\sqrt{2}$ $\quad -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

Molemmat ehdot ovat voimassa, kun
$-\sqrt{3}<k<-\sqrt{2}$ tai $\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$ .

Vastaus a) $k>\sqrt{3}$ tai $k<-\sqrt{3}$
b) $-\sqrt{3}<k<-\sqrt{2}$ tai $\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$

**123**

Eksponenttifunktio $f(x) = (1-k^2)^x$ on aidosti vähenevä, kun kantaluku $1-k^2$ on lukujen $0$ ja $1$ välissä. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälöt.

$1-k^2 > 0$ ja $1-k^2 < 1$ Ratkaistaan laskimella.

$-1 < k < 1$ $k \neq 0$

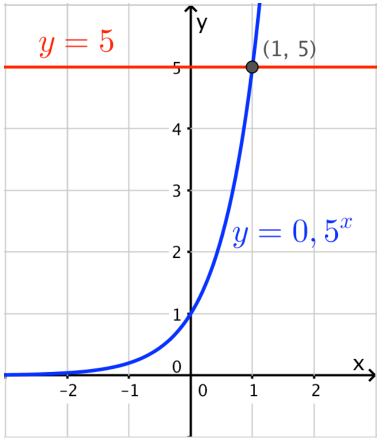
Molemmat ehdot ovat voimassa, kun $-1 < k < 0$ tai $0 < k < 1$.

Vastaus $-1 < k < 0$ tai $0 < k < 1$

## 124

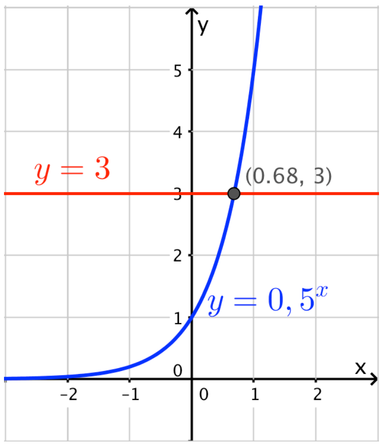
Piirretään jokaiseen kohtaan funktion $f(x) = 5^x$ kuvaaja.

a) Piirretään suora $y = 5$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.




Kuvan perusteella $5^x = 5$, kun $x = 1$.

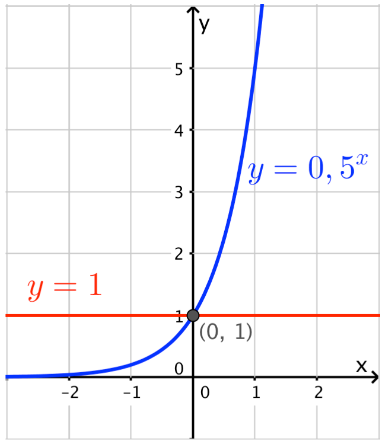
b) Piirretään suora $y = 3$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.




Kuvan perusteella $5^x = 3$, kun $x \approx 0{,}7$.

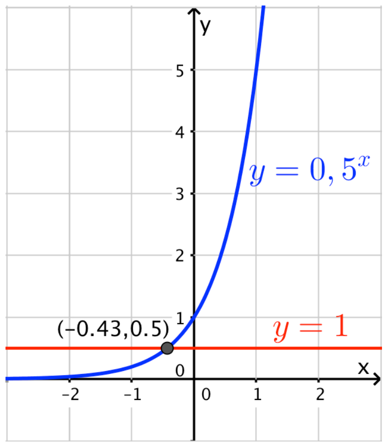
c) Piirretään suora $y = 1$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.

Kuvan perusteella $5^x = 1$, kun $x = 0$.




d) Piirretään suora $y = 0{,}5$, ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.

Kuvan perusteella $5^x = 0{,}5$, kun $x \approx -0{,}4$.




Vastaus a) $x = 1$ b) $x \approx 0{,}7$
c) $x = 0$ d) $x \approx -0{,}4$

## 125

a) Prosenttikerroin on $100\% + 23\% = 123\% = 1,23$.

Lukujonon toinen jäsen on

$$a_2 = 1,23 \cdot a_1 = 1,23 \cdot 1 = 1,23.$$

Lukujonon kolmas jäsen on

$$a_3 = 1,23 \cdot a_2 = 1,23 \cdot 1,23 = 1,5129.$$

b) Seuraava jäsen saadaan edellisestä aina kertomalla luvulla 1,23. Kyseessä on siis geometrinen jono, jossa $a_1 = 1$ ja $q = 1,23$. Muodostetaan yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 1,23^{n-1} = 1,23^{n-1}$$

Vastaus a) $a_2 = 1,23$, $a_3 = 1,5129$

b) $a_n = 1,23^{n-1}$

## 126

a) Myynnin arvo kasvaa 15% vuodessa, joten prosenttikerroin on $100\% + 15\% = 115\% = 1{,}15$.

Myynnin arvo kasvaa 1,15-kertaiseksi joka vuosi, joten $x$ vuodessa myynnin arvo kasvaa $1{,}15^x$ -kertaiseksi.

Koska myynnin arvo tällä hetkellä on $2{,}5$ miljoonaa euroa, niin myynnin arvon miljoonina euroina $x$ vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}15^x.$$

b) Lasketaan myynnin arvo neljän vuoden kuluttua eli ajanhetkellä $x = 4$.

$$f(4) = 2{,}5 \cdot 1{,}15^4 = 4{,}372... \approx 4{,}4 \text{ (milj. euroa)}$$

c) Lasketaan myynnin arvo neljä vuotta sitten eli ajanhetkellä $x = –4$.

$$f(–4) = 2{,}5 \cdot 1{,}15^{–4} = 1{,}4293... \approx 1{,}4 \text{ (milj. euroa)}$$

Vastaus a) $f(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}15^x$
b) noin 4,4 miljoonaa euroa
c) noin 1,4 miljoonaa euroa

**127**

a) Verrataan uutta funktion arvoa alkuperäiseen funktion arvoon.

$$\frac{f(1,1)}{f(1,0)}=\frac{3^{1,1}}{3^{1,0}}=1,11612...\approx 1,116=111,6\%$$

Funktion arvo kasvaa $111,6\%-100\%=11,6\%$.

b) Verrataan uutta funktion arvoa alkuperäiseen funktion arvoon.

$$\frac{f(10,1)}{f(10,0)}=\frac{3^{10,1}}{3^{10,0}}=1,11612...\approx 1,116=111,6\%$$

Funktion arvo kasvaa $111,6\%-100\%=11,6\%$.

c) Verrataan uutta funktion arvoa alkuperäiseen funktion arvoon.

$$\frac{f(100,1)}{f(100,0)}=\frac{3^{100,1}}{3^{100,0}}=1,11612...\approx 1,116=111,6\%$$

Funktion arvo kasvaa $111,6\%-100\%=11,6\%$.

d) Verrataan uutta funktion arvoa alkuperäiseen funktion arvoon.

$$\frac{f(x+0,1)}{f(x)}=\frac{3^{x+0,1}}{3^{x}}=3^{x+0,1-x}=3^{0,1}=1,11612...\approx 1,116=111,6\%$$

Funktion arvo kasvaa $111,6\%-100\%=11,6\%$.

Vastaus a) 11,6% b) 11,6% c) 11,6% d) 11,6%

**128**

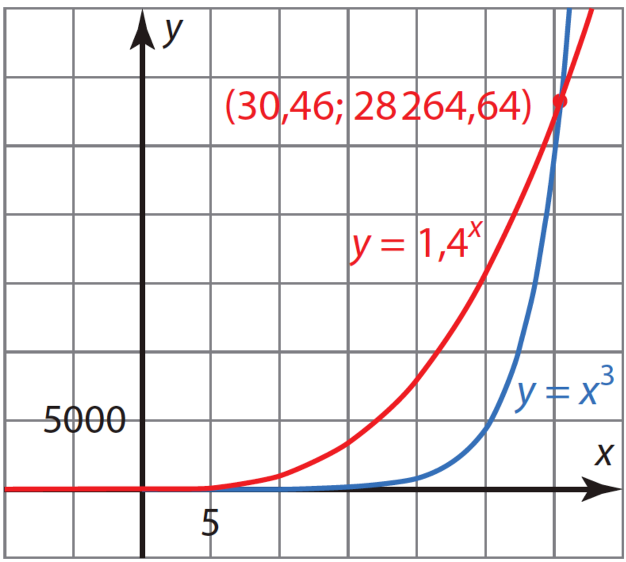
Täydennetään taulukko.

| $x$ | $1{,}4^x$ | $x^3$ |
|---|---|---|
| 2 | 2,0 | 8 |
| 4 | 3,8 | 64 |
| 6 | 7,5 | 216 |
| 8 | 14,8 | 512 |

a) Funktio $x^3$ näyttää kasvavan nopeammin.

b) Funktioiden kuvaajat leikkaavat, kun $x \approx 30{,}46$

.




c) Kyllä saa. Kuvaajan perusteella ensimmäinen kokonaislukuarvo $x \geq 2$, jolla $1{,}4^x > x^3$, on $x = 31$.

**129**

Oletetaan, että $y > x$ $(> 0)$.

Funktio $f$ on aidosti kasvava, jos $f(y) > f(x)$. Muokataan epäyhtälöä.

$$f(y) > f(x) \qquad \Big|: f(x) \ (> 0)$$

$$\frac{f(y)}{f(x)} > 1$$

Riittää siis osoittaa, että $\dfrac{f(y)}{f(x)} > 1$. Arvioidaan epäyhtälön vasenta puolta.

$$\frac{f(y)}{f(x)} = \frac{a^y}{a^x} = a^{y-x}$$

Koska $y - x > 0$ ja $a > 1$, niin $a^{y-x} > 1$.

On osoitettu, että $\dfrac{f(y)}{f(x)} > 1$, kun $y > x$.

Funktio $f(x) = a^x$ on täten aidosti kasvava, kun $a > 1$ ja $x > 0$. □

**130**

a) Luvun $16$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 16$.

Koska $16 = 2^4$, niin $\log_2 16 = 4$.

b) Luvun $8$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 8$.

Koska $8 = 2^3$, niin $\log_2 8 = 3$.

c) Luvun $4$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 4$.

Koska $4 = 2^2$, niin $\log_2 4 = 2$.

d) Luvun $2$ kaksikantainen logaritmi merkitään $\log_2 2$.

Koska $2 = 2^1$, niin $\log_2 2 = 1$.

Vastaus a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_2 8 = 3$
c) $\log_2 4 = 2$ d) $\log_2 2 = 1$

**131**

a) Koska $16 = 4^2$, niin $\log_4 16 = 2$.

b) Koska $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$, niin $\log_4 \frac{1}{16} = -2$.

c) Koska $4 = 4^1$ , niin $\log_4 4 = 1$.

c) Koska $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$, niin $\log_4 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$.

Vastaus a) $\log_4 16 = 2$

b) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

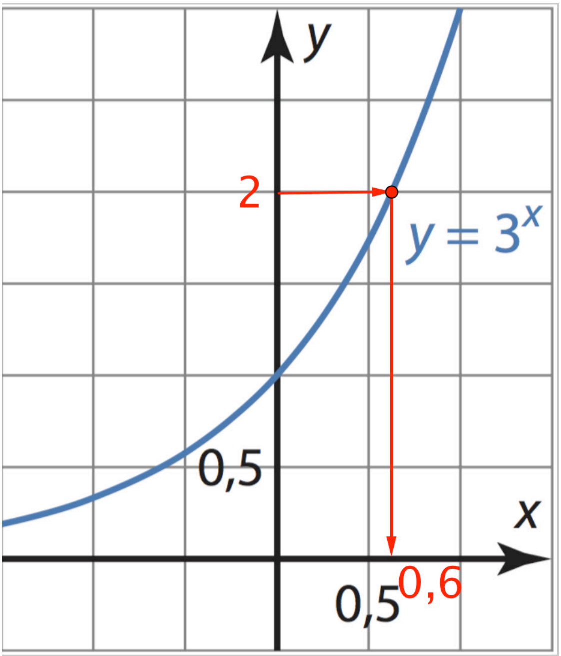
c) $\log_4 4 = 1$

d) $\log_4 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$

**132**

Jos $y = 3^x$, niin logaritmin määritelmän mukaan $x = \log_3 y$. Siten funktion $3^x$ kuvaajan pisteille $(x, y)$ pätee, että $x = \log_3 y$.

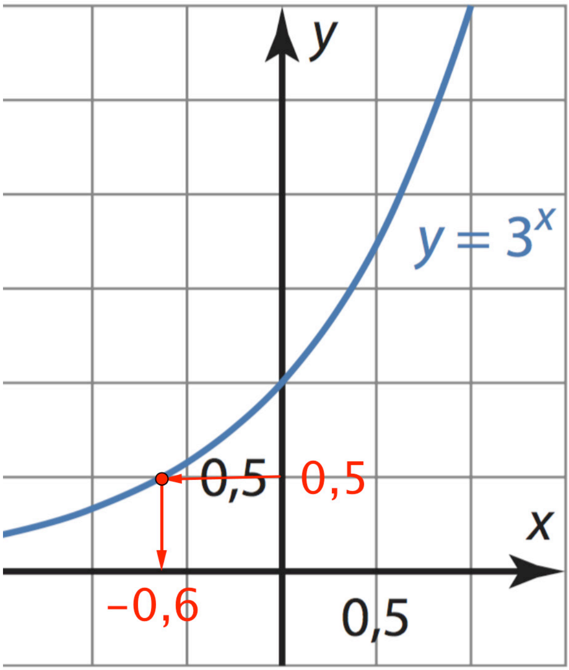
a) Kun kuvaajasta määritetään $\log_3 2$, niin etsitään se kuvaajan piste, jonka $y$-koordinaatti on 2. Etsitty logaritmin arvo on pisteen $x$-koordinaatti




Logaritmin arvo voidaan tarkistaa laskimella.

$\log_3 2 = 0,63092... \approx 0,6$

b) Kun kuvaajasta määritetään $\log_3 0,5$, niin etsitään se kuvaajan piste, jonka $y$-koordinaatti on 0,5. Etsitty logaritmin arvo on pisteen $x$-koordinaatti




Logaritmin arvo voidaan tarkistaa laskimella.

$$\log_3 2 = -0,63092... \approx -0,6$$

Vastaus a) $\log_3 2 \approx 0,6$ b) $\log_3 0,5 \approx -0,6$

**133**

a) $4^x = 20$

$x = \log_4 20$

$= 2{,}1609... \approx 2{,}16$

b) $5^x = 2$

$x = \log_5 2$

$= 0{,}4306... \approx 0{,}43$

c) $6^x = 30$

$x = \log_6 30$

$= 1{,}8982... \approx 1{,}90$

Vastaus a) $x = \log_4 20 \approx 2{,}16$

b) $x = \log_5 2 \approx 0{,}43$

c) $x = \log_6 30 \approx 1{,}90$

**134**

Hannu teki virheen. Eksponentti $2x$ on luvun $8$ viisikantainen logaritmi.

Kirjoitetaan korjattu ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
5^{2x} &= 8 \\
2x &= \log_5 8 \qquad \big|:2 \\
x &= \frac{\log_5 8}{2} \\
&= 0,64601\ldots \approx 0,65
\end{aligned}
$$

**135**

Muutetaan luvun $9^{2019}$ kantaluvuksi $10$ ja sievennetään luku kymmenpotenssimuotoon.

$$\begin{aligned} 9^{2019} &= (10^{\log_{10} 9})^{2019} \\ &= 10^{2019 \cdot \log_{10} 9} \\ &= 10^{1926,61562\ldots} \\ &= 10^{1926+0,61562\ldots} \\ &= 10^{1926} \cdot 10^{0,61562\ldots} \\ &= 4,1269\ldots \cdot 10^{1926} \end{aligned}$$

Luku $9^{2019} = 4,1269\ldots \cdot 10^{1926}$ on kokonaisluku, jossa on numeron 4 jälkeen vielä $1926$ numeroa. Luvussa on siis $1927$ numeroa.

Luvun kolme ensimmäistä numeroa ovat $4$, $1$ ja $2$.

Vastaus $1927$ numeroa, kolme ensimmäistä $4$, $1$ ja $2$

**136**

a) Koska $10\,000 = 10^4$, niin $\log_{10} 10000 = 4$.

b) Koska $1 = 10^0$, niin $\log_{10} 1 = 0$.

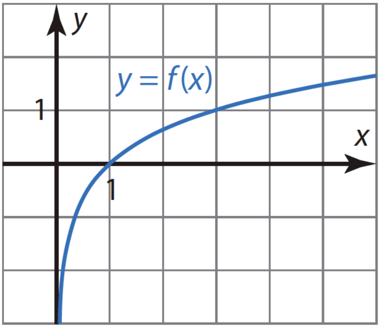
c) $10^{\log_{10} 37} = 37$ $\qquad a^{\log_a y} = y$

d) $10^{\log_{10} 10^3} = 10^3 = 1000$

Vastaus a) 4 b) 0 c) 37 d) 1000

**137**

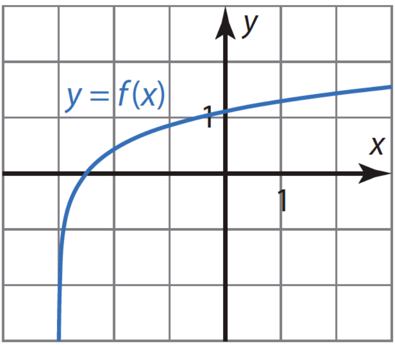
a) Funktio $f(x) = \log_3 x$ on määritelty, kun $x > 0$.




b) Funktio $f(x) = \log_5(2x + 6)$ on määriteltu, kun $2x - 6$ on positiivinen.

$$
\begin{aligned}
2x + 6 &> 0 \\
2x &> -6 \quad \big| :2 \\
x &> -3
\end{aligned}
$$

Funktio $f$ on siis määritelty, kun $x > -3$.




Vastaus a) $x > 0$ b) $x > -3$

## 138

a) Logaritmifunktion $\log_{0,5} x$ kantaluku on 0,5.

Koska $0 < 0,5 < 1$, niin funktio on aidosti vähenevä.

b) Logaritmifunktion $\lg x = \log_{10} x$ kantaluku on 10.

Koska 10 > 1, niin funktio on aidosti kasvava.

Vastaus a) aidosti vähenevä b) aidosti kasvava

**139**

a) Sijoitetaan intensiteettiarvot $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ ja $I = 0{,}1\ \text{W/m}^2$ intensiteettitason lausekkeeseen.

$$L = 10\lg\left(\frac{0{,}1}{10^{-12}}\right) = 110\ \text{(dB)}$$

Äänen intensiteettitaso on $110$ desibeliä.

b) Lasketaan intensiteettiä $I = 2 \cdot 0{,}1\ \text{W/m}^2 = 0{,}2\ \text{W/m}^2$ vastaava intensiteettitaso.

$$L = 10\lg\left(\frac{0{,}2}{10^{-12}}\right) = 113{,}0103 \approx 113\ \text{(dB)}$$

Intensiteettitaso nousee $113\ \text{dB} - 110\ \text{dB} = 3\ \text{dB}$.

Vastaus a) 110 dB b) 3 dB

**140**

a) Koska $36 = 6^2$, niin $\log_6 36 = 2$.

b) Koska $6 = 6^1$, niin $\log_6 6 = 1$.

c) Koska $\frac{1}{6} = 6^{-1}$, niin $\log_6 \frac{1}{6} = -1$.

d) Koska $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$, niin $\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$.

Vastaus a) $\log_6 36 = 2$

b) $\log_6 6 = 1$

c) $\log_6 \frac{1}{6} = -1$

d) $\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$

**141**

a) Koska $32 = 2^5$, niin $\text{lb}\,32 = \log_2 32 = 5$.

b) Koska $1 = 2^0$, niin $\text{lb}\,1 = \log_2 1 = 0$.

c) Koska $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, niin $\text{lb}\,\frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{8} = -3$.

d) Logaritmi on määritelty vain positiivisille luvuille, joten $\text{lb}\,0 = \log_2 0$ ei ole määritelty.

| | | |
|---|---|---|
| Vastaus | a) 5 | b) 0 |
| | c) –3 | d) ei määritelty |

**142**

a) $12^x = 10$

$$x = \log_{12} 10$$
$$= 0{,}92662... \approx 0{,}93$$

b) $10^{4x} = 25$

$$4x = \log_{10} 25 \qquad \Big| : 4$$
$$x = \frac{\lg 25}{4}$$
$$= 0{,}34948... \approx 0{,}35$$

c) $2^{x+1} = 5$

$$x + 1 = \log_2 5$$
$$x = \log_2 5 - 1$$
$$= 1{,}32192... \approx 1{,}32$$

Vastaus a) $x = \log_{12} 10 \approx 0{,}93$

b) $x = \dfrac{\lg 25}{4} \approx 0{,}35$

c) $x = \log_2 5 - 1 \approx 1{,}32$

**143**

a) $7^{2x} = 10$

$$2x = \log_7 10 \qquad \Big| :2$$

$$x = \frac{\log_7 10}{2}$$

$$= 0,59164... \approx 0,59$$

b) $2 \cdot 7^x = 10 \qquad \Big| :2$

$$7^x = 5$$

$$x = \log_7 5$$

$$= 0,82708... \approx 0,83$$

Vastaus a) $x = \dfrac{\log_7 10}{2} \approx 0,59$

b) $x = \log_7 5 \approx 0,83$

**144**

a) Logaritmin määritelmän mukaan
$\log_4 x = 2$ täsmälleen silloin, kun $4^2 = x$.

Siis $x = 4^2 = 16$.

b) Logaritmin määritelmän mukaan
$\log_5 x = -4$ täsmälleen silloin, kun $5^{-4} = x$.

Siis $x = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$.

Vastaus a) $x = 16$ b) $x = \dfrac{1}{625}$

**145**

a) Logaritmin määritelmän mukaan
$\log_a 27 = 3$ täsmälleen silloin, kun $a^3 = 27$.

Ratkaistaan yhtälöstä $a$.

$$a^3 = 27$$
$$a = \sqrt[3]{27} = 3$$

Logaritmin kantaluku on $a = 3$.

b) Logaritmin määritelmän mukaan
$\log_a 16 = 2$ täsmälleen silloin, kun $a^2 = 16$.

Ratkaistaan yhtälöstä $a$.

$$a^2 = 16$$
$$a = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{16} = -4$$

Koska logaritmin kantaluku on positiivinen, niin $a = 4$.

Vastaus a) $a = 3$ b) $a = 4$

## 146

a) Koska $25 = 5^2$, niin $\log_5 25 = 2$.

b) Koska $5 = \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$, niin $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$.

c) $5^{\log_5 1} = 1$ $\qquad a^{\log_a y} = y$

d) $5^{\log_5 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

Vastaus a) 2 $\qquad$ b) $\frac{1}{2}$ $\qquad$ c) 1 $\qquad$ d) $\frac{1}{5}$

**147**

Muutetaan luvun $2017^{2019}$ kantaluvuksi 10 ja sievennetään luku kymmenpotenssimuotoon.

$$\begin{aligned}2017^{2019} &= (10^{\log_{10} 2017})^{2019} \\ &= 10^{2019 \cdot \log_{10} 2017} \\ &= 10^{6672,20120\ldots} \\ &= 10^{6672+0,20120\ldots} \\ &= 10^{0,2012\ldots} \cdot 10^{6672} \\ &= 1,5893\ldots \cdot 10^{6672}\end{aligned}$$

Luku $2017^{2019} = 1,5893... \cdot 10^{6672}$ on kokonaisluku, jossa numeron 1 jälkeen on vielä 6672 numeroa. Luvussa on siis 6673 numeroa.

Luvun neljä ensimmäistä numeroa ovat 1, 5, 8 ja 9.

Vastaus 6673 numeroa, ensimmäiset neljä 1, 5, 8 ja 9

**148**

Muutetaan luvun $2^{74\,207\,281}$ kantaluvuksi 10 ja sievennetään luku kymmenpotenssimuotoon.

$$\begin{aligned}
2^{74\,207\,281} &= (10^{\log_{10} 2})^{74\,207\,281} \\
&= 10^{74\,207\,281 \cdot \log_{10} 2} \\
&= 10^{22\,338\,617{,}4\ldots} \\
&= 10^{22\,338\,617+0{,}4\ldots} \\
&= 10^{0{,}4\ldots} \cdot 10^{22\,338\,617} \\
&\approx 3 \cdot 10^{22\,338\,617}
\end{aligned}$$

Luku $2^{74\,207\,281}$ on kokonaisluku, jossa on
1 + 22 338 617 = 22 338 618 numeroa.

Myös luku $2^{74\,207\,281} - 1$ on kokonaisluku, jossa on 22 338 618 numeroa.

Vastaus 22 338 618 numeroa

**149**

a) Logaritmifunktion $\log_2 x$ kantaluku on 2.
Koska 2 > 1, niin funktio $\log_2 x$ on aidosti kasvava.

Täten koska $4,2 < 4,3$, niin $\log_2 4,2 < \log_2 4,3$.

b) Logaritmifunktion $\log_{0,5} x$ kantaluku on 0,5.
Koska 0 < 0,5 < 1, niin funktio $\log_{0,5} x$ on aidosti vähenevä.

Täten koska $4,2 < 4,3$, niin $\log_{0,5} 4,2 > \log_{0,5} 4,3$.

Vastaus a) $\log_2 4,3$ b) $\log_{0,5} 4,2$

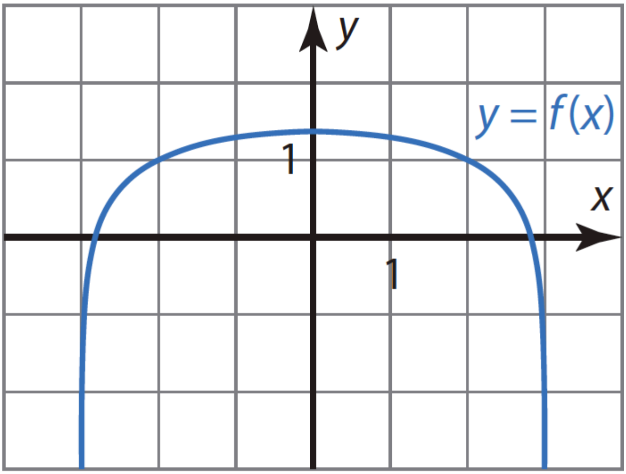
**150**

a) Funktio $f(x) = \log_5(9 - x^2)$ on määritelty, kun $9 - x^2$ on positiivinen.

$9 - x^2 > 0$ Ratkaistaan laskimella.

$-3 < x < 3$

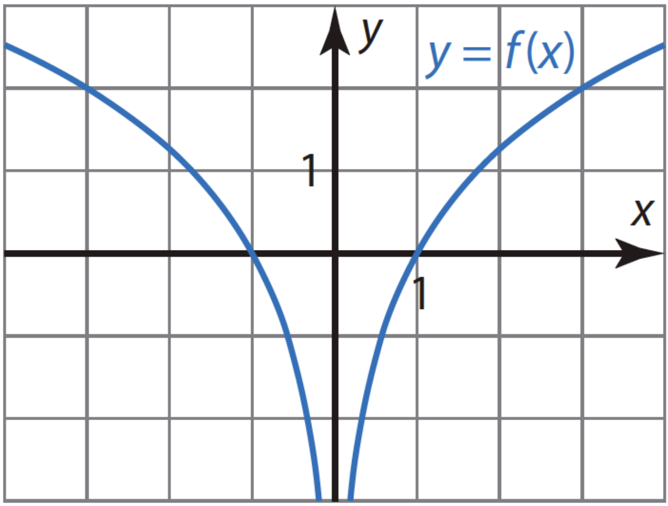
Funktio $f$ on siis määritelty, kun $-3 < x < 3$.



b) Funktio $f(x) = \log_3 x^2$ on määritelty, kun $x^2$ on positiivinen.

$x^2 \geq 0$ kaikilla $x$ ja $x^2 = 0$ vain, kun $x = 0$.
Siis $x^2 > 0$, kun $x \neq 0$.

Funktio $f$ on siis määritelty, kun $x \neq 0$.




Vastaus a) $-3 < x < 3$ b) $x \neq 0$

**151**

$f(x) = 2^x$ ja $g(x) = \log_2 x$

a) Määritetään yhdistetyn funktion $f \circ g$ lauseke.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(\log_2 x) \\
&= 2^{\log_2 x} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Siis $(f \circ g)(x) = x$

Määritetään yhdistetyn funktion $g \circ f$ lauseke.

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(2^x) \\
&= \log_2 2^x \\
&= x
\end{aligned}
$$

Siis $(f \circ g)(x) = x$.

b) Määritetään funktioiden määrittelyehdot.

Funktion $f \circ g$ sisäfunktio $g$ on määritelty, kun $x > 0$. Ulkofunktio $f$ on määritelty kaikilla $x$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ määrittelyehto on siis $x > 0$.

Funktion $g \circ f$ sisäfunktio $f$ on määritelty kaikilla $x$. Ulkofunktio $g$ on määritelty, kun $x > 0$. Koska sisäfunktion $f$ arvo on aina positiivinen, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on määritelty kaikilla $x$.

Funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$ eivät siis ole sama funktio, koska niiden määrittelyjoukot eivät ole samat.

Vastaus a) $(f \circ g)(x) = x$ ja $(g \circ f)(x) = x$

b) Eivät ole, koska määrittelyjoukot eivät ole samat.

**152**

Oletetaan vastoin väitettä, että $\log_2 3$ on rationaaliluku.

Tällöin luku $\log_2 3$ voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, jossa luvut $m$ ja $n$ ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Lisäksi tiedetään, että murtoluku $\frac{m}{n}$ ei enää supistu.

Koska $\log_2 3 > 0$, voidaan vielä olettaa, että $m > 0$ ja $n > 0$.

Muokataan yhtälöä.

$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \quad \Big| \text{Logaritmin määritelmä.}$$

$$3 = 2^{\frac{m}{n}} \quad \Big| \, (\,)^n$$

$$3^n = (2^{\frac{m}{n}})^n$$

$$3^n = 2^{\frac{m}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}}$$

$$3^n = 2^m$$

Luku $2^m$ on parillinen aina, kun eksponentti $m$ on positiivinen kokonaisluku.

Toisaalta $3^n$ on pariton aina, kun eksponentti $n$ on positiivinen kokonaisluku.

On päädytty ristiriitaan, koska saadulla yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

Siis $\log_2 3$ on irrationaaliluku. $\square$