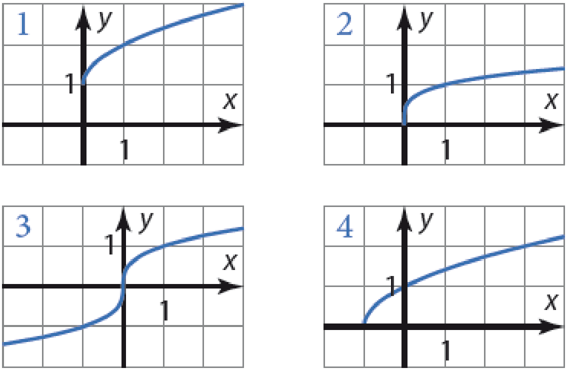
23

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad g(x)=\sqrt[4]{x}$

$h(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad i(x)=\sqrt{x}+1$



Ratkaistaan funktioiden määrittelyjoukot ja tarvittaessa arvot kohdassa $x=0$. Nämä tiedot riittävät erottamaan kuvaajat toisistaan.

Funktion $f(x)=\sqrt[3]{x}$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

Tämä vastaa kuvaajaa 3.

Funktion $g(x)=\sqrt[4]{x}$ määrittelyehto on $x\geq 0$.
Funktion arvo kohdassa 0 on $g(0)=\sqrt[4]{0}=0$.

Tämä vastaa kuvaajaa 2.

Funktion $h(x)=\sqrt{x+1}$ määrittelyehto on

$$\begin{aligned} x+1 &\ge 0 \\ x &\ge -1\,. \end{aligned}$$

Tämä vastaa kuvaajaa 4.

Funktion $i(x)=\sqrt{x}+1$ määrittelyehto on $x \ge 0$.
Funktion arvo kohdassa 0 on $i(0)=\sqrt{0}+1=0+1=1$.

Tämä vastaa kuvaajaa 1.

Vastaus

f kuvaaja 3
g kuvaaja 2
h kuvaaja 4
i kuvaaja 1

24

a) $x^5 = 8$

$x = \sqrt[5]{8}$

b) $x^5 = -8$

$x = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$

c) $x^4 = 8$

$x = \sqrt[4]{8}$ tai $x = -\sqrt[4]{8}$

d) $\underbrace{x^4}_{\geq 0} = \underbrace{-8}_{<0}$

Yhtälö on aina epätosi, joten sillä ei ole ratkaisua.

Vastaus

a) $x = \sqrt[5]{8}$
b) $x = -\sqrt[5]{8}$
c) $x = \sqrt[4]{8}$ tai $x = -\sqrt[4]{8}$
d) ei ratkaisua

25

a) Pariton juurifunktio on määritelty juurrettavan kaikilla reaalilukuarvoilla, joten funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

Funktion f arvo kohdassa 0 on $f(0)=\sqrt[5]{1-0^2}=\sqrt[5]{1}=1$.

b) Pariton juurifunktio on määritelty juurrettavan kaikilla reaalilukuarvoilla, mutta juurrettava ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa. Määritetään nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2-1&=0 \\ x^2&=1 \\ x=1 \quad &\text{tai} \quad x=-1 \end{aligned}$$

Funktion g määrittelyjoukko on $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$.

Lasketaan funktion g arvo kohdassa 0.

$$g(0)=\sqrt[9]{\frac{0^2}{0^2-1}}=\sqrt[9]{\frac{0}{-1}}=\sqrt[9]{0}=0$$

Vastaus

a) määrittelyjoukko $\mathbf{R}$, $f(0)=1$

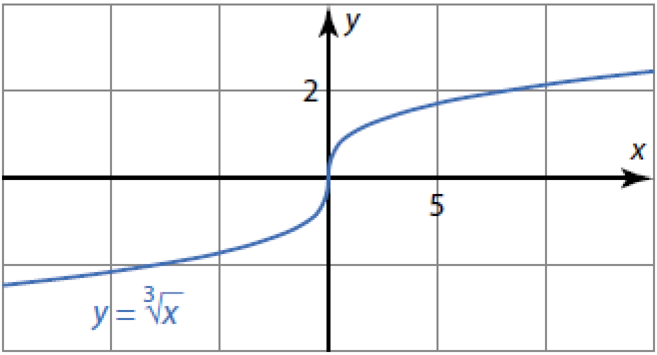
b) määrittelyjoukko $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, $g(0)=0$

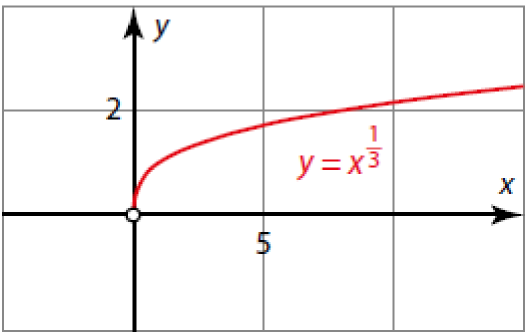
26

Funktio $\sqrt[3]{x}$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Funktio $x^{\frac{1}{3}}$ on määritelty, kun $x > 0$. Lisäksi $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, kun $x > 0$, joten funktioiden kuvaajat yhtyvät, kun $x > 0$.

Funktiolla $x^{\frac{1}{3}}$ ei ole kuvaajaa, kun $x \leq 0$. Siten funktion $x^{\frac{1}{3}}$ kuvaaja on funktion $\sqrt[3]{x}$ kuvaaja rajattuna positiivisille muuttujan arvoille.





Vastaus Funktiolla $x^{\frac{1}{3}}$ ei ole kuvaajaa, kun $x \leq 0$.

27

a) Neliöjuurifunktio on parillisena juurifunktiona määritelty vain juurrettavan epänegatiivisille reaalilukuarvoille, joten funktio $f(x)=\sqrt{4-2x}$ on määritelty, kun

$$
\begin{aligned}
4-2x &\geq 0 \\
-2x &\geq -4 \quad \big| :(-2) \\
x &\leq 2
\end{aligned}
$$

Funktion f määrittelyjoukko on väli $]-\infty, 2]$.

Funktion f arvo kohdassa -6 on

$$f(-6)=\sqrt{4-2\cdot(-6)}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

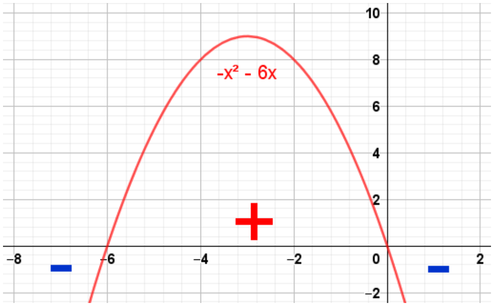
b) Parillinen juurifunktio on määritelty vain juurrettavan epänegatiivisille reaalilukuarvoille, joten funktio
$g(x)=\sqrt[6]{-x^2-6x}$ on määritelty, kun $-x^2-6x \geq 0$.

Selvitetään funktion $-x^2-6x$ nollakohdat, ja hahmotellaan kuvaaja.

$-x^2-6x=0$

$-x(x+6)=0$

$x=0$ tai $x=-6$



Funktion $-x^2-6x$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio on positiivinen nollakohtien välissä.

Siten epäyhtälö $-x^2-6x \geq 0$ toteutuu, kun $-6 \leq x \leq 0$.

Funktion g määrittelyjoukko on väli $[-6,0]$.

Funktion g arvo kohdassa -6 on $g(-6)=\sqrt[6]{0}=0$.

Vastaus

a) määrittelyjoukko $]-\infty,2]$, $f(-6)=4$

b) määrittelyjoukko $[-6,0]$, $g(-6)=0$

28

a) Osamäärät eivät ole määriteltyjä nimittäjän nollakohdissa, joten saadaan ehdot $x \neq 0$ ja $\sqrt{x+1} \neq 0$ eli $x \neq -1$.
Toisaalta neliöjuurifunktio on määritelty vain juurrettavan epänegatiivisilla reaalilukuarvoilla:

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -1. \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä ehdot saadaan, että funktio f on määritelty, kun $x > -1$ ja $x \neq 0$.

b) Pariton juurifunktio on määritelty kaikilla juurrettavan reaalilukuarvoilla, mutta neliöjuurifunktio vain juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla. Funktio g on siten määritelty, kun

$$\begin{aligned} 3-x &\geq 0 \\ -x &\geq -3 \qquad \big| :(-1) \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Vastaus

a) määrittelyehto $x > -1$ ja $x \neq 0$
b) määrittelyehto $x \leq 3$

29

a) Koska kaikki juurrettavat ovat positiivisia, niin funktion f lauseke voidaan esittää murtopotenssien avulla.

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^8}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{6}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{x^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}}}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{x^{\frac{13}{12}}}{x^{\frac{4}{3}}}=x^{\frac{13}{12}-\frac{4}{3}}=x^{\frac{13}{12}-\frac{16}{12}}=x^{-\frac{3}{12}}=x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

b) Lasketaan funktion f arvot kohdissa 1 ja 16.

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt[4]{1}}=\frac{1}{1}=1$$

$$f(16)=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}$$

Näin ollen $f(1)>f(16)$.

Vastaus

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, kun $x>0$ b) $f(1)>f(16)$

Huomaa! b-kohdan suuruusjärjestyksen voi päätellä myös tiedosta, että $f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$ on aidosti vähenevä, koska eksponentti $-\dfrac{1}{4}<0$.

30

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(2\sqrt{x}+2) \qquad\qquad \Big|\, x>0 \\
&= \sqrt[3]{4\left(2\sqrt{x}+2\right)-8} \\
&= \sqrt[3]{8\sqrt{x}} \\
&= \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{\sqrt{x}} \\
&= 2x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \\
&= 2x^{\frac{1}{6}} \\
&= 2\sqrt[6]{x}
\end{aligned}
$$

Funktion $f \circ g$ määrittelyehto on $x > 0$.

$(f \circ g)(1) = 2\sqrt[6]{1} = 2$

Vastaus

$(f \circ g)(x) = 2\sqrt[6]{x}$, kun $x > 0$

$(f \circ g)(1) = 2$

31

Osoittajan raja-arvo $\lim_{x\to 4}(3x-12)=3\cdot 4-12=0$.

Nimittäjän raja-arvo on $\lim_{x\to 4}\left(6-3\sqrt{x}\right)=6-3\sqrt{4}=6-3\cdot 2=0$.

Funktion f lauseketta on sievennettävä raja-arvon laskemiseksi.

$$^{6+3\sqrt{x})}\frac{3x-12}{6-3\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(3x-12)\left(6+3\sqrt{x}\right)}{\left(6-3\sqrt{x}\right)\left(6+3\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{(3x-12)\left(6+3\sqrt{x}\right)}{6^2-(3\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{(3x-12)\left(6+3\sqrt{x}\right)}{36-9x}$$

$$=\frac{-\cancel{(12-3x)}\left(6+3\sqrt{x}\right)}{3\cancel{(12-3x)}}$$

$$=\frac{-(6+3\sqrt{x})}{3}$$

$$=-2-\sqrt{x}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x - 12}{6 - 3\sqrt{x}} = \lim_{x \to 4}(-2 - \sqrt{x}) = -2 - \sqrt{4} = -2 - 2 = -4$$

Vastaus

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -4$$

32

a) Lausekkeen osoittajan raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0+} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{0} = 2\cdot 0 = 0$.

Lausekkeen nimittäjän raja-arvo
$\lim\limits_{x\to 0+}(x-\sqrt{x}) = 0-\sqrt{0} = 0-0 = 0$.

Lauseketta on sievennettävä raja-arvon laskemiseksi.

$$
\begin{aligned}
{}^{x+\sqrt{x})}\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} &= \frac{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} \\
&= \frac{2(x\sqrt{x}+x)}{x^2-(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{2(x\sqrt{x}+x)}{x^2-x} \\
&= \frac{2x(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)}^{(x} \\
&= \frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-1}
\end{aligned}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\lim_{x\to 0+}\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{2(\sqrt{0}+1)}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2
$$

b) Lausekkeen osoittajan raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}(2-\sqrt{4+x}) = 2-\sqrt{4+0} = 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0$$

Lausekkeen nimittäjän raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Lauseketta on sievennettävä raja-arvon laskemiseksi.

$$
\begin{aligned}
{}^{2+\sqrt{4+x})}\frac{2-\sqrt{4+x}}{x} &= \frac{(2-\sqrt{4+x})(2+\sqrt{4+x})}{x(2+\sqrt{4+x})} \\
&= \frac{2^2-(\sqrt{4+x})^2}{x(2+\sqrt{4+x})} = \frac{4-(4+x)}{x(2+\sqrt{4+x})} \\
&= \frac{4-4-x}{x(2+\sqrt{4+x})} = \frac{-x}{x(2+\sqrt{4+x})}{}^{(x} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{4+x}}
\end{aligned}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{4+x}} = \frac{-1}{2+\sqrt{4+0}} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{4}} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) -2 b) $-\dfrac{1}{4}$

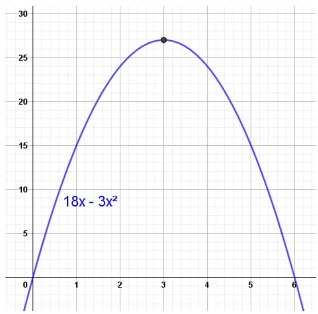
33

Koska pariton juurifunktio on aidosti kasvava, niin funktion $f(x) = 2\sqrt[3]{18x - 3x^2}$ suurin arvo saavutetaan, kun juurrettava $18x - 3x^2$ saa suurimman arvonsa.

Juurrettavan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, juurrettavan suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa, joka sijaitsee derivaatan $\mathrm{D}(18x - 3x^2) = 18 - 6x$ nollakohdassa.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta yhtälöstä

$$\begin{aligned} 18 - 6x &= 0 \\ -6x &= -18 \qquad \mid :(-6) \\ x &= 3 \end{aligned}$$



Lasketaan funktion f arvo derivaatan nollakohdassa $x = 3$.

$$f(3) = 2\sqrt[3]{18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Vastaus
suurin arvo $f(3) = 6$

34

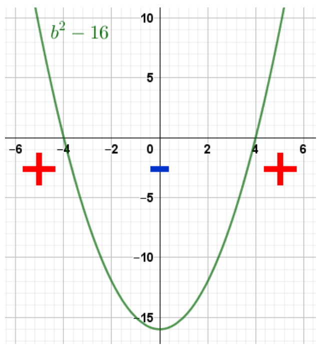
Neliöjuurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla reaalilukuarvoilla. Funktio $h(x)=\sqrt{x^2+bx+4}$ on määritelty kaikilla reaalilukuarvoilla vain, jos $x^2+bx+4\geq 0$ kaikilla muuttujan x reaalilukuarvoilla.

Funktion x^2+bx+4 kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktion arvot ovat epänegatiivisiä kaikilla muuttujan x reaalilukuarvoilla vain, jos funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.

Toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$ ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantin b^2-4ac etumerkistä. Ratkaisuja on yksi, kun diskriminantti on nolla, ja ei yhtään, kun diskriminantti on negatiivinen.

Yhtälön $x^2+bx+4=0$ diskriminantti on $b^2-4\cdot 1\cdot 4=b^2-16$. Funktiolla x^2+bx+4 on korkeintaan yksi nollakohta, kun $b^2-16\leq 0$. Määritetään funktion b^2-16 nollakohdat ja hahmotellaan sen kuvaaja.

$$b^2-16=0$$
$$b^2=16$$
$$b=4 \text{ tai } b=-4$$



Koska funktion b^2-16 kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin ehto $b^2-16\leq 0$ toteutuu muuttujan b arvoilla $-4\leq b\leq 4$.

Funktio $h(x)=\sqrt{x^2+bx+4}$ on siis määritelty kaikilla muuttujan x reaalilukuarvoilla, kun b saa arvoja välillä $[-4,4]$.

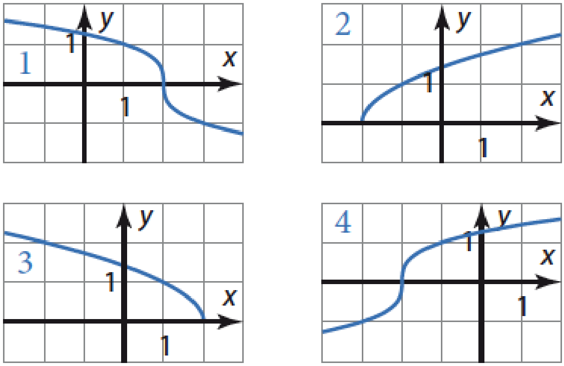
Vastaus

Vakion b arvo on välillä $[-4, 4]$.

35

$f(x)=\sqrt{x+2}$ $\qquad$ $g(x)=\sqrt[3]{x+2}$

$h(x)=\sqrt{2-x}$ $\qquad$ $i(x)=\sqrt[3]{2-x}$



Määritetään funktioiden määrittelyjoukot ja nollakohdat, sillä nämä tiedot riittävät erottamaan kuvaajat toisistaan.

Funktio $f(x)=\sqrt{x+2}$ on määritelty, kun $x+2\geq 0$ eli $x\geq -2$.

Funktion $f(x)=\sqrt{x+2}$ nollakohta on $x=-2$.

Näiden ominaisuuksien perusteella funktio f vastaa kuvaajaa 2.

Funktion $g(x)=\sqrt[3]{x+2}$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

Funktion $g(x)=\sqrt[3]{x+2}$ nollakohta on $x=-2$.

Näiden ominaisuuksien perusteella funktio g vastaa kuvaajaa 4.

Funktio $h(x)=\sqrt{2-x}$ on määritelty, kun $2-x \geq 0$ eli $x \leq 2$.
Funktion $h(x)=\sqrt{2-x}$ nollakohta on $x=2$.

Näiden ominaisuuksien perusteella funktio h vastaa kuvaajaa 3.

Funktion $i(x)=\sqrt[3]{2-x}$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.
Funktion $i(x)=\sqrt[3]{2-x}$ nollakohta on $x=2$.

Näiden ominaisuuksien perusteella funktio i vastaa kuvaajaa 1.

Vastaus

f kuvaaja 2
g kuvaaja 4
h kuvaaja 3
i kuvaaja 1

36

a) Neliöjuurifunktio on määritelty vain juurrettavan epänegatiivisilla reaalilukuarvoilla, joten funktio f on määritelty, kun

$$\begin{aligned} 4-2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -4 \qquad \big| :(-2) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

Funktion f arvo kohdassa $-\frac{5}{2}$ on

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{5}{2}\right) &= \sqrt[3]{-\frac{5}{2}+\sqrt{4-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{5}{2}+\sqrt{9}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{5}{2}+3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

b) Pariton juurifunktio on määritelty kaikilla juurrettavan reaalilukuarvoilla, mutta juurrettava ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa. Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Lisäksi murtopotenssi $x^{\frac{1}{2}}$ on määritelty vain, kun $x > 0$.

Funktio g on siis määritelty, kun $x > 0$ ja $x \neq 2$.

Funktio g ei ole määritelty kohdassa $-\dfrac{5}{2}$.

Vastaus

a) määrittelyehto $x \leq 2$, $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) määrittelyehto $0 < x < 2$ tai $x > 2$ (eli $x > 0$ ja $x \neq 2$),
$g\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ ei määritelty

37

a) Parillinen juurifunktio $\sqrt[6]{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$.

Toisaalta funktio f ei ole määritelty nimittäjän $\sqrt[3]{x^2}$ nollakohdassa $x = 0$.

Funktion f määrittelyehto on $x > 0$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{6}-\frac{4}{6}} = x^{-\frac{3}{6}} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) Funktio $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ on aidosti vähenevä, koska $-\dfrac{1}{2} < 0$.

Näin ollen $f(8) > f(9)$, koska $8 < 9$.

Vastaus

a) $x > 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(8) > f(9)$

38

Muodostetaan yhdistetyn funktion $f \circ g$ lauseke.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt[3]{x^2}+1) \\ &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}+1-1} \\ &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

Funktio $f \circ g$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$, koska $\sqrt[3]{x^2}+1-1 \geq 0$ aina.

Sievennetään yhdistetyn funktion $f \circ g$ lauseke.
Voidaan käyttää murtopotensseja alueessa $x > 0$, sillä juurrettava $x^2 = |x|^2 > 0$, kun $x > 0$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{|x|^2}} \\ &= (|x|^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= |x|^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} \\ &= |x|^{\frac{1}{6}} \\ &= \sqrt[6]{|x|}\end{aligned}$$

Tarkistetaan vielä, että funktion $f \circ g$ sievennetty muoto on voimassa myös määrittelyjoukon kohdassa $x = 0$.

$$(f \circ g)(0) = \sqrt[4]{\sqrt[3]{0^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{0}} = \sqrt[4]{0} = 0 \quad \text{ja myös} \quad \sqrt[6]{|0|} = \sqrt[6]{0} = 0$$

Näin ollen funktiot $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$ ja $\sqrt[6]{|x|}$ ovat samat kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten myös $(f \circ g)(x) = \sqrt[6]{|x|}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Lasketaan yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo kohdassa -64.

$$(f \circ g)(-64) = \sqrt[6]{|-64|} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Vastaus

$(f \circ g)(x) = \sqrt[6]{|x|}$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$(f \circ g)(-64) = 2$

39

Osoittajan raja-arvo $\lim\limits_{x\to 4}(4\sqrt{x}-\sqrt{x^3}) = 4\sqrt{4}-\sqrt{4^3} = 4\sqrt{4}-4\sqrt{4} = 0$.

Nimittäjän raja-arvo $\lim\limits_{x\to 4}(2-\sqrt{x}) = 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0$.

Funktion f lauseketta täytyy sieventää raja-arvon laskemiseksi.

Huomataan ensin, että $\sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3$, kun $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
&{}^{2+\sqrt{x})}\,\frac{4\sqrt{x}-\sqrt{x^3}}{2-\sqrt{x}} \\
&= \frac{(4\sqrt{x}-(\sqrt{x})^3)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \\
&= \frac{\sqrt{x}\,\cancel{(4-(\sqrt{x})^2)}(2+\sqrt{x})}{\cancel{4-(\sqrt{x})^2}} \\
&= \sqrt{x}(2+\sqrt{x}) \\
&= 2\sqrt{x}+x
\end{aligned}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 4}\frac{4\sqrt{x}-\sqrt{x^3}}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}(2\sqrt{x}+x) = 2\sqrt{4}+4 = 2\cdot 2+4 = 8$$

Vastaus $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8$

40

a) Osoittajan raja-arvo

$$\lim_{x \to 0}(3\sqrt{x^2+4}-6) = 3\sqrt{0^2+4}-6 = 3\sqrt{4}-6 = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Nimittäjän raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \,.$$

Koska molemmat raja-arvot ovat 0, täytyy lauseketta sieventää raja-arvon määrittämiseksi.

$$^{3\sqrt{x^2+4}+6)}\frac{3\sqrt{x^2+4}-6}{x} = \frac{(3\sqrt{x^2+4}-6)(3\sqrt{x^2+4}+6)}{x(3\sqrt{x^2+4}+6)}$$

$$= \frac{(3\sqrt{x^2+4})^2-6^2}{x(3\sqrt{x^2+4}+6)} = \frac{9(x^2+4)-36}{x(3\sqrt{x^2+4}+6)}$$

$$= \frac{9x^2+36-36}{x(3\sqrt{x^2+4}+6)} = \frac{9x^2}{x(3\sqrt{x^2+4}+6)}^{(x}$$

$$= \frac{9x}{3\sqrt{x^2+4}+6}^{(3} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \to 0}\frac{3\sqrt{x^2+4}-6}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{3 \cdot 0}{\sqrt{0^2+4}+2} = \frac{0}{4} = 0 \,.$$

b) Osoittajan raja-arvo

$$\lim_{x\to 1+}(7\sqrt{4x^2-8x+4}) = 7\sqrt{4\cdot 1^2-8\cdot 1+4} = 7\sqrt{0} = 0\,.$$

Nimittäjän raja-arvo $\lim_{x\to 1+}(x-1) = 1-1 = 0\,.$

Koska molemmat raja-arvot ovat 0, täytyy lauseketta sieventää raja-arvon määrittämiseksi.

Huomataan ensin, että $4x^2-8x+4 = 4(x^2-2x+1) = 4(x-1)^2\,.$
Sievennetään lauseke.

$$\frac{7\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1} = \frac{7\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \frac{7\cdot 2\left|\overbrace{x-1}^{>0}\right|}{x-1} = \frac{7\cdot 2\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 14$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{7\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1} = \lim_{x\to 1+} 14 = 14$$

Vastaus

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt{x^2+4}-6}{x} = 0$

b) $\lim_{x\to 1+}\dfrac{7\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1} = 14$

41

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \sqrt{1-x^2} - 1$.

Yhdistetty funktio on määritelty, kun $1 - x^2 \geq 0$ eli $-1 \leq x \leq 1$.

b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x} - 1) = 1 - (\sqrt{x} - 1)^2 = 1 - (x - 2\sqrt{x} + 1)$$
$$= 2\sqrt{x} - x$$

Yhdistetty funktio on määritelty, kun $x \geq 0$.

c) Koska funktioilla $f \circ g$ ja $g \circ f$ on eri määrittelyjoukot, niin ne ovat eri funktiot.

Vastaus

a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2} - 1$, missä $-1 \leq x \leq 1$

b) $(g \circ f)(x) = 2\sqrt{x} - x$, missä $x \geq 0$

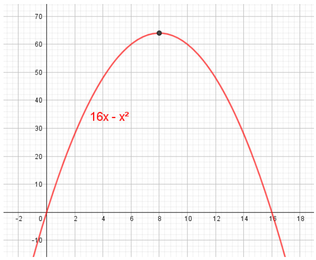
c) eivät ole samat

42

Parillinen juurifunktio $\sqrt[4]{}$ on määritelty ja aidosti kasvava, kun juurrettava $16x - x^2 \geq 0$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa samoissa kohdissa kuin juurrettava $16x - x^2$.

Ratkaistaan juurrettavan nollakohdat ja hahmotellaan kuvaaja.

$$16x - x^2 = 0$$
$$x(16 - x) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 16$$



Funktio f on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq 16$.

Juurrettava saa pienimmän (epänegatiivisen) arvonsa kohdissa $x = 0$ ja $x = 16$.

Funktion f pienin arvo on

$$f(0) = f(16) = \sqrt[4]{0} = 0.$$

Juurrettavan kuvaaja $y = 16x - x^2$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten sillä on suurin arvo paraabelin huipussa, joka sijaitsee derivaatan $f'(x) = \mathrm{D}(16x - x^2) = 16 - 2x$ nollakohdassa.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$
\begin{aligned}
16-2x&=0 \\
-2x&=-16 \qquad \big|:(-2) \\
x&=8
\end{aligned}
$$

Funktion f suurin arvo on

$$f(8)=\sqrt[4]{16\cdot 8-8^2}=\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{8^2}=\sqrt[4]{2^6}=2^{\frac{6}{4}}=2^{1\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\,.$$

Vastaus

pienin arvo 0
suurin arvo $2\sqrt{2}$

43

Väitteen mukaan lukujono on aidosti vähenevä, eli $a_{n+1} < a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Koska jonon jäsenet ovat positiivisia, niin tämä on yhtäpitävä ehdon $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ kanssa.

Lasketaan suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{2n}}} = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{2n}{2n+2}} < \sqrt{\frac{2n}{2n}} = \sqrt{1} = 1$$

Siis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

joten lukujono (a_n) on aidosti vähenevä. Siten väite on tosi. □

Lukujonon 18. jäsen on $a_{18} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 18}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$.

Vastaus

$a_{18} = \frac{1}{6}$

44

Funktiot $\sqrt[3]{x}$ ja $8+x$ ovat aidosti kasvavia, joten funktion g ääriarvokohdat ovat samat kuin funktiolla $\sqrt{361-x^2}$.

Toisaalta neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, joten funktion $\sqrt{361-x^2}$ ääriarvokohdat ovat samat kuin funktiolla $361-x^2$.

Koska neliöjuurifunktio on määritelty vain epänegatiivisille juurrettavan arvoille, niin funktio g on määritelty, kun $361-x^2 \geq 0$.

Epäyhtälön $361-x^2 \geq 0$ ratkaisuna on $-19 \leq x \leq 19$.

Koska $361-(\pm 19)^2 = 0$, niin funktion g pienin arvo on

$$g(\pm 19) = \sqrt[3]{8+\sqrt{361-(\pm 19)^2}} = \sqrt[3]{8+0} = 2.$$

Juurrettavan $y = 361-x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten juurrettava saa suurimman arvonsa paraabelin huippukohdassa, joka löytyy nollakohtien välisen janan keskikohdasta $x = \dfrac{-19+19}{2} = 0$. Funktion g suurin arvo on

$$g(0) = \sqrt[3]{8+\sqrt{361-0^2}} = \sqrt[3]{8+\sqrt{361}} = 3.$$

Koska funktio g on jatkuva, niin se saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.
Funktion g arvojoukko on siis $[2,3]$.

Vastaus Arvojoukko on $[2,3]$.

45

Funktio f on jatkuva kohdassa 0, jos $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Lasketaan funktion f raja-arvo kohdassa 0.

Osoittajan raja-arvo:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sqrt{5x^2-x+1}) = 1-\sqrt{5\cdot 0^2-0+1} = 1-\sqrt{1} = 0.$$

Nimittäjän raja-arvo:

$$\lim_{x\to 0} 3x = 3\cdot 0 = 0.$$

Täytyy sieventää funktion f lauseketta sen mahdollisen raja-arvon laskemiseksi kohdassa 0.

$$ {}^{1+\sqrt{5x^2-x+1})}\frac{1-\sqrt{5x^2-x+1}}{3x}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{5x^2-x+1})(1+\sqrt{5x^2-x+1})}{3x(1+\sqrt{5x^2-x+1})}$$

$$=\frac{1^2-(\sqrt{5x^2-x+1})^2}{3x(1+\sqrt{5x^2-x+1})}=\frac{1-(5x^2-x+1)}{3x(1+\sqrt{5x^2-x+1})}$$

$$=\frac{-5x^2+x}{3x(1+\sqrt{5x^2-x+1})}=\frac{x(1-5x)}{3x(1+\sqrt{5x^2-x+1})}\;{}^{(x}$$

$$=\frac{1-5x}{3(1+\sqrt{5x^2-x+1})}$$

Sieventämällä saatiin funktiolle f esitysmuoto

$$f(x)=\frac{1-5x}{3(1+\sqrt{5x^2-x+1})},\text{ missä } x\neq 0.$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{5x^2-x+1}}{3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-5x}{3(1+\sqrt{5x^2-x+1})}\\ &= \frac{1-5\cdot 0}{3(1+\sqrt{5\cdot 0^2-0+1})}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Funktio f on kaikkialla jatkuva, kun määritellään $f(0)=\frac{1}{6}$, jolloin funktion f lauseke on

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{5x^2-x+1}}{3x}, \text{ kun } x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{6}, \text{ kun } x=0.\end{cases}$$

Vastaus on, määrittelemällä $f(0)=\frac{1}{6}$

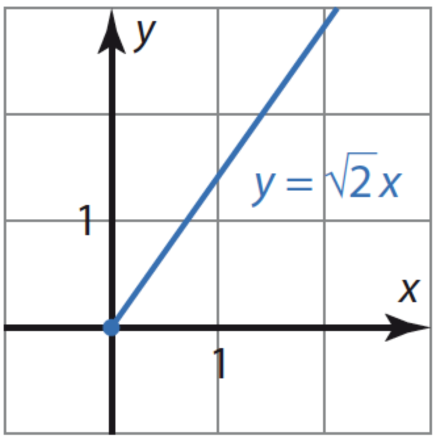
46

Sievennetään funktion lauseketta

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x\sqrt{2+\sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{2+\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}} \\
&= \sqrt{(x\sqrt{2+\sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x})(x\sqrt{2+\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x})} \\
&= \sqrt{(x\sqrt{2+\sqrt{x}})^2 - (x\sqrt[4]{x})^2} \\
&= \sqrt{(x\sqrt{2+\sqrt{x}})^2 - x^2(x^{\frac{1}{4}})^2} = \sqrt{x^2(2+\sqrt{x}) - x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{2x^2 + x^2\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,|x| \\
&= \sqrt{2}x, \text{ missä } x \geq 0
\end{aligned}
$$

Funktio f on lineaarinen, koska se on muotoa $f(x) = ax + b$, missä $a = \sqrt{2}$ ja $b = 0$.

Funktion f kuvaaja:



47

a) Pariton juuri on määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla.
Ratkaistaan yhtälö korottamalla sen molemmat puolet potenssin 3.

$$\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{8-x} \qquad \Big|\,(\ )^3$$
$$(\sqrt[3]{2x+3})^3 = (\sqrt[3]{8-x})^3$$
$$2x+3 = 8-x$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

b) Pariton juuri on määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla.

$$\sqrt[7]{x+4} - 1 = 0$$
$$\sqrt[7]{x+4} = 1 \qquad \Big|\,(\ )^7$$
$$(\sqrt[7]{x+4})^7 = 1^7$$
$$x+4 = 1$$
$$x = -3$$

Vastaus

a) $x = \frac{5}{3}$

b) $x = -3$

48

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto. Parillinen juurifunktio on määritelty, kun juurrettava on epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 3x - 8 &\geq 0 \\ 3x &\geq 8 \\ x &\geq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten yhtälö voidaan ratkaista korottamalla molemmat puolet potenssiin 2.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{3x-8}}_{\geq 0} &= \underbrace{2}_{\geq 0} \quad \Big|\,(\;)^2 \\ (\sqrt{3x-8})^2 &= 2^2 \\ 3x - 8 &= 4 \\ 3x &= 12 \quad \Big|\,:3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x \geq \frac{8}{3}$.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto. Parillinen juurifunktio on määritelty, kun juurrettava on epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\geq 0 \\ 2x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten yhtälö voidaan ratkaista korottamalla molemmat puolet potenssiin 4.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt[4]{2x-1}}_{\geq 0} &= \underbrace{3}_{\geq 0} \quad \Big|\,(\,)^4 \\ (\sqrt[4]{2x-1})^4 &= 3^4 \\ 2x - 1 &= 81 \\ 2x &= 82 \\ x &= 41 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x \geq \frac{1}{2}$.

Vastaus

a) $x = 4$

b) $x = 41$

49

a) Pariton juurifunktio on määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla. Voidaan ratkaista yhtälö korottamalla molemmat puolet potenssiin 3.

$$\sqrt[3]{9-x^2} = -3 \quad \Big| \, (\ )^3$$
$$(\sqrt[3]{9-x^2})^3 = (-3)^3$$
$$9-x^2 = -27$$
$$-x^2 = -36$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = -6$$

b) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille arvoille. Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 4-7x &\geq 0 \\ -7x &\geq -4 && \big| :(-7) \\ x &\leq \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin voidaan ratkaista yhtälö korottamalla molemmat puolet potenssiin 2.

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{4-7x}}_{\geq 0} &= \underbrace{5}_{\geq 0} && \big| (\ )^2 \\ (\sqrt{4-7x})^2 &= 5^2 \\ 4-7x &= 25 \\ -7x &= 21 && \big| :(-7) \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa yhtälön määrittelyehdon $x \leq \frac{4}{7}$.

Vastaus

a) $x = 6$ tai $x = -6$

b) $x = -3$

50

a) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla, joten yhtälön määrittelyehto on $x \geq 0$. Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin voidaan ratkaista yhtälö korottamalla molemmat puolet potenssiin 4.

$$\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{3}}_{\geq 0} \qquad \Big|(\ )^4$$

$$(\sqrt[4]{x})^4 = (\sqrt{3})^4$$

$$x = (3^{\frac{1}{2}})^4 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 3^2 = 9$$

Saatu ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon, siis $x = 9$.

b)

$$x^3 = \sqrt{27} \qquad \Big|\sqrt[3]{\ }$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\sqrt{27}}$$

$$x = (27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= (27^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$$

Vastaus

a) $x = 9$

b) $x = \sqrt{3}$

51

a) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla. Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

Yhtälön vasen puoli:

$$\begin{aligned} 2-x &\geq 0 \\ -x &\geq -2 \quad \Big|:(-1) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

Yhtälön oikea puoli:

$$\begin{aligned} x-2 &\geq 0 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Saadaan määrittelyehdoksi $x \leq 2$ ja $x \geq 2$ eli $x = 2$.

Tarkistetaan toteutuuko yhtälö ainoalla määrittelyehdon toteuttavalla arvolla $x = 2$ sijoittamalla tämä arvo alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} \sqrt{2-2} &= \sqrt{2-2} \\ \sqrt{0} &= \sqrt{0} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

tosi

Siis $x = 2$ on yhtälön ratkaisu.

b) Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen ja yhtälön oikea puoli on negatiivinen.

$$\underbrace{\sqrt{2x-6}}_{\geq 0} = \underbrace{-4}_{<0}$$

Yhtälö on epätosi, joten sillä ei ole ratkaisua.

Vastaus

a) $x = 2$ b) ei ratkaisua

52

Neliöjuurilausekkeen määrittelyehto:

$$\begin{aligned} 2x-1 &\geq 0 \\ 2x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten myös oikean puolen on oltava epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 2x-3 &\geq 0 \\ 2x &\geq 3 \\ x &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kun ehdot $x \geq \frac{1}{2}$ ja $x \geq \frac{3}{2}$ yhdistetään, saadaan yhtälön määrittelyehdoksi $x \geq \frac{3}{2}$.

Ratkaistaan yhtälö korottamalla se puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{2x-1}}_{\geq 0} = \underbrace{2x-3}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\;)^2$$

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (2x-3)^2$$

$$2x-1 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2$$

$$2x-1 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 - 14x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 4\cdot 10}}{2\cdot 4} = \frac{14\pm 6}{8}^{(2} = \frac{7\pm 3}{4}$$

$$x = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{7-3}{4} = 1$$

Näistä ratkaisuista vain $x = \frac{5}{2}$ toteuttaa ehdon $x \geq \frac{3}{2}$.

Vastaus

$x = \frac{5}{2}$

53

Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toiselle puolelle jää pelkkä juurilauseke.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+1}-1&=2x\\
\sqrt{x+1}&=2x+1
\end{aligned}
$$

Neliöjuurilausekkeen määrittelyehto:

$$
\begin{aligned}
x+1&\ge 0\\
x&\ge -1
\end{aligned}
$$

Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten myös oikean puolen on oltava epänegatiivinen.

$$
\begin{aligned}
2x+1&\ge 0\\
2x&\ge -1\\
x&\ge -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä ehdot $x\ge -1$ ja $x\ge -\frac{1}{2}$ saadaan yhtälön määrittelyehdoksi $x\ge -\frac{1}{2}$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} = \underbrace{2x+1}_{\geq 0} \qquad \Big|(\ )^2$$

$$(\sqrt{x+1})^2 = (2x+1)^2$$

$$x+1 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2$$

$$x+1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 + 3x = 0$$

$$x(4x+3) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 4x+3 = 0$$

$$4x = -3 \qquad \Big|:4$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Näistä ratkaisuista vain $x = 0$ toteuttaa ehdon $x \geq -\frac{1}{2}$.

Vastaus
$x = 0$

54

Ratkaistaan yhtälö korottamalla se puolittain potenssiin 2.
Tarkistetaan saadut ratkaisut.

$$\sqrt{x^6 - 2x + 1} + 1 = x^3$$
$$\sqrt{x^6 - 2x + 1} = x^3 - 1 \quad \Big|(\,)^2$$
$$(\sqrt{x^6 - 2x + 1})^2 = (x^3 - 1)^2$$
$$x^6 - 2x + 1 = (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 1 + 1^2$$
$$x^6 - 2x + 1 = x^6 - 2x^3 + 1$$
$$2x^3 - 2x = 0$$
$$2x(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Tarkistetaan toteuttavatko saadut ratkaisut alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön.

$$\sqrt{0^6 - 2 \cdot 0 + 1} + 1 = 0^3$$
$$\sqrt{1} + 1 = 0$$
$$2 = 0$$

epätosi

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön.

$$\sqrt{1^6 - 2 \cdot 1 + 1} + 1 = 1^3$$
$$\sqrt{1 - 2 + 1} + 1 = 1$$
$$\sqrt{0} + 1 = 1$$
$$1 = 1$$

tosi

Ratkaisuista vain $x = 1$ toteuttaa yhtälön.

Vastaus

$x = 1$

55

Neliöjuurilausekkeiden määrittelyehdot:

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 3x \geq 0 \quad \Big| :3$$
$$x \geq 0$$

Selvitetään neliöönkorotusehdot.

Yhtälön oikea puoli on epänegatiivinen kaikilla muuttujan arvoilla, joten myös yhtälön vasemman puolen on oltava epänegatiivinen.

$$2\sqrt{x} - 1 \geq 0$$
$$2\sqrt{x} \geq 1 \qquad \Big| :2$$
$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} \geq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 0} \qquad \Big| (\ )^2$$
$$x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x \geq \frac{1}{4}$$

Kun yhdistetään ehdot $x \geq 0$ ja $x \geq \frac{1}{4}$, saadaan yhtälön

määrittelyehdoksi $x \geq \frac{1}{4}$.

Korotetaan yhtälö puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{2\sqrt{x}-1}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{3x}}_{\geq 0} \qquad \Big| (\ )^2$$

$$(2\sqrt{x}-1)^2 = (\sqrt{3x})^2$$

$$(2\sqrt{x})^2 - 2\cdot 2\sqrt{x}\cdot 1 + 1^2 = 3x$$

$$4x - 4\sqrt{x} + 1 = 3x$$

$$x + 1 = 4\sqrt{x}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, kun $x \geq \frac{1}{4}$.

Korotetaan uudelleen puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{x+1}_{\geq 0} = \underbrace{4\sqrt{x}}_{\geq 0} \qquad \Big| (\ )^2$$

$$(x+1)^2 = (4\sqrt{x})^2$$

$$x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 = 4^2(\sqrt{x})^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = 16x$$

$$x^2 - 14x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{192}}{2}$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{8^2\cdot 3}}{2} = \frac{14 \pm 8\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 7 - 4\sqrt{3} \approx 0{,}07 \quad \text{tai} \quad x = 7 + 4\sqrt{3} \approx 13{,}9$$

Näistä kahdesta ratkaisusta vain $x = 7 + 4\sqrt{3}$ toteuttaa ehdon $x \geq \frac{1}{4}$.

Vastaus $x = 7 + 4\sqrt{3}$

56

Selvitetään neliöjuurilausekkeiden määrittelyehdot.

Lauseke $\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$.

Lauseke $\sqrt{x-1}$ on määritelty, kun $x \geq 1$.

Yhdistämällä ehdot saadaan $x \geq 1$.

Molemmat puolet ovat epänegatiivisia, kun $x \geq 1$, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain potenssiin 2.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{x}+2}_{\geq 0} &= \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geq 0} && \bigg|\,(\;)^2 \\
(\sqrt{x}+2)^2 &= (\sqrt{x-1})^2 \\
(\sqrt{x})^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot 2 + 2^2 &= x-1 \\
x + 4\sqrt{x} + 4 &= x-1 \\
4\sqrt{x} &= -5 && \big|\,:4 \\
\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} &= \underbrace{-\frac{5}{4}}_{<0}
\end{aligned}
$$

Yhtälön vasen puoli on aina epänegatiivinen, ja oikea puoli negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus
ei ratkaisua

57

a) Selvitetään neliöjuurilausekkeiden määrittelyehdot.

Lauseke $\sqrt{2x}$ on määritelty, kun $2x \geq 0$ eli $x \geq 0$.

Lauseke $\sqrt{x-1}$ on määritelty, kun $x-1 \geq 0$ eli $x \geq 1$.

Yhdistämällä ehdot saadaan $x \geq 1$.

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin voidaan yhtälö ratkaista korottamalla puolittain potenssiin 2.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{2x}}_{\geq 0} &= \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geq 0} \qquad \left|\,(\,)^2\right. \\
(\sqrt{2x})^2 &= (\sqrt{x-1})^2 \\
2x &= x-1 \\
x &= -1
\end{aligned}$$

Ratkaisu ei toteuta määrittelyehtoa $x \geq 1$, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b) Pariton juurifunktio on määritelty kaikille juurrettavan arvoille, joten yhtälö voidaan ratkaista korottamalla se puolittain potenssiin 7.

$$\sqrt[7]{x^2 - 4} = \sqrt[7]{2 + x} \qquad \Big|\,(\ )^7$$

$$(\sqrt[7]{x^2 - 4})^7 = (\sqrt[7]{2 + x})^7$$

$$x^2 - 4 = 2 + x$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1 + 5}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

Vastaus

a) ei ratkaisua
b) $x = -2$ tai $x = 3$

58

Funktioiden kuvaajien leikkauspisteen x-koordinaatti voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \sqrt{4x+1} &= \sqrt{x^2-4} \end{aligned}$$

Selvitetään funktioiden f ja g määrittelyehdot.

Funktio f:

$$\begin{aligned} 4x+1 &\geq 0 \\ 4x &\geq -1 \qquad \qquad \big| :4 \\ x &\geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Funktio g:

$$\begin{aligned} x^2-4 &\geq 0 \\ x^2 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$x \leq -4 \quad \text{tai} \quad x \geq 4$$

Ehdot yhdistämällä saadaan yhtälön $f(x) = g(x)$ määrittelyehdoksi $x \geq 4$.

Yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten voidaan ratkaista yhtälö korottamalla molemmat puolet potenssin 2.

$$\underbrace{\sqrt{4x+1}}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\ )^2$$

$$(\sqrt{4x+1})^2 = (\sqrt{x^2-4})^2$$

$$4x+1 = x^2-4$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4\pm 6}{2} = 2 \pm 3$$

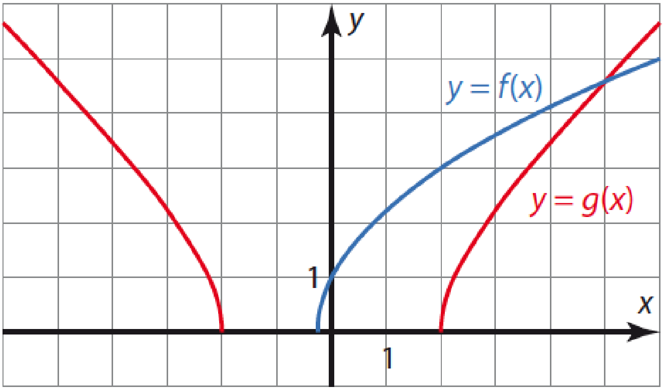
$x = 2+3 = 5$ tai $x = 2-3 = -1$

Ratkaisuista vain $x = 5$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 4$.

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla ratkaisu $x = 5$ funktioon f.

$$f(5) = \sqrt{4\cdot 5+1} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Tarkistetaan vastaus piirtämällä kuvaajat:



Vastaus leikkauspiste $(5, \sqrt{21})$

59

Muokataan ensin yhtälö muotoon, jossa ainoastaan juurilauseke on toisella puolella yhtälöä.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+8}+1&=2x\\ \sqrt{2x^2+8}&=2x-1\end{aligned}$$

Neliöjuurilauseke on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla. Saadaan määrittelyehto $2x^2+8\geq 0$, joka toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten myös oikean puolen on oltava epänegatiivinen.

$$\begin{aligned}2x-1&\geq 0\\ 2x&\geq 1 \quad \big|:2\\ x&\geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö korottamalla puolittaan potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{2x^2+8}}_{\geq 0} = \underbrace{2x-1}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\ )^2$$

$$(\sqrt{2x^2+8})^2 = (2x-1)^2$$

$$2x^2+8 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2$$

$$2x^2+8 = 4x^2-4x+1$$

$$2x^2-4x-7=0$$

$$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-7)}}{2\cdot 2} = \frac{4\pm\sqrt{72}}{4}$$

$$= \frac{4\pm\sqrt{36\cdot 2}}{4} = \frac{4\pm 6\sqrt{2}}{4}^{(2}$$

$$x = \frac{2-3\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+3\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}1$$

Näistä ratkaisuista vain $x = \dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$ toteuttaa ehdon $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Vastaus

$$x = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

60

Pariton juurifunktio on määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla, joten yhtälö on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla.

Muokataan yhtälö muotoon, jossa toisella puolella yhtälöä on ainoastaan juurilauseke.

$$\sqrt[3]{x^2+1}+x=1$$
$$\sqrt[3]{x^2+1}=-x+1$$

Ratkaistaan yhtälö korottamalla puolittain potenssiin 3.

$$\sqrt[3]{x^2+1}=-x+1 \qquad \Big| \,(\;)^3$$
$$(\sqrt[3]{x^2+1})^3=(-x+1)^3$$
$$x^2+1=(-x)^3+3\cdot(-x)^2\cdot 1+3\cdot(-x)\cdot 1^2+1^3$$
$$x^2+1=-x^3+3x^2-3x+1$$
$$x^3-2x^2+3x=0$$
$$x(x^2-2x+3)=0$$
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-2x+3=0$$

Yhtälöllä $x^2-2x+3=0$ ei ole ratkaisua, sillä sen diskriminantti $(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=-8$ on negatiivinen.

Vastaus

$x=0$

61

a) Neliöjuurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla. Määrittelyehdot ovat

$$\begin{aligned} 4-x &\geq 0 \\ -x &\geq -4 \quad \Big| :(-1) \\ x &\leq 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x+4 &\geq 0 \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

Ehdot yhdistämällä saadaan $-4 \leq x \leq 4$.

Ratkaisataan yhtälö käyttämällä tulon nollasääntöä.

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x}\sqrt{x+4} &= 0 \\ \sqrt{4-x} = 0 \quad &\text{tai} \quad \sqrt{x+4} = 0 \\ 4-x = 0 \quad &\text{tai} \quad x+4 = 0 \\ x = 4 \quad &\text{tai} \quad x = -4 \end{aligned}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon $-4 \leq x \leq 4$.

b) Määrittelyehto on sama kuin a-kohdassa, eli $-4 \le x \le 4$.

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, voidaan yhtälö ratkaista korottamalla yhtälö puolittain potenssiin 2.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{4-x}\sqrt{x+4}}_{\ge 0} &= \underbrace{2}_{\ge 0} \qquad \Big|\,(\;)^2 \\
(\sqrt{4-x})^2(\sqrt{x+4})^2 &= 2^2 \\
(4-x)(x+4) &= 4 \\
(4-x)(4+x) &= 4 \\
4^2 - x^2 &= 4 \\
x^2 &= 12 \\
x &= \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3,5
\end{aligned}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon $-4 \le x \le 4$.

Vastaus

a) $x = -4$ tai $x = 4$

b) $x = -2\sqrt{3}$ tai $x = 2\sqrt{3}$

62

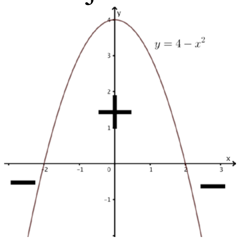
Parilliset juuret ovat määriteltyjä juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla.

Lauseke $\sqrt[4]{4-x^2}$ on määritelty, kun $4-x^2 \geq 0$.

Nollakohdat:

$$4-x^2=0$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm\sqrt{4}$$
$$x=2 \quad \text{tai} \quad x=-2$$

Kuvaaja:



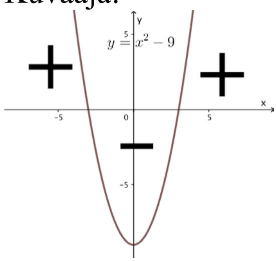
Saadaan yhtälön ensimmäiseksi määrittelyehdoksi $-2 \leq x \leq 2$.

Lauseke $\sqrt[6]{x^2-9}$ on määritelty, kun $x^2-9 \geq 0$.

Nollakohdat:

$$x^2-9=0$$
$$x^2=9$$
$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=-3$$

Kuvaaja:



Saadaan toiseksi määrittelyehdoksi $x \leq -3$ tai $x \geq 3$.

Mikään luku ei toteuta molempia määrittelyehtoja.
Siten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

63

Ratkaistaan yhtälö korottamalla se puolittain potenssiin 2 ja tarkistamalla saadut ratkaisut.

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=2$$

$$\sqrt{x-3}=-\sqrt{x}+2 \qquad \Big|(\ )^2$$

$$(\sqrt{x-3})^2=(-\sqrt{x}+2)^2$$

$$x-3=(-\sqrt{x})^2+2\cdot(-\sqrt{x})\cdot 2+2^2$$

$$x-3=x-4\sqrt{x}+4$$

$$4\sqrt{x}=7 \qquad \Big|:4$$

$$\sqrt{x}=\frac{7}{4} \qquad \Big|(\ )^2$$

$$x=\frac{49}{16}$$

Tarkistetaan saatu ratkaisu $x=\frac{49}{16}$ sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöön.

$$\sqrt{\frac{49}{16}-3}+\sqrt{\frac{49}{16}}=2$$
$$\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{3\cdot 16}{16}}+\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}=2$$
$$\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{48}{16}}+\frac{7}{4}=2$$
$$\sqrt{\frac{1}{16}}+\frac{7}{4}=2$$
$$\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=2$$
$$\frac{8}{4}=2$$
$$2=2$$
tosi

Saatu ratkaisu $x=\frac{49}{16}$ toteuttaa yhtälön.

Vastaus

$x=\frac{49}{16}$

64

Selvitetään yhtälön määrittelyehto. Neliöjuurilauseke on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla.

Lausekkeen $\sqrt{x+1}$ määrittelyehto on $x+1 \geq 0$ eli $x \geq -1$.
Lausekkeen $\sqrt{2x}$ määrittelyehto on $2x \geq 0$ eli $x \geq 0$.

Yhdistämällä ehdot saadaan yhtälön määrittelyehdoksi $x \geq 0$.

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin ratkaistaan yhtälö korottamalla se puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}_{\geq 0} = \underbrace{2}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\;)^2$$

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})^2 = 2^2$$

$$(\sqrt{x+1})^2 + 2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x} + (\sqrt{2x})^2 = 4$$

$$x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{2x}+2x = 4$$

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{2x} = -3x+3$$

Korotetaan yhtälö vielä uudelleen puolittain potenssiin 2. Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten myös oikean puolen täytyy olla epänegatiivinen.

$$
\begin{aligned}
-3x+3 &\geq 0 \\
-3x &\geq -3 \quad \Big| :(-3) \\
x &\leq 1
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä saatu ehto ja yhtälön määrittelyehto $x \geq 0$, saadaan ehdoksi $0 \leq x \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{2\sqrt{x+1}\sqrt{2x}}_{\geq 0} &= \underbrace{-3x+3}_{\geq 0} \qquad \Big| \,(\ )^2 \\
(2\sqrt{x+1}\sqrt{2x})^2 &= (-3x+3)^2 \\
2^2 \cdot (x+1) \cdot (2x) &= (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 3 + 3^2 \\
8x^2 + 8x &= 9x^2 - 18x + 9 \\
x^2 - 26x + 9 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm \sqrt{640}}{2} \\
&= \frac{26 \pm \sqrt{64 \cdot 10}}{2} = \frac{26 \pm 8\sqrt{10}}{2} = 13 \pm 4\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

$$x = 13 + 4\sqrt{10} \approx 25{,}65 \quad \text{tai} \quad x = 13 - 4\sqrt{10} \approx 0{,}35$$

Vain jälkimmäinen ratkaisu toteuttaa ehdon $0 \leq x \leq 1$.

Vastaus

$x = 13 - 4\sqrt{10}$

65

Pisteen (x, y) etäisyys origosta on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{x^2 + y^2}$, joten neljän yksikön etäisyydellä olevat pisteet toteuttavat yhtälön $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$ eli yhtälön $x^2 + y^2 = 4^2$.
Tämä yhtälö kuvaa origokeskistä ympyrää, jonka säde on 4.

Ratkaistaan yhtälön $x^2 + y^2 = 4^2$ kuvaaman ympyrän ja yhtälön $y = 4 - x^2$ kuvaaman paraabelin leikkauspisteet yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4^2 \\ x^2 = 4 - y \end{cases} \quad \Big| \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.}$$

$$4 - y + y^2 = 4^2$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$y = \frac{1-7}{2} = -3 \text{ tai } y = \frac{1+7}{2} = 4$$

Ratkaistaan saatuja y:n arvoja vastaavat x:n arvot paraabelin yhtälön $y = 4 - x^2$ avulla.

$y = -3$: $\quad -3 = 4 - x^2$

$$x^2 = 4 + 3$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$y = 4$: $\quad 4 = 4 - x^2$

$$x^2 = 4 - 4$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Saadut ympyrän ja paraabelin leikkauspisteet ovat

$$(0,4),\ (\sqrt{7},-3) \text{ ja } (-\sqrt{7},-3)$$

Vastaus

$(0,4)$, $(\sqrt{7},-3)$ ja $(-\sqrt{7},-3)$

Huomaa!
Yhtälöparin voi ratkaista myös laskimella.

66

Yhtälön määrittelyehto on $x \geq 0$. Muokataan yhtälöä.

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 1 = 0$$

$$2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$$

$$2 \cdot x^{\frac{2}{4}} - 3 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$$

$$2 \cdot (x^{\frac{1}{4}})^2 - 3 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$$

$$2(\sqrt[4]{x})^2 - 3\sqrt[4]{x} + 1 = 0$$

Sijoitetaan $\sqrt[4]{x} = t$, missä $x \geq 0$, ja ratkaistaan t.

$$2(\sqrt[4]{x})^2 - 3\sqrt[4]{x} + 1 = 0 \qquad \Big| \ \sqrt[4]{x} = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $t = \sqrt[4]{x}$ ja ratkaistaan x.

$$\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{\geq 0} = \underbrace{1}_{\geq 0} \quad \Big| (\ )^4 \quad \text{tai} \quad \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 0} \quad \Big| (\ )^4$$

$$(\sqrt[4]{x})^4 = 1^4 \qquad\qquad (\sqrt[4]{x})^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = \frac{1}{16}$$

Saadut ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon $x \geq 0$.

Vastaus

$x = 1$ tai $x = \dfrac{1}{16}$

67

a) Juurilauseke on määritelty, kun $x \geq 0$.

Epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten se voidaan ratkaista korottamalla puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} > \underbrace{5}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\;)^2$$

$$(\sqrt{x})^2 > 5^2$$

$$x > 25$$

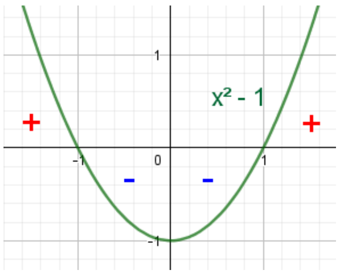
Saatu ratkaisu $x > 25$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 0$.

b) Juurilausekkeiden määrittelyehdot ovat $x^2 - 1 \geq 0$ ja $x^2 + 2 \geq 0$. Näistä jälkimmäinen toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla, sillä $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Ratkaistaan ensimmäinen epäyhtälö ratkaisemalla lausekkeen nollakohdat ja hahmottelemalla sen kuvaaja.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$



Määrittelyehdoksi saadaan

$$x \leq -1 \quad \text{tai} \quad x \geq 1$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\,)^2$$

$$(\sqrt{x^2-1})^2 \leq (\sqrt{x^2+2})^2$$

$$x^2-1 \leq x^2+2$$

$$-1 \leq 2$$

Tämä ehto on aina tosi. Epäyhtälö toteutuu siis kaikilla määrittelyehdot toteuttavilla muuttujan arvoilla, joten alkuperäisen epäyhtälön ratkaisuna on $x \leq -1$ tai $x \geq 1$.

Vastaus

a) $x > 25$

b) $x \leq -1$ tai $x \geq 1$.

68

a) Pariton juurifunktio on aidosti kasvava ja määritelty kaikilla juurrettavan arvoilla. Epäyhtälö voidaan korottaa puolittain potenssiin 3.

$$\sqrt[3]{5x-6} \geq 4 \qquad \Big|\,(\,)^3$$

$$(\sqrt[3]{5x-6})^3 \geq 4^3$$

$$5x-6 \geq 64$$

$$5x \geq 70 \qquad \Big|:5$$

$$x \geq 14$$

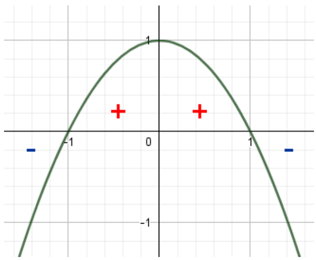
b) Neliöjuurilausekkeen määrittelyehto on $1-x^2 \geq 0$. Ratkaistaan tämä epäyhtälö selvittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$1-x^2=0$$

$$-x^2=-1$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \text{ tai } x=-1$$



Saadaan määrittelyehto

$$-1 \leq x \leq 1$$

Koska alkuperäisen epäyhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, täytyy myös sen oikean puolen olla epänegatiivinen, muutoin epäyhtälöllä ei ole ratkaisua. Saadaan ehto $x+1 \geq 0$ eli $x \geq -1$. Yhdistämällä tämä ehto saatuun määrittelyehtoon, saadaan $-1 \leq x \leq 1$.

Korotetaan epäyhtälö puolittain neliöön.

$$\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geq 0} \leq \underbrace{x+1}_{\geq 0} \qquad \Big| \,(\ )^2$$

$$(\sqrt{1-x^2})^2 \leq (x+1)^2$$

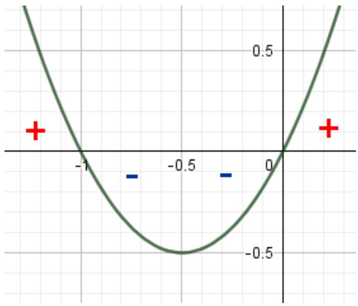
$$1-x^2 \leq x^2+2x+1$$

$$-2x^2-2x \leq 0 \qquad \Big| : (-1)$$

$$2x^2+2x \geq 0$$

$$2x(x+1) \geq 0$$

Ratkaistaan saatu epäyhtälö selvittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.



$$2x(x+1)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x+1=0$$

$$x=-1$$

Epäyhtälön ratkaisuksi saadaan $x \geq 0$ tai $x \leq -1$.

Yhdistämällä tämä ratkaisu määrittelyehdon kanssa saadaan vastaukseksi $x=-1$ tai $0 \leq x \leq 1$.

Vastaus

a) $x \geq 14$

b) $x=-1$ tai $0 \leq x \leq 1$

69

Muodostetaan epäyhtälö $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$ ja ratkaistaan se.
Neliöjuuren määrittelyehto on $x \geq 0$. Tämän ehdon toteutuessa epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain potenssiin 6.

$$\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\geq 0} > \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} \quad \Big| \, (\ )^6$$

$$(\sqrt[3]{x})^6 > (\sqrt{x})^6$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^6 > (x^{\frac{1}{2}})^6$$

$$x^{\frac{6}{3}} > x^{\frac{6}{2}}$$

$$x^2 > x^3$$

$$x^3 - x^2 < 0$$

$$x^2(x-1) < 0$$

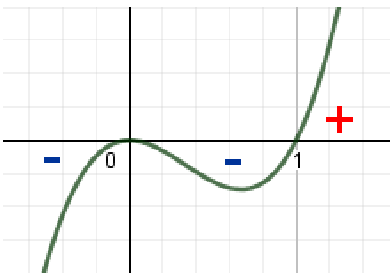
Huomaa!
Epäyhtälön $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$ voi ratkaista myös laskimella.

Ratkaistaan epäyhtälö selvittämällä nollakohdat, ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$x^2(x-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 1$$



Saadaan ratkaisuksi

$$x < 0 \ \text{ tai } \ 0 < x < 1$$

Yhdistämällä määrittelyehdon $x \geq 0$ kanssa saadaan $0 < x < 1$.

Vastaus $\quad 0 < x < 1$

70

a) Sijoitetaan yleisen jäsenen lausekkeeseen $n = 39$.

$$a_{39} = \frac{39}{6} - \sqrt{39+82} = \frac{13}{2} - 11 = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$$

b) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 0$ eli $\frac{n}{6} - \sqrt{n+82} < 0$.

$$\frac{n}{6} - \sqrt{n+82} < 0$$

$$\frac{n}{6} < \sqrt{n+82}$$

Neliöjuurilauseke on määritelty aina, sillä muuttuja n saa vain positiivisia kokonaislukuarvoja.
Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\underbrace{\frac{n}{6}}_{\geq 0} < \underbrace{\sqrt{n+82}}_{\geq 0} \qquad \Big|\, (\,)^2$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^2 < (\sqrt{n+82})^2$$

$$\frac{n^2}{6^2} < n + 82$$

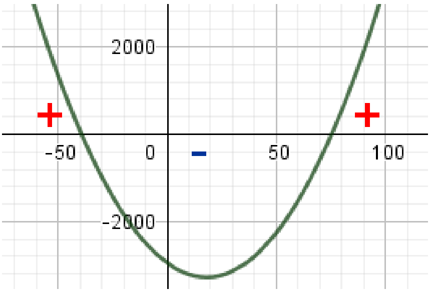
$$\frac{n^2}{36} - n - 82 < 0 \qquad \Big|\, \cdot 36$$

$$n^2 - 36n - 2952 < 0$$

Ratkaistaan epäyhtälö määrittämällä nollakohdat, ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$n^2 - 36n - 2952 = 0$$

$$n = 18 + 6\sqrt{91} \approx 75,2 \quad \text{tai} \quad n = 18 - 6\sqrt{91} \approx -39,2$$



Lukujonon jäsenet ovat negatiivisia, kun $-39,2 < n < 75,2$ eli kun $n = 1, 2, 3, \ldots, 75$, joten lukujonon 75 ensimmäistä jäsentä ovat negatiivisia.

Vastaus

a) $a_{39} = -4\frac{1}{2}$

b) 75 kpl

71

Juurilauseke on määritelty, kun $4-x\geq 0$ eli $x\leq 4$.

1) Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa epäyhtälön oikea puoli on epänegatiivinen. Saadaan ehto $2-x\geq 0$ eli $x\leq 2$. Epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\geq 0}\geq \underbrace{2-x}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\,)^2$$

$$(\sqrt{4-x})^2\geq (2-x)^2$$

$$4-x\geq 2^2-2\cdot 2\cdot x+x^2$$

$$4-x\geq 4-4x+x^2$$

$$-x^2+3x\geq 0 \qquad \Big|\cdot(-1)\ \ (<0)$$

$$x^2-3x\leq 0$$

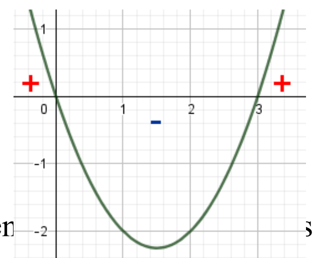
$$x(x-3)\leq 0$$

Ratkaistaan epäyhtälö määrittämällä nollakohdat, ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$x(x-3)=0$$

$$x=0 \text{ tai } x-3=0$$

$$x=3$$



Saadaan ratkaisuksi $0\leq x\leq 3$.

Yhdistämällä saatu ratkaisu ehtojen ssa saadaan tapauksessa 1 ratkaisuksi $0\leq x\leq 2$.

2) Tarkastellaan sitten tapausta, jossa epäyhtälön oikea puoli on negatiivinen, jolloin $2 - x < 0$ eli $x > 2$.

$$\underbrace{\sqrt{4 - x}}_{\geq 0} \geq \underbrace{2 - x}_{<0}$$

Koska vasen puoli on aina epänegatiivinen, niin epäyhtälö on aina tosi, kun $x > 2$.
Saadaan tapauksessa 2 ratkaisuksi $2 < x \leq 4$.

Yhdistämällä tapauksien 1 ja 2 ratkaisut $0 \leq x \leq 2$ ja $2 < x \leq 4$ saadaan alkuperäisen epäyhtälön ratkaisuksi

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{tai} \quad 2 < x \leq 4$$

eli

$$0 \leq x \leq 4.$$

Vastaus

$0 \leq x \leq 4$

72

Määritetään funktioiden määrittelyjoukot ja tarvittaessa kasvavuus ja vähenevyys. Nämä tiedot riittävät erottelemaan kuvaajat toisistaan.

Funktio $f(x)=\sqrt[3]{x}$ on parittomana juurifunktiona määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tämä vastaa kuvaajaa 3.

Funktio $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$ on murtopotenssifunktiona määritelty, kun $x>0$. Funktio on aidosti kasvava, koska eksponentti on positiivinen. Tämä vastaa kuvaajaa 1.

Funktio $h(x)=(x+2)^{\frac{1}{2}}$ on määritelty, kun $x+2>0$ eli $x>-2$. Tämä vastaa kuvaajaa 4.

Funktio $i(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ on murtopotenssifunktiona määritelty, kun $x>0$. Funktio on aidosti vähenevä, koska eksponentti on negatiivinen.
Tämä vastaa kuvaajaa 2.

Vastaus

f, kuvaaja 3
g, kuvaaja 1
h, kuvaaja 4
i, kuvaaja 2

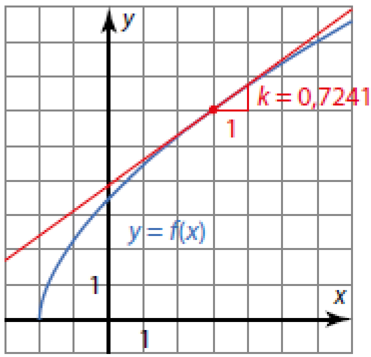
73

a) Eksponentti $\frac{3}{5}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku $4x + 8$ on positiivinen.

$$
\begin{aligned}
4x + 8 &> 0 \\
4x &> -8 \quad \Big| :4 \\
x &> -2
\end{aligned}
$$

Määrittelyehto on $x > -2$.

b) Piirretään funktion f kuvaaja geometriaohjelmalla.



Määrittelyehto rajaa kuvaajan välille $x > -2$.

Funktion f derivaatta kohdassa 3 on kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

$$f'(3) \approx 0,72$$

Vastaus

a) $x > -2$

b) $f'(3) \approx 0,72$

74

a) Positiivinen kokonaislukupotenssi on määritelty kaikille kantaluvun reaaliarvoille, joten määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

b) Negatiivinen kokonaislukupotenssi on määritelty, kun kantaluku on erisuuri kuin 0.
Määrittelyehdoksi saadaan $x-7\neq 0$ eli $x\neq 7$.
Määrittelyjoukko on $\mathbf{R}\setminus\{7\}$.

c) Kun eksponentti ei ole kokonaisluku, niin potenssifunktio on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille.
Määrittelyehdoksi saadaan $x-7>0$ eli $x>7$.
Määrittelyjoukko on $]7, \infty[$.

Vastaus
a) $\mathbf{R}$
b) $\mathbf{R}\setminus\{7\}$
c) $]7, \infty[$

75

a) Murtopotenssi on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille.
Saadaan määrittelyehto $x-5>0$ eli $x>5$.
Määrittelyjoukko on $]5, \infty[$.

b) Pariton juurifunktio on määritelty kaikille juurrettavan reaaliarvoille. Määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

c) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille arvoille. Määrittelyehto on $x-5\geq 0$ eli $x\geq 5$.
Määrittelyjoukko on $[5, \infty[$.

Vastaus

a) $]5, \infty[$

b) $\mathbf{R}$

c) $[5, \infty[$

76

a) Eksponentti $\frac{2}{3}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku on positiivinen eli kun $x > 0$. Määritetään derivaattafunktio.

$$D(\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 0$.

b) Eksponentti $\frac{4}{5}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku $2 - x$ on positiivinen.

$$\begin{aligned} 2 - x &> 0 \\ -x &> -2 \quad \big| : (-2) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty, kun $x < 2$. Määritetään derivaattafunktio.

$$D(2-x)^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5}(2-x)^{\frac{4}{5}-1} \cdot (-1) = -\frac{4}{5}(2-x)^{-\frac{1}{5}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x < 2$.

Vastaus a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$, kun $x > 0$

b) $f'(x) = -\frac{4}{5}(2-x)^{-\frac{1}{5}}$, kun $x < 2$

77

Rami laski eksponentin väärin. Ramin suoritus oikein laskettuna:

$$\mathrm{D}(9x^{\frac{1}{3}} - 4x) = 9 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot 1 = 3x^{-\frac{2}{3}} - 4$$

Murtopotenssi on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille, joten derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 0$.

Emilin laskussa määrittelyehto on väärin, pitäisi olla $x > 0$. Muutoin Emil laski oikein, joskin turhan monimutkaisesti tulon derivointisääntöä käyttäen.

78

a) Eksponentti $\frac{4}{3}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku $x > 0$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{D}(3x^{\frac{4}{3}} - 20x) = 3 \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} - 20 \cdot 1 = 4x^{\frac{1}{3}} - 20$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
4x^{\frac{1}{3}} - 20 &= 0 \\
4x^{\frac{1}{3}} &= 20 && \mid :4 \\
x^{\frac{1}{3}} &= 5 && \mid (\,)^3 \\
(x^{\frac{1}{3}})^3 &= 5^3 \\
x &= 125
\end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

b) Eksponentti $\frac{2}{5}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku $x > 0$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{D}(5x^{\frac{2}{5}} - 16x) = 5 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} - 16 \cdot 1 = 2x^{-\frac{3}{5}} - 16$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2x^{-\frac{3}{5}} - 16 &= 0 \\
2x^{-\frac{3}{5}} &= 16 && \Big| :2 \\
\underbrace{x^{-\frac{3}{5}}}_{>0} &= \underbrace{8}_{>0} && \Big| (\,)^{-\frac{5}{3}} \\
(x^{-\frac{3}{5}})^{-\frac{5}{3}} &= 8^{-\frac{5}{3}} \\
x^{-\frac{3}{5}\cdot(-\frac{5}{3})} &= \frac{1}{8^{\frac{5}{3}}} \\
x^1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{8^5}} \\
x &= \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus a) $x = 125$ b) $x = \frac{1}{32}$

79

a) Eksponentti $\frac{2}{3}$ ei ole kokonaisluku, joten yhtälö on määritelty, kun kantaluku $x > 0$.

$$4 - x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\underbrace{x^{\frac{2}{3}}}_{>0} = \underbrace{4}_{>0} \quad \Big| \, (\,)^{\frac{3}{2}}$$

$$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3$$

$$x^1 = 2^3$$

$$x = 8$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

b) Eksponentti $\frac{4}{3}$ ei ole kokonaisluku, joten yhtälö on määritelty, kun kantaluku $x > 0$.

$$2x - x^{\frac{4}{3}} = 0$$

$$2x - x^{1\frac{1}{3}} = 0$$

$$2x - x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x \cdot (2 - x^{\frac{1}{3}}) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 - x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \Big|\, (\ )^3$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3$$

$$x = 8$$

Saaduista ratkaisuista $x = 8$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

c) Pariton juurifunktio on määritelty kaikilla juurrettavan reaaliarvoilla, joten yhtälö on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla.

Muokataan yhtälöä.

$$
\begin{aligned}
2x - \sqrt[3]{x^4} &= 0 \\
\sqrt[3]{x^4} &= 2x \qquad \big| \, ()^3 \\
(\sqrt[3]{x^4})^3 &= (2x)^3 \\
x^4 &= 8x^3 \\
x^4 - 8x^3 &= 0 \\
x^3 \cdot (x-8) &= 0 \\
x^3 &= 0 \text{ tai } x - 8 = 0 \\
x &= 0 \text{ tai } \quad x = 8
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $x = 8$
b) $x = 8$
c) $x = 0$ tai $x = 8$

80

Eksponentti $\frac{5}{2}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty kantaluvun $4x - 8$ positiivisilla arvoilla. Selvitetään määrittelyehto.

$$
\begin{aligned}
4x - 8 &> 0 \\
4x &> 8 \quad |:4 \\
x &> 2
\end{aligned}
$$

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{D}(4x-8)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}(4x-8)^{\frac{5}{2}-1} \cdot 4 = 10(4x-8)^{\frac{3}{2}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 2$.

b) Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
10(4x-8)^{\frac{3}{2}} &= 0 \qquad |:10 \\
(4x-8)^{\frac{3}{2}} &= 0
\end{aligned}
$$

Murtopotenssin arvojoukko on $]0, \infty[$, joten se ei voi saada arvoa 0. Siten yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

Vastaus a) $f'(x) = 10(4x-8)^{\frac{3}{2}}$, kun $x > 2$
b) derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia

81

a) $D(\sqrt[4]{x}) = D(x^{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$

$$= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

b) $D(\sqrt[6]{2x}) = D(2x)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}(2x)^{\frac{1}{6}-1}\cdot 2$

$$= \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x)^{\frac{5}{6}}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[6]{(2x)^5}} = \frac{1}{3\sqrt[6]{2^5x^5}} = \frac{1}{3\sqrt[6]{32x^5}}$$

Vastaus

a) $D(\sqrt[4]{x}) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, kun $x > 0$

b) $D(\sqrt[6]{2x}) = \frac{1}{3\sqrt[6]{32x^5}}$, kun $x > 0$

82

a) Juurrettava $x^2 - 5 > 0$, kun $x > \sqrt{5}$, joten funktion lauseke voidaan esittää murtopotenssimuodossa.

$$\sqrt{x^2 - 5} = (x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\mathrm{D}(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > \sqrt{5}$.

b) Juurrettava on positiivinen, kun $x > 1$, joten funktion lauseke voidaan esittää murtopotenssimuodossa. Määritetään derivaattafunktio.

$$\mathrm{D}\sqrt{\frac{8x-1}{3}} = \mathrm{D}\left(\frac{8x-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{8x-1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{8x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{8x-1}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 1$.

Vastaus a) $\mathrm{D}\sqrt{x^2 - 5} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$, kun $x > \sqrt{5}$

b) $\mathrm{D}\sqrt{\frac{8x-1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{8x-1}}$, kun $x > 1$

83

Juurrettava $\frac{x}{x+1}$ on positiivinen kohdan $x=1$ ympäristössä, joten voidaan muokata funktion lauseketta käyttäen murtopotenssia.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

Käytetään yhdistetyn funktion ja osamäärän derivointisääntöjä derivaattafunktion laskemiseksi.

$$f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\mathrm{D}\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\mathrm{D}x\cdot(x+1)-x\cdot\mathrm{D}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}-2}}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x+1)^{-\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{(x+1)^3}}$$

Sijoitetaan arvo $x = 1$ derivaattafunktion lausekkeeseen.

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}\sqrt{(1+1)^3}} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2^3}} = \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\overset{\sqrt{2})}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Vastaus

$$f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

84

a) Juuren kertaluku 7 on pariton, joten voidaan soveltaa potenssin derivointisääntöä kaikkialla paitsi juurrettavan nollakohdassa $x \neq 1$.

$$g'(x) = \mathrm{D}\sqrt[7]{x-1} = \mathrm{D}(x-1)^{\frac{1}{7}}$$
$$= \frac{1}{7}(x-1)^{\frac{1}{7}-1} \cdot 1 = \frac{1}{7}(x-1)^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{(x-1)^6}}$$

b) Juuren kertaluku 3 on pariton, joten voidaan soveltaa potenssin derivointisääntöä kaikkialla paitsi juurrettavan nollakohdissa.

Määritetään juurrettavan nollakohdat.

$$2x^2 - x = 0$$
$$x(2x-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$ ja $x \neq \frac{1}{2}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}(10\sqrt[5]{2x^2 - x}) \\
&= \mathrm{D}(10(2x^2 - x)^{\frac{1}{5}}) \\
&= 10 \cdot \frac{1}{5}(2x^2 - x)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (2 \cdot 2x - 1) \\
&= 2(2x^2 - x)^{-\frac{4}{5}}(4x - 1) \\
&= \frac{8x - 2}{\sqrt[5]{(2x^2 - x)^4}}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $g'(x) = \dfrac{1}{7\sqrt[7]{(x-1)^6}}$, kun $x \neq 1$

b) $f'(x) = \dfrac{8x - 2}{\sqrt[5]{(2x^2 - x)^4}}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq \dfrac{1}{2}$

85

Tangentin kulmakerroin on funktion $x\sqrt[3]{x^2-3}$ derivaatan arvo kohdassa $x=-2$.

Juurrettava x^2-3 on erisuuri kuin 0 kohdan $x=-2$ ympäristössä, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

Määritetään laskimella funktion $x\sqrt[3]{x^2-3}$ derivaattafunktio kohdan $x=-2$ ympäristössä.

$$\mathrm{D}(x\sqrt[3]{x^2-3})=\frac{5x^2-9}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$$

Sijoitetaan derivaattafunktioon arvo $x=-2$ tangentin kulmakertoimen k määrittämiseksi.

$$k=y'(-2)=\frac{5\cdot(-2)^2-9}{3\sqrt[3]{((-2)^2-3)^2}}=\frac{11}{3}$$

Määritetään käyrän y-koordinaatti kohdassa $x=-2$.

$$y=(-2)\sqrt[3]{(-2)^2-3}=-2$$

Sijoitetaan kulmakerroin $k=\frac{11}{3}$ ja käyrän pisteen koordinaatit $(x_0, y_0)=(-2,-2)$ suoran yhtälön lausekkeeseen $y-y_0=k(x-x_0)$.

$$y-(-2)=\frac{11}{3}(x-(-2)) \quad \Big| \cdot 3$$
$$3y+6=11x+22$$
$$11x-3y+16=0$$

Vastaus $11x-3y+16=0$ (eli $y=\frac{11}{3}x+\frac{16}{3}$)

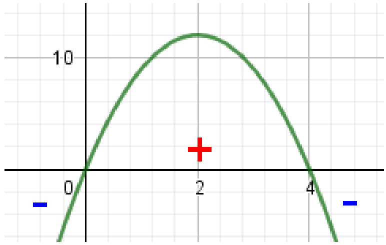
Huomaa! Suoran yhtälön ratkaistu muoto saadaan ratkaisemalla muuttujan y suhteen.

$$11x-3y+16=0$$
$$-3y=-11x-16 \quad \Big| :(-3)$$
$$y=\frac{11}{3}x+\frac{16}{3}$$

86

Funktio f on määritelty, kun juurrettava on epänegatiivinen.
Ratkaistaan määrittelyehto $12x - 3x^2 \geq 0$.
Määritetään juurrettavan nollakohdat ja hahmotellaan kuvaaja.

$$12x - 3x^2 = 0$$
$$3x(4 - x) = 0$$
$$3x = 0 \quad |:3 \quad \text{tai} \quad 4 - x = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 4$$



Määrittelyehto on $0 \leq x \leq 4$.

Funktio saa välillä $[0, 4]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välille $]0, 4[$ kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\sqrt{12x - 3x^2} = \mathrm{D}(12x - 3x^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(12x - 3x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{D}(12x - 3x^2) \\
&= \frac{1}{2}(12x - 3x^2)^{-\frac{1}{2}}(12 - 3 \cdot 2x) \\
&= \frac{12 - 6x}{2\sqrt{12x - 3x^2}} \quad ^{(2} \\
&= \frac{6 - 3x}{\sqrt{12x - 3x^2}}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{6-3x}{\sqrt{12x-3x^2}} &= 0 && \Big| \cdot \sqrt{12x-3x^2} \quad (\neq 0) \\
6-3x &= 0 \\
3x &= 6 && \Big| :3 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Nollakohta kuuluu tarkasteluvälille $]0, 4[$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(0) = \sqrt{12 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2} = \sqrt{0} = 0$ pienin arvo

$f(4) = \sqrt{12 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2} = \sqrt{0} = 0$ pienin arvo

$f(2) = \sqrt{12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2} = \sqrt{24-12} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ suurin arvo

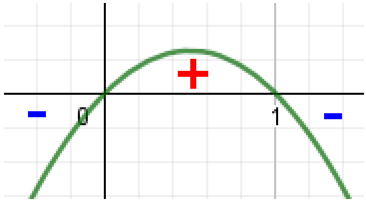
Vastaus

suurin arvo $2\sqrt{3}$, pienin arvo 0

87

Funktio f on määritelty, kun juurrettava $x - x^2$ on epänegatiivinen. Ratkaistaan määrittelyehto $x - x^2 \geq 0$ selvittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$
\begin{aligned}
x - x^2 &= 0 \\
x(1 - x) &= 0 \\
x = 0 \text{ tai } 1 - x &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$



Funktion f määrittelyehto on $0 \leq x \leq 1$.

Funktion mahdolliset ääriarvokohdat ovat määrittelyvälin $[0,1]$ päätepisteet ja välillä $]0,1[$ olevat derivaattafunktion nollakohdat.

Määritetään derivaattafunktio laskimella.

$$f'(x) = \mathrm{D}(16x\sqrt{x - x^2}) = \frac{24x - 32x^2}{\sqrt{x - x^2}}, \text{ missä } 0 \leq x \leq 1.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{24x - 32x^2}{\sqrt{x - x^2}} = 0 \qquad \Big| \cdot \sqrt{x - x^2} \ \ (\neq 0)$$

$$24x - 32x^2 = 0$$

$$4x(6 - 8x) = 0$$

$$4x = 0 \quad \Big| :4 \quad \text{tai} \quad 6 - 8x = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad\qquad 8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Nollakohdat kuuluvat välille $]0,1[$. Lasketaan funktion arvot määrittelyvälin päätepisteissä ja derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(0) = 16 \cdot 0\sqrt{0 - 0^2} = 0$ pienin arvo

$f(1) = 16 \cdot 1\sqrt{1 - 1^2} = 0$ pienin arvo

$f(\frac{3}{4}) = 16 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 3\sqrt{3}$ suurin arvo

Varmistetaan ääriarvojen laatu kulkukaavion avulla.
Derivaattafunktio on jatkuva, joten testataan derivaatan merkit.

	0		$\frac{3}{4}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘	
	min		maks		min

x	$f'(x)$
$0,5$	$+8$
$0,9$	$-14,4$

Vastaus

a) minimikohdat $x = 0$ ja $x = 1$, maksimikohta $x = \frac{3}{4}$

b) suurin arvo $3\sqrt{3}$, pienin arvo 0

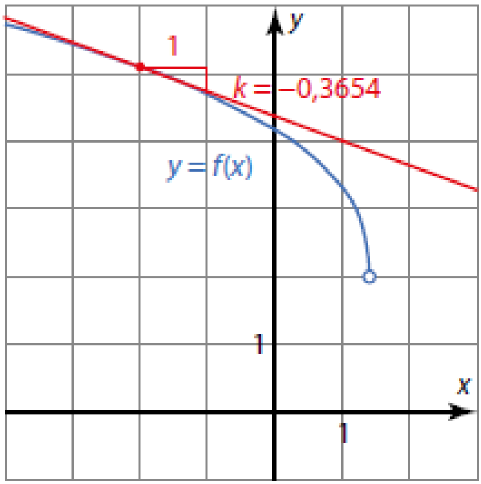
88

a) Eksponentti $\frac{2}{5}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio f on määritelty, kun kantaluku $7-5x>0$. Ratkaistaan määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 7-5x &> 0 \\ -5x &> -7 \quad \big| :(-5) \\ x &< \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Funktion f määrittelyehto on $x<\frac{7}{5}$.

b) Funktion f derivaatta kohdassa -2 on kuvaajalle kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.



$$f'(-2) \approx -0{,}37$$

Vastaus

a) määrittelyehto $x<\frac{7}{5}$

b) $f'(-2) \approx -0{,}37$

89

a) Potenssifunktio, jonka eksponentti on positiivinen kokonaisluku, on määritelty kaikille kantaluvun reaaliarvoille. Määrittelyjoukko on siten $\mathbf{R}$.

b) Potenssifunktio, jonka eksponentti on negatiivinen kokonaisluku, on määritelty kaikille kantaluvun reaaliarvoille paitsi arvolle 0. Määrittelyjoukosta täytyy siis jättää pois muuttujan x arvo, jolle pätee $6-2x=0$.

$$
\begin{aligned}
6-2x &= 0 \\
-2x &= -6 \quad \Big| :(-2) \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}\setminus\{3\}$.

c) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille. Määrittelyehdoksi saadaan $6-2x>0$ eli $x<3$.
Määrittelyjoukko on $]-\infty,3[$.

d) $\boldsymbol{\pi}$ ei ole kokonaisluku, joten potenssifunktio on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille. Määrittelyehdoksi saadaan $6-2x>0$ eli $x<3$.
Määrittelyjoukko on $]-\infty,3[$.

Vastaus

a) $\mathbf{R}$
b) $\mathbf{R}\setminus\{3\}$
c) $]-\infty,3[$
d) $]-\infty,3[$

90

a) Pariton juurifunktio on määritelty kaikille juurrettavan reaalilukuarvoille, joten määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$.

b) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille reaalilukuarvoille, joten määrittelyehdoksi saadaan $3x-9\geq 0$ eli $x\geq 3$. Määrittelyjoukko on siis $[3,\infty[$.

c) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille.
Saadaan määrittelyehto $3x-9>0$ eli $x>3$.
Määrittelyjoukko on siis $]3,\infty[$.

d) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty positiivisille kantaluvun arvoille.
Saadaan määrittelyehto $3x^2+9>0$ eli $x^2>-3$.
Koska $x^2\geq 0$ kaikilla muuttujan arvoilla, niin määrittelyehto toteutuu aina.
Funktion f määrittelyjoukoksi saadaan siis $\mathbf{R}$.

Vastaus
a) $\mathbf{R}$
b) $[3,\infty[$
c) $]3,\infty[$
d) $\mathbf{R}$

91

a) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty kantaluvun positiivisille arvoille.
Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Käytetään potenssin derivointisääntöä.

$$f'(x) = \mathrm{D}(\frac{1}{3}x^{-\frac{3}{5}} + \frac{1}{5}x) = \frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{5})x^{-\frac{3}{5}-1} + \frac{1}{5}\cdot 1 = -\frac{1}{5}x^{-\frac{8}{5}} + \frac{1}{5}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 0$.
Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$-\frac{1}{5}x^{-\frac{8}{5}} + \frac{1}{5} = 0$$

$$-\frac{1}{5}x^{-\frac{8}{5}} = -\frac{1}{5} \quad \Big|\cdot(-5)$$

$$x^{-\frac{8}{5}} = 1 \quad \Big|\,(\;)^{-\frac{5}{8}}$$

$$(x^{-\frac{8}{5}})^{-\frac{5}{8}} = 1^{-\frac{5}{8}}$$

$$x^{(-\frac{8}{5})\cdot(-\frac{5}{8})} = \frac{1}{1^{\frac{5}{8}}}$$

$$x^1 = \frac{1}{\sqrt[8]{1^5}}$$

$$x = 1$$

Saatu ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

b) Funktio on määritelty, kun $6x+3>0$.

$$6x+3>0$$
$$6x>-3 \quad \Big| :6$$
$$x>-\frac{1}{2}$$

Määritetään derivaattafunktio käyttämällä potenssin ja yhdistetyn funktion derivointisääntöjä.

$$f'(x)=\mathrm{D}(2(6x+3)^{\frac{1}{4}})=2\cdot\frac{1}{4}(6x+3)^{\frac{1}{4}-1}\cdot 6=3(6x+3)^{-\frac{3}{4}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x>-\frac{1}{2}$.

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$3(6x+3)^{-\frac{3}{4}}=0 \quad \Big| :3$$
$$(6x+3)^{-\frac{3}{4}}=0$$

Kun sen eksponentti ei ole kokonaisluku, niin potenssifunktion arvojoukko on $]0,\infty[$. Siten yhtälön vasen puoli on positiivinen kaikilla $x>-\frac{1}{2}$, eikä yhtälöllä ole ratkaisuja.

Vastaus

a) $x=1$

b) ei nollakohtia

92

a) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty kantaluvun positiivisilla arvoilla.
Funktio f on määritelty, kun

$$12-5x>0$$
$$-5x>-12 \quad \Big| :(-5)$$
$$x<\frac{12}{5}.$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}(5(12-5x)^{\frac{8}{5}}+320x)=5\cdot\frac{8}{5}(12-5x)^{\frac{8}{5}-1}\cdot(-5)+320$$
$$=-40(12-5x)^{\frac{3}{5}}+320$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x<\frac{12}{5}$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-40(12-5x)^{\frac{3}{5}}+320=0$$
$$-40(12-5x)^{\frac{3}{5}}=-320 \quad \Big| :(-40)$$
$$(12-5x)^{\frac{3}{5}}=8$$

Yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa puolittain potenssiin $\frac{5}{3}$ yhtälön ratkaisemiseksi.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(12-5x)^{\frac{3}{5}}}_{>0} &= \underbrace{8}_{>0} \qquad \Big|\, (\ )^{\frac{5}{3}} \\
((12-5x)^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} &= 8^{\frac{5}{3}} \\
(12-5x)^{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}} &= (\sqrt[3]{8})^{5} \\
(12-5x)^{1} &= 2^{5} \\
12-5x &= 32 \\
-5x &= 20 \qquad \big|\, :(-5) \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

Nollakohta $x=-4$ kuuluu derivaattafunktion määrittelyvälille $]-\infty,\frac{12}{5}[$.

b) Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty kantaluvun positiivisilla arvoilla.

Funktio f on määritelty, kun $3x-1>0$ eli $x>\frac{1}{3}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{x}{4}-(3x-1)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}(3x-1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 3=\frac{1}{4}-2(3x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x>\frac{1}{3}$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{1}{4}-2(3x-1)^{-\frac{1}{3}}=0$$

$$-2(3x-1)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4} \qquad \big| :(-2)$$

$$(3x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}$$

Koska yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, niin voidaan korottaa puolittain potenssiin -3 yhtälön ratkaisemiseksi.

$$\underbrace{(3x-1)^{-\frac{1}{3}}}_{>0}=\underbrace{\frac{1}{8}}_{>0} \qquad \big|\ (\ )^{-3}$$

$$((3x-1)^{-\frac{1}{3}})^{-3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$$

$$(3x-1)^{-\frac{1}{3}\cdot(-3)}=8^3$$

$$(3x-1)^1=512$$

$$3x-1=512$$

$$3x=513 \qquad \big| :3$$

$$x=171$$

Nollakohta $x=171$ kuuluu derivaattafunktion määrittelyvälille $]\frac{1}{3},\infty[$.

Vastaus a) $x=-4$
b) $x=171$

93

a) Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$. Muokataan yhtälöä.

$$18 - 2x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$-2x^{\frac{2}{3}} = -18 \quad \Big| : (-2)$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 9$$

Yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, kun $x > 0$, joten se voidaan korottaa puolittain potenssiin $\frac{3}{2}$.

$$\underbrace{x^{\frac{2}{3}}}_{>0} = \underbrace{9}_{>0} \quad \Big| \,(\;)^{\frac{3}{2}}$$

$$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$$

$$x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3$$

$$x^1 = 3^3$$

$$x = 27$$

b) Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Havaitaan, että $x^{\frac{4}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$18x - 2x^{\frac{4}{3}} = 0$$
$$18x - 2x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 0$$
$$x(18 - 2x^{\frac{1}{3}}) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 18 - 2x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$18 - 2x^{\frac{1}{3}} = 0$$
$$-2x^{\frac{1}{3}} = -18 \qquad \big| : (-2)$$
$$x^{\frac{1}{3}} = 9 \qquad \big| \, (\,)^3$$
$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = 9^3$$
$$x = 729$$

Ratkaisuista vain $x = 729$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

c) Yhtälö on määritelty kaikilla muuttujan reaaliarvoilla.

Muokataan yhtälöä.

$$18x - 2\sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$18x = 2\sqrt[3]{x^4} \quad \Big| :2$$

$$9x = \sqrt[3]{x^4} \quad \Big| (\,)^3$$

$$(9x)^3 = (\sqrt[3]{x^4})^3$$

$$729x^3 = x^4$$

$$729x^3 - x^4 = 0$$

$$x^3(729 - x) = 0$$

$$x^3 = 0 \text{ tai } 729 - x = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 729$$

Vastaus

a) $x = 27$

b) $x = 729$

c) $x = 0$ tai $x = 729$

94

Potenssifunktio, jonka eksponentti ei ole kokonaisluku, on määritelty positiivisilla kantaluvun arvoilla. Siten funktion f määrittelyehto on $4x-6>0$, mistä saadaan ratkaistua $x>\frac{3}{2}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{D}(4x-6)^{\frac{7}{6}}=\frac{7}{6}(4x-6)^{\frac{7}{6}-1}\cdot 4=\frac{14}{3}(4x-6)^{\frac{1}{6}}$$

Kun eksponentti ei ole kokonaisluku, niin potenssifunktion arvojoukko on $]0,\infty[$. Arvojoukko pysyy samana, kun funktio kerrotaan luvulla $\frac{14}{7}$. Täten derivaattafunktio saa vain positiivisia arvoja.

Koska derivaatta $f'(x)=\frac{14}{3}(4x-6)^{\frac{1}{6}}>0$ koko määrittelyjoukossa $x>\frac{3}{2}$, niin funktio f on aidosti kasvava. □

95

a) Epäyhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Muokataan epäyhtälöä.

$$3x^{\frac{1}{3}} \geq 6 \quad \Big| :3$$

$$x^{\frac{1}{3}} \geq 2$$

Korotetaan epäyhtälö puolittain potenssiin 3.

Koska funktio x^3 on aidosti kasvava, niin epäyhtälömerkin suunta säilyy samana.

$$x^{\frac{1}{3}} \geq 2 \quad \Big| (\ )^3$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 \geq 2^3$$

$$x^{\frac{1}{3}\cdot 3} \geq 8$$

$$x \geq 8$$

Saatu ratkaisu toteuttavaa epäyhtälön määrittelyehdon $x > 0$.

b) Epäyhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Muokataan epäyhtälöä.

$$3x^{-\frac{4}{3}} - 48 \geq 0$$

$$3x^{-\frac{4}{3}} \geq 48 \qquad \Big|\, : 3\ (> 0)$$

$$x^{-\frac{4}{3}} \geq 16$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa epäyhtälö puolittain potenssiin $-\dfrac{3}{4}$.

Koska funktio $x^{-\frac{3}{4}}$ on aidosti vähenevä, niin epäyhtälömerkin suunta vaihtuu.

$$\underbrace{x^{-\frac{4}{3}}}_{>0} \geq \underbrace{16}_{>0} \qquad \Big|\, (\ )^{-\frac{3}{4}}$$

$$(x^{-\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{4}} \leq 16^{-\frac{3}{4}}$$

$$x^{(-\frac{4}{3})\cdot(-\frac{3}{4})} \leq \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$$

$$x^{1} \leq \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^{3}}$$

$$x \leq \frac{1}{8}$$

Yhdistämällä saatu ratkaisu epäyhtälön määrittelyehdon $x > 0$ kanssa saadaan ratkaisuksi $0 < x \leq \dfrac{1}{8}$.

Vastaus a) $x \geq 8$ b) $0 < x \leq \dfrac{1}{8}$

96

Funktio on aidosti kasvava, jos sen derivaattafunktio on positiivinen (tai nolla yksittäisissä kohdissa) funktion koko määrittelyjoukossa. Vastaavasti funktio on aidosti vähenevä, jos derivaattafunktio on negatiivinen (tai nolla yksittäisissä kohdissa) koko määrittelyjoukossa.

Määritetään funktion $f(x) = x^r$, missä $x > 0$, derivaattafunktio potenssin derivointisäännön avulla.

$$f'(x) = \mathrm{D}(x^r) = rx^{r-1}$$

Kun $x > 0$, niin myös $x^{r-1} > 0$ kaikilla vakion r arvoilla.

Kun $r > 0$, niin $rx^{r-1} > 0$, ja funktio on aidosti kasvava.

Kun $r < 0$, niin $rx^{r-1} < 0$, ja funktio on aidosti vähenevä. □

97

a) Juurrettava on positiivinen, kun $x > 0$, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$\mathrm{D}\sqrt{5x} = \mathrm{D}(5x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(5x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \mathrm{D}(5x)$$
$$= \frac{1}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(5x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

b) Juurrettava on positiivinen, kun $x > 0$, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$\mathrm{D}\sqrt{x^2 + x} = \mathrm{D}(x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \mathrm{D}(x^2 + x)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (2x + 1)$$
$$= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Vastaus

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$, kun $x > 0$

b) $\dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$, kun $x > 0$

98

a) Juurifunktio on pariton, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä kaikilla muuttujan arvoilla, joilla juurrettava $x^2 + 1 \neq 0$.
Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin ehto $x^2 + 1 \neq 0$ toteutuu kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\mathrm{D}\sqrt[3]{x^2+1} = \mathrm{D}(x^2+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \mathrm{D}(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3}\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

Lausekkeen nimittäjällä ei ole nollakohtia, joten derivaattafunktio on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

b) Juurifunktio on pariton, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä kaikilla muuttujan arvoilla, joilla juurrettava $4x^2 - 16 \neq 0$.
Määritetään juurrettavan nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16 &= 0 \\ 4x^2 &= 16 \quad \big| :4 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

$x = 2$ tai $x = -2$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x \neq 2$ ja $x \neq -2$.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} D\sqrt[3]{4x^2 - 16} &= D(4x^2 - 16)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(4x^2 - 16)^{\frac{1}{3}-1} \cdot D(4x^2 - 16) \\ &= \frac{1}{3}(4x^2 - 16)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8x = \frac{8x}{3}\frac{1}{(4x^2 - 16)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 16)^2}} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

b) $\dfrac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 16)^2}}$, kun $x \neq 2$ ja $x \neq -2$

99

a) Juurrettavat ovat positiivisia, kun $x > 0$, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\sqrt{x+\sqrt{x}} &= \mathrm{D}(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}-1}\cdot \mathrm{D}(x+x^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(x+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}) \\
&= \frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}
\end{aligned}
$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 0$.

b) Funktio $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Parittoman juurifunktion derivoimiseksi voidaan käyttää murtopotenssimuotoa, koska juurrettava on eri suuri kuin nolla.

$$\mathrm{D}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\mathrm{D}(x-1)\cdot\sqrt[3]{x}-(x-1)\cdot\mathrm{D}\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \frac{1\cdot x^{\frac{1}{3}}-(x-1)\cdot\mathrm{D}x^{\frac{1}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$\overset{x^{\frac{2}{3}})}{=} \frac{x^{\frac{1}{3}}-(x-1)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}-(x-1)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}-(x-1)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{x^1-(x-1)\cdot\frac{1}{3}x^0}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{x-(x-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^{1\frac{1}{3}}}$$

$$\overset{3)}{=} \frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{x^{1+\frac{1}{3}}} = \frac{2x+1}{3x\cdot x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2x+1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

Derivaattafunktio on määritelty kaikilla $x \neq 0$.

Vastaus

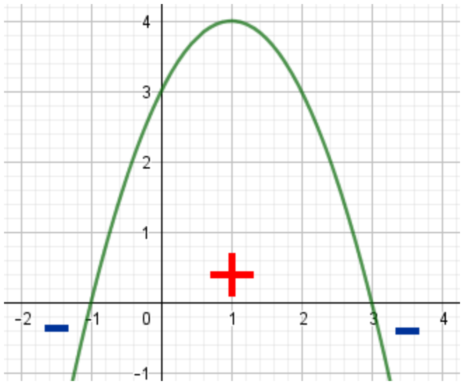
a) $\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, kun $x>0$ b) $\dfrac{2x+1}{3x\sqrt[3]{x}}$, kun $x\neq 0$

100

Funktio f on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla. Ratkaistaan epäyhtälö $-x^2+2x+3\geq 0$ määrittämällä juurrettavan nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$-x^2+2x+3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{2\pm 4}{2}$$
$$=1\pm 2$$



$x=1+2=3$ tai $x=1-2=-1$

Määrittelyehdoksi saadaan $-1\leq x\leq 3$.

Funktion mahdolliset ääriarvokohdat ovat sen derivaattafunktion nollakohtia tai määrittelyvälin päätepisteitä.

Määritetään funktion f derivaattafunktio, kun $-1<x<3$. Tällöin juurrettava on positiivinen, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\sqrt{-x^2+2x+3} \\
&= \mathrm{D}(-x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(-x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}-1}\cdot \mathrm{D}(-x^2+2x+3) \\
&= \frac{1}{2}(-x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x^2+2) \\
&= \frac{1}{(-x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-x^2+1) \\
&= \frac{-x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}
\end{aligned}
$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $-1 < x < 3$.

Derivaattafunktion nollakohdat ovat sen lausekkeen osoittajan nollakohtia. Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
-x^2+1 &= 0 \\
x^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$x = 1$ tai $x = -1$

Näistä vain $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon $-1 < x < 3$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$f(-1)=\sqrt{-(-1)^2+2\cdot(-1)+3}=\sqrt{-1-2+3}=\sqrt{0}=0$ pienin

$f(1)=\sqrt{-3^2+2\cdot 3+3}=\sqrt{-9+6+3}=\sqrt{0}=0$ pienin

$f(1)=\sqrt{-1^2+2\cdot 1+3}=\sqrt{-1+2+3}=\sqrt{4}=2$ suurin

Vastaus
suurin arvo 2, pienin arvo 0

101

Juurrettava on positiivinen, kun

$$
\begin{aligned}
2x+8 &> 0 \\
2x &> -8 \\
x &> -4
\end{aligned}
$$

Tällöin voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\sqrt{2x+8} = \mathrm{D}(2x+8)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(2x+8)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 = (2x+8)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2x+8}}
\end{aligned}
$$

Derivaattafunktio on määritelty ja positiivinen, kun $x > -4$. Täten funktio f on aidosti kasvava välillä $]-4,\infty[$.

Yksittäinen kohta $x = 4$ ei vaikuta funktion monotonisuuteen, joten funktio f on aidosti kasvava myös koko määrittelyvälillä $[4,\infty[$. □

102

a) $a_1 = 1 - \sqrt{1+4} = 1 - \sqrt{5}$

$a_2 = 2 - \sqrt{2+4} = 2 - \sqrt{6}$

$a_3 = 3 - \sqrt{3+4} = 3 - \sqrt{7}$

$a_4 = 4 - \sqrt{4+4} = 4 - \sqrt{8}$

b) Lukujono on aidosti kasvava, jos $a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Tutkitaan funktiota $f(x) = x - \sqrt{x+4}$, missä $x \geq 1$.

Juurrettava saa positiivisia arvoja kaikilla $x \geq 1$, joten voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(x - \sqrt{x+4}) &= \mathrm{D}(x - (x+4)^{\frac{1}{2}}) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}-1} \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+4}}
\end{aligned}$$

Derivaattafunktio on positiivinen, kun

$$1-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}>0$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}>-1 \qquad \Big| \cdot(-2\sqrt{x+4})\ \ (<0)$$

$$1<2\sqrt{x+4}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+4}}_{\geq 0} > \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 0} \qquad \Big| (\ )^2$$

$$(\sqrt{x+4})^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x+4>\frac{1}{2^2}$$

$$x>\frac{1}{4}-4$$

$$x>-\frac{15}{4}$$

Täten derivaattafunktio on positiivinen erityisesti kaikilla $x \geq 1$.
Funktio f on siten aidosti kasvava, kun $x \geq 1$.

Lukujono $a_n = n-\sqrt{n+4}$ on myös aidosti kasvava, sillä $a_n = f(n)$, joten $a_{n+1} = f(n+1) > f(n) = a_n$ kaikilla positiivisilla kokonaislukuarvoilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. $\square$

103

Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2 + y^2}$ Pythagoraan lauseen nojalla. Sijoitetaan paraabelin y-koordinaatin lauseke $y = 4 - x^2$ etäisyyden lausekkeeseen, ja saadaan paraabelin pisteen etäisyyttä origosta kuvaavaksi funktioksi $f(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2}$.

$x^2 \geq 0$ ja $(4 - x^2)^2 \geq 0$ aina, ja koska nämä lausekkeet eivät ole yhtaikaa nollia, niin $x^2 + (4 - x^2)^2 > 0$ aina.

Funktio f on siis määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Funktion f ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia.
Derivoidaan laskimella.

$$f'(x) = \mathrm{D}\sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2} = \frac{2x - 4x(4 - x^2)}{2\sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2}}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2x - 4x(4 - x^2)}{2\sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2}} = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Lasketaan pisteideen etäisyys origosta derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(0)=\sqrt{0^2+(4-0^2)^2}=\sqrt{4^2}=4$$

$$f(\pm\frac{\sqrt{14}}{2})=\sqrt{\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+\left(4-\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}\approx 1{,}94 \text{ pienin}$$

Lasketaan paraabelin kuvaajan y -koordinaatti kohdissa $x=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

$$y=4-\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=4-\frac{14}{4}=\frac{1}{2}$$

Etäisyys origosta saa pienimmän arvonsa $\frac{\sqrt{15}}{2}$ paraabelin kuvaajan pisteissä $(\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{1}{2})$.

Vastaus

pisteet $(\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{1}{2})$, lyhin etäisyys $\frac{\sqrt{15}}{2}$

104

Funktio g on määritelty kaikilla $x > -3$.
Määritetään funktion g derivaattafunktio erotusosamäärän raja-arvona.

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Sijoitetaan funktion g lauseke $g(x) = \sqrt{3+x}$.

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+(x+h)} - \sqrt{3+x}}{h}$$

Muokataan erotusosamäärän lauseketta raja-arvon määrittämiseksi.

$$
\begin{aligned}
&{}^{\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})}\frac{\sqrt{3+(x+h)}-\sqrt{3+x}}{h} \\
&=\frac{(\sqrt{3+(x+h)}-\sqrt{3+x})(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})}{h(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})} \\
&=\frac{(\sqrt{3+(x+h)})^2-(\sqrt{3+x})^2}{h(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})} \\
&=\frac{(3+(x+h))-(3+x)}{h(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})} \\
&=\frac{3+x+h-3-x}{h(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})} \\
&=\frac{h}{h(\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x})}{}^{(h} \\
&=\frac{1}{\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x}}
\end{aligned}
$$

Lasketaan erotusosamäärän lausekkeen raja-arvo.

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+(x+h)}+\sqrt{3+x}} \\
&=\frac{1}{\sqrt{3+x+0}+\sqrt{3+x}} \\
&=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}
\end{aligned}
$$

Vastaus $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}$, kun $x>-3$

105

a) Kun $x > 0$, niin voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$f'(x) = \mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \mathrm{D}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \square$$

b) Kun $x < 0$, niin $-x > 0$, ja funktion f lauseke voidaan esittää murtopotenssimuodossa seuraavasti:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-(-x)} = -\sqrt[n]{-x} = -(-x)^{\frac{1}{n}}, \text{ missä } x < 0.$$

Sovelletaan tähän muotoon potenssin derivointisääntöä. Kun $x < 0$, niin

$$f'(x) = \mathrm{D}(-(-x)^{\frac{1}{n}}) = -\mathrm{D}(-x)^{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \mathrm{D}(-x)$$

$$= -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (-1) = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}(-x)^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{(-x)^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}}.$$

Kun n on pariton, niin $n-1$ on parillinen, ja $(-x)^{n-1} = x^{n-1}$.

Siis $f'(x) = \mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, missä $x > 0$ ja $n = 1, 3, 5, \ldots$. $\square$