1

a) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

b) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25} = \sqrt{25} = 5$

c) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

2

a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$

3

a) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

b) $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt{a^3}$

c) $a^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a}}$

d) $a^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

4

a) $\frac{1}{a} = a^{-1}$

b) $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$

c) $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt[2]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$

5

a) $\sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{10^5} = \sqrt[2]{10^5} = 10^{\frac{5}{2}}$

c) $\sqrt[5]{100} = \sqrt[5]{10^2} = 10^{\frac{2}{5}}$

d) $\sqrt[12]{1000000} = \sqrt[12]{10^6} = 10^{\frac{6}{12}} = 10^{\frac{1}{2}}$

6

a) $3\sqrt{3} = 3\sqrt[2]{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

b) $9\sqrt{3} = 9\sqrt[2]{3} = 9 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$

c) $\dfrac{1}{27\sqrt{3}} = \dfrac{1}{27\sqrt[2]{3}} = \dfrac{1}{27 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3^{3+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3^{\frac{7}{2}}} = 3^{-\frac{7}{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{3^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{3^7}} = \dfrac{1}{3^{\frac{7}{2}}} = 3^{-\frac{7}{2}}$

7

a) $\sqrt[6]{25} = 25^{\frac{1}{6}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{2\cdot\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt[2]{5}} = \dfrac{5^1}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{1-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt[12]{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{12}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{12}\cdot 4} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

8

a) $k\sqrt{k} = k\sqrt[2]{k} = k \cdot k^{\frac{1}{2}} = k^{1+\frac{1}{2}} = k^{\frac{3}{2}} \neq k^{\frac{5}{2}}$

b) $\sqrt{k^5} = \sqrt[2]{k^5} = k^{\frac{5}{2}}$

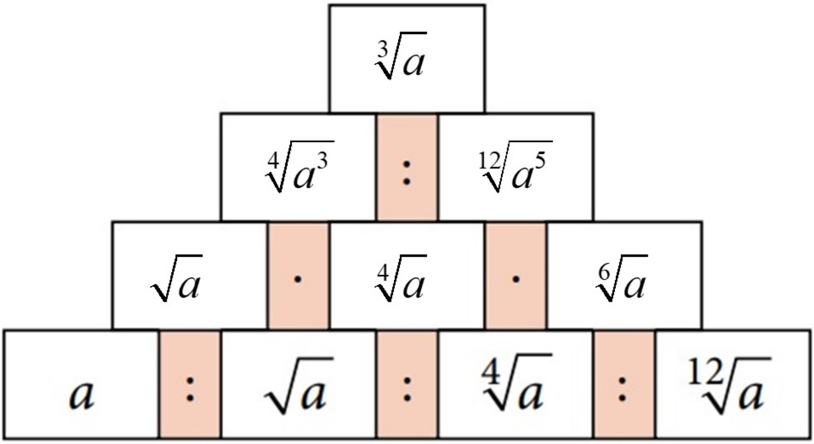
c) $\sqrt[5]{k^2} = k^{\frac{2}{5}} \neq k^{\frac{5}{2}}$

d) $\left(\sqrt{k}\right)^5 = \left(\sqrt[2]{k}\right)^5 = \left(k^{\frac{1}{2}}\right)^5 = k^{\frac{1}{2}\cdot 5} = k^{\frac{5}{2}}$

e) $k^2\sqrt{k} = k^2\sqrt[2]{k} = k^2 \cdot k^{\frac{1}{2}} = k^{2+\frac{1}{2}} = k^{\frac{5}{2}}$

Vastaus b-, d- ja e-kohtien lausekkeet

9



Laskutoimitukset:

Toiseksi alin rivi vasemmalta oikealle:

1) $$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

2) $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

3) $$\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{12}}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

Toiseksi ylin rivi:

1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$

2) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{a^5}$

Ylin ruutu:

$$\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}}=\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{12}}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$$

Vastaus $\sqrt[3]{a}$

10

a) Geometrisen jonon suhdeluku on kahden perättäisen jäsenen välinen suhde.

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{1-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

b) Geometrisen jonon yleinen jäsen on $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, joten sen kolmas jäsen on

$$\begin{aligned}a_3&=a_1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{3-1}\\&=\sqrt{2}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\\&=\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot 2}\\&=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}a_9&=a_1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{9-1}\\&=\sqrt{2}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{8}\\&=\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot 8}\\&=16\sqrt{2}\end{aligned}$$

11

a) $a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$

b) $a^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{a^4}$

c) $a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

d) $a^{3,5} = a^{\frac{7}{2}} = \sqrt[2]{a^7} = \sqrt{a^7}$

12

a) $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[8]{3^5} = 3^{\frac{5}{8}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{31}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{31}} = \dfrac{1}{31^{\frac{1}{2}}} = 31^{-\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{6^3}} = \dfrac{1}{6^{\frac{3}{6}}} = 6^{-\frac{3}{6}} = 6^{-\frac{1}{2}}$

13

a) $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[6]{25} = 25^{\frac{1}{6}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{2\cdot\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{-\frac{1}{4}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{125}} = \dfrac{1}{125^{\frac{1}{6}}} = 125^{-\frac{1}{6}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{6}} = 5^{3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)} = 5^{-\frac{1}{2}}$

14

a) $k\sqrt[3]{k} = k \cdot k^{\frac{1}{3}} = k^{1+\frac{1}{3}} = k^{\frac{4}{3}} \neq k^{\frac{7}{3}}$

b) $\sqrt[3]{k^7} = k^{\frac{7}{3}}$

c) $\sqrt[7]{k^3} = k^{\frac{3}{7}} \neq k^{\frac{7}{3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{k}\right)^7 = \left(k^{\frac{1}{3}}\right)^7 = k^{\frac{1}{3}\cdot 7} = k^{\frac{7}{3}}$

e) $k^2\sqrt[3]{k} = k^2 \cdot k^{\frac{1}{3}} = k^{2+\frac{1}{3}} = k^{\frac{7}{3}}$

Vastaus b-, d- ja e-kohtien lausekkeet

15

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{6}} = \dfrac{\sqrt[2]{6}}{\sqrt[4]{6}} = \dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{4}}} = 6^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[12]{6} \cdot \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{12}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$

c) $\sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}} = 3^{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt[16]{81} = 81^{\frac{1}{16}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{16}} = 3^{4\cdot\frac{1}{16}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

16

a) $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$

Osamäärää, jossa jakajana on 0, ei ole määritelty.

b) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$

Lausekkeiden tulisi olla yhtä suuret, sillä eksponentit ovat yhtä suuret: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Vastaavia ristiriitoja voidaan löytää muillakin eksponenteilla, joita laventamalla saadaan muutettua juuren sisään jäävän luvun eksponentti parittomasta parilliseksi, esimerkiksi

$(-1)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{(-1)^3} = -1$

$(-1)^{\frac{6}{14}} = \sqrt[14]{(-1)^6} = 1.$

Lisäksi esimerkiksi $(-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, kun taas $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-2}$ ei ole määritelty reaaliluvuilla lainkaan.

17

$\sqrt{a^3}$		$\dfrac{1}{a}$
		$\sqrt{a^5}$
	$\sqrt{a}$	

Kolmen termin a^k, a^m ja a^n tulo on 1, jos eksponenttien summa $k+m+n=0$, sillä tällöin $a^k \cdot a^m \cdot a^n = a^{k+m+n} = a^0 = 1$. Toisin sanoen, ruudukossa jokaisella sarakkeella, rivillä sekä lävistäjällä eksponenttien summan tulee olla 0.

Esimerkiksi ylimmän rivin annetut termit ovat eksponenttimuodossa: $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ ja $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$. Koska niiden eksponenttien summa on $\dfrac{3}{2} + (-1) = \dfrac{1}{2}$, tuntemattoman termin eksponentin täytyy olla $-\dfrac{1}{2}$, jolloin ylimmän rivin tulo $a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)} = a^0 = 1$. Siis rivin keskimmäinen termi on $a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Vastaavasti voidaan päätellä ruudukon muutkin puuttuvat ruudut.

$\sqrt{a^3}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^5}}$	1	$\sqrt{a^5}$
a	$\sqrt{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

18

a) Geometrisen jonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, joten sen neljäs jäsen on $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = a_1 \cdot q^3$. Koska $a_1 = 2$ ja $a_4 = 6$, voidaan ratkaista suhdeluku q yhtälön avulla.

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\
6 &= 2 \cdot q^3 \\
3 &= q^3 \\
q &= \sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

b) Yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, joten toinen jäsen on

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q^{2-1} \\
&= 2 \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^1 \\
&= 2\sqrt[3]{3}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
a_3 &= a_1 \cdot q^{3-1} \\
&= 2 \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \\
&= 2 \cdot \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\
&= 2 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot 2} \\
&= 2\sqrt[3]{3^2} \\
&= 2\sqrt[3]{9}
\end{aligned}
$$

19

Luvut $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[6]{16}$ voivat olla geometrisen lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä, mikäli suhde perättäisten jäsenien välillä on sama.

Lasketaan toisen ja ensimmäisen jäsenen suhde.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

Tarkistetaan, onko kolmannen ja toisen jäsenen suhde sama.

$$\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{\frac{4}{6}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{4}{6}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

Vastaus Luvut voivat olla geometrisen jonon kolme ensimmäistä jäsentä, koska kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina $\sqrt[6]{2}$.

20

Jos $a^6 = 3$, niin $a = \pm\sqrt[6]{3}$. Käydään molemmat vaihtoehdot läpi sijoittamalla ne lausekkeeseen $5\sqrt[3]{3}a - a^3$ ja lasketaan lausekkeen arvo. Jos $a = \sqrt[6]{3}$, niin lauseke saa arvon

$$
\begin{aligned}
5\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{3} - \left(\sqrt[6]{3}\right)^3 &= 5 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} - \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3 \\
&= 5 \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} - 3^{\frac{1}{6}\cdot 3} \\
&= 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \\
&= 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\
&= 4\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Jos $a = -\sqrt[6]{3}$, niin lauseke saa arvon

$$
\begin{aligned}
5\sqrt[3]{3} \cdot \left(-\sqrt[6]{3}\right) - \left(-\sqrt[6]{3}\right)^3 &= -5 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} - \left(-\left(\sqrt[6]{3}\right)^3\right) \\
&= -5 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} + \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3 \\
&= -5 \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + 3^{\frac{1}{6}\cdot 3} \\
&= -5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \\
&= -4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\
&= -4\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad 4\sqrt{3}$ tai $-4\sqrt{3}$

21

Vastaus riippuu laskimen asetuksista. Jos laskimen tarkkuudeksi on valittu 9 desimaalia, se antaa luvulle $2^{\sqrt{3}}$ likiarvon $3,321997085$. Tutkitaan kokeilemalla, mikä jonon jäsenistä antaa saman arvon:

$$
\begin{aligned}
2^{1,7} &= 3,249009585 \\
2^{1,73} &= 3,317278183 \\
2^{1,732} &= 3,321880096 \\
2^{1,7320} &= 3,321880096 \\
2^{1,73205} &= 3,321995226 \\
2^{1,732050} &= 3,321995226 \\
2^{1,7320508} &= 3,321997068 \\
2^{1,73205080} &= 3,321997068 \\
2^{1,732050807} &= 3,321997084 \\
2^{1,7320508075} &= 3,321997085
\end{aligned}
$$

Eli tässä tapauksessa potenssin $2^{\sqrt{3}}$ likiarvo saadaan näppäilemällä $2^{1,7320508075}$ eli jonon 10. jäsen on sama kuin laskimen antama likiarvo.

22

Olkoon m ja n positiivisia kokonaislukuja ja $a > 0$.

Ratkaistaan tehtävä käyttämällä potenssien laskusääntöjä vain sellaisilla eksponenteilla, jotka ovat kokonaislukuja.

Korotetaan lauseke $(\sqrt[n]{a})^m$ potenssiin n.

$$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m \cdot n} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m$$

Koska tulos on a^m, on lauseke $(\sqrt[n]{a})^m$ luvun a^m n:s juuri eli $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.