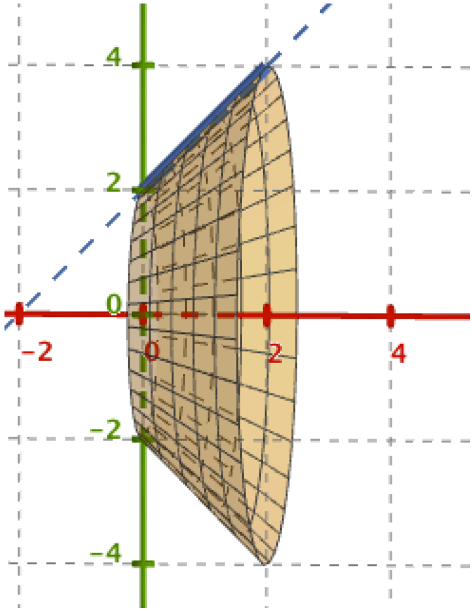
270

a) $V = \pi\int_{0}^{2}(x+2)^2\,\mathrm{d}x$

$= \frac{56}{3}\pi$

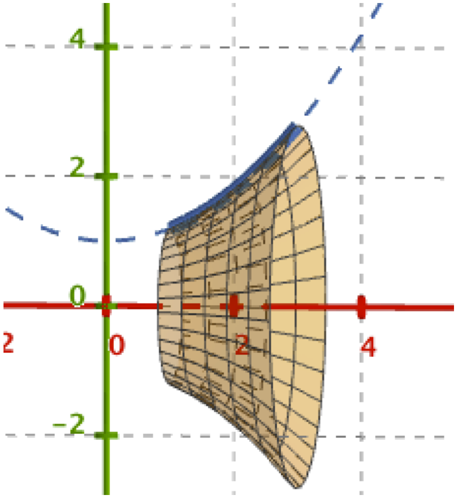
$= 18\frac{2}{3}\pi$



b) $V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{5}x^2 + 1 \right)^2 \mathrm{d}x$

$= \frac{2776}{375}\pi$

$= 7\frac{151}{375}\pi$



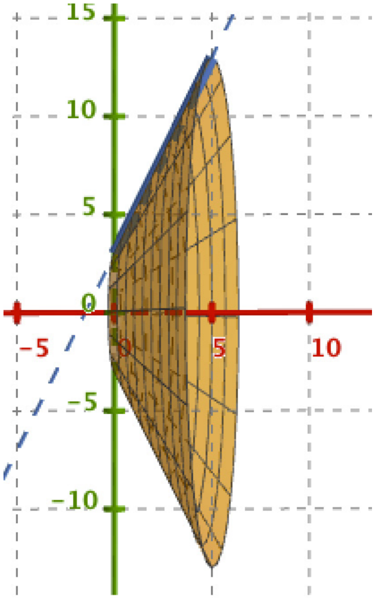
Vastaus

a) $18\frac{2}{3}\pi$

b) $7\frac{151}{375}\pi$

271

$$V = \int_0^5 \pi(2x-3)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{185}{3}\pi = 61\frac{2}{3}\pi$$



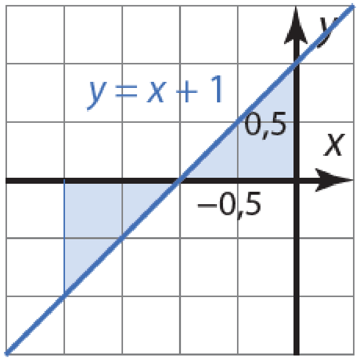
Vastaus

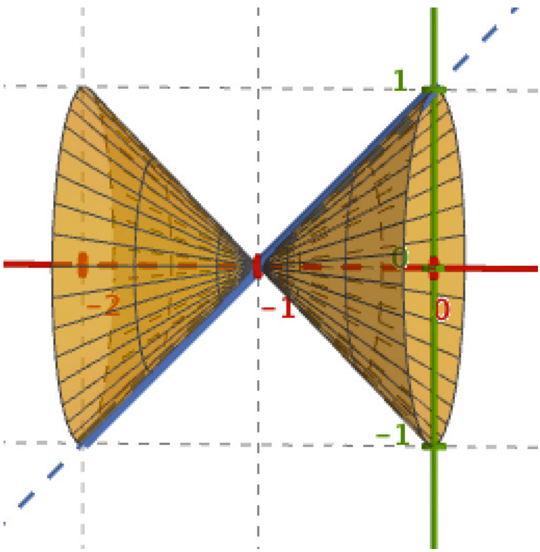
$$61\frac{2}{3}\pi$$

272

a) $V = \pi \int_{-2}^{0} (x+1)^2 \, dx$

$= \frac{2}{3}\pi$

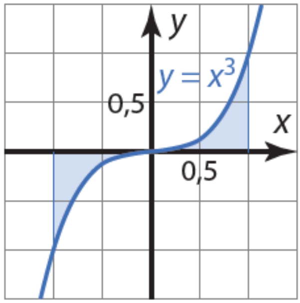


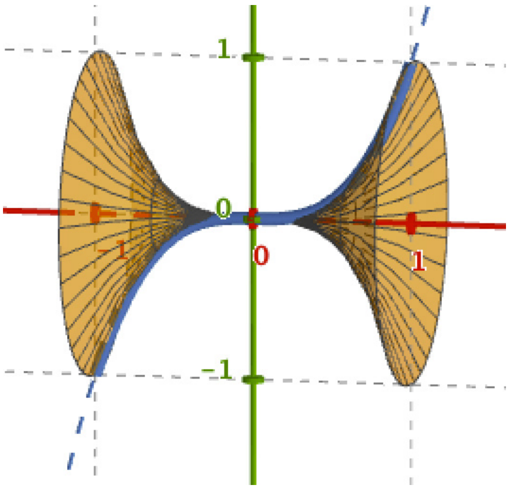


b) $V = \int_{-1}^{1} \pi \left(x^3\right)^2 \mathrm{d}x$

$= \pi \int_{-1}^{1} x^6 \mathrm{d}x$

$= \dfrac{2}{7}\pi$



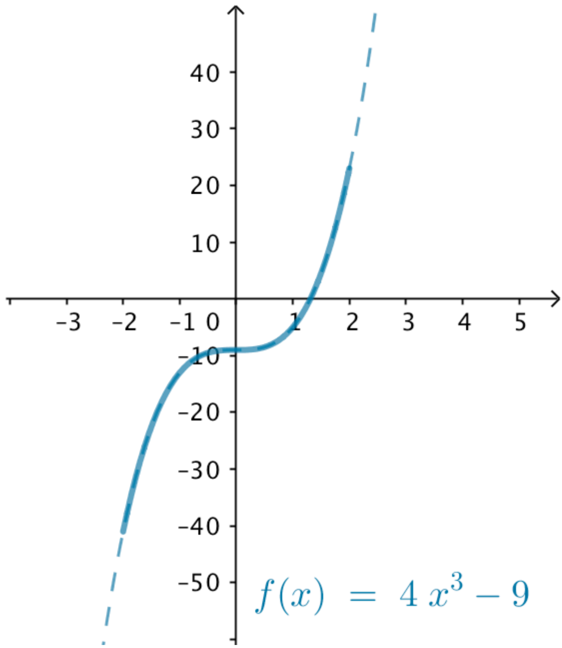


Vastaus

a) $\dfrac{2}{3}\pi$ b) $\dfrac{2}{7}\pi$

273

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4x^3-9\right)^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{6364}{7}\pi=909\frac{1}{7}\pi$$



Vastaus

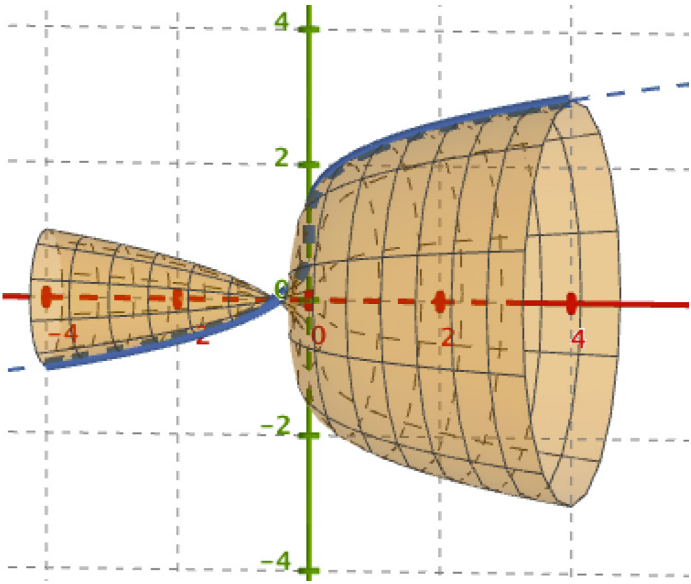
$909\frac{1}{7}\pi$

274

$$V = \pi\int_{-4}^{4}\left(\sqrt[3]{2x}+1\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{136}{5}\pi = 27\frac{1}{5}\pi$$

Vastaus

$27\frac{1}{5}\pi$



275

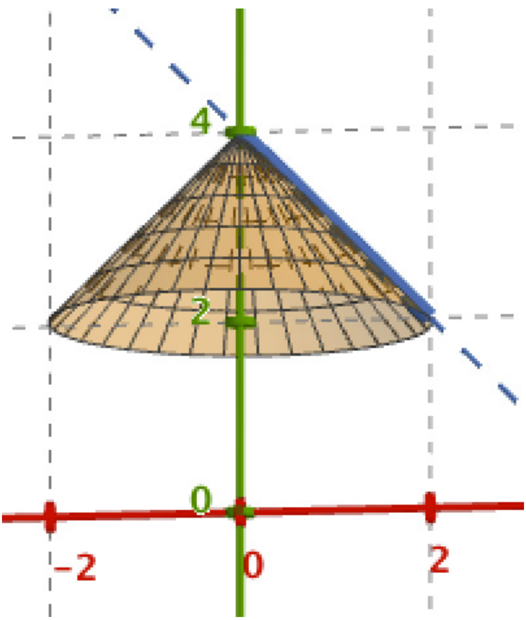
a) Integroidaan muuttujan y suhteen.

$$V = \pi\int_2^4 x^2 \mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_2^4 (-y+4)^2 \mathrm{d}y$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

$$= 2\frac{2}{3}\pi$$



b) Ratkaistaan funktion lausekkeesta x.

$$y=-3x^2+5$$

$$3x^2=-y+5$$

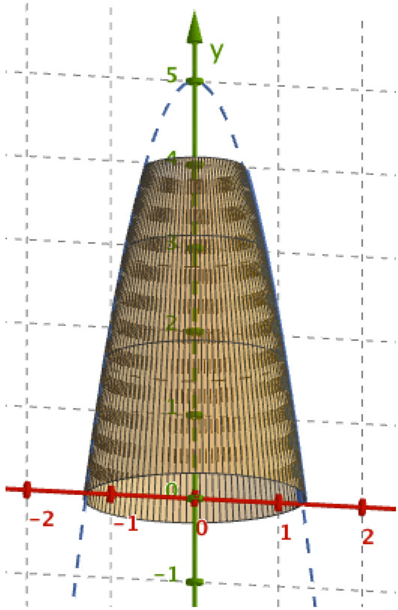
$$x=\sqrt{-\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}}$$

Lasketaan kysytty tilavuus. Integroidaan muuttujan y suhteen

$$V=\pi\int_0^4 x^2\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^4\left(\sqrt{-\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}}\right)^2\mathrm{d}y$$

$$=4\pi$$



Vastaus

a) $2\frac{2}{3}\pi$ b) 4π

276

a) Määritetään x-akselin ja funktion $f(x)$ kuvaajan leikkauskohdat.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

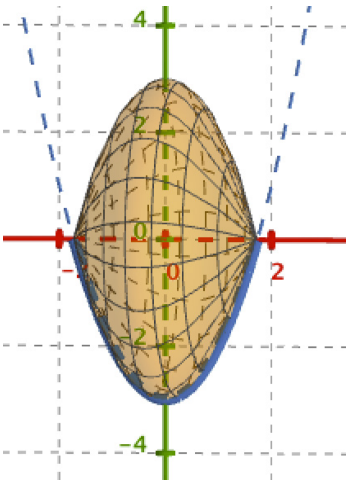
$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 3\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$$

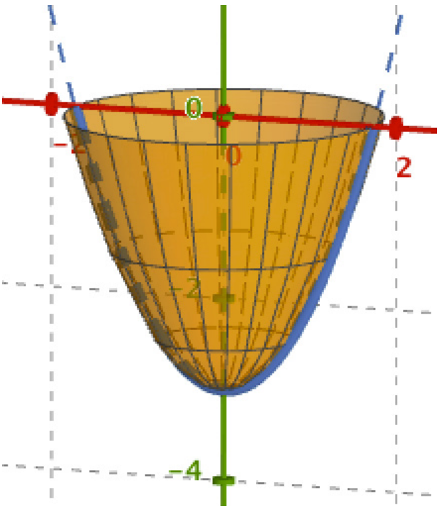


b) Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla muuttujan y suhteen. Ratkaistaan funktion f lausekkeesta x y:n suhteen.

$$y = x^2 - 3$$
$$x^2 = y + 3$$
$$x = \pm\sqrt{y+3}$$

Integroimisrajat ovat 0 ja 3.

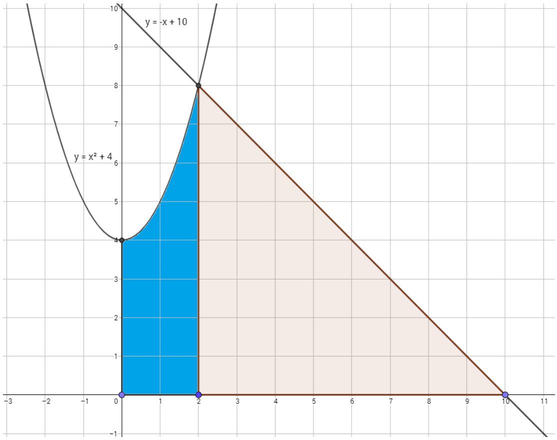
$$V = \pi\int_{-3}^{0}\left(\sqrt{y+3}\right)^2 \mathrm{d}y$$
$$= \frac{9}{2}\pi = 4\frac{1}{2}\pi$$



Vastaus

a) $\dfrac{48\sqrt{3}}{5}\pi$ b) $4\dfrac{1}{2}\pi$

277



Lasketaan käyrien y_1 ja y_2 leikkauskohta.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = -x + 10 \end{cases}$$

$$x^2 + 4 = -x + 10$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3 \text{ tai } x = 2$$

Leikkauskohdista $x = 2$ kuuluu tarkastelualueeseen.

Käyrän $y_2 = -x + 10$ ja x-akselin leikkauskohta ($y = 0$):

$$-x + 10 = 0$$

$$x = 10.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

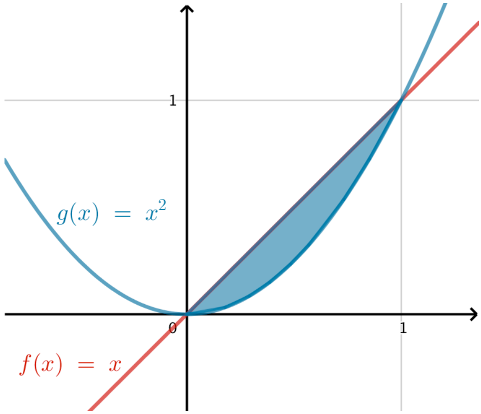
$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 \left(y_1\right)^2 \,\mathrm{d}x + \pi\int_2^{10} \left(y_2\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^2 \left(x^2+4\right)^2 \,\mathrm{d}x + \pi\int_2^{10} \left(-x+10\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{896}{15}\pi + \frac{512}{3}\pi \\
&= \frac{1152}{5}\pi = 230\frac{2}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$230\frac{2}{5}\pi$$

278

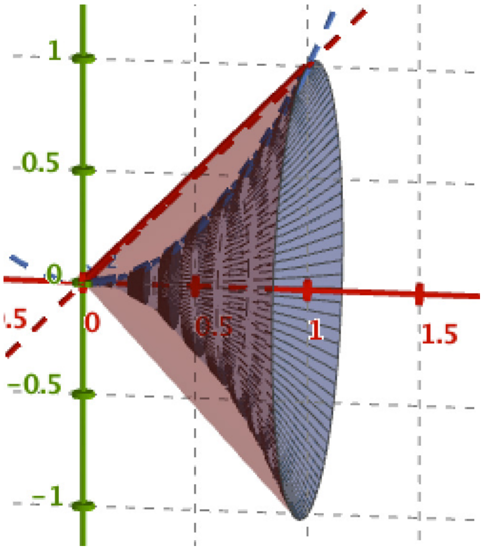
Lasketaan käyrien leikkauskohdat.



$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

$$x = x^2$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$



$$V = \pi\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x$$

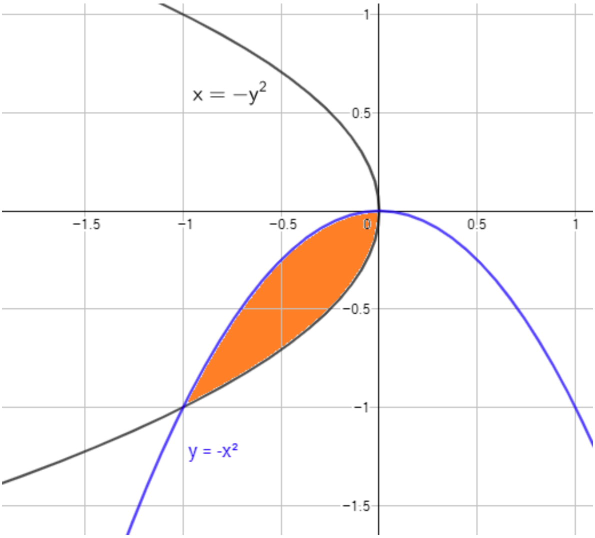
$$= \pi\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{15}\pi$$

Vastaus

$$\frac{2}{15}\pi$$

279



Lasketaan käyrien leikkauskohdat.

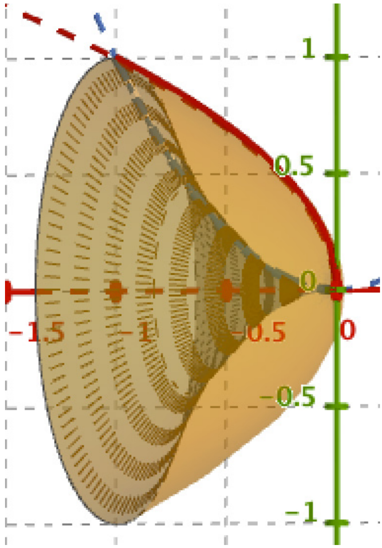
$$\begin{cases} x = -y^2 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

$$x = -(-x^2)^2$$

$$x = -x^4$$

$x = 0$ tai $x = 1$

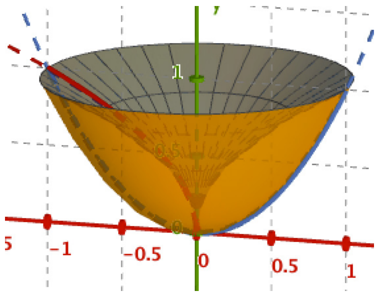
a) Käyrien $x=-y^2$ ja $y=-x^2$ eli käyrien $y=\pm\sqrt{-x}$ ja $y=-x^2$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.



$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{0}\left(\pm\sqrt{-x}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{0}\left(-x^2\right)^2\mathrm{d}x\\
&= \pi\int_{-1}^{0}(-x)\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{0}x^4\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{10}\pi
\end{aligned}
$$

b) Käyrien $x=-y^2$ ja $y=-x^2$ eli käyrien $x=-y^2$ ja $x=\pm\sqrt{-y}$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{0}\left(\pm\sqrt{-y}\right)^2\mathrm{d}y-\pi\int_{-1}^{0}\left(-y^2\right)^2\mathrm{d}y\\&=\pi\int_{-1}^{0}(-y)\mathrm{d}y-\pi\int_{-1}^{0}y^4\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{10}\pi\end{aligned}$$

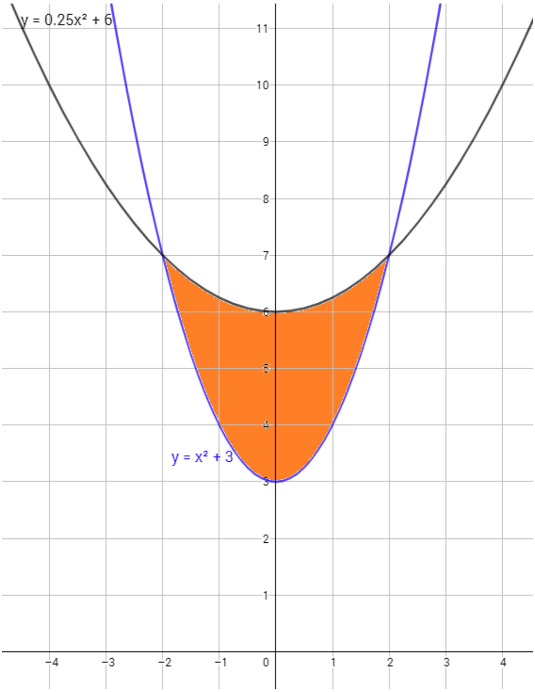


Vastaus

a) $\dfrac{3}{10}\pi$

b) $\dfrac{3}{10}\pi$

280



Lasketaan käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 6 \end{cases}$$

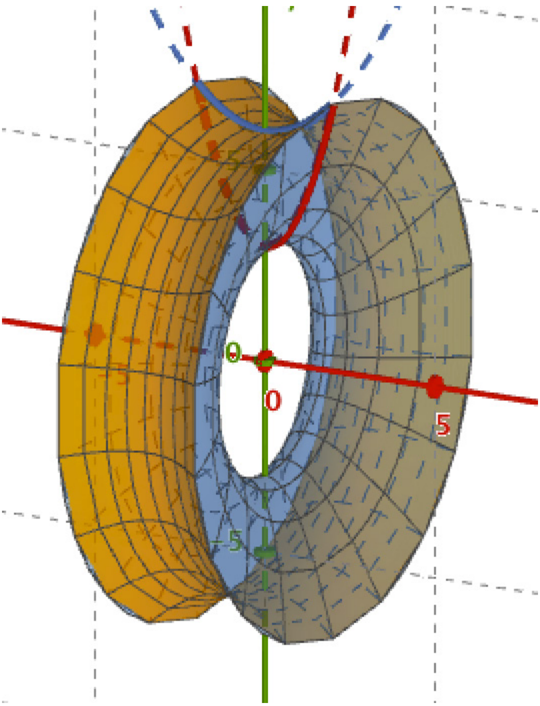
$$x^2 + 3 = \frac{1}{4}x^2 + 6$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 2$$

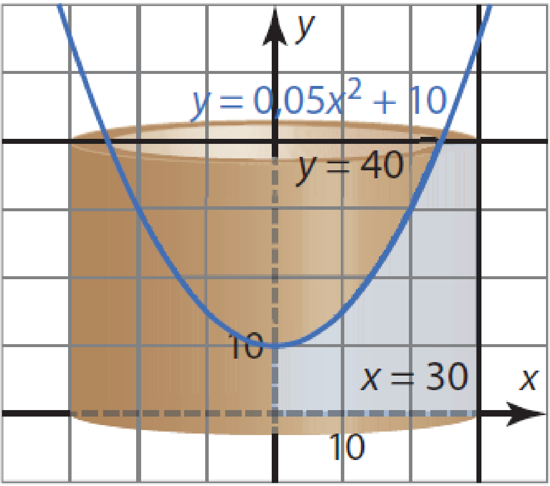
Alue pyörähtää x-akselin ympäri. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+6\right)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_{-2}^{2}\left(x^2+3\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{804}{5}\pi - \frac{404}{5}\pi$$
$$= 80\pi$$

Vastaus
80π



281



Lasketaan ensiksi lieriön tilavuus $V_1 = \pi \cdot 30^2 \cdot 40 = 36000\pi$.
Vähennetään tästä onton sisäosan tilavuus V_2.
Käyrä $y = 0,05x^2 + 10$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $[10, 40]$
Ratkaistaan muuttuja x y:n suhteen ja integroidaan y:n suhteen.

$$\begin{aligned} y &= 0,05x^2 + 10 \\ 0,05x^2 &= y - 10 \\ x^2 &= 20y - 200 \\ x &= \pm\sqrt{20y - 200} \end{aligned}$$

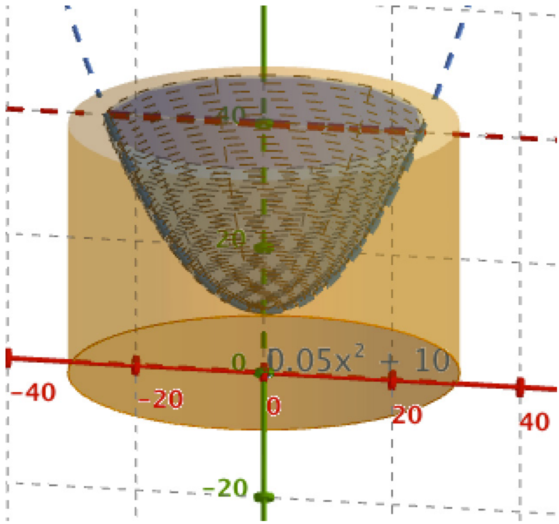
$$V_2 = \pi \int_{10}^{40} \left(\sqrt{20y - 200}\right)^2 \mathrm{d}y = 9000\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 36000\pi - 9000\pi = 27000\pi \ \ (\text{ mm}^3)$$

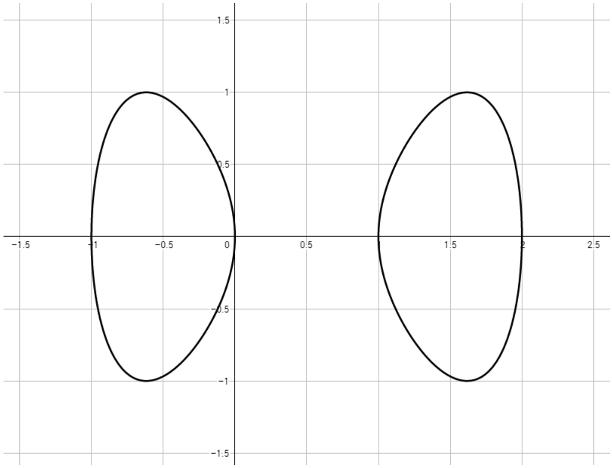
Munakupin massa saadaan kertomalla tiheys tilavuudella.

$$\begin{aligned} m &= 680\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 27\ 000\pi\ \text{mm}^3 \\ &= 680\cdot\frac{1000\text{ g}}{(1000\text{ mm})^3}\cdot 27\ 000\pi\ \text{mm}^3 \\ &= 57{,}67...\text{ g} \approx 58\text{g} \end{aligned}$$

Vastaus 58g



282



Ratkaistaan käyrän nollakohdat.

$y^2 = x(x+1)(x-1)(2-x)$ | Sijoitetaan $y = 0$.

$0 = x(x+1)(x-1)(2-x)$

$x = 0$ tai $x = -1$ tai $x = 1$ tai $x = 2$

Lasketaan molempien syntyvien pyörähdyskappaleiden tilavuudet.

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{0} y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{0} x(x+1)(x-1)(2-x)\mathrm{d}x = \frac{19}{30}\pi$$

$$V_2 = \pi\int_{1}^{2} y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_{1}^{2} x(x+1)(x-1)(2-x)\mathrm{d}x = \frac{19}{30}\pi$$

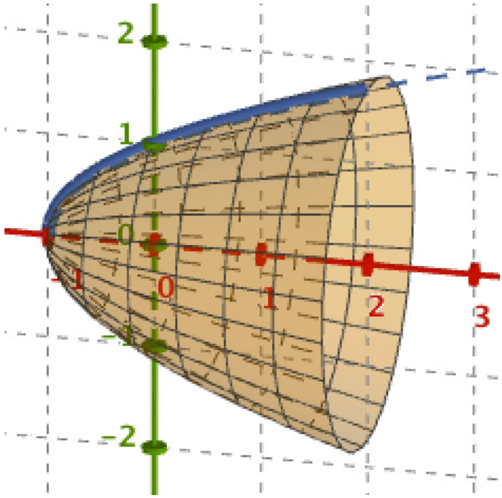
Vastaus Kappaleet ovat yhtä suuret.

283

a) $V = \pi\int_{-1}^{2} y^2 \mathrm{d}x$

$= \pi\int_{-1}^{2} \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x$

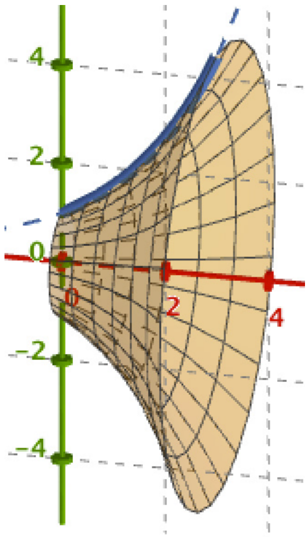
$= \frac{9}{2}\pi = 4\frac{1}{2}\pi$



b) $V = \pi\int_{0}^{3} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right)^2 \mathrm{d}x$

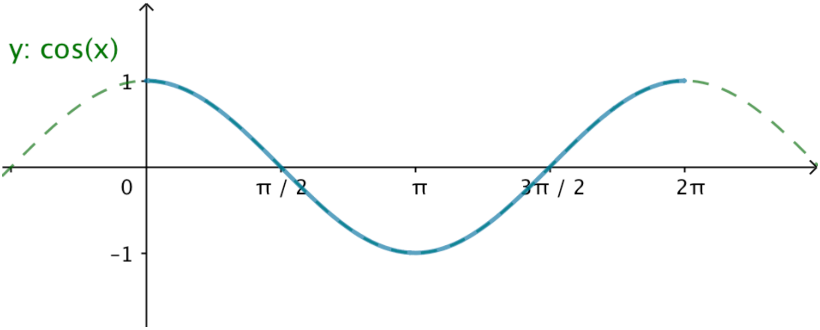
$= \pi\int_{0}^{3} \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x$

$= \pi\mathrm{e}^3 - \pi$

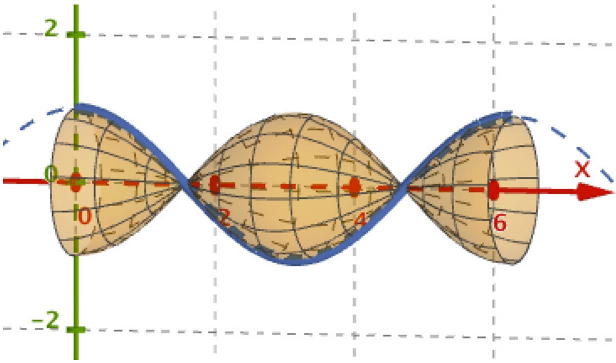


Vastaus a) $4\frac{1}{2}\pi$ b) $\pi\mathrm{e}^3 - \pi$

284



$$V = \pi\int_0^{2\pi} (\cos x)^2 \, dx$$
$$= \pi^2$$



Vastaus π^2

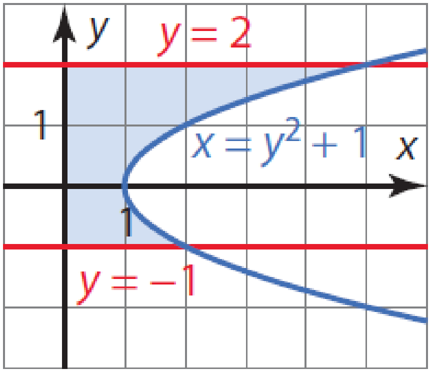
285

Käyrä pyörähtää y-akselin ympäri, joten integroidaan y:n suhteen.

a) $V = \pi \int_{-1}^{2} x^2 \mathrm{d}y$

$= \pi \int_{-1}^{2} \left(y^2 + 1\right)^2 \mathrm{d}y$

$= \frac{78}{5}\pi = 15\frac{3}{5}\pi$

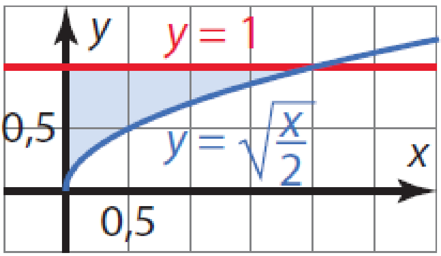


b) $V = \pi \int_{0}^{1} x^2 \mathrm{d}y$

$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, joten $x = 2y^2$

$= \pi \int_{0}^{1} (2y^2)^2 \mathrm{d}y$

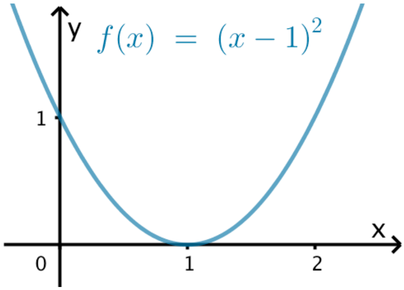
$= \frac{4}{5}\pi$



Vastaus

a) $15\frac{3}{5}\pi$ b) $\frac{4}{5}\pi$

286



Koordinaattiakselien leikkauskohdat:

x-akseli $(y = 0)$

$0 = (x-1)^2$

$x = 1$

y-akseli $(x = 0)$

$y = (0-1)^2$

$y = 1$

Lasketaan molempien syntyvien kappaleiden tilavuudet.

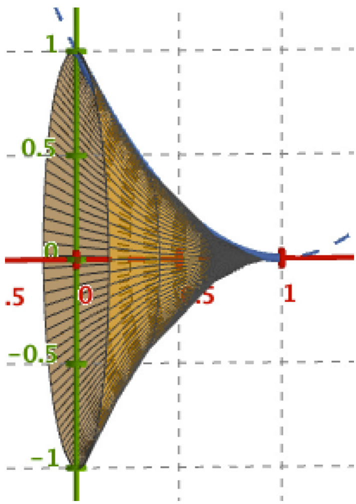
Pyörähdys x-akselin ympäri.

$$V_1 = \pi\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x$$

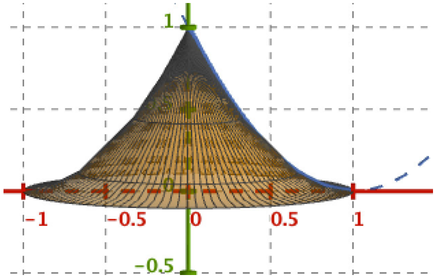
$$= \pi\int_0^1 \left((x-1)^2\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 (x-1)^4 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{5}$$



Pyörähdys y-akselin ympäri.



$$y = (x-1)^2$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{y} \qquad \Big|\, 0 \le x \le 1$$

$$x = -\sqrt{y} + 1$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 x^2 \mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^1 (-\sqrt{y}+1)^2 \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Tilavuuksien suhde:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{5} = 1,2 = 120\,\%\,.$$

Siis x-akselin ympäri pyörähtäessä muodostuva kappale on 20 % suurempi.

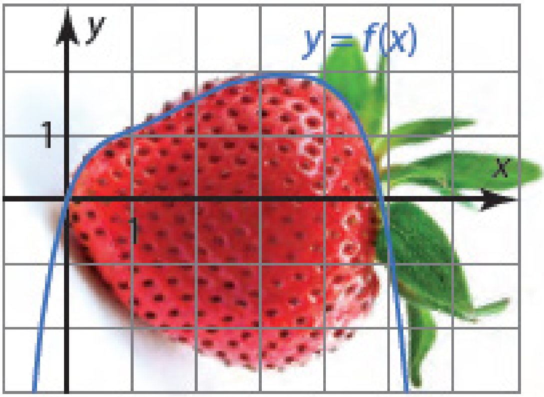
Vastaus

x-akselin pyörähtäessä muodostuvan kappaleen tilavuus on $\frac{\pi}{5}$.

y-akselin pyörähtäessä muodostuvan kappaleen tilavuus on $\frac{\pi}{6}$.

x-akselin ympäri pyörähtäessä muodostuvan kappaleen tilavuus on 20 % suurempi.

287



a) Lasketaan laskimella funktion f nollakohdat .

$$f(x) = 0$$
$$-0{,}0123x^6 + 0{,}177x^5 - x^4 + 2{,}755 - 3{,}83x^2 + 2{,}97x = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x \approx 4{,}89415$$

Lasketaan mansikan tilavuus.

$$V = \pi \int_0^{4{,}89415} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \int_0^{4{,}89415} \left(-0.0123x^6 + 0.177x^5 - x^4 + 2.755x^3 - 3.83x^2 + 2.97x\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$= 32{,}4844 \ (\mathrm{cm}^3)$$

Mansikan tilavuus on $32{,}4844 \ \mathrm{cm}^3 \approx 32{,}5 \ \mathrm{mL} = 32{,}5 \ \mathrm{mL}$.

b) Pyöristetään funktion f kertoimet kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen. Lasketaan funktion

$$g(x) = -0,012x^6 + 0,18x^5 - x^4 + 2,8x^3 - 3,8x^2 + 3,0x$$

nollakohdat.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ -0,012x^6 + 0,18x^5 - x^4 + 2,8x^3 - 3,8x^2 + 3,0x &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } x &\approx 7,11573 \end{aligned}$$

Lasketaan mansikan tilavuus pyöristettyjen kertoimien avulla.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{7,11573} \left(g(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^{7,11573} \left(-0,012x^6 + 0,18x^5 - x^4 + 2,8x^3 - 3,8x^2 + 3,0x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 4887,84... \ (\mathrm{cm}^3) \end{aligned}$$

Mansikan tilavuus on $4887,84... \ \mathrm{cm}^3 \approx 4887,8 \ \mathrm{mL} = 4,9 \ \mathrm{L}$.

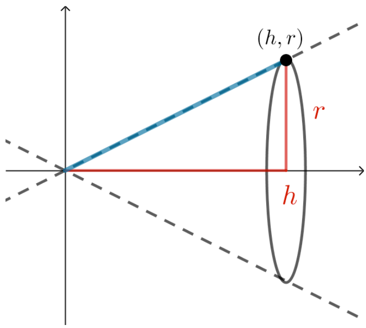
Vastaus

a) $32,5 \ \mathrm{cm}^3 = 32,5 \ \mathrm{mL}$

b) $4887,8 \ \mathrm{mL} \approx 4,9 \ \mathrm{L}$

288

Sijoitetaan suora ympyräkartio koordinaatistoon niin, että huippu on origossa ja pohjan keskipiste positiivisella x-akselilla.



Kartion sivujanaa pitkin kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{r}{h}$ ja suoran yhtälö on $y - 0 = \frac{r}{h}(x - 0)$ eli $y = \frac{r}{h}x$.

Suora ympyräkartio syntyy, kun suoran $y = \frac{r}{h}x$ välillä $0 \leq x \leq h$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^h y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^h (\frac{r^2}{h^2}x^2)\mathrm{d}x = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\frac{r^2}{h^2} \Big/_0^h \frac{1}{3}x^3 = \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}\cdot h^3 - 0\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{h^2}\cdot h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \square
\end{aligned}
$$

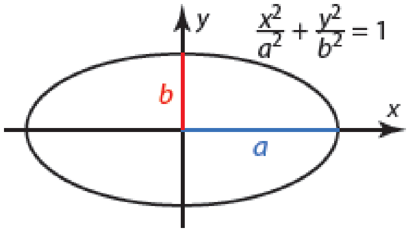
289

Ratkaistaan ellipsin yhtälöstä y^2.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \Big| \cdot b^2 \quad (\neq 0)$$

$$y^2=b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}$$



Lasketaan pyörähdysellipsoidin tilavuus.

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\bigg/_{-a}^{a}\left(b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)$$

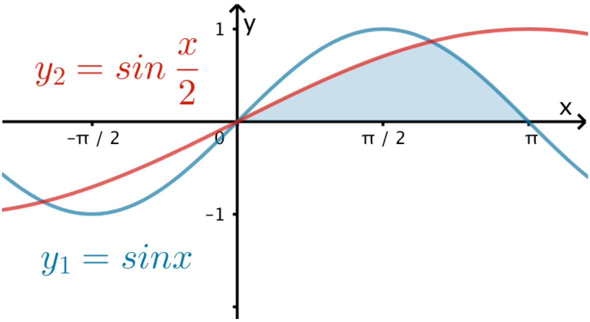
$$=\pi\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}a^3-\left(b^2(-a)-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}(-a)^3\right)\right)$$

$$=\pi\left(b^2a-\frac{b^2a}{3}+b^2a-\frac{b^2a}{3}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{3b^2a}{3}+\frac{3b^2a}{3}-\frac{2b^2a}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi b^2a \quad \square$$

290



Etsitään käyrien y_1 ja y_2 leikkauskohdat väliltä $[0, \pi]$.

$$y_1 = y_2$$

$$\sin x = \sin\frac{x}{2} \qquad \Big| \, 0 \le x \le \pi$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{2\pi}{3}$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus kahdessa osassa.

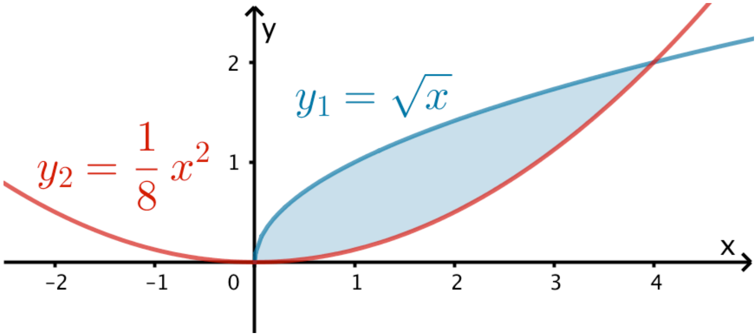
$$V = \pi\int_0^{\frac{2\pi}{3}} y_1^{\,2}\mathrm{d}x + \pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} y_2^{\,2}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi \approx 2{,}89$$

Vastaus $\quad \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi \approx 2{,}89$

291



Lasketaan käyrien $y_1 = \sqrt{x}$ ja $y_2 = \frac{1}{8}x^2$ leikkauskohdat.

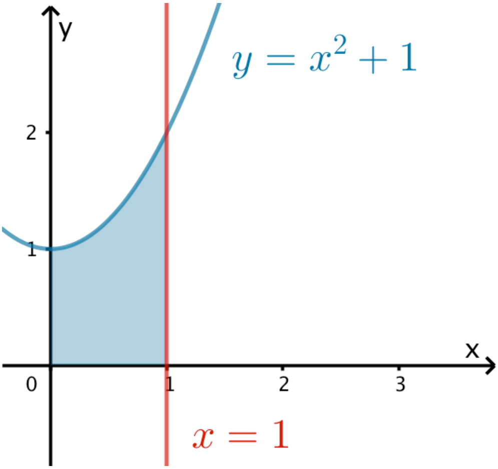
$$y_1 = y_2$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{8}x^2$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi\int_0^4 y_1^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^4 y_2^2 \mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^4 \sqrt{x}^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^2\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{24}{5}\pi = 4\frac{4}{5}\pi$$

Vastaus $\quad \frac{24}{5}\pi = 4\frac{4}{5}\pi$

292



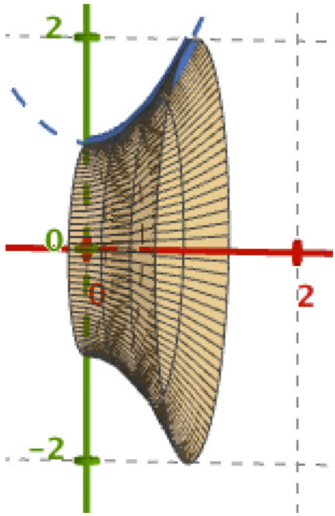
a) Pyörähdys x-akselin ympäri.

$$V = \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2+1)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 x^4 + 2x^2 + 1\mathrm{d}x$$

$$= \frac{28}{15}\pi = 1\frac{13}{15}\pi$$

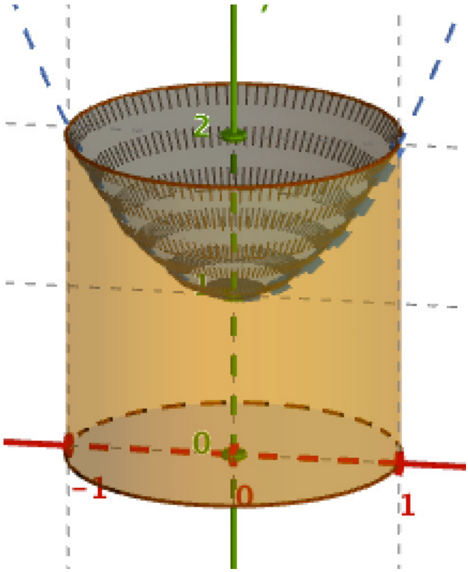


b) Pyörähdys y-akselin ympäri. Ratkaistaan integroimisrajat.

Kun $x = 0$, niin $y = 1$.
Kun $x = 1$, niin $y = 1^2 + 1 = 2$

Integroidaan y:n suhteen. $y = x^2 + 1$, joten $x^2 = y - 1$.
Lasketaan ensin suoran ympyrälieriön tilavuus ja vähennetään siitä sisällä olevan onton osan tilavuus.

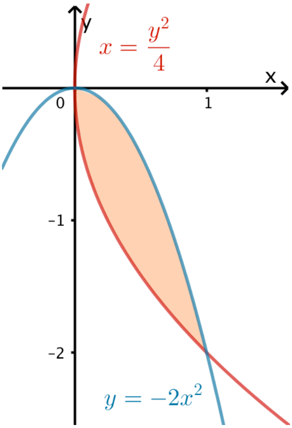
$$
\begin{aligned}
V &= V_{lieriö} - V_{ontto} \\
&= \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \pi \int_1^2 x^2 \mathrm{d}y \\
&= 2\pi - \pi \int_1^2 (y-1)\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi
\end{aligned}
$$



Vastaus

a) $1\frac{13}{15}\pi$ b) $1\frac{1}{2}\pi$

293



Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} \\ y = -2x^2 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 0$ tai

$x = 1$ ja $y = -2$

a) Pyörähdys x-akselin ympäri. Integroidaan x:n suhteen. Integroimisrajat ovat 0 ja 1.

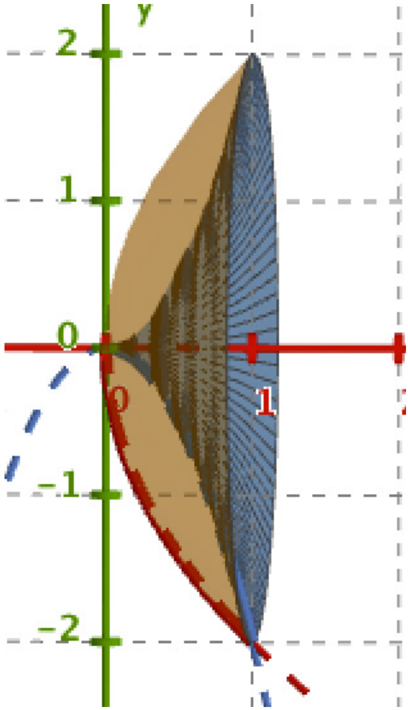
Pyörähdyskappaletta rajaavat käyrät ovat $x = \frac{y_1^2}{4}$ eli $y_1^2 = 4x$ ja $y_2 = -2x^2$.

$$V = \pi\int_0^1 y_1^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 y_2^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 4x\mathrm{d}x - \pi\int_0^1 (-2x^2)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 4x\mathrm{d}x - \pi\int_0^1 4x^4 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{6}{5}\pi = 1\frac{1}{5}\pi$$

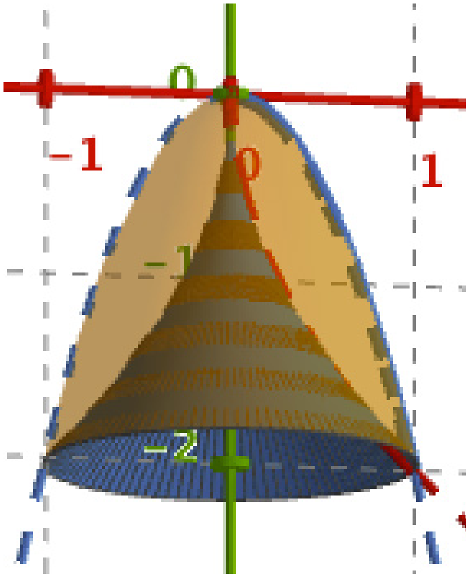


b) Pyörähdys y-akselin ympäri. Integroidaan y:n suhteen.
Integroimisrajat ovat -2 ja 0.

Pyörähdyskappaletta rajaavat käyrät ovat $x_1 = \frac{y^2}{4}$ ja

$y = -2x_2^2$ eli $x_2^2 = -\frac{y}{2}$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-2}^{0} x_2^2 \mathrm{d}y - \pi\int_{-2}^{0} x_1^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi\int_{-2}^{0} \left(-\frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y - \pi\int_{-2}^{0} \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi\int_{-2}^{0} \left(-\frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y - \pi\int_{-2}^{0} \frac{y^4}{16} \mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{5}\pi
\end{aligned}
$$

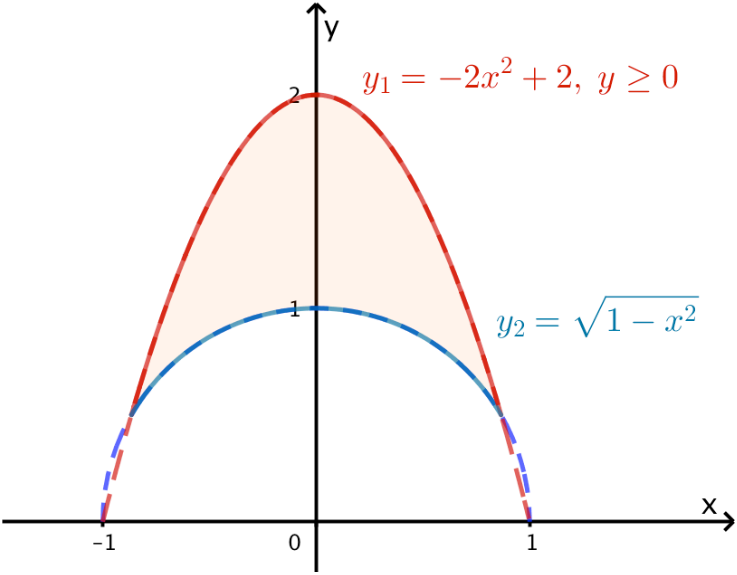


Vastaus

a) $1\frac{1}{5}\pi$

b) $\frac{3}{5}\pi$

294



Määritetään käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{cases} y_1 = -2x^2 + 2 \\ y_2 = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

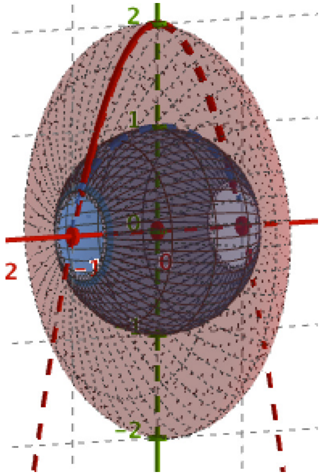
$$x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ tai } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Leikkauskohdista kelpaavat $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$V = \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} {y_1}^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} {y_2}^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (-2x^2+2)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{1-x^2})^2 \mathrm{d}x$$

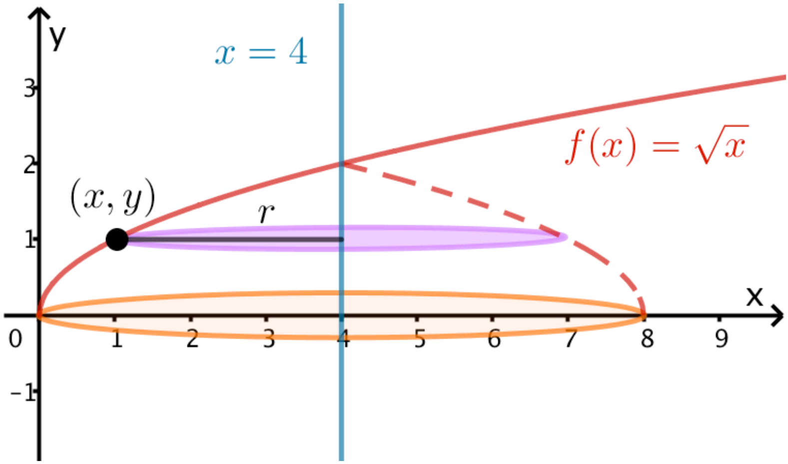
$$= \frac{17\sqrt{3}}{10}\pi \approx 9{,}3$$



Vastaus

$$\frac{17\sqrt{3}}{10}\pi \approx 9{,}3$$

295



Integroidaan y:n suhteen. Pyörähdyskappaleen rajaa käyrä $y = \sqrt{x}$ eli $x = y^2$, missä $x \geq 0$.

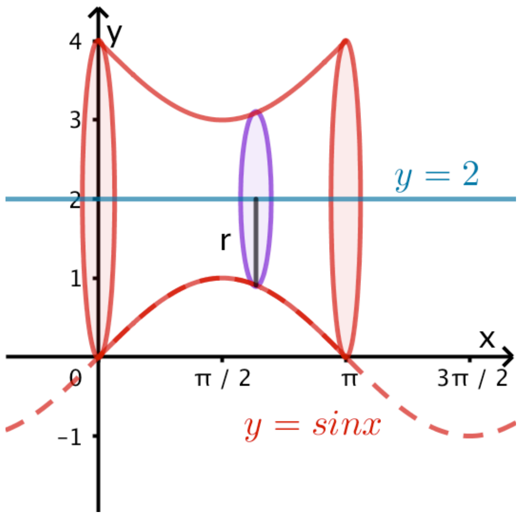
Pyörähdyskappaleen poikkileikkauksen säde on $r = 4 - x = 4 - y^2$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 r^2 \mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 \mathrm{d}y \\ &= \frac{256}{15}\pi = 17\frac{1}{15}\pi \end{aligned}$$

Vastaus

$17\frac{1}{15}\pi$

296

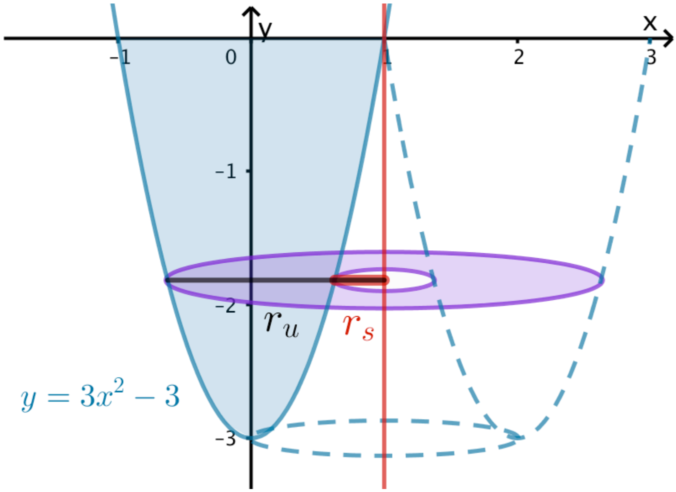


Pyörähdysakseli on $y = 2$. Pyörähdyskappaleen poikkileikkauksen säde on $r = 2 - y = 2 - \sin x$.

$$V = \pi\int_0^{\pi} r^2 \mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^{\pi} (2-\sin x)^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{9}{2}\pi - 8\pi \ \ (\approx 19{,}3)$$

Vastaus
$\frac{9}{2}\pi - 8\pi$

297



Käyrä $y = 3x^2 - 3$ pyörähtää suoran $x = 1$ ympäri.
Integroidaan y:n suhteen.
Integroimisrajat ovat $y = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3$ ja $y = 0$.

Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x.

$$y = 3x^2 - 3$$

$$x^2 = \frac{y}{3} + 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{3} + 1}$$

Syntyvän onton pyörähdyskappaleen

Ulkosäde $r_u = 1 - \left(-\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right) = 1 + \sqrt{\frac{y}{3}+1}$

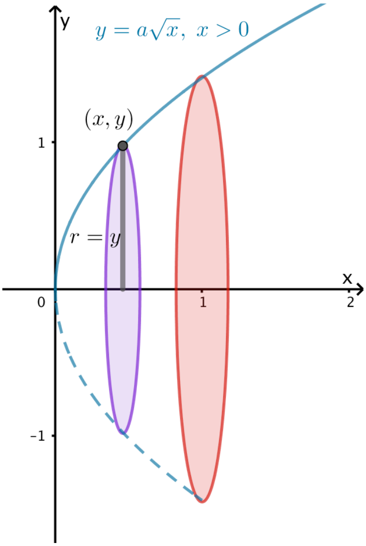
ja sisäsäde $r_s = 1 - \sqrt{\frac{y}{3}+1}$.

$$
\begin{aligned}
V &= V_{ulko} - V_{sisä} \\
&= \pi \int_{-3}^{0} r_u^{\,2} \,\mathrm{d}y - \pi \int_{-3}^{0} r_s^{\,2} \,\mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2 \mathrm{d}y - \pi \int_{-3}^{0} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

8π

298



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^1 (a\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\pi a^2
\end{aligned}
$$

Tiedetään, että pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2 \text{ tai } a = -2$$

Koska $a > 0$, vain ratkaisu $a = 2$ kelpaa.

Derivoidaan funktio f.

$$f(x) = a\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \mathrm{D}(2\sqrt{x}) = \mathrm{D}(2x^{\frac{1}{2}}) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

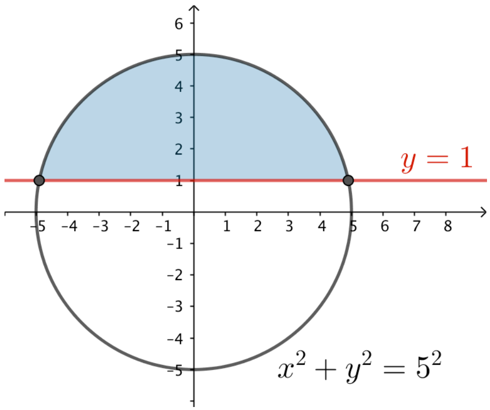
Lasketaan pyörähdyskappaleen vaipan ala.

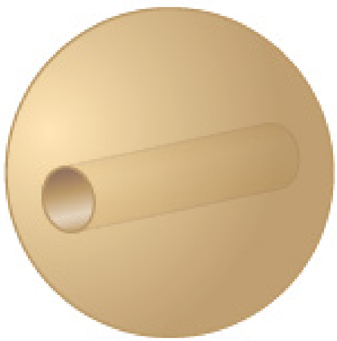
$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^1 |2\sqrt{x}|\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \quad (\approx 15,3) \end{aligned}$$

Vastaus $\quad \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

299

Sijoitetaan pallo koordinaatistoon niin, että sen keskipiste on origossa ja porattu reikä on x-akselin suuntainen. Reiällinen pallo syntyy, kun origokeskisen, 5-säteisen ympyrän kaari, jossa $y \geq 1$, pyörähtää x-akselin ympäri.
5-säteisen, origokeskisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 5^2$.





Ratkaistaan ympyrän $x^2 + y^2 = 5^2$ ja suoran $y = 1$ leikkauskohdat.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 1^2 = 25$$

$$x^2 = 24$$

$$x = \sqrt{24} \text{ tai } x = -\sqrt{24}$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} y^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} 1^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} (25 - x^2) \mathrm{d}x - \pi \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} 1 \mathrm{d}x \\ &= 64\sqrt{6}\,\pi \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25, \text{ joten} \\ y^2 = 25 - x^2. \end{array} \right.$$

Pallon massa ja tilavuus ovat suoraan verrannolliset.

Lasketaan pallon massan muutos tilavuuden muutoksen avulla.

$$\frac{V_{porattu\ pallo}}{V_{pallo}} = \frac{64\sqrt{6}\,\pi}{\frac{4}{3}\pi \cdot 5^3} = 0{,}94060... = 94{,}060...\ \%$$

Pallon massa kevenee $100\ \% - 94{,}060...\ \% = 5{,}939...\ \% \approx 5{,}9\ \%$.

Vastaus

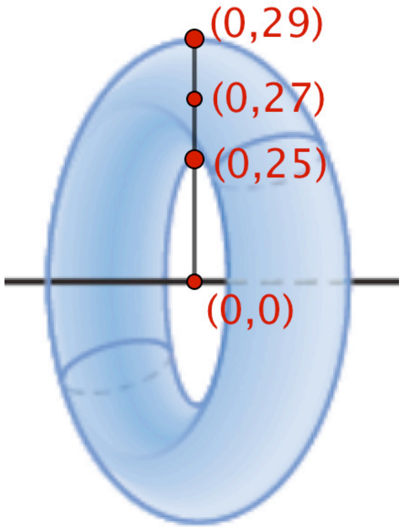
$5{,}9\ \%$

300

a) Sisärenkaan poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on

$$\frac{29,0-25,0}{2}=2,0\ \text{(cm)}.$$

Sijoitetaan sisärengas koordinaatistoon niin, että keskipiste on origossa. Sisärenkaan muotoinen pyörähdyskappale syntyy, kun 2-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on $(0, 27)$ pyörähtää x-akselin ympäri.



Pyörähtävän ympyrän yhtälö on

$$(x-0)^2+(y-27)^2=2^2$$

$$x^2+(y-27)^2=4$$

Ylempi puoliympyrä on $y_y=27+\sqrt{4-x^2}$

ja alempi puoliympyrä $y_a=27-\sqrt{4-x^2}$.

Lasketaan sisärenkaan tilavuus.

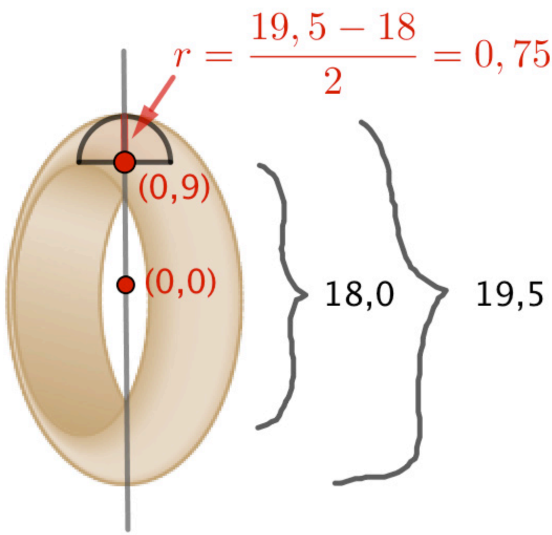
$$V=\pi\int_{-2}^{2} {y_y}^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-2}^{2} {y_a}^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}(27+\sqrt{4-x^2})^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-2}^{2}(27-\sqrt{4-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=2131{,}83\ldots\ (\mathrm{cm}^3)$$

Sisärenkaan tilavuus on $2131{,}83\ldots\ \mathrm{cm}^3\approx 2130\ \mathrm{cm}^3=2{,}13\ \mathrm{L}$.

b) Sijoitetaan kultasormus koordinaatistoon (yksikkönä millimetri) niin, että keskipiste on origossa.



Sormus syntyy, kun ympyrän (säde 0,75 ja keskipiste (0, 9)) ylempi puolikas pyörähtää x-akselin ympäri.

Ympyrän yhtälö on

$$(x-0)^2+(y-9)^2=0,75^2$$

$$x^2++(y-9)^2=0,75^2$$

Lasketaan sormuksen tilavuus.

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-0,75}^{0,75} y^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-0,75}^{0,75} 9^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi\int_{-0,75}^{0,75}(9+\sqrt{0,75^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-0,75}^{0,75} 9^2\,\mathrm{d}x\\&=51,732\ldots\ (\mathrm{mm}^3)\end{aligned}$$

Sormuksen tilavuus on $51,732\ldots\ \mathrm{mm}^3\approx 51,7\ \mathrm{mm}^3$.
Sormuksen massa saadaan kertomalla tiheys tilavuudella.

$$m=\rho V=17,3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\cdot 51,732\ldots\ \mathrm{mm}^3$$

$$=17,3\ \frac{1000\mathrm{g}}{(100\mathrm{mm})^3}\cdot 51,732\ldots\ \mathrm{mm}^3$$

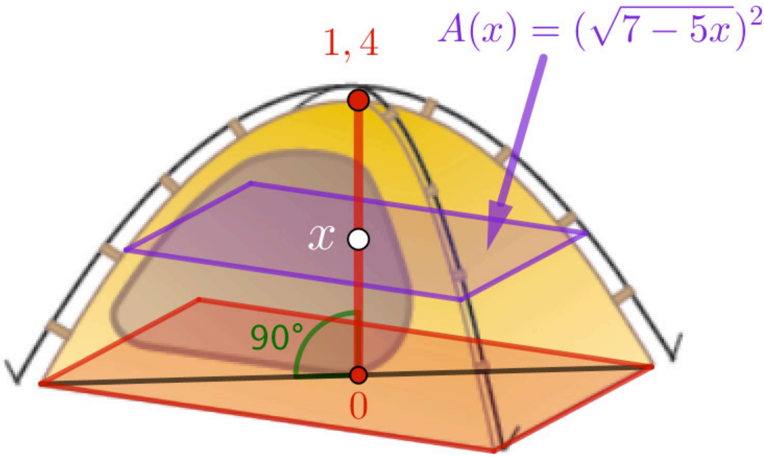
$$=0,8949\ldots\ \mathrm{g}\approx 0,89\ \mathrm{g}$$

Vastaus

a) $2130\ \mathrm{cm}^3=2,13\ \mathrm{L}$

b) $51,7\ \mathrm{mm}^3,\ 0,89\,\mathrm{g}$

301



Pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat neliöitä, joiden pinta-ala on $A(x) = (\sqrt{7-5x})^2$, missä x on poikkileikkauksen etäisyys pohjasta. Lasketaan teltan tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{1,4} A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1,4} (7-5x)\mathrm{d}x \\
&= 4,9 \quad (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}
$$

Teltan tilavuus on $4,9 \ \ \mathrm{m}^3 = 4900 \text{ L}$.

Vastaus
4900 L

302

Sijoitetaan taideteos koordinaatistoon niin, että x-akseli on kohtisuorassa pohjan suuntaisia poikkileikkauksia vastaan.

Kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on

$A(x)=2\pi(1-0,4x)^2$, missä $0\le x\le 1,70$.

Lasketaan taideteoksen tilavuus.

$$V=\int_0^{1,7} A(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{1,7} 2\pi(1-0,4x)^2\,\mathrm{d}x=5,064...\approx 5,06\ (\mathrm{m}^3)$$

Taideteoksen tiheys on $680\ \mathrm{kg/m^3}$.

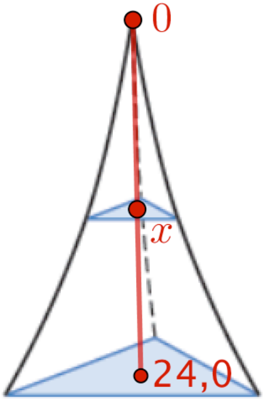
Taideteoksen massa on tilavuuden ja tiheyden tulo.

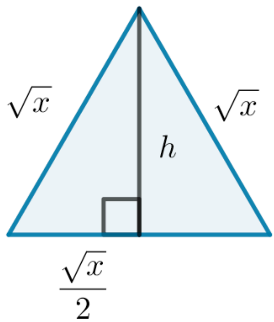
$5,064...\cdot 680=3443,8...\approx 3400\quad (\mathrm{kg})$

Vastaus

3400 kg

303





Lasketaan poikkileikkauskolmion pinta-ala.

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \sqrt{x}^2$$

$$h^2 + \frac{x}{4} = x \qquad \mid h > 0$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$$

$$A(x) = \frac{h\sqrt{x}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}\sqrt{x}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Lasketaan tornin tilavuus.

$$V = \int_0^{24} A(x)\mathrm{d}x$$

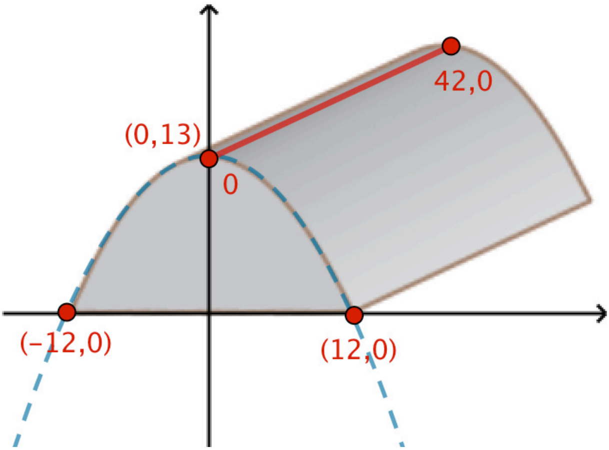
$$= \int_0^{24} \frac{x\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x$$

$$= 124{,}7... \approx 125 \ \ (\mathrm{m}^3)$$

Vastaus
125 m^3

304

Sijoitetaan hallin pääty koordinaatistoon niin, että huippu on y-akselilla ja päädyn alareuna x-akselilla.



Paraabelin yhtälö on $ax^2 + bx + c = 0$.
Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 13 & \text{huippu } (0,\ 13) \\ a \cdot (-12)^2 + b \cdot (-12) + c = 0 & \text{alareunan vasen pääty } (-12,\ 0) \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 0 & \text{alareunan oikea pääty } (12,\ 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{13}{144} \\ b = 0 \\ c = 13 \end{cases}$$

$$y = -\frac{13}{144}x^2 + 13$$

Hallin kaikki päätyjen suuntaiset poikkileikkaukset ovat pinta-alaltaan yhtä suuria. Lasketaan päädyn pinta-ala.

$$A_p = \int_{-12}^{12} \left(-\frac{13}{144} x^2 + 13 \right) \mathrm{d}x = 208$$

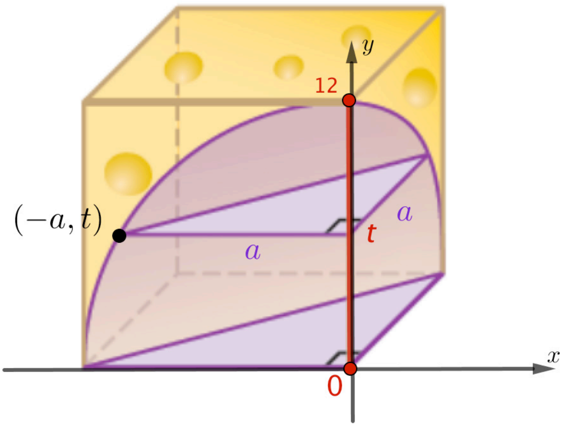
Halli on suora lieriö, jonka pohjan ala on $A_p = 208 \text{ m}^2$ ja korkeus $42{,}0$ m.

$$V = A_p h = 208 \text{ m}^2 \cdot 42{,}0 \text{ m} = 8736 \text{ m}^3 \approx 8740 \text{ m}^3$$

Vastaus
8740 m^3

305

Sijoitetaan juustokuutio koordinaatistoon niin, että pois leikattavan pienemmän osan nurkka on origossa ja pystysärmä positiivisella y-akselilla.



Pois leikattavan kappaleen kaikki pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita, joiden ala korkeudella t on $A(t)=\frac{1}{2}a^2$.

Juustokuution tahkolle on piirretty origokeskisen ympyrän $x^2+y^2=12^2$ kaari. Ympyrällä oleva piste $(-a, t)$ toteuttaa tämän ympyrän yhtälön.

$$x^2+y^2=12^2 \quad \Big| \text{Sijoitetaan } x=-a \text{ ja } y=t.$$

$$(-a)^2+t^2=12^2$$

$$a^2+t^2=12^2$$

$$a^2=12^2-t^2$$

Poikkileikkauksena olevan kolmion pinta-ala t:n avulla lausuttuna on

$$A(t) = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(12^2 - t^2) = 72 - \frac{1}{2}t^2, \text{ missä } 0 \le t \le 12.$$

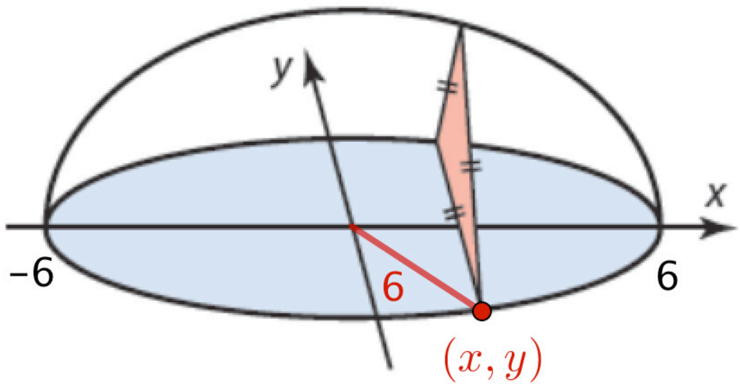
Lasketaan leikatun palan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{12} A(t)\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{12} \left(72 - \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{dt} \\ &= 576 \ (\mathrm{cm}^3) \end{aligned}$$

Vastaus
576 cm^3

306

Piirretään kuva niin, että pohjaympyrän keskipiste on origossa.



Pohja on origokeskinen ympyrä, jonka yhtälö on $x^2 + y^2 = 6^2$.
Poikkileikkaukset ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivujen pituus on $2 \cdot |y|$ ja kaikki kulmat ovat $60°$. Poikkileikkauskolmion ala on

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot |y|)^2 \sin 60°$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= y^2 \sqrt{3}$$

$$\left| \begin{aligned} & x^2 + y^2 = 6^2 \\ & y^2 = 36 - x^2 \end{aligned} \right.$$

$$= (36 - x^2)\sqrt{3}$$

Lasketaan kappaleen tilavuus.

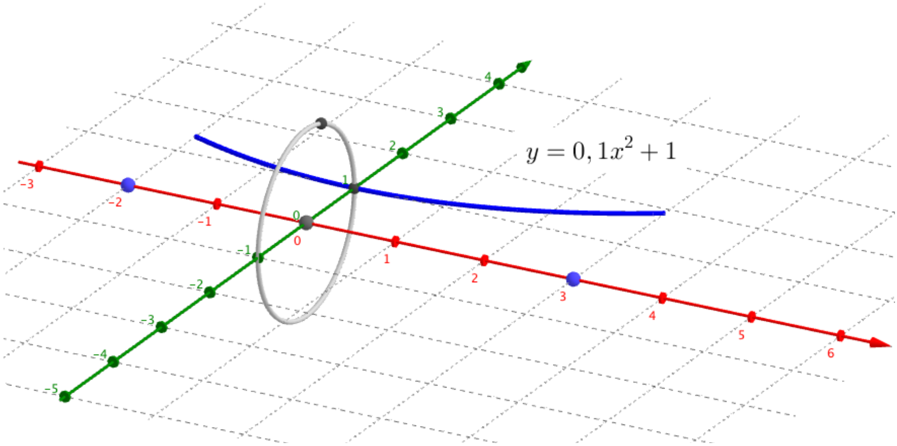
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-6}^{6} A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-6}^{6} (36 - x^2)\sqrt{3}\mathrm{d}x \\
&= 288\sqrt{3} \qquad (\approx 498{,}8)
\end{aligned}
$$

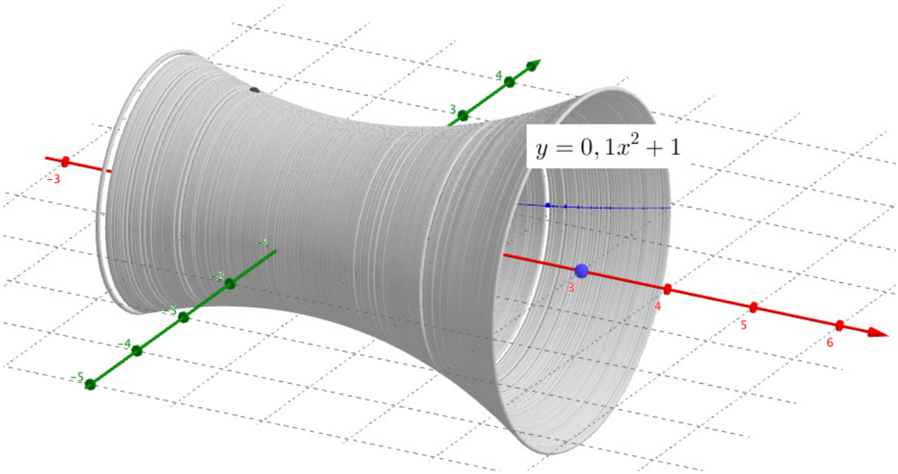
Vastaus

$288\sqrt{3} \approx 498{,}8$

307

Tehtävässä on virhe. Tehtävässä pitäisi lukea: "...pohjan suuntainen poikkileikkaus...".

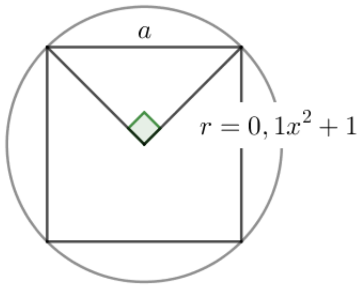




Sorvaamisen jälkeen jokainen *xy*-tasoa vastaan kohtisuora poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on

$r = 0,1x^2 + 1$, missä $-2 \leq x \leq 3$.

Kappaletta hiotaan niin, että jokaisen ympyrän sisään jää mahdollisimman suuri neliö.



Pythagoraan lauseen mukaan

$a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$.

Siten neliön pinta-ala on $a^2 = 2r^2$.

Kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on

$A(x) = 2(0,1x^2 + 1)^2$, missä $-2 \le x \le 3$.

Lasketaan kappaleen tilavuus.

$$V = \int_{-2}^{3} A(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} 2(0,1x^2 + 1)^2\,\mathrm{d}x = 15,766... \approx 15,8$$

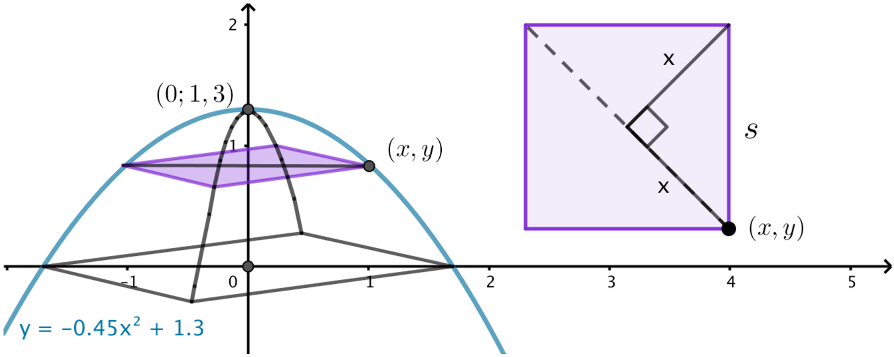
Kappaleen tilavuus on $15,8\ \mathrm{cm}^3$.

Vastaus

$15,8\ \mathrm{cm}^3$

308

Sijoitetaan teltta koordinaatistoon niin, että pohjan keskipiste on origossa ja korkeusjana positiivisella y-akselilla.



Teltan korkeus on $y = -0,45 \cdot 0^2 + 1,3 = 1,3$ (m) $(x = 0)$.

Korkeudelle y piirretyn poikkileikkausneliön sivu on s ja lävistäjän puolikas on $2x$, missä $0 \le y \le 1,3$. Poikkileikkausneliön pinta-ala on $A(y) = s^2$. Pythagoraan lauseen avulla saadaan

$$x^2 + x^2 = s^2$$

$$s^2 = 2x^2$$

$$A(y) = 2x^2 \qquad \left| \begin{array}{l} y = -0,45x^2 + 1,3 \\ x^2 = \dfrac{y - 1,3}{-0,45} \end{array} \right.$$

$$= 2 \cdot \frac{y - 1,3}{-0,45} \qquad \left| \, 0 \le y \le 1,3 \right.$$

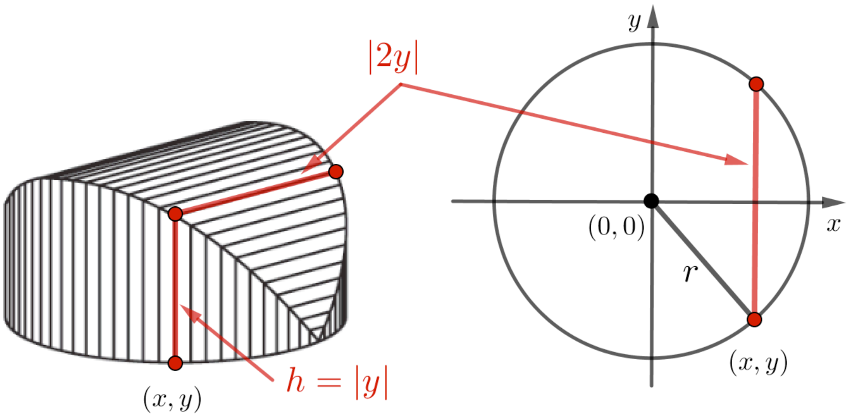
Lasketaan teltan tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{1,3} A(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1,3} 2 \cdot \frac{y-1,3}{-0,45}\,\mathrm{d}y \\
&= 3,7555\ldots \approx 3,8 \quad (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}
$$

Vastaus
$3,8\ \mathrm{m}^3$

309

Sijoitetaan museorakennuksen pohjaympyrä koordinaatiston xy-tasoon niin, että pohjan keskipiste on origossa ja poikkileikkaussuorakulmiot ovat y-akselin suuntaisia.



Pohjaympyrän säde on $r = \dfrac{19,7}{2} = 9,85 \text{ (m)}$.

Pohjaympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 9,85^2$.

Poikkileikkaussuorakulmion kanta on $|2y|$ ja korkeus $\dfrac{1}{2} \cdot |2y| = |y|$.

Kohdassa x poikkileikkaussuorakulmion pinta-ala on

$$A(x) = |2y| \cdot |y| = 2y^2 \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9,85^2 \\ y^2 = 9,85^2 - x^2 \end{array} \right.$$

$$= 2 \cdot (9,85^2 - x^2).$$

Lasketaan rakennuksen tilavuus.

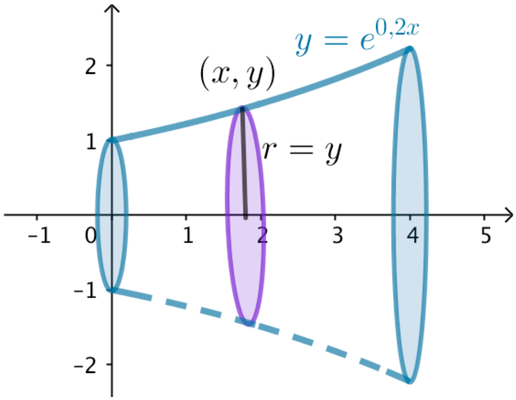
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-9,85}^{9,85} (2 \cdot (9,85^2 - x^2))\,\mathrm{d}x \\
&= 2548,4... \approx 2550 \ \ (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}
$$

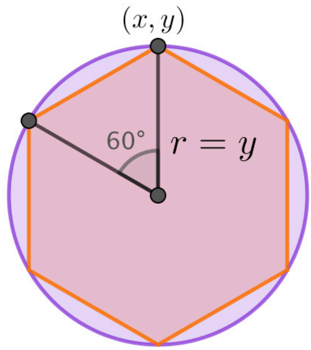
Vastaus

$2550 \ \mathrm{m}^3$

310

Kirjan 1. painoksessa virhe tehtävänannossa. Pitäisi olla ”…, jonka jokainen **pohjien suuntainen** poikkileikkaus on …”





Kohdassa x

– tyhjän sisäosan poikkileikkaus on ympyrä, jonka pinta-ala on

$$A_{sisäosa}(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi(\mathrm{e}^{0,2x})^2 = \pi \mathrm{e}^{0,4x}$$

– puisen kappaleen poikkileikkaus on säännöllinen kuusikulmio, jonka pinta-ala on

$$A_{puu}(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin 60°$$

$$= 3 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{0,2x})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{0,4x}.$$

Lasketaan onton sisäosan tilavuus sekä sisäosan puukappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V_{sisäosa} &= \int_0^4 A_{sisäosa}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \pi\,\mathrm{e}^{0,4x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{5\pi}{2}(\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{puu} &= \int_0^4 A_{puu}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{0,4x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{15\sqrt{3}}{4}(\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}-1)
\end{aligned}
$$

Lasketaan tyhjän tilan osuus taideteoksen sisäosasta.

$$\frac{V_{sisäosa} - V_{puu}}{V_{sisäosa}} \cdot 100\ \%$$

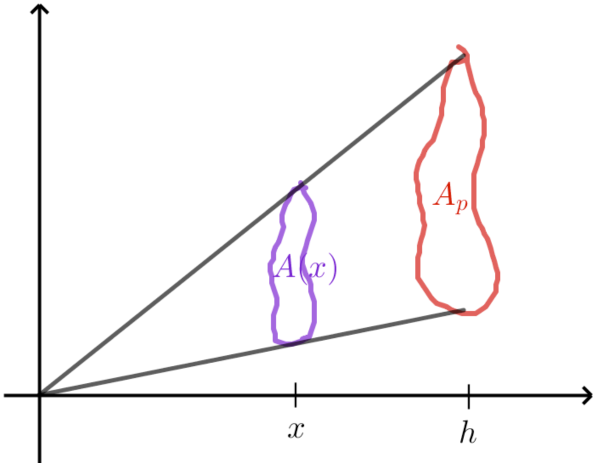
$$= \frac{\frac{5\pi}{2}(e^{\frac{8}{5}} - 1) - \frac{15\sqrt{3}}{4}(e^{\frac{8}{5}} - 1)}{\frac{5\pi}{2}(e^{\frac{8}{5}} - 1)} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{\frac{5\pi}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{4}}{\frac{5\pi}{2}} \cdot 100\ \%$$

$$= 17{,}3006...\ \% \approx 17{,}3\ \%$$

Vastaus
17,3 %

311



Sijoitetaan kartio koordinaatistoon niin, että huippu on kohdassa origossa ja kartion pohja on kohtisuorassa x-akselia vastaan.

Muodostetaan yhdenmuotoisten poikkileikkausten pinta-alojen avulla verranto, ja ratkaistaan tästä kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-alan lauseke $A(x)$.

$$\frac{A(x)}{A_p} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

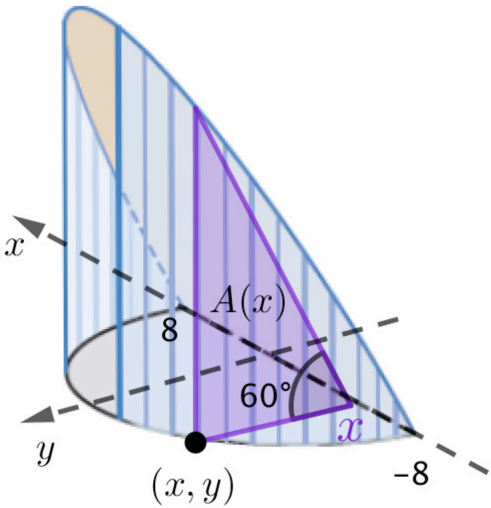
$$A(x) = \frac{A_p}{h^2}x^2, \quad \text{missä } 0 \le x \le h$$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^h A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^h \frac{A_p}{h^2} x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{A_p}{h^2} \int_0^h x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{A_p}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 \\
&= \frac{1}{3} A_p h \quad \square
\end{aligned}
$$

312

Sijoitetaan konserttilava koordinaatistoon niin, että pohjana olevan puoliympyrän keskipiste on origossa ja puoliympyrän halkaisija x-akselilla.



Pohjaa rajaavan puoliympyrän yhtälö on
$x^2 + y^2 = 8^2$, missä $y \geq 0$.

Katon ja pohjan leikkaussuoraa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen terävä kulma on $60°$.
Kohtaan x piirretyn poikkileikkauskolmion kanta on $|y|$ ja korkeus

$$h = |y| \tan 60° \qquad \left| \begin{array}{l} \tan 60° = \dfrac{h}{|y|} \\ \tan 60° = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$= \sqrt{3}|y|.$$

Poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A(x)=\frac{|y|h}{2}$$

$$=\frac{|y|\cdot\sqrt{3}|y|}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}y^2 \qquad \left|\begin{array}{l} x^2+y^2=8^2 \\ y^2=8^2-x^2 \end{array}\right.$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(8^2-x^2\right).$$

Lasketaan tilavuus.

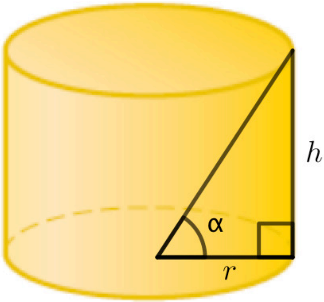
$$V=\int_{-8,0}^{8,0}A(x)\mathrm{d}x$$

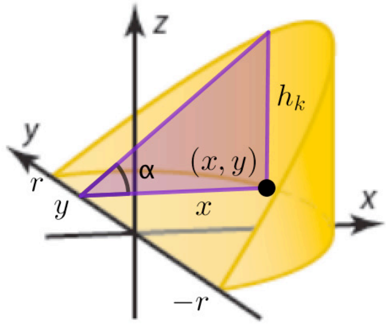
$$=\int_{-8,0}^{8,0}\frac{\sqrt{3}}{2}(8^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=591{,}2...\approx 590 \quad (\mathrm{m}^3)$$

Vastaus
590 m^3

313





Leikatun palan pohja on xy-tason puoliympyrä, jonka yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$, missä $x > 0$.

Pohjaa vastaan kohtaan x piirretty kohtisuora poikkileikkaus on suorakulmainen kolmio, jonka xy-tasossa olevan sivun pituus on x ja y-akselilla oleva terävä kulma on α. Lisäksi $\tan \alpha = \dfrac{h}{r} = \text{vakio}$.

Kohtaan x piirretyn poikkileikkauskolmion pinta-ala on

$$A(x)=\frac{x\cdot h_k}{2}$$

$$\left|\begin{array}{l}\tan\alpha=\dfrac{h_k}{x}=\dfrac{h}{r}, \text{ joten}\\[2ex] h_k=\dfrac{h}{r}x\end{array}\right.$$

$$=\frac{x\cdot\frac{h}{r}x}{2}$$

$$=\frac{h}{2r}x^2$$

$$\left|\begin{array}{l}x^2+y^2=r^2\\[2ex] x^2=r^2-y^2\end{array}\right.$$

$$=\frac{h}{2r}(r^2-y^2)$$

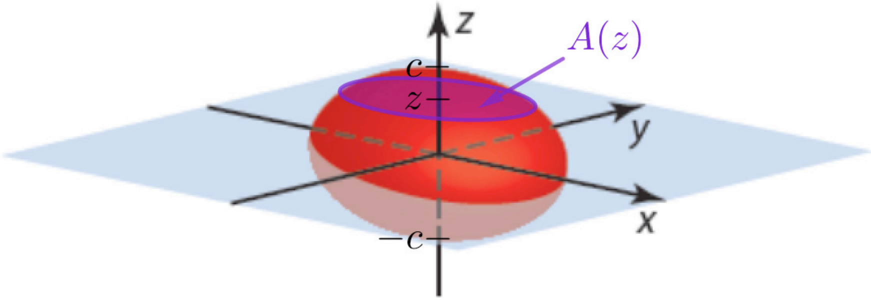
Lasketaan palan tilavuus.

$$\begin{aligned}V&=\int_{-r}^{r}A(r)\mathrm{d}t\\&=\int_{-r}^{r}\frac{h}{2r}(r^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{3}r^2h\end{aligned}$$

Vastaus

$$\frac{2}{3}r^2h$$

314



Leikataan ellipsoidi kohdassa z tasolla, joka on kohtisuorassa z-akselia vastaan. Syntynyt leikkauskäyrä on

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = {}^{c^2)}1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2-z^2}{c^2} \qquad \bigg| \cdot \frac{c^2}{c^2-z^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{c^2-z^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{c^2-z^2}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cdot(c^2-z^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2\cdot(c^2-z^2)}{c^2}}=1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b\cdot\sqrt{c^2-z^2}}{c}\right)^2}=1$$

Saadun ellipsin pinta-ala on $A(z) = \pi m n$, missä $m = \dfrac{a \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}$ ja $n = \dfrac{b \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}$. Sievennetään $A(z)$:n lauseke.

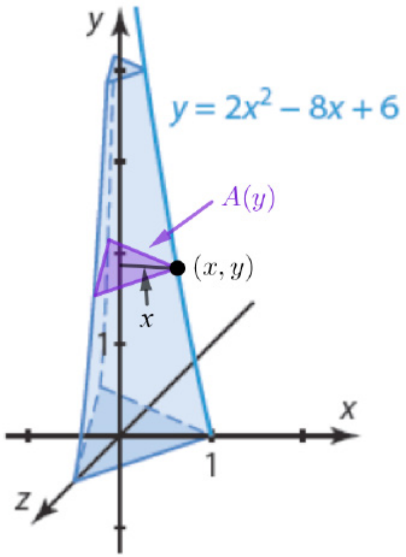
$$
\begin{aligned}
A(z) &= \pi m n \\
&= \pi \cdot \frac{a \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c} \cdot \frac{b \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c} \\
&= \pi \cdot \frac{ab \cdot (c^2 - z^2)}{c^2}
\end{aligned}
$$

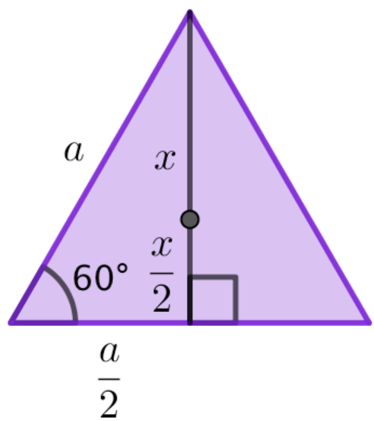
Lasketaan ellipsoidin tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-c}^{c} A(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-c}^{c} \pi \cdot \frac{ab \cdot (c^2 - z^2)}{c^2}\mathrm{d}z \qquad \Big| \, \pi,\ a,\ b \text{ ja } c \text{ ovat vakioita.} \\
&= \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi ab}{c^2} \Big/_{-c}^{c} (c^2 z - \frac{1}{3} z^3) \\
&= \frac{\pi ab}{c^2} \left((c^2 \cdot c - \frac{1}{3} \cdot c^3) - (c^2 \cdot (-c) - \frac{1}{3} \cdot (-c)^3) \right) \\
&= \frac{\pi ab}{c^2} \left(\frac{2}{3} c^3 - (-\frac{2}{3} c^3) \right) \\
&= \frac{\pi ab}{c^2} \cdot \frac{4}{3} c^3 \\
&= \frac{4}{3} \pi abc \qquad \square
\end{aligned}
$$

315

Poikkileikkaus korkeudella y on tasasivuinen kolmio, jonka kärjen etäisyys kolmion painopisteestä on x.
Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit 2:1 kärjestä lukien. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Merkitään kolmion sivua kirjaimella a.





Korkeudelle y piirretyn poikkileikkauskolmion pinta-ala on

$$A(y) = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° \qquad \Big| \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Ratkaistaan a^2 Pythagoraan lauseen avulla.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{9x^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$A(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad \left| \, a^2 = 3x^2 \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x + 6 \\ 2x^2 - 8x + 6 - y = 0 \\ x = \dfrac{4 \pm \sqrt{2y+4}}{2}, \; 0 < x < 1 \\ x = \dfrac{4 - \sqrt{2y+4}}{2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{2y+4}}{2}\right)^2 \qquad \left| \, 0 \le y \le 4 \right.$$

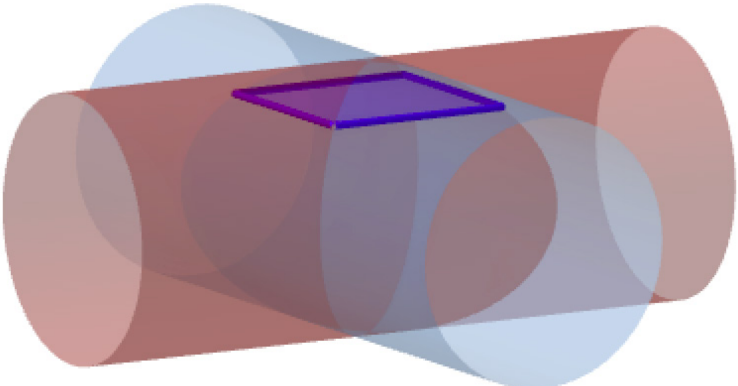
Lasketaan pylvään tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 A(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4-\sqrt{2y+4}}{2} \right)^2 \mathrm{d}y \\
&= 2{,}105... \approx 2{,}1 \quad (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}
$$

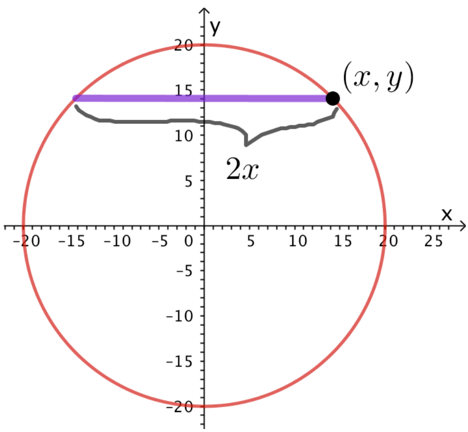
Vastaus
2,1 m^3

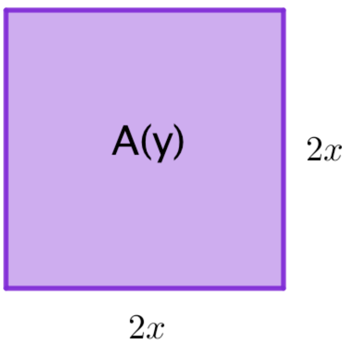
316

Sijoitetaan putket xz-tasoon niin, että putkien poikkileikkausympyröiden keskipisteet ovat x- ja z-akseleilla.



Putkien risteävän alueen jokainen xz-tason (kuvassa vaakasuora taso)suuntainen poikkileikkaus on neliö. Leikataan putkien yhteinen osa xy-tasolla (kuvassa pystysuora taso), jolloin leikkauskuvio on sama kuin putken poikkileikkaus eli ympyrä $x^2 + y^2 = 20^2$.





Poikkileikkausneliön sivun pituus on $2x$.
Neliön pinta-ala on $A(y)$.

$$A(y) = (2x)^2$$

$$= 4x^2 \qquad \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 = 20^2 - y^2 \end{array} \right.$$

$$= 4(20^2 - y^2)$$

$$= 1600 - 4y^2$$

Lasketaan putkien yhteisen osan tilavuus.

$$V = \int_{-20}^{20} A(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-20}^{20} (1600 - 4y^2 = \mathrm{d}y$$

$$= 42666{,}66... \quad (\mathrm{cm}^3)$$

Yhteisen osan tilavuus on $42666{,}66... \ \mathrm{cm}^3 \approx 42700 \ \mathrm{cm}^3 = 42{,}7 \ \mathrm{L}$.

Vastaus

42,7 L