114

a)

$$\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

uusi kerroin $\frac{2}{3}$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C,\ \text{kun } x>0$$

b)

$$\int 5x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

uusi kerroin 2

$$=5\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=10x^{\frac{1}{2}}+C,\ \text{kun } x>0$$

c)

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$

uusi kerroin 3

$$=3x^{\frac{1}{3}}+C,\ \text{kun } x>0$$

Vastaus a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C,$ kun $x>0$

b) $10x^{\frac{1}{2}}+C,$ kun $x>0$

c) $3x^{\frac{1}{3}}+C,$ kun $x>0$

115

a)

$$\int -3\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int -3x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

kerroin $\frac{2}{3}$

$$= -3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= -2x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= -2x\sqrt{x}+C,\ \text{kun } x>0$$

b)

$$\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

kerroin $\frac{2}{5}$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x}+C,\ \text{kun } x>0$$

c)

$$\int \frac{4}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

kerroin 2

$$= 4 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 8\sqrt{x} + C, \text{ kun } x > 0$$

Vastaus

a) $-2x\sqrt{x} + C$, kun $x > 0$

b) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$, kun $x > 0$

c) $8\sqrt{x} + C$, kun $x > 0$

116

a)

$\int 5x^{-2}\mathrm{d}x$

eksponentti $-2+1=-1$

kerroin $\frac{1}{-1}=-1$

$= 5\cdot\left(-x^{-1}\right)+C$

$= -\frac{5}{x}+C,\ \text{kun}\ x>0$

b)

$\int \frac{3}{x^5}\mathrm{d}x$

$= \int 3\cdot x^{-5}\mathrm{d}x$

eksponentti $-5+1=-4$

kerroin $-\frac{1}{4}$

$= 3\cdot\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)+C$

$-\frac{3}{4x^4}+C,\ \text{kun}\ x>0$

c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^3}$$

$$\int \frac{1}{4} \cdot x^{-3}\mathrm{d}x$$

eksponentti $-3+1=-2$

kerroin $-\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{8x^2} + C, \text{ kun } x > 0$$

Vastaus

a) $-\frac{5}{x} + C, \text{ kun } x > 0$

b) $-\frac{3}{4x^4} + C, \text{ kun } x > 0$

c) $-\frac{1}{8x^2} + C, \text{ kun } x > 0$

117

Tutkitaan ensin integraalia välillä $x > 0$.

$$\int \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$$
$$= \int x^{-4} \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{3} x^{-3} + C$$
$$= -\frac{1}{3x^3} + C$$

Tutkitaan sitten integraalia välillä $x < 0$.

$$\int \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$$
$$= \int x^{-4} \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{3} x^{-3} + D$$
$$= -\frac{1}{3x^3} + D$$

Integraalifunktio on siis $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3x^3} + C, \text{ kun } x > 0 \\ -\dfrac{1}{3x^3} + D, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$

118

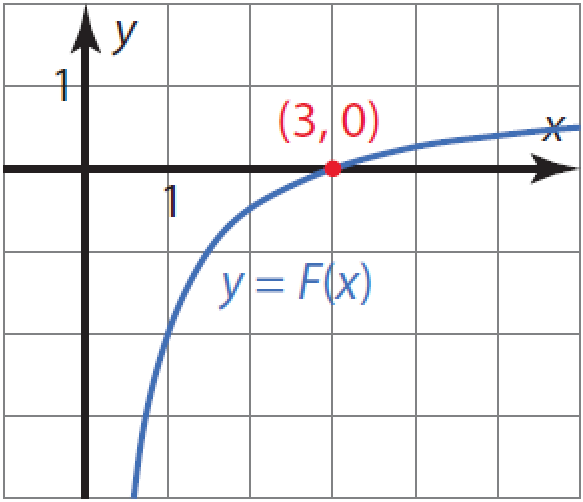
Määritetään ensin kaikki integraalifunktiot.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3 \cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= 3 \cdot \left(-x^{-1}\right) + C \\ &= -\frac{3}{x} + C, \text{ kun } x > 0 \end{aligned}$$

Määritetään integroimisvakio C.

$$\begin{aligned} F(3) &= 0 \\ -\frac{3}{3} + C &= 0 \\ -1 + C &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Saadaan $F(x) = -\frac{3}{x} + 1$, kun $x > 0$.



Vastaus

$$F(x) = -\frac{3}{x} + 1, \text{ kun } x > 0$$

119

a)

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,\ \text{kun}\ \ x > 0$$

b)

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{1}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(1 - x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= x - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x - 2\sqrt{x} + C,\ \text{kun } x > 0$$

Vastaus

a) $2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{2}\sqrt{x} + C,\ \text{kun } x > 0$

b) $x - 2\sqrt{x} + C,\ \text{kun } x > 0$

120

a)

$$\int_4^5 \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_4^5 x^{-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big/_4^5 -\frac{1}{2}x^{-2}$$

$$= \Big/_4^5 -x^{-2}$$

$$= -5^{-2} - (-4^{-2})$$

$$= -\frac{1}{25} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{9}{400}$$

b)

$$\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

kerroin $\frac{3}{2}$

$$= 2 \Big/_1^8 \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \Big/_1^8 3x^{\frac{2}{3}}$$

$$= 3\cdot 8^{\frac{2}{3}} - 3\cdot 1^{\frac{2}{3}}$$

$$= 3\cdot 4 - 3$$

$$= 9$$

c)

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

kerroin $\frac{3}{4}$

$$= \Big/_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}$$

$$= \Big/_{-1}^{1} \frac{3}{2}x\cdot\sqrt[3]{x}$$

$$= \frac{3}{2}1\cdot\sqrt[3]{1}-\frac{3}{2}(-1)\cdot\sqrt[3]{-1}$$

$$= \frac{3}{2}-\frac{3}{2}$$

$$= 0$$

Vastaus

a) $\frac{9}{400}$

b) 9

c) 0

121

a)

$$\int x^2\left(x^3-5\right)^4 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3-5\right)^4 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\left(x^3-5\right)^5+C$$
$$=\frac{1}{15}\left(x^3-5\right)^5+C$$

b)

$$\int\left(3x+1\right)^5 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\int 3\left(3x+1\right)^5 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\left(3x+1\right)^6+C$$
$$=\frac{1}{18}\left(3x+1\right)^6+C$$

c)

$$\int (1-x)^3 \, \mathrm{d}x$$
$$= -1\int -1(1-x)^3 \, \mathrm{d}x$$
$$= -1 \cdot \frac{1}{4}(1-x)^4 + C$$
$$= -\frac{1}{4}(1-x)^4 + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{15}\left(x^3-5\right)^5 + C$

b) $\frac{1}{18}(3x+1)^6 + C$

c) $-\frac{1}{4}(1-x)^4 + C$

122

a)

$$\int \sqrt{x-3}\mathrm{d}x$$

$$=\int (x-3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3}+C,\ \text{kun}\ \ x>3$$

b)

$$\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+C$$

Vastaus

a) $\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3}+C,$ kun $x>3$

b) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

123

a)

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int x\left(x^2+1\right)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{1})\left(x^2+1\right)^{-1}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+C$$

$$=\frac{-1}{2x^2+2}+C$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

eksponentti $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

kerroin 2

$$= \frac{1}{2}\cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{2x+1}+C,\ \text{kun}\ x > -\frac{1}{2}$$

Vastaus

a) $\dfrac{-1}{2x^2+2}+C$

b) $\sqrt{2x+1}+C,\ \text{kun}\ x > -\frac{1}{2}$

124

a) Sisäfunktion derivaatta on $2x$. Tätä ei voi saada sisäfunktion eteen, joten funktiota ei voi integroida yhdistetyn funktion integroimissääntöä käyttäen.

b) Voi.

$$\int x\left(x^2-1\right)^3 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2-1\right)^3 \mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)^4+C$$
$$=\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4+C$$

c) Sisäfunktion derivaatta on $2x$. Tätä ei voi saada sisäfunktion eteen, joten funktiota ei voi integroida yhdistetyn funktion integroimissääntöä käyttäen.

Vastaus

a) ei voi

b) $\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4+C$

c) ei voi

125

a)

$$\int_1^2 \sqrt{5x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (5x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\int_1^2 5(5x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\mathop{/}_1^2 \frac{2}{3}(5x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{15}\mathop{/}_1^2 (5x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{15}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{15}(27-8)$$

$$= \frac{38}{15}$$

b)

$$\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{5x-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\cdot\frac{1}{5}\int_1^2 5(5x-1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\,\Big/_1^2\, 2(5x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{5}\,\Big/_1^2\, \sqrt{5x-1}$$

$$= \frac{4}{5}\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)$$

$$= \frac{4}{5}(3-2)$$

$$= \frac{4}{5}$$

Vastaus

a) $\frac{38}{15}$

b) $\frac{4}{5}$

126

$$A = \int_0^2 \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (2-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\int_0^2 -1(2-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

eksponentti $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

kerroin $\frac{2}{3}$

$$= -1 \mathop{/}_0^2 \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3} \mathop{/}_0^2 (2-x)\sqrt{2-x}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(0 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Vastaus

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

127

a)

$$\int (x-1)\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x-1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + C,\ \text{kun}\ \ x > 1$$

b)

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{(1-x)^1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -1\int -1(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + C,\ \text{kun}\ \ x < 1$$

Vastaus

a) $\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+C$, kun $x>1$

b) $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$, kun $x<1$

128

a)

$$\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

uusi kerroin $\frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C, \text{ kun } x > 0$$

b)

$$\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$

uusi kerroin $\frac{2}{7}$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C, \text{ kun } x > 0$$

c)

$$\int \frac{6}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int 6x^{-2}\mathrm{d}x$$
$$= 6 \cdot (-1)x^{-1} + C$$
$$= -\frac{6}{x} + C, \text{ kun } x > 0$$

d)

$$\int \frac{4}{5x^3}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{4}{5}x^{-3}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4}{5} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-2} + C$$
$$= -\frac{2}{5}x^{-2} + C$$
$$= -\frac{2}{5x^2} + C, \text{ kun } x > 0$$

Vastaus

a) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C,\ \text{kun } x>0$

b) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C,\ \text{kun } x>0$

c) $-\frac{6}{x}+C,\ \text{kun } x>0$

d) $-\frac{2}{5x^2}+C,\ \text{kun } x>0$

129

a)

$$\int_1^4 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

uusi kerroin $\frac{2}{3}$

$$= 2\operatorname*{/}_1^4 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\operatorname*{/}_1^4 x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(8-1)$$

$$= \frac{28}{3}$$

b)

$$\int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

uusi eksponentti $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

uusi kerroin $\frac{3}{2}$

$$=\Big/_1^8 \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 1^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{3}{2}\cdot 1$$

$$=\frac{9}{2}$$

c)

$$\int_{2}^{1} \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{2}^{1} 4x^{-4}\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_{2}^{1} x^{-4}\mathrm{d}x$$

$$= 4\,\Big/_{2}^{1} -\frac{1}{3}x^{-3}$$

$$= -\frac{4}{3}\,\Big/_{2}^{1} \frac{1}{x^3}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{8}$$

$$= -\frac{7}{6}$$

Vastaus

a) $\frac{28}{3}$

b) $\frac{9}{2}$

c) $-\frac{7}{6}$

130

Funktio $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ on määritelty, kun $x>0$.

Määritetään integraalifunktiot.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x \\
&= \int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C \\
&= \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C,
\end{aligned}$$

missä $x>0$.

Vastaus

$F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$, kun $x>0$

131

a) Funktio $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ on jatkuva välillä $x > 0$ ja välillä $x < 0$.

Määritetään integraalifunktiot välillä $x > 0$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x + \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\ &= \int (x + x^{-2})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x^{-1} + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Määritetään integraalifunktiot välillä $x < 0$.

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + D$$

Siis

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C, \text{ kun } x > 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + D, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$$

b) Määritetään vakio C.

$$
\begin{aligned}
F(2) &= 1 \\
\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2} + C &= 1 \\
\frac{3}{2} + C &= 1 \\
C &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Määritetään vakio D.

$$
\begin{aligned}
F(-1) &= 0 \\
\frac{1}{2}\cdot\left(-1\right)^2 - \frac{1}{-1} + D &= 0 \\
\frac{3}{2} + D &= 0 \\
D &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Siis

$$
F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, \text{ kun } x > 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}, \text{ kun } x < 0. \end{cases}
$$

Vastaus

a) $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}+C, \text{ kun } x>0\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}+D, \text{ kun } x<0.\end{cases}$$

b) $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}, \text{ kun } x>0\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}, \text{ kun } x<0.\end{cases}$$

132

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^2 \left(x\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_1^2 \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x \\
&= \frac{2}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}}+2-\left(\frac{2}{5}\cdot 1^{\frac{5}{2}}+1\right) \\
&= \frac{2}{5}\cdot 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}+2-\frac{2}{5}-1 \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{5} \\
&= \frac{8\sqrt{2}+3}{5}
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$\frac{8\sqrt{2}+3}{5}$$

133

a)

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(x^2-2+x^{-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x-x^{-1}+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C,\ \text{kun}\ \ x>0$$

b)

$$\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2+C,\ \text{kun}\ \ x>0$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$, kun $x > 0$

134

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x > 0$.

Integroidaan muuttujan t suhteen.

$$f(x) = \int_0^x (t\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{d}t$$

$$= \Big/_0^x (\frac{1}{2}t^2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}t)$$

$$= (\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}x) - (0-0)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}\cdot(\frac{1}{2}x^2 - 1) = 0$$

$\sqrt{x} = 0$ tai $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$

Määrittelyehdon toteuttaa vain $x = \sqrt{2}$.

Vastaus

$x = \sqrt{2}$

135

a)

$$\int 32(8x-1)^3\,dx$$
$$= 4\int 8(8x-1)^3\,dx$$
$$= 4\cdot\frac{1}{4}(8x-1)^4 + C$$
$$= (8x-1)^4 + C$$

b)

$$\int x^2\left(x^3-1\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3-1\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3-1\right)^3 + C$$
$$= \frac{1}{9}\left(x^3-1\right)^3 + C$$

c)

$$\int (3-x)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= -1\int -1(3-x)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= -1 \cdot \frac{1}{3}(3-x)^3 + C$$
$$= -\frac{1}{3}(3-x)^3 + C$$

Vastaus

a) $(8x-1)^4 + C$

b) $\frac{1}{9}\left(x^3-1\right)^3 + C$

c) $-\frac{1}{3}(3-x)^3 + C$

136

a) **Huomaa! Kirjan ensimmäisessä painoksessa on virhe tehtävänannossa: määrittelyehto on $x<\frac{5}{2}$.**

$$\int 6\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int 6(5-2x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{-2}\int(-2)(5-2x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

eksponentti $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

kerroin $\frac{2}{3}$

$$=-\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}(5-2x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-2(5-2x)\sqrt{5-2x}+C,\ \text{kun}\ \ x<\frac{5}{2}$$

b)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+2}}$$

$$=\int(5x+2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\int 5(5x+2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

eksponentti $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

kerroin 2

$$=\frac{1}{5}\cdot 2(5x+2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{5x+2}+C,\ \text{kun}\ \ x>-\frac{2}{5}$$

Vastaus

a) $-2(5-2x)\sqrt{5-2x}+C,\ \text{kun}\ \ x<\dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{2}{5}\sqrt{5x+2}+C,\ \text{kun}\ x>-\dfrac{2}{5}$

137

Funktio f on jatkuva välillä $x > 1$ ja välillä $x < 1$.

Määritetään integraalifunktio välillä $x > 1$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= -(x-1)^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Määritetään integraalifunktio välillä $x > 1$.

$$F(x) = -\frac{1}{x-1} + D$$

Saadaan

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} + C, \text{ kun } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x-1} + D, \text{ kun } x < 1. \end{cases}$$

138

a)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3x+6}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} (3x+6)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 3(3x+6)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\mathop{/}_{-1}^{1} \frac{2}{3}(3x+6)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}\mathop{/}_{-1}^{1} (3x+6)\sqrt{3x+6}$$

$$= \frac{2}{9}\left(27-3\sqrt{3}\right)$$

$$= 6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b)

$$\int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \int_{-2}^{0} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\int_{-2}^{0} -1\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1 \mathop{/}_{-2}^{0} 2(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2 \mathop{/}_{-2}^{0} \sqrt{1-x}$$

$$= -2\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}-2$$

Vastaus

a) $6-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $2\sqrt{3}-2$

139

a)

$$\int (x+2)\sqrt{x^2+4x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int (x+2)\left(x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int (2x+4)\left(x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2+4x\right)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+4x\right)\sqrt{x^2+4x}+C,\ \text{kun}\ \ x>0$$

b)

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int (4x+1)\left(4x^2+2x\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int (8x+2)\left(4x^2+2x\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\left(4x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\sqrt{4x^2+2x}+C,\ \text{kun}\ \ x>0$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\left(x^2+4x\right)\sqrt{x^2+4x}+C$, kun $x>0$

b) $\sqrt{4x^2+2x}+C$, kun $x>0$

140

Funktio $f(x)=(2x-1)(x^2-x)^2$ on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot.

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-x\right)^3+C$$

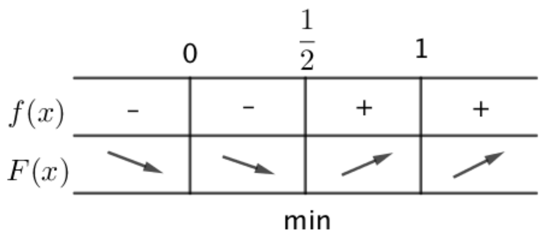
Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\left(2x-1\right)\left(x^2-x\right)^2=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=\frac{1}{2} \text{ tai } x=1$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
–1	–12	–
0,4	–0,011...	–
0,6	0,0027...	+
2	12	+



Funktio F saa pienimmän arvon kohdassa $x=\frac{1}{2}$.

Pienimmän arvon tulee olla –1.

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$-\frac{1}{192} + C = -1$$

$$C = -\frac{191}{192}$$

Saadaan

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - x\right)^3 - \frac{191}{192}.$$

Vastaus

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - x\right)^3 - \frac{191}{192}$$

141

Koska funktiot $f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2$ ja x^2 ovat yhtä suuret kaikilla x, niin myös niiden integraalifunktiot ovat yhtä suuret kaikilla x.

$$
\begin{aligned}
f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2 &= x^2 \\
\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2\,\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}x \\
\frac{1}{3}\left(f(x)\right)^3 &= \frac{1}{3}x^3 + C \qquad \Big|\cdot 3 \\
\left(f(x)\right)^3 &= x^3 + 3C \\
f(x) &= \sqrt[3]{x^3+3C}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan vakio C.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 2 \\
\sqrt[3]{1^3+3C} &= 2 \qquad \Big|\,(\,)^3 \\
1+3C &= 2^3 \\
C &= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Saadaan $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3\cdot\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{x^3+7}$.

Vastaus

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+7}$

142

Koska saavutettu elintaso $f(x)$ ja sen kasvunopeus $f'(x)$ ovat kääntäen verrannollisia, niiden tulo on vakio $k_1 > 0$.

$$f'(x)\cdot f(x)=k_1$$
$$\int f'(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int k_1\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}(f(x))^2=kx_1+C_1 \quad \Big|\cdot 2$$
$$(f(x))^2=2k_1x+2C_1$$
$$f(x)=\pm\sqrt{2k_1x+2C_1}$$

Koska elintasoa mitataan keskimääräisenä kulutuksena vuodessa, funktion f arvon tulee olla epänegatiivinen.
Kun merkitään $2k_1 = k$ ja $2C_1 = C$, saadaan

$$f(x)=\sqrt{kx+C},$$

missä $x \geq 0$ ja $k > 0$ ja $C \geq 0$ ovat vakioita.

Vastaus

$f(x)=\sqrt{kx+C}$, missä $x \geq 0$ ja $k > 0$ ja $C \geq 0$ ovat vakioita.

143

Funktio f on määritelty $f(x)=\int_x^{3x}\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Oletetaan, että $G(t)$ on funktion $\sqrt{t^2+1}$ jokin integraalifunktio.

Tällöin $f(x)=G(3x)-G(x)$.

Koska $G'(t)=\sqrt{t^2+1}$, niin

$$f'(x)=G'(3x)-G'(x)=3\sqrt{(3x)^2+1}-\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1}$$

Tutkitaan derivaattafunktion saamia arvoja.

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1} && 9x^2\geq x^2\\ &\geq 3\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\\ &=2\sqrt{x^2+1} && x^2\geq 0\\ &\geq 2\sqrt{0+1}\\ &>0\end{aligned}$$

Koska derivaattafunktion arvo on positiivinen kaikilla x, niin funktio f on aidosti kasvava, eikä sillä ole ääriarvoja.

Vastaus
$f'(x)=3\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1}$, funktiolla f ei ole ääriarvoja.

144

a) $\mathrm{D}\mathrm{e}^{8x} = \mathrm{e}^{8x} \cdot \mathrm{D}\,8x = \mathrm{e}^{8x} \cdot 8 = 8\mathrm{e}^{8x}$

b) Funktion $8\mathrm{e}^{8x}$ eräs integraalifunktio on e^{8x}.

Siten funktio e^{8x} eräs integraalifunktio on $\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{8x}$

ja kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{8x} + C$.

Vastaus a) $8e^{8x}$

b) $\dfrac{1}{8}e^{8x} + C$

145

a) $\int \frac{2e^x}{5}dx = \int \frac{2}{5}\cdot e^x dx = \frac{2}{5}\int e^x dx = \frac{2}{5}e^x + C$

b) $\int e^{6x}dx = \frac{1}{6}\int 6e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x} + C$

c) $\int e^{-x}dx = -1\int -1\cdot e^{-x}dx = -1\cdot e^{-x} + C = -e^{-x} + C$

d) $\int e^{\frac{x}{9}}dx = 9\int \frac{1}{9}e^{\frac{x}{9}}dx = 9e^{\frac{x}{9}} + C$

Vastaus a) $\frac{2}{5}e^x + C$

b) $\frac{1}{6}e^{6x} + C$

c) $-e^{-x} + C$

d) $9e^{\frac{x}{9}} + C$

146

a) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$

b) $\int x^3\mathrm{e}^{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4x^3\mathrm{e}^{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$

c) $\int -x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C$

Vastaus a) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$

b) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4} + C$

c) $-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C$

147

a)

$$\int \frac{3}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$
$$= \int 3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= -3\int -1 \cdot \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= -3\mathrm{e}^{-x} + C$$
$$= -\frac{3}{\mathrm{e}^x} + C$$

b)

$$\int \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= \int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int -2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$$
$$= -\frac{1}{2\mathrm{e}^{x^2}} + C$$

c)

$$\int \frac{4x^2}{e^{x^3}}\,dx$$

$$= \int 4x^2 e^{-x^3}\,dx$$

$$= -\frac{4}{3}\int -3x^2 e^{-x^3}\,dx$$

$$= -\frac{4}{3}e^{-x^3} + C$$

$$= -\frac{4}{3e^{x^3}} + C$$

Vastaus

a) $-\dfrac{3}{e^x} + C$

b) $-\dfrac{1}{2e^{x^2}} + C$

c) $= -\dfrac{4}{3e^{x^3}} + C$

148

$\int_0^3 e^{\frac{x}{6}} dx$

$= \int_0^3 6 \cdot \frac{1}{6} e^{\frac{x}{6}} dx$

$= 6 \int_0^3 \frac{1}{6} e^{\frac{x}{6}} dx$

$= 6 \mathop{/}_0^3 e^{\frac{x}{6}}$

$= 6(e^{\frac{3}{6}} - e^{\frac{0}{6}})$

$= 6(e^{\frac{1}{2}} - e^{0})$

$= 6(\sqrt{e} - 1)$

Vastaus
$6(\sqrt{e} - 1)$

149

$$\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^x + (-1) \cdot e^{-x})dx$$

$$= \Big/_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x})$$

$$= (e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) - (e^0 + e^{-0})$$

$$= (e^{\ln 2} + \frac{1}{e^{\ln 2}}) - (1+1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}$$

Vastaus

$$\frac{1}{2}$$

150

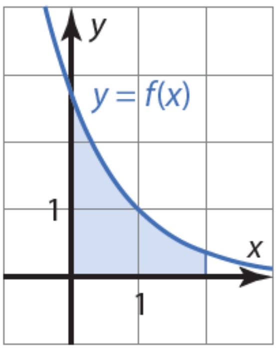
Koska funktio f on epänegatiivinen välillä $[0, 2]$, pinta-ala on määrätty integraali.

$$A = \int_0^2 \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x = -1\int_0^2 -1 \cdot \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -1 \Big/_0^2 \mathrm{e}^{1-x} = -(\mathrm{e}^{1-2} + \mathrm{e}^{1-0})$$

$$= -(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1}) = -(\frac{1}{\mathrm{e}} + \mathrm{e})$$

$$= \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

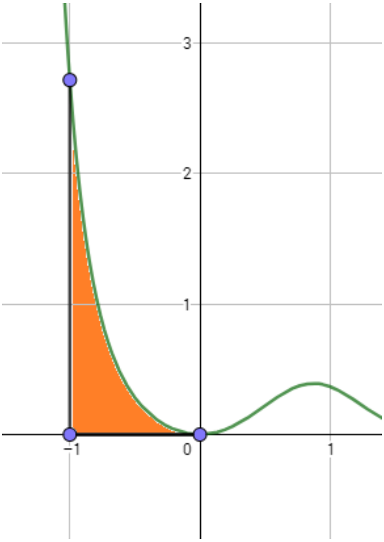


Vastaus

$$\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

151

Piirretään kuva.



Koska funktio f on epänegatiivinen välillä $[-1, 0]$, pinta-ala on määrätty integraali.

Laskimella saadaan

$$A = \int_{-1}^{0} x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}(e-1) \approx 0{,}57\,.$$

Vastaus

$$\frac{1}{3}(e-1)$$

152

Funktio $f(t)=1-\mathrm{e}^{2t}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot laskimella.

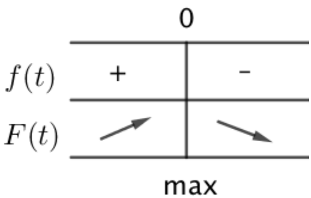
$$F(t)=t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}1-\mathrm{e}^{2t}&=0\\ \mathrm{e}^{2t}&=1\\ 2t&=0\\ t&=0\end{aligned}$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
–1	0,86...	+
1	–6,38...	–



Funktio F saa suurimman arvon kohdassa $x=0$.
Suurimman arvon tulee olla $\frac{3}{2}$.

Ratkaistaan C.

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{3}{2} \\ 0-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\cdot 0}+C &= \frac{3}{2} \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Saadaan

$$F(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+t+2\,.$$

Vastaus

$$F(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+t+2$$

153

Funktio $f(x) = e^{2x} - 3e^{x}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot (laskimella).

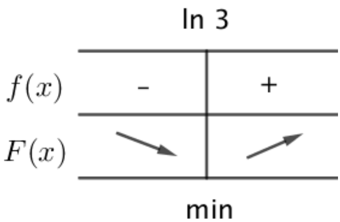
$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} + C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat (laskimella).

$$e^{2x} - 3e^{x} = 0$$
$$x = \ln 3 \approx 1,099$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
1	–0,765...	–
2	32,4...	+



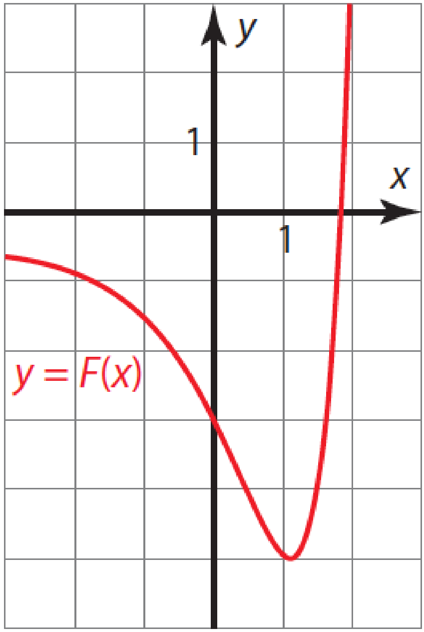
Funktio F saa pienimmän arvon kohdassa $x = \ln 3$.
Pienimmän arvon tulee olla –5.

Ratkaistaan C.

$$F(\ln 3) = -5$$

$$\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln 3} - 3e^{\ln 3} + C = -5$$

$$C = -\frac{1}{2}$$



Saadaan

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} - \frac{1}{2}.$$

Vastaus

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} - \frac{1}{2}$$

154

a) $\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}\int -5e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

b) Ei voi. Sisäfunktion derivaattaa ei saa integroitavan funktion eteen.

c) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$

d) Ei voi. Sisäfunktion derivaattaa ei saa integroitavan funktion eteen.

Vastaus

a) $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

b) Ei voi

c) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$

d) Ei voi

155

a) $\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$

b) $\int 8\mathrm{e}^{4x-1}\mathrm{d}x = 2\int 4\mathrm{e}^{4x-1}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{4x-1} + C$

c)

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{3}\int -3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$$
$$= -\frac{1}{3\mathrm{e}^{3x}} + C$$

d)

$$\int \frac{6x}{\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x = \int 6x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -3\int -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -3\mathrm{e}^{-x^2} + C$$
$$= -\frac{3}{\mathrm{e}^{-x^2}} + C$$

Vastaus

a) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$

b) $\mathrm{e}^{4x-1}+C$

c) $-\frac{1}{3\mathrm{e}^{3x}}+C$

d) $-\frac{3}{\mathrm{e}^{-x^2}}+C$

156

a)

$$\begin{aligned}\int e^x(e^x-1)dx &= \int (e^{2x}-e^x)dx \\ &= \int e^{2x}dx - \int e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx - \int e^x dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (e^x-1)^2 dx &= \int (e^{2x}-2e^x+1)dx \\ &= \int e^{2x}dx - 2\int e^x dx + \int 1dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx - 2e^x + x + C \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$

b) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C$

157

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} + 2 + (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}) dx$$

$$= \bigg/_0^1 (\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x})$$

$$= (\frac{1}{2}e^{2\cdot 1} + 2\cdot 1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 1}) - (\frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + 2\cdot 0 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0})$$

$$= (\frac{1}{2}e^{2} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2}) - (\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2e^2}$$

Vastaus

$$\frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2e^2}$$

158

$$\int_0^{\ln 2} (\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{2x} - 2 \cdot (-1)\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^{\ln 2} (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x})$$

$$= (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln 2} - 2\mathrm{e}^{-\ln 2}) - (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0})$$

$$= (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln 2^2} - 2\mathrm{e}^{\ln 2^{-1}}) - (\frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1)$$

$$= (\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^{-1}) - (\frac{1}{2} - 2)$$

$$= \frac{5}{2}$$

Vastaus

$\frac{5}{2}$

159

a)

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+2e^x}}dx$$
$$= \int e^x(1+2e^x)^{-\frac{1}{2}}dx \qquad s(x) = 1+2e^x \quad s'(x) = 2e^x$$
$$= \frac{1}{2}\int 2e^x(1+2e^x)^{-\frac{1}{2}}dx \qquad u(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad U(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2(1+2e^x)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \sqrt{2e^x+1} + C$$

b)

$$\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+1)^4}dx$$
$$= \int e^{3x}(e^{3x}+1)^{-4}dx \qquad s(x) = e^{3x}+1 \quad s'(x) = 3e^{3x}$$
$$= \frac{1}{3}\int 3e^{3x}(e^{3x}+1)^{-4}dx \qquad u(x) = x^{-4} \quad U(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(e^{3x}+1)^{-3} + C$$
$$= \frac{-1}{9(e^{3x}+1)^3} + C$$

Vastaus

a) $\sqrt{2\mathrm{e}^{x}+1}+C$

b) $\dfrac{-1}{9(\mathrm{e}^{3x}+1)^{3}}+C$

160

Ratkaistaan funktion $f(x) = 3 - \mathrm{e}^{-x}$ nollakohta.

$$3 - \mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$\mathrm{e}^{-x} = 3$$
$$-x = \ln 3$$
$$x = -\ln 3$$

Koska funktio f on epänegatiivinen välillä [–ln 3, 0], pinta-ala on määrätty integraali.

$$A = \int_{-\ln 3}^{0} (3 - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\ln 3}^{0} (3 + (-1 \cdot \mathrm{e}^{-x}))\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_{-\ln 3}^{0} (3x + \mathrm{e}^{-x})$$
$$= (0 + \mathrm{e}^{0}) - (-3\ln 3 + \mathrm{e}^{\ln 3})$$
$$= 1 + 3\ln 3 - 3$$
$$= 3\ln 3 - 2$$

Vastaus

$3\ln 3 - 2$

161

Funktio $f(t)=\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot (laskimella).

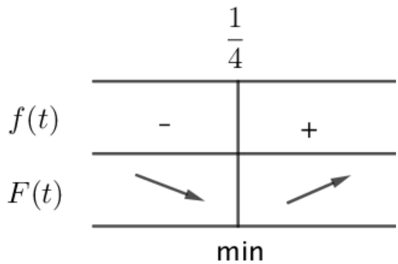
$$F(t)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}t+C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}&=0\\ \mathrm{e}^{4t}&=\mathrm{e}^{1}\\ 4t&=1\\ t&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

t	$f(t)$	merkki
0	–1,71...	–
1	51,8...	+



Funktio F saa pienimmän arvon kohdassa $t=\frac{1}{4}$.

Pienimmän arvon tulee olla 6.

Ratkaistaan C.

$$
\begin{aligned}
F(\frac{1}{4}) &= 6 \\
\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4\cdot\frac{1}{4}} - \mathrm{e}\cdot\frac{1}{4} + C &= 6 \\
C &= 6
\end{aligned}
$$

Saadaan

$$F(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}t + 6.$$

Vastaus

$$F(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}t + 6$$

162

Funktio $f(x)=6\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}$ on kaikkialla jatkuva.

Määritetään integraalifunktiot (laskimella).

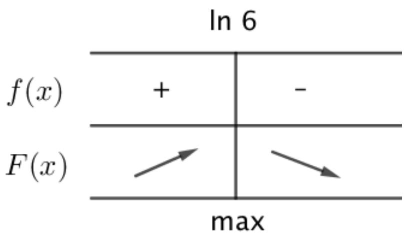
$$F(x)=6\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$$

Tutkitaan funktion F kulkua derivaattafunktion f avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat (laskimella).

$$6\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}=0$$
$$x=\ln 6\approx 1{,}79$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio.

x	$f(x)$	merkki
1	8,92...	+
2	–10,2...	–



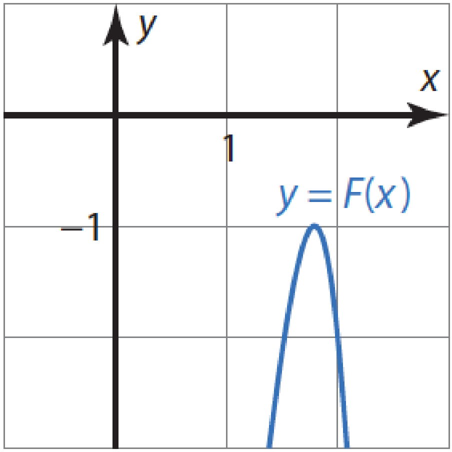
Funktio F saa suurimman arvon kohdassa $x=\ln 6$.
Suurimman arvon tulee olla -1.

Ratkaistaan C.

$$
\begin{aligned}
F(\ln 6) &= -1 \\
6e^{\ln 6} - \frac{1}{2}e^{2\ln 6} + C &= -1 \\
C &= -19
\end{aligned}
$$

Saadaan

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 6e^{x} - 19.$$



Vastaus

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 6e^{x} - 19$$

163

Olkoon $f(x) = \mathrm{e}^{|4x-12|}$.

a) Ratkaistaan lausekkeen $4x - 12$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b) Kun $x \geq 3$, niin $4x - 12 \geq 0$ ja $|4x - 12| = 4x - 12$.

Kun $x < 3$, niin $4x - 12 < 0$ ja $|4x - 12| = -4x + 12$.

Näin ollen

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{4x-12}, \text{ kun } x \geq 3 \\ f(x) = \mathrm{e}^{-4x+12}, \text{ kun } x < 3. \end{cases}$$

c) Integroidaan.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-12} + C, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x+12} + D, & \text{kun } x < 3 \end{cases}$$

Määritetään vakio C.

$$F(3) = 0$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4\cdot 3-12} + C = 0$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

Määritetään vakio D. Koska integraalifunktio on derivoituva, sen tulee olla myös jatkuva. Siten

$$\lim_{x\to 3-} F(x) = F(3)$$

$$\lim_{x\to 3-} (-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x+12} + D) = 0$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4\cdot 3+12} + D = 0$$

$$D = \frac{1}{4}.$$

Saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-12} - \frac{1}{4}, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x+12} + \frac{1}{4}, & \text{kun } x < 3. \end{cases}$$

Vastaus

a) $x = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{4x-12}, \text{ kun } x \geq 3 \\ f(x) = \mathrm{e}^{-4x+12}, \text{ kun } x < 3 \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-12} - \frac{1}{4}, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x+12} + \frac{1}{4}, & \text{kun } x < 3 \end{cases}$

164

Derivoimissäännöstä

$$\mathrm{D}\,a^x = a^x \ln a$$

seuraa, että

$$\int \ln a \cdot a^x \mathrm{d}x = a^x + C\,.$$

Siten

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C\,.$$

Funktio a^x on määritelty ja integroimissääntö pätee, kun $a > 0$.

Sovelletaan sääntöä funktioon 3^x.

$$\int 3^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x + C$$

Vastaus

$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$, kun $a > 0$, $\dfrac{3^x}{\ln 3} + C$

165

Koska funktioiden $f'(x)e^{f(x)}$ ja 1 arvot ovat samat koko määrittelyjoukossa, niiden integraalifunktiot ovat myös samat.

$$\begin{aligned} f'(x)e^{f(x)} &= 1 \\ \int f'(x)e^{f(x)}dx &= \int 1dx \\ e^{f(x)} &= x + C \\ f(x) &= \ln(x + C) \end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \ln C &= 1 \\ C &= e \end{aligned}$$

Saadaan $f(x) = \ln(x + e)$.

Funktio f on määritelty, kun

$$\begin{aligned} x + e &> 0 \\ x &> -e. \end{aligned}$$

Vastaus

$f(x) = \ln(x + e)$, missä $x > -e$

166

Koska funktioiden $f'(x)e^{f(x)}$ ja x arvot ovat samat kaikilla $x > 0$, niiden integraalifunktiot ovat myös samat.

$$f'(x)e^{f(x)} = x$$
$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = \int x dx$$
$$e^{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$f(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2 + C)$$

Funktio f on määritelty, kun $\frac{1}{2}x^2 + C > 0$.

Koska kaikilla $x > 0$ on $\frac{1}{2}x^2 > 0$, tulee olla $C \geq 0$.

Vastaus

$f(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2 + C)$, missä $x > 0$ ja $C \geq 0$

167

a) $\mathrm{D}\sin 5x = \cos 5x \cdot \mathrm{D}\, 5x = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$

b) a-kohdan perusteella

$$\int 5\cos 5x\,\mathrm{d}x = \sin 5x + C\,,$$

joten

$$\int \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x + C\,.$$

Vastaus

a) $5\cos 5x$

b) $\frac{1}{5}\sin 5x + C$

168

a) $\int 7\sin x\,\mathrm{d}x = 7\int \sin x\,\mathrm{d}x = 7(-\cos x) + C = -7\cos x + C$

b) $\int \sin 6x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6\sin 6x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(-\cos 6x) + C = -\frac{1}{6}\cos 6x + C$

c)

$$\begin{aligned}\int \sin(-x)\,\mathrm{d}x &= -1\int -1\cdot\sin(-x)\,\mathrm{d}x\\ &= -1\cdot(-\cos(-x)) + C\\ &= \cos(-x) + C\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int -\frac{\sin x}{3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\int \sin x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}(-\cos x) + C\\ &= \frac{1}{3}\cos x + C\end{aligned}$$

Vastaus

a) $-7\cos x + C$

b) $-\frac{1}{6}\cos 6x + C$

c) $\cos\left(-x\right) + C$

d) $\frac{1}{3}\cos x + C$

169

a) $\int \frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x + C$

b) $\int \cos(\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\sin(\frac{1}{2}x) + C$

c) $\int x\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

Vastaus

a) $\frac{1}{2}\sin x + C$

b) $2\sin(\frac{1}{2}x) + C$

c) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$

170

a)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos x$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos\frac{\pi}{4})$$

$$= -0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin \pi)$$

$$= \frac{1}{2}(0-0)$$

$$= 0$$

Vastaus

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) 0

171

Molemmat ovat tehneet virheen. Anna on integroinut sisäfunktion derivaatan. Ben ei ole ottanut sisäfunktiota ollenkaan huomioon.

Anna:

$$\int \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Ben:

$$\int \sin 3x \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3 \sin 3x \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

172

Määritetään funktion

$$f(x) = 2\sin x + \cos 3x + e^{-x}$$

integraalifunktiot.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (2\sin x + \cos 3x + e^{-x})\,dx \\ &= \int \left(2\sin x + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot \cos 3x + (-1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}\right)dx \\ &= -2\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x - e^{-x} + C \end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned} F(0) &= 6 \\ -2\cdot\cos 0 + \frac{1}{3}\cdot\sin 0 - e^{0} + C &= 6 \\ -2 + 0 - 1 + C &= 6 \\ C &= 9 \end{aligned}$$

Vastaus

$$F(x) = -2\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x - e^{-x} + 9$$

173

a)

$$\int \cos x \sin^2 x \mathrm{d}x$$
$$= \int \cos x (\sin x)^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

b)

$$\int \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x$$
$$= \int \sin x (\cos x)^3 \mathrm{d}x$$
$$= -1\int -\sin x (\cos x)^3 \mathrm{d}x$$
$$= -1 \cdot \frac{1}{4}(\cos x)^4 + C$$
$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

b) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

174

Sovelletaan yhdistetyn funktion integroimissääntöä.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos x \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \cos x (\sin x)^1 \mathrm{d}x && s(x) = \sin x \quad s'(x) = \cos x \\ &= \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C && u(x) = x^1 \quad U(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x + C \end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned} F(\pi) &= 3 \\ \frac{1}{2}(\sin \pi)^2 + C &= 3 \\ 0 + C &= 3 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

Integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + 3$.

Vastaus

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + 3$$

175

a) Funktio on määritelty ja jatkuva välillä $0 < x < \pi$.

$$\int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int \cos x(\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\cdot(-1)\cdot(\sin x)^{-1} + C$$
$$= \frac{-2}{\sin x} + C$$

b) Funktio on määritelty ja jatkuva välillä $0 < x < \pi$.

$$\int \frac{\cos x}{3\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int \cos x(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot(\sin x)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\sin x} + C$$

Vastaus

a) $\dfrac{-2}{\sin x} + C$, kun $0 < x < \pi$

b) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\sin x} + C$, kun $0 < x < \pi$

176

Tiedetään, että

$$f''(x) = \cos x + 2\sin 4x\,, \quad f'(0) = \frac{1}{2} \text{ ja } f(0) = 4\,.$$

Määritetään $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int (\cos x + 2\sin 4x)\mathrm{d}x \\ &= \int (\cos x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin 4x)\mathrm{d}x \\ &= \sin x + \frac{1}{2}(-\cos 4x) + C_1 \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x + C_1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan C_1.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2} \\ \sin 0 - \frac{1}{2}\cos 0 + C_1 &= \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{1}{2} + C_1 &= \frac{1}{2} \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x + 1$.

Määritetään $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\sin x - \frac{1}{2}\cos 4x + 1)\mathrm{d}x \\ &= \int (\sin x - \frac{1}{8}\cdot 4 \cdot \cos 4x + 1)\mathrm{d}x \\ &= -\cos x - \frac{1}{8}\sin 4x + x + C_2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan C_2.

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ -\cos 0 - \frac{1}{8}\sin 0 + 0 + C_2 &= 4 \\ -1 - 0 + 0 + C_2 &= 4 \\ C_2 &= 5 \end{aligned}$$

Siis $f(x) = -\cos x - \frac{1}{8}\sin 4x + x + 5$.

Vastaus

$$f(x) = -\cos x - \frac{1}{8}\sin 4x + x + 5$$

177

a) $\int 3\cos x\mathrm{d}x = 3\int \cos x\mathrm{d}x = 3\sin x + C$

b) $\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\cos x) + C = -\frac{1}{2}\cos x + C$

c) $\int \sin \frac{x}{3}\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}\mathrm{d}x = 3\cdot(-\cos \frac{x}{3}) + C = -3\cos \frac{x}{3} + C$

d) $\int 5\cos 2x\mathrm{d}x = 5\int \cos 2x\mathrm{d}x = 5\cdot \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\sin 2x + C$

Vastaus

a) $3\sin x + C$

b) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

c) $-3\cos \frac{x}{3} + C$

d) $\frac{5}{2}\sin 2x + C$

178

a) $\int x \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\cos x^2) + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

b) $\int x^2 \cos(x^3+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cos(x^3+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(x^3+1) + C$

Vastaus

a) $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

b) $\frac{1}{3}\sin(x^3+1) + C$

179

a)

$$\int_0^{\pi}(1+\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}(1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x$$

$$=\Big/_0^{\pi}(x+2\cdot(-\cos\frac{x}{2}))$$

$$=\Big/_0^{\pi}(x-2\cos\frac{x}{2})$$

$$=(\pi-2\cos\frac{\pi}{2})-(0-2\cos 0)$$

$$=(\pi-0)-(-2)$$

$$=\pi+2$$

b)

$$\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\Big/_0^{\pi}(\sin x-\cos x)$$

$$=(\sin\pi-\cos\pi)-(\sin 0-\cos 0)$$

$$=(0-(-1))-(0-1)$$

$$=1+1$$

$$=2$$

Vastaus

a) $\pi + 2$

b) 2

180

$$f(x) = \sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{3}$$

Määritetään integraalifunktiot.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int(\sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{3})\mathrm{d}x \\ &= \int(4\cdot\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4} - 3\cdot\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3})\mathrm{d}x \\ &= 4(-\cos\frac{x}{4}) - 3\sin\frac{x}{3} + C \\ &= -4\cos\frac{x}{4} - 3\sin\frac{x}{3} + C\end{aligned}$$

Funktion F eräs nollakohta on π.

$$\begin{aligned}F(\pi) &= 0 \\ -4\cos\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{3} + C &= 0 \\ -4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + C &= 0 \\ C &= {}^{\sqrt{2})}\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ C &= \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ C &= 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vastaus

$$F(x) = -4\cos\frac{x}{4} - 3\sin\frac{x}{3} + 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

181

a) $\int e^{\cos x} \sin x \mathrm{d}x = -1\int -\sin x \cdot e^{\cos x} \mathrm{d}x = -1 \cdot e^{\cos x} + C = -e^{\cos x} + C$

b) $\int e^{3x} \cos e^{3x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3e^{3x} \cos e^{3x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin e^{3x} + C$

Vastaus

a) $-e^{\cos x} + C$

b) $\frac{1}{3}\sin e^{3x} + C$

182

a)

$$\int \cos x \sin^3 x \mathrm{d}x$$

$$= \int \cos x (\sin x)^3 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}(\sin x)^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

b)

$$\int \sin 2x \cos^2 2x \mathrm{d}x$$

$$= \int \sin 2x \cdot (\cos 2x)^2 \mathrm{d}x \qquad s(x) = \cos 2x \quad s'(x) = -2\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\int -2 \cdot \sin 2x \cdot (\cos 2x)^2 \mathrm{d}x \qquad u(x) = x^2 \quad U(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(\cos 2x)^3 + C$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$

b) $-\frac{1}{6}\cos^3 2x + C$

183

a) Funktio on määritelty ja jatkuva välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \sin x \cdot (\cos x)^{-2} x\mathrm{d}x \qquad s(x) = \cos x \qquad s'(x) = -\sin x$$

$$= -1\int -\sin x \cdot (\cos x)^{-2} x\mathrm{d}x \qquad u(x) = x^{-2} \qquad U(x) = -1 \cdot x^{-1}$$

$$= -1 \cdot (-1) \cdot (\cos x)^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C$$

b) Funktio on määritelty ja jatkuva välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \sin x \sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x \qquad s(x) = \cos x \qquad s'(x) = -\sin x$$

$$= -1\int -\sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x \qquad u(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad U(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= -1 \cdot \frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x} + C$$

Vastaus

a) $\dfrac{1}{\cos x} + C$, kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

b) $-\dfrac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x} + C$, kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

184

a)

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2}\cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x \qquad s(x) = 2x \qquad s'(x) = 2$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \mathrm{d}x \qquad u(x) = \cos x \qquad U(x) = \sin x$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

b)

$$\int \cos^2 x - \sin^2 x \mathrm{d}x \qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$= \int \cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

c)

$$\int (\cos x - \sin x)^2 \mathrm{d}x \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \int ((\cos x)^2 + 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) + (\sin x)^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int (\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x)\mathrm{d}x \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$= \int (1 - \sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int 1\mathrm{d}x - \int \sin 2x \mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{1}{2}\int 2\sin 2x \mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C$$

$$= x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

b) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

c) $\frac{1}{2}\cos 2x + x + C$

185

Lasketaan integraalien summa.

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Lasketaan integraalien erotus.

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$ Katso 184 b.

$$= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0 = 0 - 0 = 0$$

Saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ I_1 - I_2 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$ ja $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Vastaus

$$I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 - I_2 = 0$$

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$$

186

Olkoon $f(x) = |\sin x|$ välillä $]0, 2\pi[$.

a) Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$|\sin x| = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = n \cdot \pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku}$$

Välillä $]0, 2\pi[$ on vain nollakohta $x = \pi$.

b) Kun $0 < x \leq \pi$, niin $\sin x \geq 0$ ja $|\sin x| = \sin x$.

Kun $\pi < x < 2\pi$, niin $\sin x < 0$ ja $|\sin x| = -\sin x$.

Näin ollen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ -\sin x, & \text{kun } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

c) Integroidaan.

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ \cos x + D, & \text{kun } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Määritetään vakio C.

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$-\cos\frac{\pi}{3} + C = -1$$

$$-\frac{1}{2} + C = -1$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

Määritetään vakio D. Koska integraalifunktio on derivoituva, sen tulee olla myös jatkuva. Siten

$$\lim_{x\to\pi+} F(x) = F(\pi)$$

$$\lim_{x\to\pi+} (\cos x + D) = -\cos\pi - \frac{1}{2}$$

$$-1 + D = 1 - \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{3}{2}.$$

Saadaan

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x - \dfrac{1}{2}, & \text{kun } 0 < x \le \pi \\ \cos x + \dfrac{3}{2}, & \text{kun } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Vastaus

a) $x = \pi$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } 0 < x \le \pi \\ -\sin x, & \text{kun } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} -\cos x - \dfrac{1}{2}, & \text{kun } 0 < x \le \pi \\ \cos x + \dfrac{3}{2}, & \text{kun } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$

187

Olkoon $f(x) = \cos x - \sin x$.

a) Ratkaistaan funktion nollakohdat välillä $[0, 2\pi]$.

$$\cos x - \sin x = 0$$
$$\cos x = \sin x$$
$$x = \frac{\pi}{4} \text{ tai } x = \frac{5\pi}{4}$$

b) Koska funktio f on jatkuva, se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[0, 2\pi]$ päätepisteessä tai välillä $]0, 2\pi[$ olevassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = -\sin x - \cos x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat välillä $]0, 2\pi[$.

$$-\sin x - \cos x = 0$$
$$\sin x = -\cos x$$
$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ tai } x = \frac{7\pi}{4}$$

Lasketaan funktion f arvot.

$f(0) = 1 - 0 = 1$

$f(2\pi) = 1 - 0 = 1$

$f(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ pienin

$f(\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}$ suurin

Funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{7\pi}{4}$ ja pienimmän arvonsa kohdassa $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) Lasketaan integraali.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x \\ &= \Big/_0^{2\pi} (\sin x + \cos x) \\ &= (\sin 2\pi + \cos 2\pi) - (\sin 0 + \cos 0) \\ &= (0 + 1) - (0 + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

d) Funktion $f(x) = \cos x - \sin x$ arvo on

- epänegatiivinen välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$
- negatiivinen välillä $]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$
- epänegatiivinen välillä $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$.

Lasketaan integraali.

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) + \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-\cos x - \sin x) + \Big/_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sin x + \cos x)$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (0+1) + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (0+1) - (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Vastaus

a) $x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$

b) pienin kohdassa $x = \frac{3\pi}{4}$ ja suurin kohdassa $x = \frac{7\pi}{4}$

c) 0

d) $4\sqrt{2}$

188

a) Olkoon G funktion g integraalifunktio. Tällöin

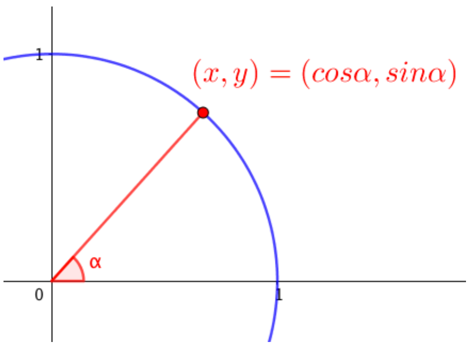
$$\int_a^b f'(x)g(f(x))\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_a^b G(f(x))$$

$$= G(f(b)) - G(f(a))$$

$$= \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\mathrm{d}x.$$

b) Tarkastellaan yksikköympyrän ensimmäistä neljännestä.



Kehäpisteen y-koordinaatti toteuttaa yhtälöt

$y = \sqrt{1 - x^2}$, missä $0 \le x \le 1$, ja

$y = \sin\alpha$, missä $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

Merkitään $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Tällöin $f(0) = 0$ ja $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

a-kohdan perusteella

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(f(x))\mathrm{d}x = \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 x}}_{=\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

c) Yksikköympyrän ensimmäisen neljänneksen pinta-ala on määrätty integraali $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Toisaalta tämä on yhtä suuri kuin $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Siten yksikköympyrän pinta-ala on π.

189

Muuttuja $x > 0$.

a) $\int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x| + C = 5\ln x + C$

b) $\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln x + C$

c) $\int \frac{4}{9x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\ln|x| + C = \frac{4}{9}\ln x + C$

Vastaus

a) $5\ln x + C$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{2}\ln x + C$, kun $x > 0$

c) $\frac{4}{9}\ln x + C$, kun $x > 0$

190

Funktio $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ on määritelty ja jatkuva välillä $x < 0$.

Integroidaan.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int (x^2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\
&= \int (x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} + x^{-2})\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2\ln|x| + (-1) \cdot x^{-1} + C \qquad |x| = -x, \text{ koska } x < 0. \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

Vastaus

$$F(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2\ln\left(-x\right) - \frac{1}{x} + C, \text{ kun } x < 0$$

191

Tehtävän funktiot ovat määriteltyjä ja jatkuvia välillä $x > 0$.

a)

$$\int \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x \qquad f(x) = x+3 \quad f'(x) = 1$$

$$= \ln|x+3| + C \qquad x+3 > 0,\ \text{kun}\ \ x > 0$$

$$= \ln(x+3) + C$$

b)

$$\int \frac{1}{3x+1}\mathrm{d}x \qquad f(x) = 3x+1 \quad f'(x) = 3$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C \qquad 3x+1 > 0,\ \text{kun}\ \ x > 0$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x+1) + C$$

c)

$$\int \frac{4x}{x^2+4}\mathrm{d}x \qquad f(x) = x^2+4 \quad f'(x) = 2x$$

$$= 2\int \frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|x^2+4| + C \qquad x^2+4 > 0$$

$$= 2\ln(x^2+4) + C$$

Vastaus

a) $\ln(x+3)+C$, kun $x>0$

b) $\frac{1}{3}\ln(3x+1)+C$, kun $x>0$

c) $2\ln(x^2+4)$+C, kun $x>0$

192

Koska nimittäjä $x^2 + 1 > 0$, niin tehtävän funktiot ovat määriteltyjä ja jatkuvia kaikkialla.

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+1\right| + C = \ln(x^2+1) + C$

b) Ei voi. Nimittäjän derivaattaa $2x$ ei saa muodostettua osoittajaan.

c) $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

d) $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int 2x(x^2+1)^{-2}\mathrm{d}x = -1\cdot(x^2+1)^{-1} = -\frac{1}{x^2+1} + C$

Vastaus

a) $\ln(x^2+1) + C$

b) Ei voi.

c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

d) $-\frac{1}{x^2+1} + C$

193

Kun $x > 3$, niin $2x - 6 > 0$ ja tehtävän kaikki funktiot ovat jatkuvia ja integroituvia.

a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-6}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-6}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|2x-6| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(2x-6) + C$$

$f(x) = 2x - 6 \quad f'(x) = 2$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

$2x - 6 > 0$, kun $x > 3$.

b)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-6)^3}$$
$$= \int (2x-6)^{-3}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int 2(2x-6)^{-3}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2x-6)^{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{4(2x-6)^2} + C$$

$s(x) = 2x - 6 \quad s'(x) = 2$

$u(x) = x^{-3} \qquad U(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$

c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-6}}$$
$$= \int (2x-6)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int 2(2x-6)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad s(x) = 2x-6 \quad s'(x) = 2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (2x-6)^{\frac{1}{2}} + C \qquad u(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad U(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$
$$= (2x-6)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \sqrt{2x-6} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{2}\ln(2x-6) + C$, kun $x > 3$

b) $-\frac{1}{4(2x-6)^2} + C$, kun $x > 3$

c) $\sqrt{2x-6} + C$, kun $x > 3$

194

a)

$$\int_0^1 \frac{dx}{5x+1} \qquad f(x)=5x+1 \quad f'(x)=5$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{5}{5x+1}dx$$

$$= \frac{1}{5} \Big/_0^1 \ln|5x+1|$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|5\cdot 1+1| - \ln|5\cdot 0+1|)$$

$$= \frac{1}{5}(\ln 6 - 0)$$

$$= \frac{\ln 6}{5}$$

b)

$$\int_1^0 \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \qquad f(x)=x^3+1 \quad f'(x)=3x^2$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^0 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\Big/_1^0 \ln\left|x^3+1\right|$$

$$=\frac{1}{3}(\ln\left|0^3+1\right|-\ln\left|1^3+1\right|)$$

$$=\frac{1}{3}(0-\ln 2)$$

$$=-\frac{\ln 2}{3}$$

c)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \qquad f(x)=e^x+1 \quad f'(x)=e^x$$

$$= \Big/_0^1 \ln\left|e^x+1\right|$$

$$= \ln\left|e^1+1\right| - \ln\left|e^0+1\right| \qquad e+1>0$$

$$= \ln(e+1) - \ln 2 \qquad \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$= \ln\frac{e+1}{2}$$

Vastaus

a) $\frac{\ln 6}{5}$

b) $-\frac{\ln 2}{3}$

c) $\ln\frac{e+1}{2}$

195

a)

$$\int 5\tan x\,\mathrm{d}x \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= 5\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \qquad f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$= -5\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -5\ln\left|\cos x\right| + C \qquad \cos x > 0 \text{ välillä } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= -5\ln\left(\cos x\right) + C$$

b)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x \qquad f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$= \ln\left|\sin x\right| + C \qquad \sin x > 0 \text{ välillä } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln\left(\sin x\right) + C$$

c)

$$\int \frac{\sin x}{4\cos x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$ Katso a-kohta.
$$= -\frac{1}{4}\ln(\cos x) + C$$

Vastaus

a) $-5\ln\left(\cos x\right) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\ln(\sin x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{1}{4}\ln(\cos x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

196

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x}{5\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$$

$$= -\frac{2}{5}\Big/_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\cos x|$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0|\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tämä on jo oikea vastaus. Lauseketta voidaan sieventää edelleen.

$$-\frac{2}{5}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{5}\ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2 = \frac{1}{5}\ln 2$$

Vastaus $\frac{1}{5}\ln 2$

197

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$.

Selvitetään funktion f määrittelyjoukko.

$$\begin{aligned}2x-1&=0\\ x&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $x<\dfrac{1}{2}$ ja välillä $x>\dfrac{1}{2}$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x<\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C \qquad 2x-1<0,\ \text{kun}\ x<\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\ln(-2x+1)+C\end{aligned}$$

Piste $(0,-1)$ kuuluu alueeseen $x<\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}F(0)&=-1\\ \frac{1}{2}\ln(-2\cdot 0+1)+C&=-1\\ C&=-1\end{aligned}$$

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + D \qquad 2x-1>0,\ \text{kun}\ x>\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(2x-1) + D
\end{aligned}
$$

Piste $(1, 4)$ kuuluu alueeseen $x > \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 4 \\
\frac{1}{2}\ln(2\cdot 1-1) + D &= 4 \\
D &= 4
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$
F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(-2x+1) - 1, \text{ kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 4, \quad \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}
$$

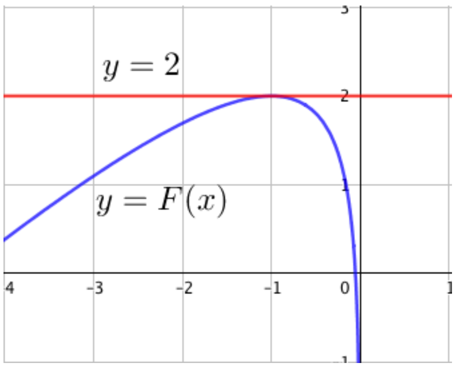
198

Olkoon $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, missä $x < 0$.

Määritetään integraalifunktiot.

$$F(x) = \int (1 + \frac{1}{x})\,dx$$
$$= x + \ln|x| + C \qquad |x| = -x, \text{ kun } x < 0$$
$$= x + \ln(-x) + C$$

Funktion F kuvaajan ja suoran $y = 2$ sivuamispisteessä derivaattafunktion arvo on nolla.



$$F'(x) = 0$$
$$1 + \frac{1}{x} = 0$$
$$x = -1$$

Sivuamispiste on siis $(–1, 2)$.
Ratkaistaan vakio C.

$$F(-1) = 2$$
$$-1 + \ln(-(-1)) + C = 2$$
$$C = 3$$

Vastaus

$$F(x) = x + \ln(-x) + 3, \text{ kun } x < 0$$

199

Muuttuja $x < 0$.

a) $\int \frac{1}{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x| + C = \frac{1}{3}\ln(-x) + C$

b) $\int -\frac{3}{x}\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x == -3\ln|x| + C = -3\ln(-x) + C$

c) $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \int x^{-3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\ln(-x) + C,\ \text{kun } x < 0$

b) $-3\ln(-x) + C,\ \text{kun } x < 0$

c) $-\frac{1}{2x^2} + C,\ \text{kun } x < 0$

200

a) Funktio $f(x) = x - \frac{1}{x}$ on määritelty ja jatkuva välillä $x > 0$.

Integroidaan.

$$F(x) = \int (x - \frac{1}{x})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C == \frac{1}{2}x^2 - \ln x + C$$

Ratkaistaan vakio C.

$$F(1) = 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \ln 1 + C = 2$$

$$C = \frac{3}{2}$$

Siis $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{3}{2}$, kun $x > 0$.

b) Funktio $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ on määritelty ja jatkuva välillä $x > 0$.

Integroidaan.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int (x^2 + \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\ &= \int (x^2 + x^{-2})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + (-1)\cdot x^{-1} + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

Ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned}F(1) &= 2 \\ \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{1} + C &= 2 \\ -\frac{2}{3} + C &= 2 \\ C &= 2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Siis $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + 2\frac{2}{3}$, kun $x > 0$.

Vastaus

a) $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x+1\frac{1}{2}$, kun $x>0$

b) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+2\frac{2}{3}$, kun $x>0$

201

Tehtävän funktiot ovat määriteltyjä ja jatkuvia välillä $x > 1$.

a)

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int 1 \cdot (x-1)^{-2}\mathrm{d}x \qquad s(x) = x-1 \qquad s'(x) = 1$$

$$= -(x-1)^{-1} + C \qquad u(x) = x^{-2} \qquad U(x) = -1 \cdot x^{-1}$$

$$= -\frac{1}{x-1} + C$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x \qquad f(x) = x^3 - 1 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + C \qquad x^3 - 1 > 0, \text{ kun } x > 1$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x^3-1) + C$$

c)

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad f(x) = 1-x \quad f'(x) = -1$$

$$= -1\int \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -1\cdot \ln|1-x| + C \qquad 1-x<0,\ \text{kun}\ \ x>1$$

$$= -\ln(-1+x) + C$$

$$= -\ln(x-1) + C$$

Vastaus

a) $-\dfrac{1}{x-1} + C,\ \text{kun}\ x>1$

b) $\dfrac{1}{3}\ln(x^3-1) + C,\ \text{kun}\ x>1$

c) $-\ln(x-1) + C,\ \text{kun}\ x>1$

202

Kun $x > -1$, niin $3x + 3 > 0$ ja tehtävän funktiot ovat määriteltyjä ja jatkuvia.

a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+3}$$

$$= \int \frac{1}{3x+3}\,\mathrm{d}x \qquad f(x) = 3x+3 \quad f'(x) = 3$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+3| + C \qquad 3x+3 > 0,\ \text{kun}\ \ x > -1$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x+3) + C$$

b)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+3)^2}$$

$$= \int (3x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x \qquad s(x) = 3x+3 \quad s'(x) = 3$$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x \qquad u(x) = x^{-2} \qquad U(x) = -1 \cdot x^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(-1)(3x+3)^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+3} + C$$

$$= -\frac{1}{9x+9} + C$$

c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+3}}$$

$$= \int (3x+3)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \qquad s(x) = 3x+3 \quad s'(x) = 3$$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+3)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \qquad u(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad U(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2(3x+3)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x+3} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\ln(3x+3) + C,\ \text{kun } x > -1$

b) $-\frac{1}{9x+9} + C,\ \text{kun } x > -1$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+3} + C,\ \text{kun } x > -1$

203

a)

$$\int -2\tan x\,\mathrm{d}x \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= -2\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \qquad f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$$

$$= 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|\cos x| + C \qquad \cos x > 0 \text{ välillä } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= 2\ln(\cos x) + C$$

b)

$$\int \frac{3\sin x}{2\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x \qquad f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|\cos x| + C \qquad \cos x > 0 \text{ välillä } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}\ln(\cos x) + C$$

c)

$$\int \frac{\cos x}{6\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x \qquad f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\sin x\right| + C \qquad \sin x > 0 \ \text{ välillä } \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{6}\ln(\sin x) + C$$

Vastaus

a) $\quad 2\ln(\cos x) + C, \text{ kun } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\quad -\frac{3}{2}\ln(\cos x) + C, \text{ kun } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\quad \frac{1}{6}\ln(\sin x) + C, \text{ kun } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

204

a)

$$\int_1^{e} \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^{e} \left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^{e} \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \mathop{/}_1^{e} \left(x-\ln|x|\right)$$
$$= (\mathrm{e}-\ln \mathrm{e})-(1-\ln 1)$$
$$= (\mathrm{e}-1)-(1-0)$$
$$= \mathrm{e}-2$$

b)

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x \qquad f(x)=\mathrm{e}^x+2 \quad f'(x)=\mathrm{e}^x$$
$$= \mathop{/}_0^{1} \ln\left|\mathrm{e}^x+2\right|$$
$$= \ln(\mathrm{e}^1+2)-\ln(\mathrm{e}^0+2)$$
$$= \ln(\mathrm{e}^1+2)-\ln 3 \qquad \ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$
$$= \ln\frac{\mathrm{e}+2}{3}$$

c)

$$\int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x}dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)dx$$

$$=\int_0^1 (1+2e^{-x})dx$$

$$=\int_0^1 (1-2\cdot(-1)\cdot e^{-x})dx \qquad s(x)=-x \qquad s'(x)=-1$$

$$=\Big/_0^1 (x-2e^{-x}) \qquad u(x)=e^x \qquad U(x)=e^x$$

$$=(1-2e^{-1})-(0-2e^0)$$

$$=1-\frac{2}{e}+2$$

$$=3-\frac{2}{e}$$

Vastaus

a) $e-2$

b) $\ln\frac{e+2}{3}$

c) $3-\frac{2}{e}$

205

a) Kun $x > 1$, niin $\ln x > 0$ ja nimittäjä $x \ln x > 0$.
Funktio on jatkuva välillä $x > 1$.

$$\int \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \mathrm{d}x \qquad f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \ln|\ln x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \ln(\ln x) + C$$

b) Funktio on jatkuva välillä $x > 0$.

$$\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^1 \mathrm{d}x \qquad s(x) = \ln x \qquad s'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \qquad u(x) = x^1 \qquad U(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Vastaus

a) $\ln(\ln x) + C,\ \text{kun } x > 1$

b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,\ \text{kun } x > 0$

206

Funktio $f(x)=\dfrac{1+|x|}{x}$ on määritelty, kun $x\neq 0$.
Funktio on jatkuva välillä $x<0$ ja välillä $x>0$.

a) Poistetaan itseisarvomerkit.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{x}, \text{ kun } x>0\\ \dfrac{1-x}{x}, \text{ kun } x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+1, \text{ kun } x>0\\ \dfrac{1}{x}-1, \text{ kun } x<0\end{cases}$$

b) Määritetään integraalifunktio, kun $x>0$.

$$F(x)=\int(\frac{1}{x}+1)\mathrm{d}x=\ln|x|+x+C=\ln x+x+C$$

Määritetään integraalifunktio, kun $x<0$.

$$F(x)=\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x=\ln|x|-x+D=\ln(-x)-x+D$$

Vastaus

a) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+1, & \text{kun } x>0\\[2mm] \dfrac{1}{x}-1, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

b) $$F(x)=\begin{cases}\ln x+x+C, & \text{kun } x>0\\ \ln(-x)-x+D, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

207

Funktio $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ on kaikkialla jatkuva, sillä nimittäjä on aina positiivinen.

Määritetään integraalifunktio (laskimella).

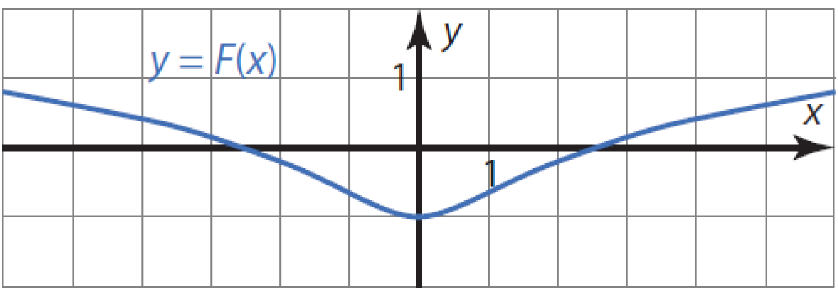
$$F(x)=\int\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Määritetään vakio C.

$$\begin{aligned} F(0)&=-1\\ \frac{1}{2}\ln(0^2+1)+C&=-1\\ C&=-1 \end{aligned}$$

Siis

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1\,.$$



Vastaus

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 1$$

208

a) Funktio $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

Selvitetään funktion f määrittelyjoukko.

$$\begin{aligned} e^{2x}-1&=0\\ x&=0 \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $x<0$ ja välillä $x>0$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x>0$.

$$\begin{aligned} F(x)&=\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx\\ &=\ln\left|e^{2x}-1\right|+C \qquad e^{2x}-1>0,\ \text{kun}\ x>0\\ &=\ln(e^{2x}-1)+C \end{aligned}$$

Piste $(\ln 2, 0)$ kuuluu alueeseen $x>0$.

$$\begin{aligned} F(\ln 2)&=0\\ \ln(e^{2\ln 2}-1)+C&=0\\ \ln 3+C&=0\\ C&=-\ln 3 \end{aligned}$$

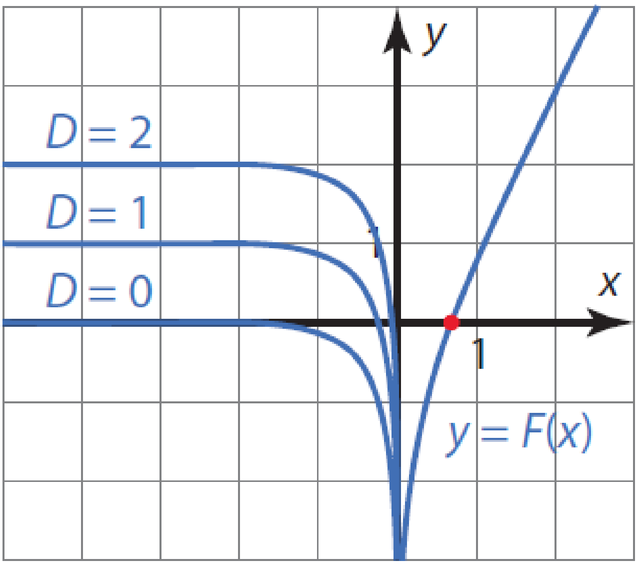
2) Määritetään integraalifunktio välillä $x < 0$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx \\
&= \ln\left|e^{2x}-1\right| + D \qquad e^{2x}-1<0,\ \text{kun}\ \ x<0 \\
&= \ln(-e^{2x}+1) + D
\end{aligned}
$$

3) Integraalifunktio on siis

$$
F(x) = \begin{cases} \ln(e^{2x}-1) - \ln 3, & \text{kun } x > 0 \\ \ln(1-e^{2x}) + D, & \text{kun } x < 0. \end{cases}
$$

b) Piirretään integraalifunktion $F(x)$ kuvaajia.



209

Olkoon funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ integraalifunktio $F(x)$, kun $x>0$, ja funktion $g(x)=-x$ integraalifunktio $G(x)$.

Oletetaan, että integraalifunktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohdassa $x_0>0$.

Leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat

$$F'(x_0)=f(x_0)=\frac{1}{x_0} \quad \text{ja} \quad G'(x_0)=g(x_0)=-x_0.$$

Koska kulmakertoimien tulo

$$\frac{1}{x_0}\cdot(-x_0)=-1,$$

niin tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

210

Koska $f(x) > 0$ ja $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x$ koko määrittelyjoukossa, niin

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \qquad \ln a = b \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^b$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + C_1}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \mathrm{e}^{C_1} \qquad \mathrm{e}^{C_1} = C$$

$$= C \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2},$$

missä C on jokin vakio.

Ratkaistaan vakio C.

$$f(0) = 2$$

$$C \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0^2} = 2$$

$$C = 2$$

Vastaus

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

211

Koska populaatio kasvunopeus $f'(x)$ on suoraan verrannollinen populaation kokoon $f(x)$, niiden suhde on vakio k.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int k\mathrm{d}x$$

$$\ln|f(x)| = kx + C \qquad f(x) > 0$$

$$\ln f(x) = kx + C$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx+C}$$

Siis $f(x) = e^{kx+C}$, missä k ja C ovat vakioita.

Huomaa! Funktion lauseke voidaan esittää myös toisessa muodossa.

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{kx+C} \\ &= \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{C} && \mathrm{e}^{C} = a \\ &= a\mathrm{e}^{kx} \end{aligned}$$

missä a ja k ovat vakioita.