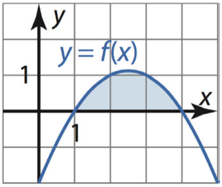
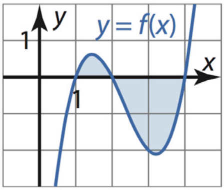
212

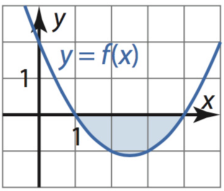
1) D, koska $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 4]$.



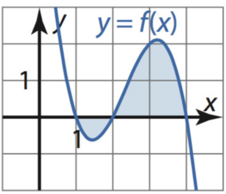
2) A, koska $f(x) \geq 0$ välillä $[1, 2]$ ja $f(x) \leq 0$ välillä $[2, 4]$.



3) B, koska $f(x) \leq 0$ välillä $[1, 4]$.



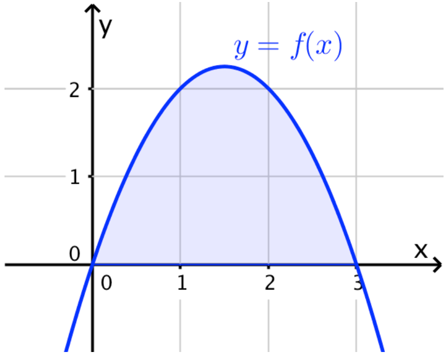
4) C, koska $f(x) \leq 0$ välillä $[1, 2]$ ja $f(x) \geq 0$ välillä $[2, 4]$.



Vastaus 1) D 2) A 3) B 4) C

213

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion f kuvaaja.



Integroimisrajat saadaan funktion kuvaajan ja x -akselin leikkauskohdista.

$$f(x) = 0$$
$$-x^2 + 3x = 0$$
$$x(-x+3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

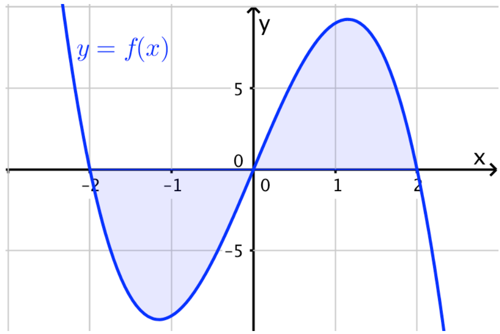
Kuvaajan perusteella $f(x) \geq 0$ välillä $[0, 3]$, joten kysytty pinta-ala on

$$A = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Vastaus $4\frac{1}{2}$

214

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion f kuvaaja.



Integroimisrajat saadaan funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauskohdista.

$$f(x) = 0$$
$$-3x^3 + 12x = 0 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$
$$x = -2, \ x = 0 \ \text{ tai } \ x = 2$$

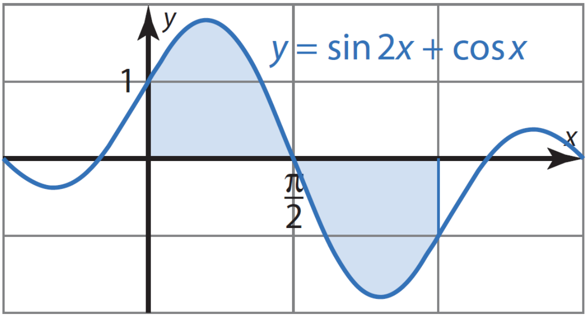
Kuvaajan perusteella $f(x) \leq 0$ välillä $[-2, 0]$ ja $f(x) \geq 0$ välillä $[0, 2]$, joten kysytty pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-2}^{0} (-3x^3 + 12x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,\mathrm{d}x \\ &= 24 \end{aligned}$$

Vastaus 24

215

a)



b) Integroimisrajat saadaan käyrän ja x -akselin leikkauskohdista.

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

Ratkaisut voi rajata myös suoraan välille $[0, \pi]$.

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$(n \in \mathbf{Z})$

Nollakohdista välille $[0, \pi]$ kuuluu vain $x = \frac{\pi}{2}$ $(n = 0)$.

Funktio saa tutkittavalla välillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten lasketaan pinta-ala osissa.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2x + \cos x)\,dx$$

$$= 4$$

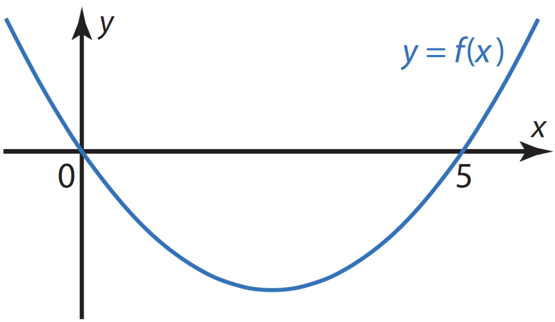
Vastaus b) 4

216

a) Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$
$$6x^2 - 30x = 0$$
$$6x(x-5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Funktion $f(x) = 6x^2 - 30x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat 0 ja 5. Hahmotellaan funktion kuvaaja.



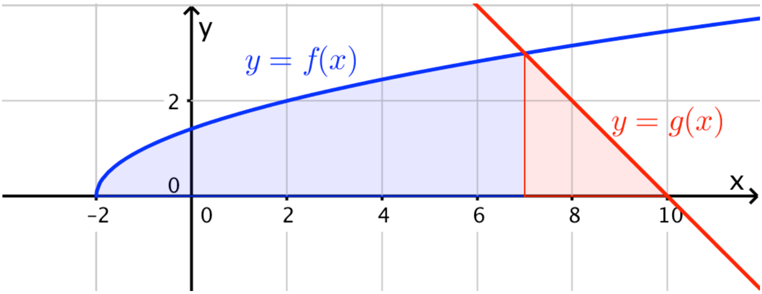
b) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on x-akselin alapuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= -\int_0^5 (6x^2 - 30x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathop{/}_0^5 2x^3 - 15x^2 \\
&= -\left(2\cdot 5^3 - 15\cdot 5^2 - (2\cdot 0^3 - 15\cdot 0^2)\right) \\
&= -(250 - 375) \\
&= 125
\end{aligned}
$$

Vastaus b) 125

217

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktioiden $f(x)=\sqrt{x+2}$ ja $g(x)=-x+10$ kuvaajat.



Pinta-ala pitää laskea kahdessa osassa, koska aluetta yläpuolelta rajaava käyrä vaihtuu.

Ratkaistaan kuvaajien leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$f(x)=g(x)$$
$$\sqrt{x+2}=-x+10$$
$$x=7$$

Ratkaistaan laskimella.

Ratkaistaan kohdat, joissa funktioiden kuvaajat leikkaavat x-akselin.

$$f(x)=0$$
$$\sqrt{x+2}=0$$
$$x=-2$$

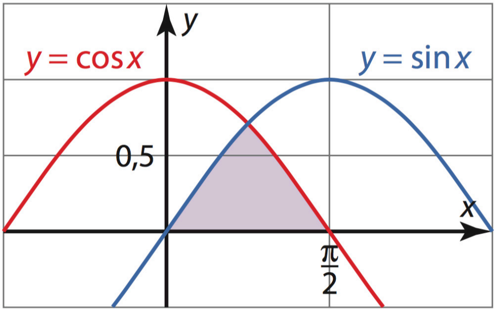
$$g(x)=0$$
$$-x+10=0$$
$$x=10$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{7}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x + \int_{7}^{10} (-x+10)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus $22\frac{1}{2}$

218



Pinta-ala pitää laskea osissa, koska aluetta yläpuolelta rajaava käyrä vaihtuu.

Ratkaistaan käyrien leikkauskohdat.

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

Välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on ainoastaan leikkauskohta $x = \frac{\pi}{4}$ $(n = 0)$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= 2 - \sqrt{2} \quad (\approx 0{,}59)$$

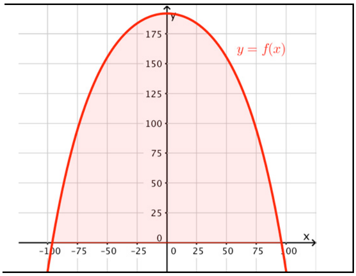
Vastaus $2 - \sqrt{2}$

219

Integroimisrajat saadaan ratkaisemalla käyrän ja x-akselin leikkauskohdat.

$$-\frac{39}{2}(e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}})+231=0$$
$$x=-96{,}1271\ldots \quad \text{tai} \quad x=96{,}1271\ldots$$

Lasketaan alueen pinta-ala.



$$A=\int_{-96{,}1271\ldots}^{96{,}1271\ldots}(-\frac{39}{2}(e^{\frac{x}{39}}+e^{-\frac{x}{39}})+231)\,dx$$
$$=26651{,}412\ldots \quad (\text{m}^2)$$

Muutetaan pinta-ala hehtaareiksi.

$26\,651{,}412\ldots\ \text{m}^2 = 2{,}6651\ldots\ \text{ha} \approx 2{,}7\ \text{ha}$

Vastaus 2,7 ha

220

a) Integroidaan muuttujan y suhteen. Kuvan perusteella integroinnin alaraja on 1 ja yläraja 3.

$$A = \int_1^3 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \quad (\approx 2{,}8)$$

b) Integroidaan muuttujan y suhteen. Kuvan perusteella integroinnin alaraja on 0 ja yläraja 3.

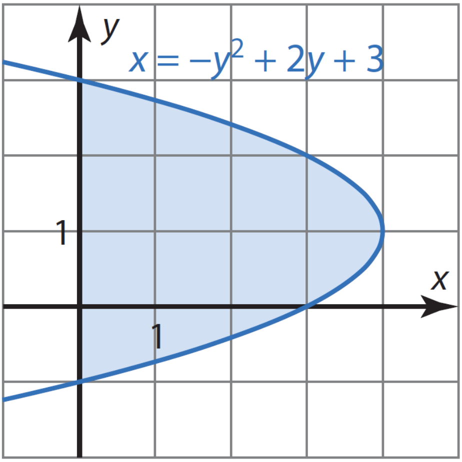
$$A = \int_0^3 2^y\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{7}{\ln 2} \quad (\approx 10{,}1)$$

Vastaus a) $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

b) $\frac{7}{\ln 2}$

221

a)



b) Integroimisrajat saadaan käyrän ja y -akselin leikkauskohdista.

$$-y^2 + 2y + 3 = 0$$
$$y = -1 \quad \text{tai} \quad y = 3$$

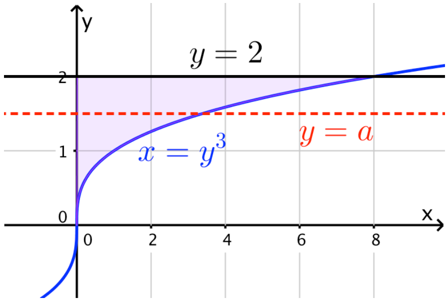
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^{3} (-y^2 + 2y + 3)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Vastaus b) $10\frac{2}{3}$

222

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Pitää löytää sellainen vakion a arvo, että käyrän $x = y^3$ ja y-akselin väliin jää yhtä suuri pinta-ala välillä $0 \leq y \leq a$ ja välillä $a \leq y \leq 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\int_0^a y^3 \, \mathrm{d}y = \int_a^2 y^3 \, \mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{4}a^4 = 4 - \frac{1}{4}a^4$$ Ratkaistaan laskimella.

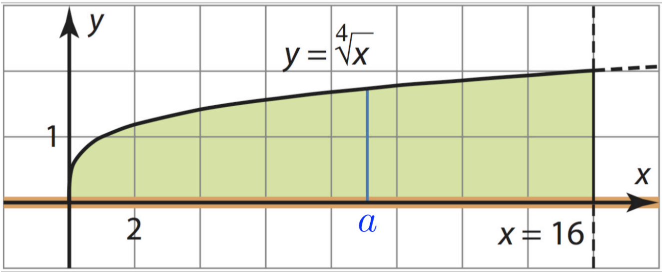
$$a = -\sqrt[4]{8} \quad \text{tai} \quad a = \sqrt[4]{8}$$

Koska $a > 0$, etsityn suoran yhtälö on $y = \sqrt[4]{8}$.

Vastaus $y = \sqrt[4]{8}$

223

Pitää löytää sellainen vakion a arvo, että käyrän $y=\sqrt[4]{x}$ ja x-akselin väliin jää yhtä suuri pinta-ala välillä $0 \le x \le a$ ja välillä $a \le x \le 16$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\int_0^a \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^{16} \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{4}{5}\sqrt[4]{a^5} = \frac{1}{5}(128-4\sqrt[4]{a^5})$$ Ratkaistaan laskimella.

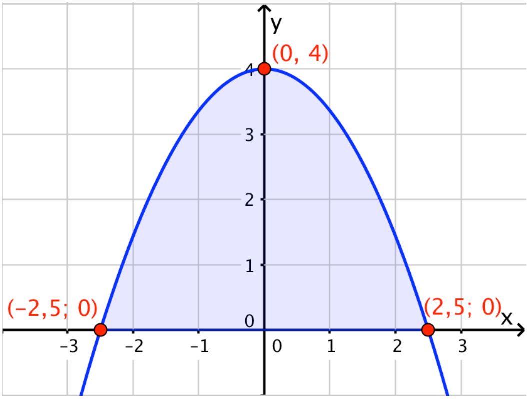
$$a = 8\sqrt[5]{2}$$

Aita rakennetaan kohtaan $x = 8\sqrt[5]{2}$ $(\approx 9,2)$.

Vastaus $x = 8\sqrt[5]{2}$ $(\approx 9,2)$

224

Sijoitetaan poikkileikkaus koordinaatistoon niin, että se on poikkileikkausparaabelin ja x-akselin rajaama alue. Sijoitetaan huippu y-akselille. Valitaan koordinaatiston yksikkö vastaamaan yhtä metriä.



Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$ ja paraabeli kulkee pisteiden $(-2,5; 0)$, $(0, 4)$ ja $(2,5; 0)$ kautta. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-2,5)^2 + b \cdot (-2,5) + c \\ 4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 2,5^2 + b \cdot 2,5 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5^2 a - 2,5b + c = 0 \\ \qquad\qquad\quad c = 4 \\ 2,5^2 a + 2,5b + c = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{16}{25},\ b = 0 \text{ ja } c = 4$$

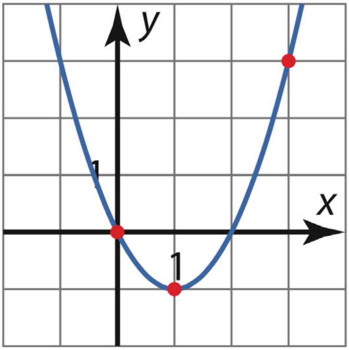
Paraabelin yhtälö on $y=-\frac{16}{25}x^2+4$.

Lasketaan meluvallin poikkileikkauksen pinta-ala.

$$A=\int_{-2,5}^{2,5}(-\frac{16}{25}x^2+4)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{40}{3}=13,333...\approx 13,3\ (\mathrm{m}^2)$$

Vastaus $13,3\ \mathrm{m}^2$

225



8)
Paraabelin yhtälö on muotoa

$$y = ax^2 + bx + c$$

6)
Muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ -1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases}$$

kertoimien selvittämiseksi.

3)
Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$a = 1,\ \ b = -2,\ \ c = 0$$

1)
Paraabelin yhtälö on

$$y = x^2 - 2x$$

7)

Alueen pinta-ala on

$$-\int_{1}^{2}(x^2-2x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\mathrm{d}x$$

koska osa kuvaajasta on x -akselin alapuolella ja osa yläpuolella.

4)

Pinta-alan arvo on

$$2$$

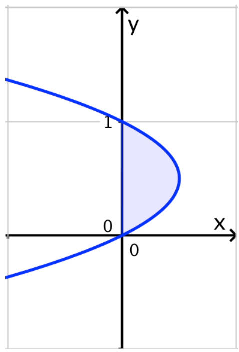
226

Määritetään paraabelin $x = ay^2 - ay$ ($a \neq 0$) ja y-akselin leikkauskohdat.

$$ay^2 - ay = 0$$
$$ay(y-1) = 0$$
$$y = 0 \quad \text{tai} \quad y = 1$$

Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa vasemmalle, jolloin alue muodostuu positiivisen x-akselin puolelle.

$$A = \int_0^1 (ay^2 - ay)\,\mathrm{d}y = -\frac{a}{6}$$

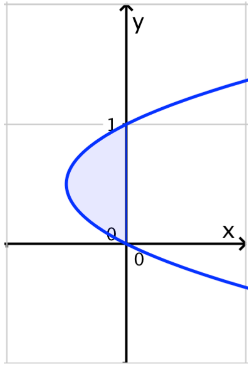


Ratkaistaan millä vakion a arvolla pinta-ala on 1.

$$A = 1$$
$$-\frac{a}{6} = 1$$
$$a = -6$$

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa oikealle, jolloin alue muodostuu negatiivisen x-akselin puolelle.

$$A = -\int_0^1 (ay^2 - ay)\,\mathrm{d}y = \frac{a}{6}$$



Ratkaistaan millä vakion a arvolla pinta-ala on 1.

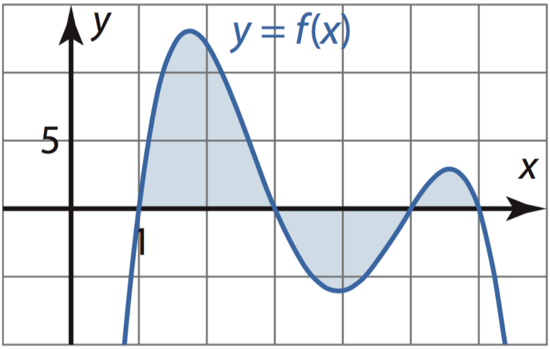
$$A = 1$$

$$\frac{a}{6} = 1$$

$$a = 6$$

Vastaus $a = -6$ tai $a = 6$

227



a) Määrätty integraali välillä $[3, 5]$ on negatiivinen, koska alue on x-akselin alapuolella.

b) Alueen pinta-ala on

$$A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Tai hyödyntäen itseisarvoa $A = \int_1^6 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.)

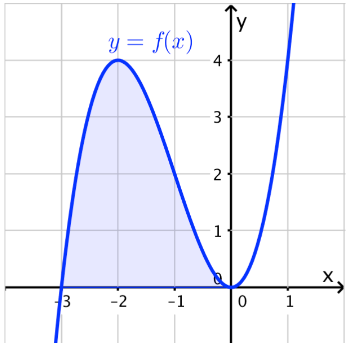
Vastaus a) Määrätty integraali välillä $[3, 5]$ on negatiivinen, koska alue on x-akselin alapuolella.

b) $A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^6 f(x)\,\mathrm{d}x$

(tai $A = \int_1^6 |f(x)|\,\mathrm{d}x$)

228

a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$ kuvaaja.



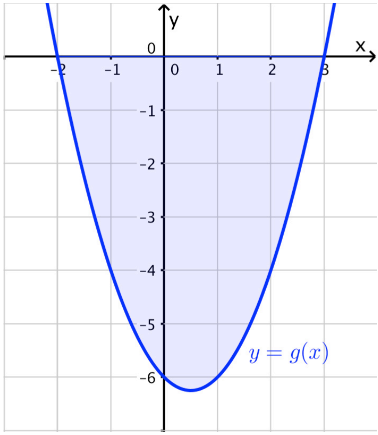
Integroimisrajat saadaan funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauskohdista.

$$f(x) = 0$$
$$x^3 + 3x^2 = 0$$
$$x^2(x+3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Kuvaajan perusteella $f(x) \geq 0$ välillä $[-3, 0]$, joten kysytty pinta-ala on

$$A = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-3}^{0} (x^3 + 3x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $g(x) = x^2 - x - 6$ kuvaaja.



Integroimisrajat saadaan funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauskohdista.

$$g(x) = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

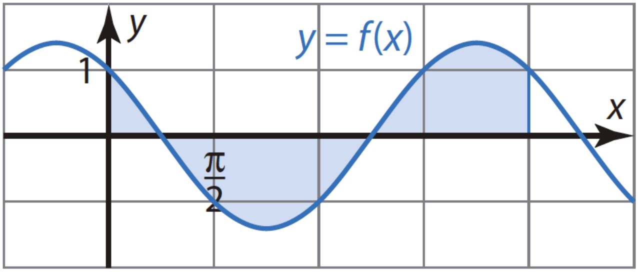
Kuvaajan perusteella $g(x) \leq 0$ välillä $[-2, 3]$, joten kysytty pinta-ala on

$$A = -\int_{-2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Vastaus a) $6\frac{3}{4}$ b) $20\frac{5}{6}$

229

a)



b) Integroimisrajat saadaan funktion ja x -akselin leikkauskohdista.

$$f(x) = 0$$

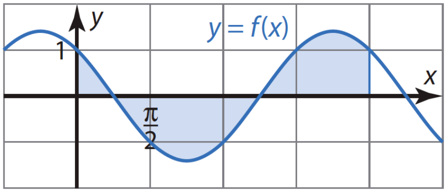
$$\cos x - \sin x = 0$$ Ratkaistaan laskimella.

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Nollakohdista välille $[0, 2\pi]$ kuuluvat

$x = \frac{\pi}{4}$ $(n = 0)$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$ $(n = 1)$.

Funktio saa tutkittavalla välillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten lasketaan pinta-ala osissa.



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (\sqrt{2} - 1) - (-2\sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)$$

$$= 4\sqrt{2}$$

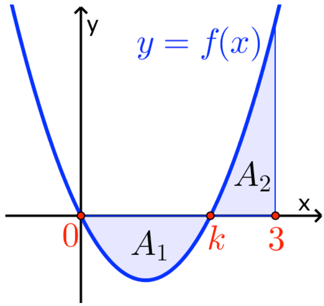
Vastaus $4\sqrt{2}$

230

Funktion $f(x) = x^2 - kx$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Integroimisrajat saadaan funktion ja x-akselin leikkauskohdista.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - kx &= 0 \\ x(x-k) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{tai} \quad x = k \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja. Koska kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 3]$ yhtä suuren alueen x-akselin yläpuolella ja alapuolella, niin $0 < k < 3$.



Pinta-alojen A_1 ja A_2 tulee olla yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

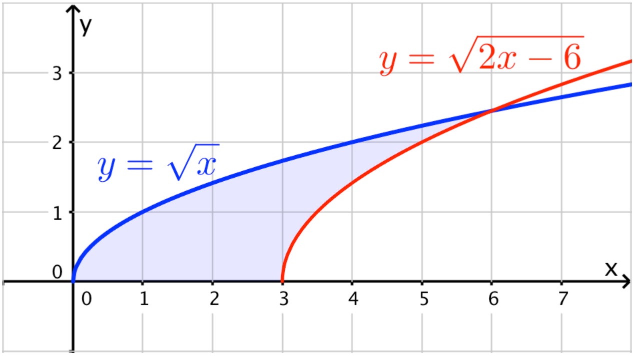
$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \\ -\int_0^k (x^2 - kx)\,\mathrm{d}x &= \int_k^3 (x^2 - kx)\,\mathrm{d}x \\ \frac{k^3}{6} &= \frac{k^3}{6} - \frac{9k}{2} + 9 \\ \frac{9k}{2} &= 9 \\ 9k &= 18 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella.

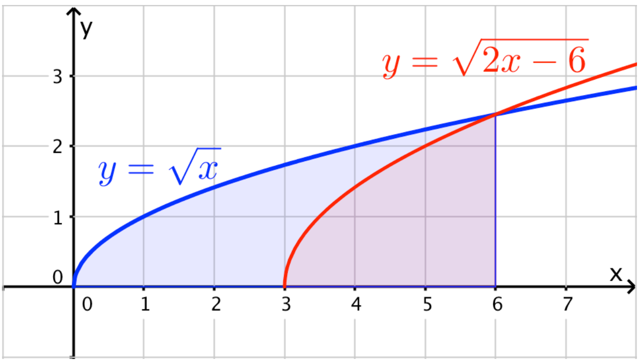
Vastaus $k = 2$

231

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Pinta-ala voidaan laskea kahden pinta-alan erotuksena. Vähennetään käyrän $y = \sqrt{x}$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alasta käyrän $y = \sqrt{2x - 6}$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.



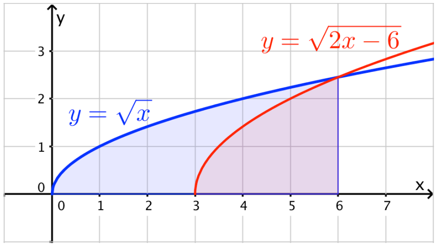
Integroimisrajat saadaan käyrien ja x-akselin leikkauskohdista sekä käyrien leikkauskohdasta.

$$\sqrt{x} = 0 \qquad \sqrt{2x-6} = 0 \qquad \sqrt{2x-6} = \sqrt{x}$$

$$x = 0 \qquad 2x - 6 = 0 \qquad 2x - 6 = x$$

$$x = 3 \qquad x = 6$$

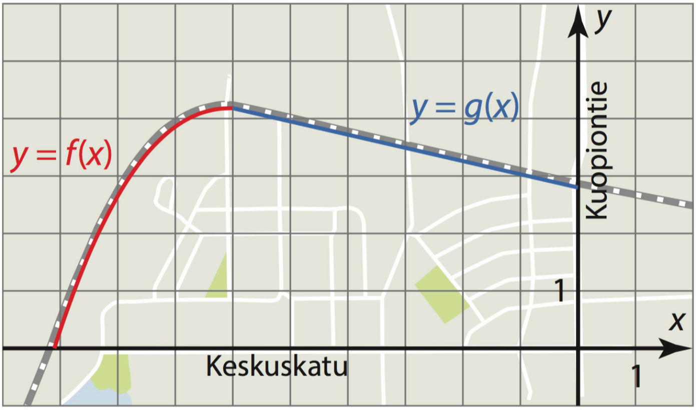
Vähennetään käyrän $y = \sqrt{x}$ ja x-akselin välillä $[0, 6]$ rajaaman alueen pinta-alasta käyrän $y = \sqrt{2x-6}$ ja x-akselin välillä $[3, 6]$ rajaaman alueen pinta-ala.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_3^6 \sqrt{2x-6}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Vastaus $2\sqrt{6}$

232



$f(x) = 0,04x^3 + 0,4x^2 + 0,45x + 1,12$, missä $-9,1 \le x \le -6$
$g(x) = -0,23x + 2,8$, missä $-6 \le x \le 0$

Lasketaan kysytyn alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-9,1}^{-6} f(x)\,dx + \int_{-6}^{0} g(x)\,dx$$

$$= \int_{-9,1}^{-6} (0,04x^3 + 0,4x^2 + 0,45x + 1,12)\,dx + \int_{-6}^{0} (-0,23x + 2,8)\,dx$$

$$= 29,9409... \text{ (pinta-alayksikköä)}$$

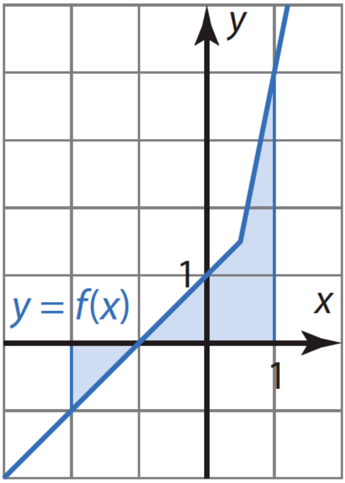
Koordinaatiston yksikkönä on 200 m, joten yhden ruudun pinta-ala on $200 \text{ m} \cdot 200 \text{ m} = 40\,000 \text{ m}^2 = 0,04 \text{ km}^2$. Pinta-alayksikkönä on siis $0,04 \text{ km}^2$.

Alueen pinta-ala on $29,9409... \cdot 0,04 \text{ km}^2 \approx 1,2 \text{ km}^2$.

Vastaus $1,2 \text{ km}^2$

233

a)



b) Ilmaistaan funktio $f(x) = 3x + |1-2x|$ ilman itseisarvoa.
Selvitetään milloin lausekkeen $1 - 2x$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$1-2x \geq 0$$

$$-2x \geq -1 \qquad |:(-2)$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

Siis $|1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ -(1-2x), & \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1-2x, & \text{kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Funktion f lauseke ilman itseisarvoja on

$$f(x)=3x+|1-2x|=\begin{cases}3x+(1-2x), \text{ kun } x\le\frac{1}{2}\\ 3x+(2x-1), \text{ kun } x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+1, \text{ kun } x\le\frac{1}{2}\\ 5x-1, \text{ kun } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Pinta-alaa rajaava suora siis vaihtuu kohdassa $x=\frac{1}{2}$.

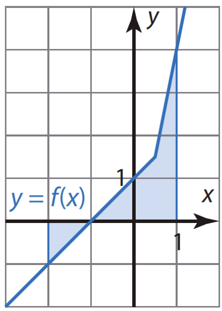
Ratkaistaan kohta, jossa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

$f(x)=0 \qquad \Big|\, x<\frac{1}{2}$, joten $f(x)=x+1$

$x+1=0$

$x=-1$

Funktio saa tutkittavalla välillä $[-2, 1]$ sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, joten lasketaan pinta-ala osissa.



$$A=-\int_{-2}^{-1}(x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(5x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{8}+\frac{11}{8}=3$$

Vastaus 3

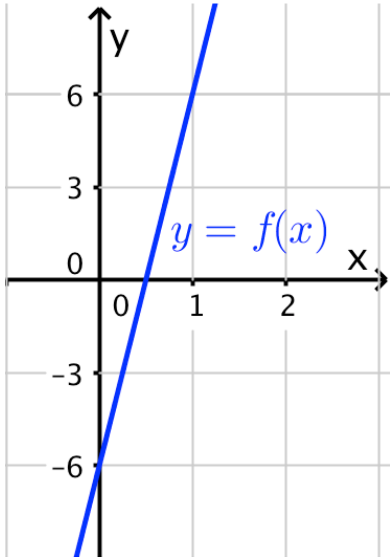
234

Funktio pitää valita siten, että sen kuvaaja rajaa välillä $[0, 1]$ yhtä suuren alueen x-akselin alapuolella ja yläpuolella.

Voidaan valita suora, joka leikkaa x-akselin välin $[0, 1]$ keskikohdassa ja saa arvon 6 jossakin välin pisteessä.

Valitaan funktioksi esimerkiksi $f(x) = 12x - 6$.

Funktio f on polynomifunktio, ja siten jatkuva.



Lisäksi $f(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6$ eli funktio saa arvon 6 ja

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (12x - 6)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

Funktio $f(x) = 12x - 6$ täyttää vaaditut ehdot.

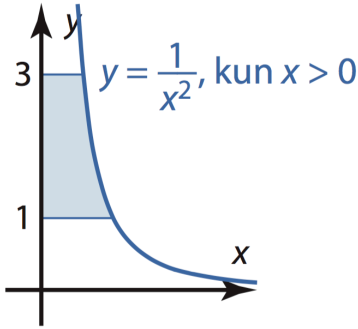
Jokainen ehdot täyttävä funktio saa positiivisen arvon 6 jossain välin [0, 1] kohdassa. Funktion f määrätty integraali 0:sta 1:een on nolla vain, jos funktio f saa myös negatiivisia arvoja. Koska funktio f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, ja funktio on jatkuva, niin se saa aina myös arvon 0.

Siis ehdot täyttävä funktio saa aina arvon 0 jossain pisteessä.

Vastaus Ehdot täyttävä funktio on esimerkiksi $f(x) = 12x - 6$. Funktio saa aina arvon 0 jossain pisteessä.

235

a) Integroidaan muuttujan y suhteen. Kuvan perusteella integroinnin alaraja on 1 ja yläraja 3.



Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x, kun $x > 0$.

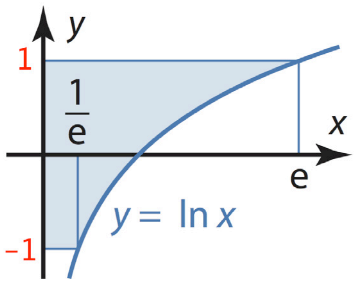
$$y = \frac{1}{x^2}$$
$$x^2 = \frac{1}{y}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Lasketaan varjostetun alueen pinta-ala.

$$A = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\sqrt{3} - 2 \quad (\approx 1{,}46)$$

b) Integroidaan muuttujan y suhteen. Integroimisrajat ovat

$$y = \ln\frac{1}{\mathrm{e}} = -1 \quad \text{ja} \quad y = \ln \mathrm{e} = 1\,.$$



Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x.

$$y = \ln x$$
$$x = \mathrm{e}^y$$

Lasketaan varjostetun alueen pinta-ala.

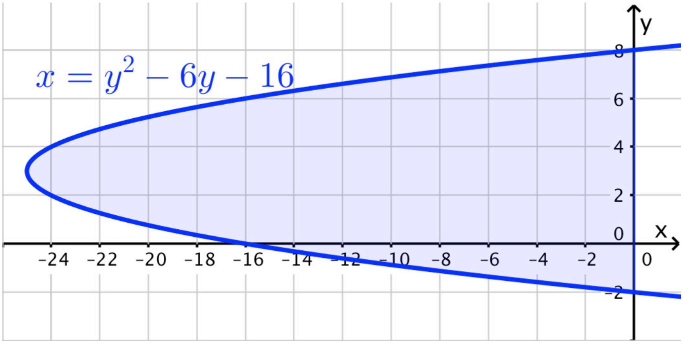
$$A = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y$$
$$= \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$$
$$= \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 2{,}35)$$

Vastaus a) $2\sqrt{3} - 2 \quad (\approx 1{,}46)$

b) $\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 2{,}35)$

236

Hahmotellaan tilanne piirtämällä paraabeli.



Paraabeli aukeaa oikealle päin. Lasketaan paraabelin ja y-akselin (suora $x = 0$) rajaaman alueen pinta-ala integroimalla muuttujan y suhteen.

Integroimisrajat saadaan käyrän ja y -akselin leikkauskohdista.

$y^2 - 6y - 16 = 0$ Ratkaistaan laskimella.

$y = -2$ tai $y = 8$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = -\int_{-2}^{8} (y^2 - 6y - 16)\,\mathrm{d}y$$

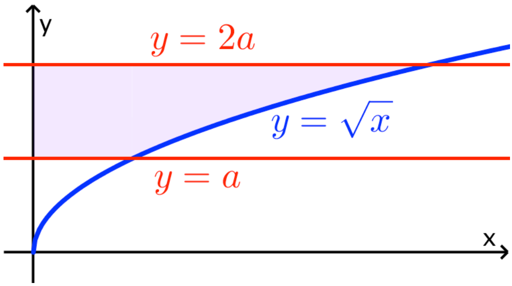
Käyrä on y-akselin vasemmalla puolella eli negatiivisen x-akselin puolella.

$$= \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

Vastaus $166\frac{2}{3}$

237

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Alueen pinta-ala saadaan integroimalla muuttujan y suhteen a:sta $2a$:han. Ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä x.

$$y = \sqrt{x}$$
$$x = y^2, \text{ missä } y > 0$$

Määritetään alueen pinta-alan lauseke.

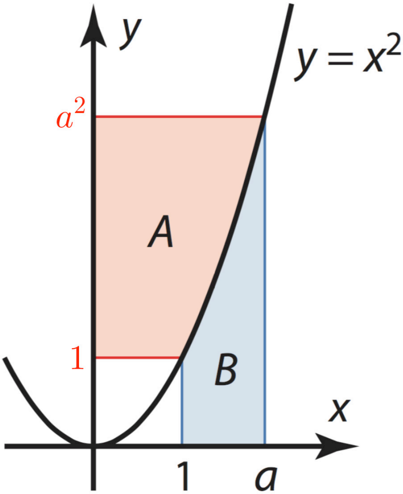
$$A = \int_a^{2a} y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{7}{3}a^3$$

Pinta-alan tulee olla 504. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\frac{7}{3}a^3 = 504$$
$$a^3 = 216$$
$$a = \sqrt[3]{216} = 6$$

Vastaus $a = 6$

238



Alueen A pinta-ala voidaan laskea integroimalla muuttujan y suhteen, jolloin integroimisrajat ovat $y = 1^2 = 1$ ja $y = a^2$. Ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä x.

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{y}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{y}$.

Alueen A pinta-ala on

$$A = \int_1^{a^2} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(a^3 - 1).$$

Alueen B pinta-ala on

$$B = \int_1^a x^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(a^3 - 1).$$

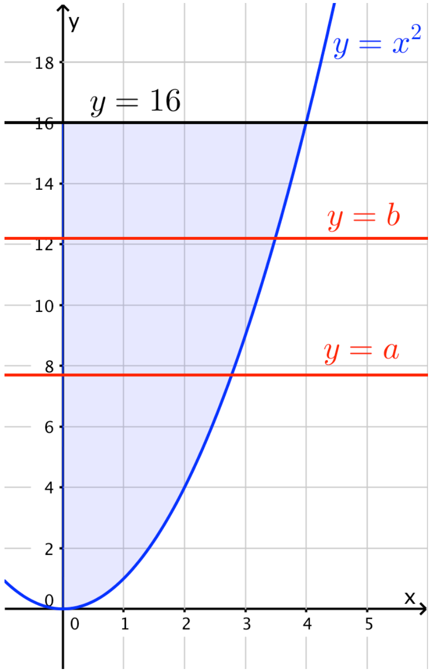
Alueen A pinta-ala on siis

$$A = \frac{2}{3}(a^3 - 1)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{3}(a^3 - 1)$$
$$= 2 \cdot B.$$

On osoitettu, että alueen A pinta-ala on kaksinkertainen alueeseen B verrattuna aina, kun $a > 1$. $\square$

239

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Pitää löytää sellaiset vakioiden a ja b arvot, että käyrän $y = x^2$ ja y-akselin väliin jää yhtä suuri pinta-ala välillä $0 \leq y \leq a$, välillä $a \leq y \leq b$ ja välillä $b \leq y \leq 16$.

Integroidaan muuttujan y suhteen, joten ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä x.

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y}, \text{ kun } x > 0$$

Muodostetaan kaksi yhtälöä.

$$\int_0^a \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int_a^b \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}b\sqrt{b} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$a\sqrt{a} = b\sqrt{b} - a\sqrt{a}$$

$$\int_0^a \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int_b^{16} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{128}{3} - \frac{2}{3}b\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{a} = 64 - b\sqrt{b}$$

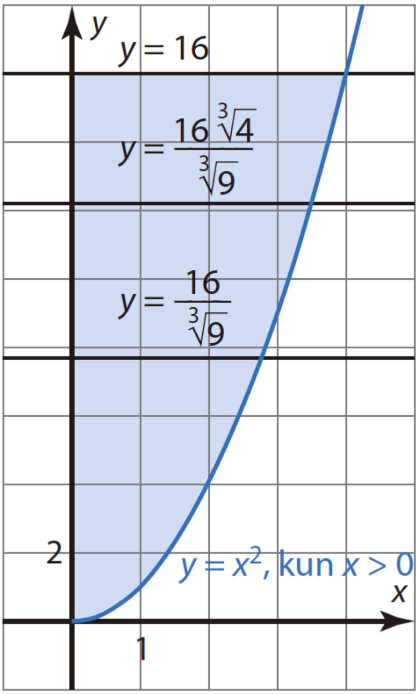
Ratkaistaan vakiot a ja b yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} a\sqrt{a} = b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \\ a\sqrt{a} = 64 - b\sqrt{b} \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$a = \frac{16}{\sqrt[3]{9}} \,(\approx 7{,}7) \quad \text{ja} \quad b = \frac{16\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \,(\approx 12{,}2)$$

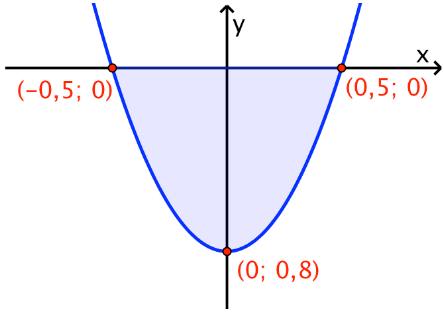
Piirretään kuva.



Vastaus $a = \dfrac{16}{\sqrt[3]{9}} \,(\approx 7{,}7)$ ja $b = \dfrac{16\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \,(\approx 12{,}2)$

240

Sijoitetaan ojan poikkileikkaus koordinaatistoon niin, että poikkileikkaus on paraabelin ja x-akselin rajaama alue. Sijoitetaan paraabelin huippu y-akselille. Valitaan koordinaatiston yksikkö vastaamaan yhtä metriä.



Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$ ja paraabeli kulkee pisteiden $(-0,5; 0)$, $(0; -0,8)$ ja $(0,5; 0)$ kautta. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-0,5)^2 + b \cdot (-0,5) + c \\ -0,8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 0,5^2 + b \cdot 0,5 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5^2 a - 0,5b + c = 0 \\ c = -0,8 \\ 0,5^2 a + 0,5b + c = 0 \end{cases}$$ Ratkaistaan laskimella.

$a = 3,2$, $b = 0$ ja $c = -0,8$

Paraabelin yhtälö on $y = 3,2x^2 - 0,8$.

Lasketaan ojan poikkileikkauksen pinta-ala.

$$A = -\int_{-0,5}^{0,5} (3,2x^2 - 0,8)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15} \quad (\mathrm{m}^2)$$

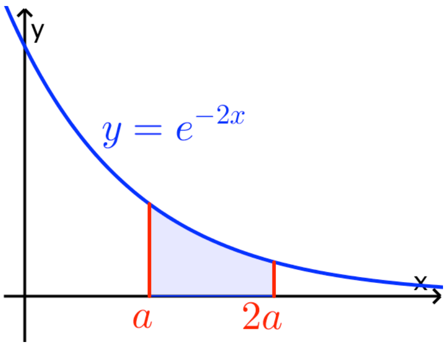
Oja muodostaa lieriön, jonka pohjan pinta-ala $A = \dfrac{8}{15}\ \mathrm{m}^2$ ja korkeus $h = 450$ m. Lasketaan ojan tilavuus.

$$V = A \cdot h = \frac{8}{15} \cdot 450 = 240 \quad (\mathrm{m}^3)$$

Vastaus 240 m^3

241

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Määritetään alueen pinta-alan lauseke.

$$A = \int_a^{2a} e^{-2x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-4a} + \frac{1}{2}e^{-2a}$$

Pinta-alan ilmaisee funktio $A(a) = -\frac{1}{2}e^{-4a} + \frac{1}{2}e^{-2a}$. Määritetään funktion suurin arvo derivaatan avulla. Derivoidaan funktio A.

$$A'(a) = 2e^{-4a} - e^{-2a}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2e^{-4a} - e^{-2a} = 0$$
$$a = \frac{1}{2}\ln 2 \quad (\approx 0{,}35)$$

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio A' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

	$\frac{1}{2}\ln 2$	
$A'(x)$	+	−
$A(x)$	↗	↘

a	$A'(a)$	**merkki**
0,2	0,22…	+
0,5	–0,097…	–

Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurin, kun $a = \frac{1}{2}\ln 2$.

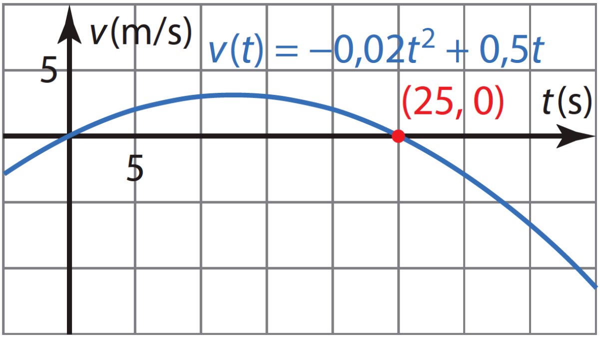
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A(\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{2}e^{-4\cdot\frac{1}{2}\ln 2} + \frac{1}{2}e^{-2\cdot\frac{1}{2}\ln 2}$$
$$= \frac{1}{8}$$

Vastaus $a = \frac{1}{2}\ln 2$, $A = \frac{1}{8}$

242

a) Piirretään funktion $v(t) = -0,02t^2 + 0,5t$ kuvaaja.



Liikkeen suunta muuttuu alkuperäiselle suunnalle vastakkaiseksi, kun nopeuden merkki vaihtuu. Ratkaistaan funktion v nollakohdat.

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ -0,02t^2 + 0,5t &= 0 \\ t = 0 \quad &\text{tai} \quad t = 25 \end{aligned}$$

Hetkellä $t = 0$ Samu lähti liikkeelle, joten Samu kääntyi takaisin hetkellä $t = 25$.

Aikavälillä $[t_1, t_2]$ kuljettu matka on yhtä suuri kuin funktion v kuvaajan ja t-akselin välillä $[t_1, t_2]$ rajaaman alueen pinta-ala.

Koska aikavälillä $[0, 25]$ funktion v kuvaaja on t-akselin yläpuolella on funktion kuvaajan ja t-akselin rajaaman alueen pinta-ala yhtä suuri kuin määrätty integraali 0:sta 25:een.

$$\int_0^{25} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{25} (-0,02t^2 + 0,5t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 52,083... \approx 52 \quad (\mathrm{m})$$

b) Koska nopeusfunktio saa tarkasteluvälillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, lasketaan pinta-ala osissa.

$$\int_0^{25} v(t)\,\mathrm{d}t - \int_{25}^{37,5} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{25} (-0,02t^2 + 0,5t)\,\mathrm{d}t - \int_{25}^{37,5} (-0,02t^2 + 0,5t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 104,166... \approx 104 \quad (\mathrm{m})$$

c) Koska kääntöpisteelle oli matkaa 52 m, oli Samu kuljettuaan matkan 104 m takaisin lähtöpisteessä. Siis hetkellä $t = 37,5$ s Samu oli takaisin lähtöpisteessä.

Vastaus a) hetkellä $t = 25\ \mathrm{s}$, 52 m lähtöpisteestä
b) 104 m
c) Samu oli takaisin lähtöpisteessä.

243

a) Lasketaan määrätyt integraalit laskimella.

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

$$\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{99}{100} = 0{,}99$$

$$\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{999}{1000} = 0{,}999$$

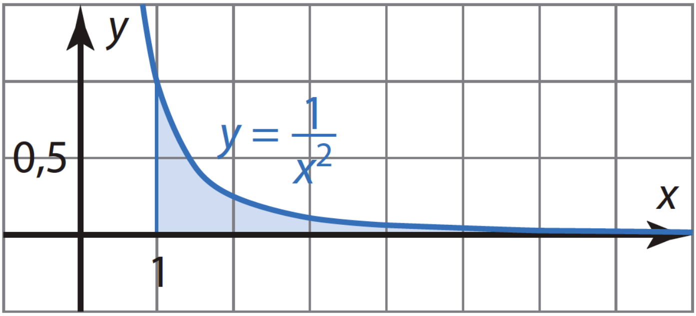
b) Lasketaan laskimella integraalin arvoja yhä suuremmilla *b*:n arvoilla.

$$\int_1^{10\,000} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9999}{10\,000} = 0{,}9999$$

$$\int_1^{100\,000} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{99\,999}{100\,000} = 0{,}99999$$

Vaikuttaa siltä, että kun b kasvaa rajatta, integraalin arvo lähestyy lukua 1.

c) Piirretään alueen kuva.



Koska $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ kaikilla $x > 1$, niin alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin funktion määrätty integraali 1:stä äärettömään.

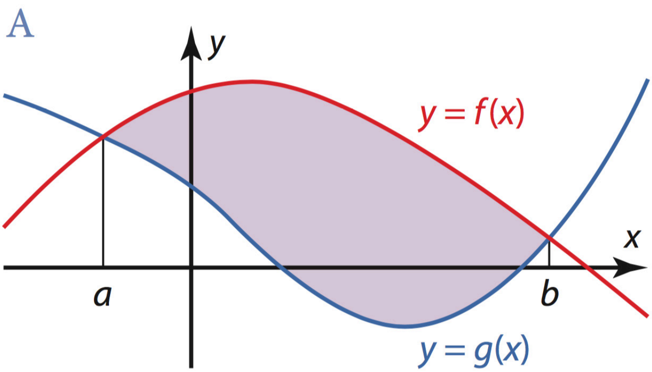
$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

Vastaus a) $\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0{,}9$, $\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0{,}99$ ja $\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0{,}999$

b) Integraali lähestyy arvoa 1.

c) $A = 1$

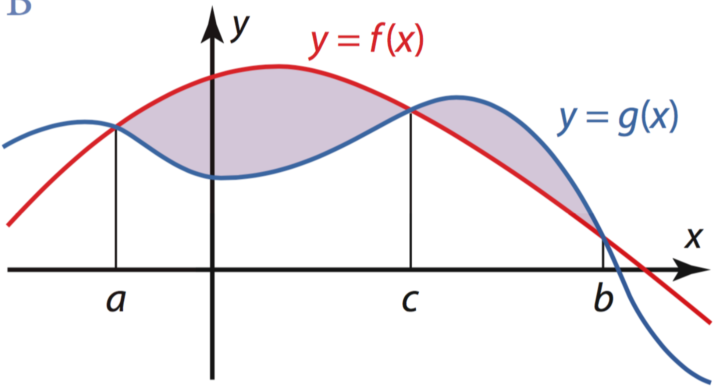
244



1) $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$

Perustelu: Aluetta rajaa välillä $[a, b]$ ylhäältä funktion f kuvaaja ja alhaalta funktion g kuvaaja.

B



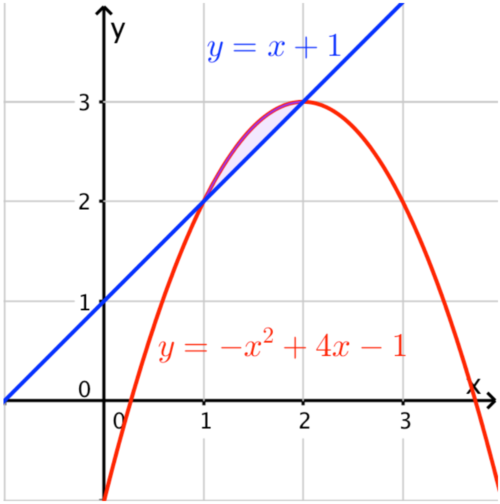
4) $\int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \big((g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$

Perustelu: Välillä $[a, c]$ aluetta rajaa ylhäältä funktion f kuvaaja ja alhaalta funktion g kuvaaja. Välillä $[c, b]$ aluetta rajaa ylhäältä funktion g kuvaaja ja alhaalta funktion f kuvaaja.

Vastaus A – 1 ja B – 4

245

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta paraabeli ja alapuolelta suora.

Integroimisrajat ovat suoran ja paraabelin leikkauskohdat.

$$x + 1 = -x^2 + 4x - 1$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

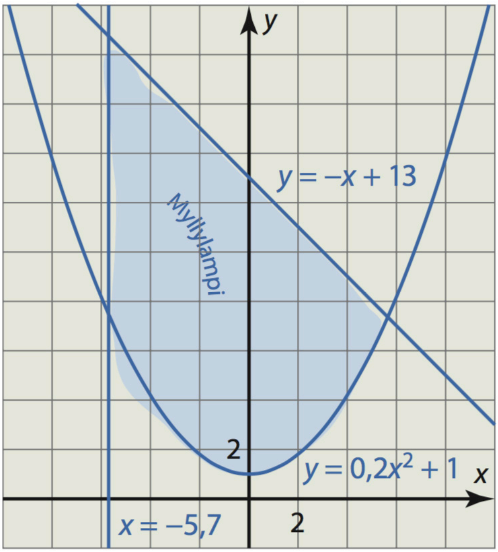
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_1^2 ((-x^2 + 4x - 1) - (x + 1))\,dx$$
$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}$$

Vastaus $\frac{1}{6}$

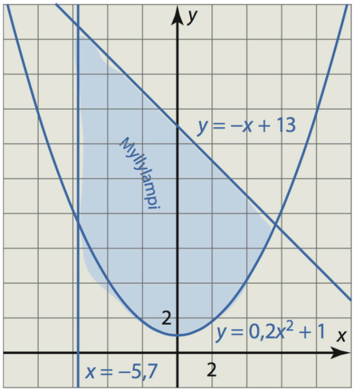
246

a) Arvioidaan kuvasta, kuinka monta ruutua Myllylammen pinta-ala on.



Ruutuja on noin 28. Koordinaatiston yksikkö on 10 m. Koska yhden ruudun sivun pituus on 2 yksikköä, niin yhden ruudun pinta-ala on $20\text{ m}\cdot 20\text{ m} = 400\text{ m}^2$. Tällöin alueen pinta-alan arvio on $A \approx 28\cdot 400\text{ m}^2 = 11200\text{ m}^2 = 1{,}12\text{ ha} \approx 1{,}1\text{ ha}$.

b) Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = -x + 13$ ja alapuolelta paraabeli.



Integroinnin alaraja on 5,7. Yläraja on suoran $y = -x + 13$ ja paraabelin $y = 0{,}2x^2 + 1$ leikkauskohta. Ratkaistaan leikkauskohta.

$$-x + 13 = 0{,}2x^2 + 1$$

$$-0{,}2x^2 - x + 12 = 0$$

$$x = -10{,}6394\ldots \quad \text{tai} \quad x = 5{,}63941\ldots$$

Koska etsitty leikkauskohta on positiivinen, niin $x = 5{,}6394\ldots$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-5,7}^{5,6394\ldots} ((-x + 13) - (0{,}2x^2 + 1))\,\mathrm{d}x$$

$$= 112{,}11\ldots \text{ (pinta-alayksikköä)}$$

Koordinaatiston yksikkö on 10 metriä, joten pinta-alayksikkö on $10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$.

$$A = 112{,}11\ldots \cdot 100 \text{ m}^2 \approx 11000 \text{ m}^2 = 1{,}1 \text{ ha}$$

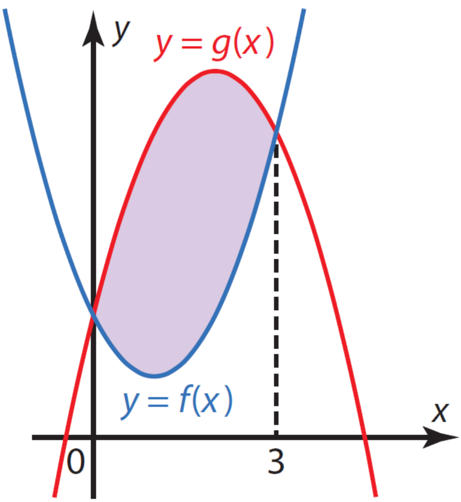
Vastaus a) Noin 28 ruutua eli 1,1 ha b) 1,1 ha

247

a) Ratkaistaan funktioiden kuvaajien leikkauskohdat.

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$
$$2x^2 - 6x = 0$$
$$2x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

b) Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Kuvaajat leikkaavat kohdissa 0 ja 3. Aluetta rajaa siis yläpuolelta funktion g kuvaaja ja alapuolelta funktion f kuvaaja.



c) Kuvan perusteella $g(x) \geq f(x)$ välillä $[0, 3]$. Lasketaan alueen pinta-ala.

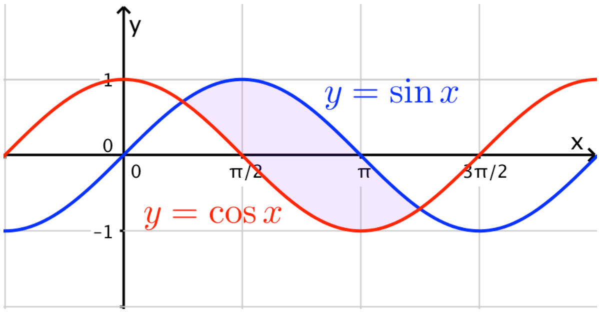
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^3 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 ((-x^2 + 4x + 2) - (x^2 - 2x + 2))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^3 (-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2) \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 - (-\frac{2}{3}\cdot 0^3 + 3\cdot 0^2) \\
&= -18 + 27 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $x = 0$ tai $x = 3$

c) 9

248

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät.



Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Lasketaan sen alueen pinta-ala, joka jää käyrien väliin kahden peräkkäisen leikkauskohdan, esimerkiksi kohtien

$x_0 = \frac{\pi}{4}$ $(n = 0)$ ja $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ $(n = 1)$, välillä.

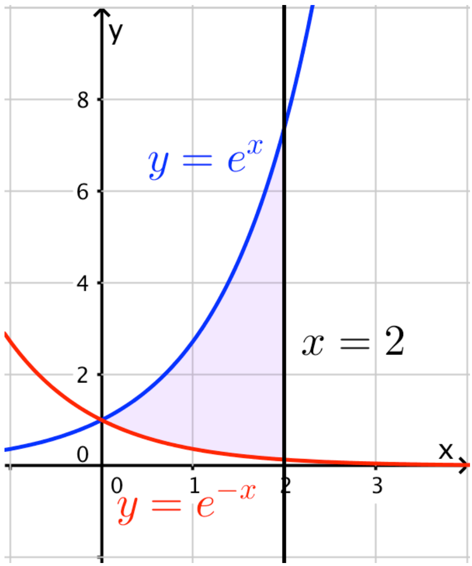
Kuvan perusteella välillä $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = \sin x$ ja alapuolelta $y = \cos x$. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2} \quad (\approx 2{,}8)$$

Vastaus $2\sqrt{2}$

249

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = \mathrm{e}^x$ ja alapuolelta käyrä $y = \mathrm{e}^{-x}$.

Määrätyn integraalin alaraja on käyrien leikkauskohta.

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}$$
$$x = 0$$

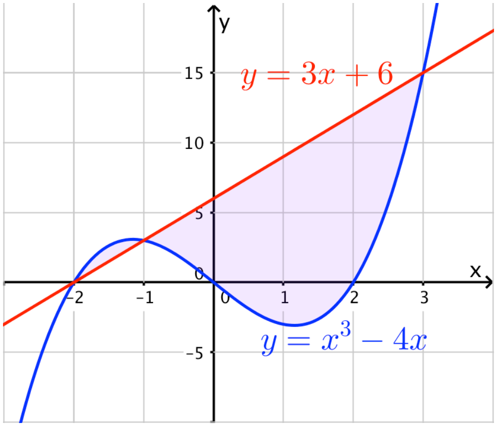
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^2 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2} - 2 \quad (\approx 5{,}5)$$

Vastaus $\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2} - 2$

250

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät.



Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$x^3 - 4x = 3x + 6$ Ratkaistaan laskimella.

$x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 3$

Välillä $[-2, -1]$ $x^3 - 4x \geq 3x + 6$ ja välillä $[-1, 3]$ $3x + 6 \geq x^3 - 4x$. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-2}^{-1} ((x^3 - 4x) - (3x + 6))\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} ((3x + 6) - (x^3 - 4x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^3 - 7x - 6)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} (-x^3 + 7x + 6)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4} + 32 = 32\frac{3}{4}$$

Vastaus $32\frac{3}{4}$

251

a) Määritetään käyrien leikkauspisteet.

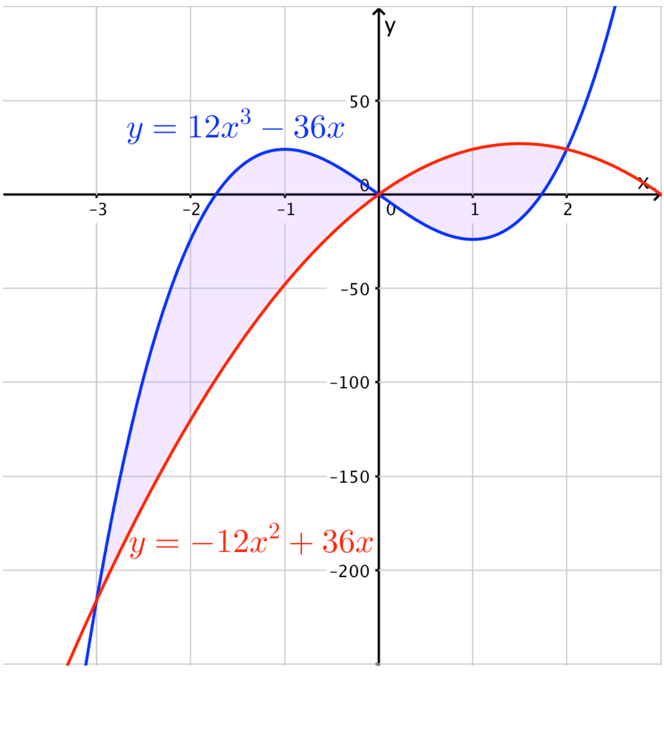
$$\begin{cases} y = 12x^3 - 36x \\ y = -12x^2 + 36x \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

$x = -3$ ja $y = -216$ tai $x = 0$ ja $y = 0$ tai $x = 2$ ja $y = 24$

Käyrien leikkauspisteet ovat (–3, –216), (0, 0) ja (2, 24).

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Skaalataan kuvaa niin, että kaikki leikkauspisteet näkyvät kuvassa.



b) Kuvan perusteella välillä $[-3, 0]$ aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = 12x^3 - 36x$ ja välillä $[0, 2]$ käyrä $y = -12x^2 + 36x$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-3}^{0} ((12x^3 - 36x) - (-12x^2 + 36x))\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_{0}^{2} (-12x^2 + 36x) - (12x^3 - 36x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{0} (12x^3 + 12x^2 - 72)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (-12x^3 - 12x^2 + 72)\,\mathrm{d}x$$

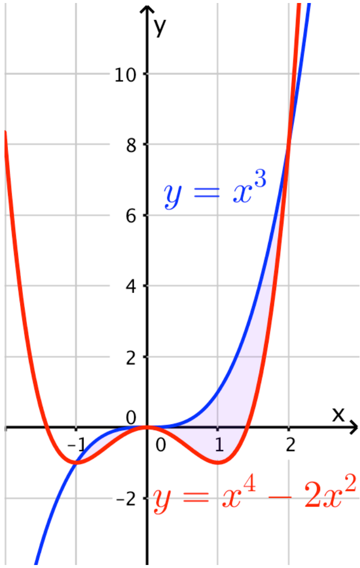
$$= 253$$

Vastaus a) $(-3, -216)$, $(0, 0)$ ja $(2, 24)$

b) 253

252

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroimisrajat saadaan kuvaajien leikkauskohdista.

$$x^3 = x^4 - 2x^2$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Kuvan perusteella aluetta rajaa välillä $[-1, 2]$ yläpuolelta käyrä $y = x^3$.

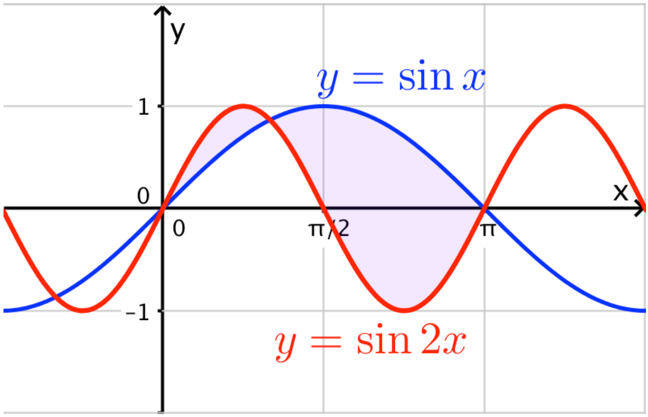
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (x^3 - (x^4 - 2x^2))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} (-x^4 + x^3 + 2x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{63}{20} = 3\frac{3}{20} \end{aligned}$$

Vastaus $3\frac{3}{20}$

253

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroimisrajat saadaan kuvaajien leikkauskohdista.

$\sin x = \sin 2x$ Ratkaistaan laskimella.

$x = n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

Käyrien rajaaman kaksiosaisen alueen integroimisrajat ovat mitkä tahansa kolme peräkkäistä leikkauskohtaa, esimerkiksi

$$x = 0\ (n = 0),\quad x = \frac{\pi}{3}\ (n = 0)\ \text{ja}\ x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \pi\ (n = 1)$$

Kuvan perusteella välillä $[0, \frac{\pi}{3}]$ $\sin 2x \geq \sin x$ ja välillä $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ $\sin x \geq \sin 2x$.

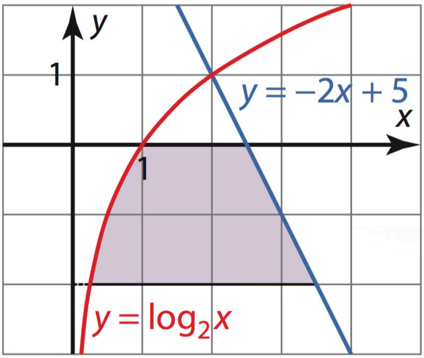
Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Vastaus $2\frac{1}{2}$

254



Kun integroidaan muuttujan y suhteen, aluetta rajaa välillä $-2 \le y \le 0$ kaksi käyrää. Ratkaistaan käyrien yhtälöistä x.

$y = -2x + 5$	$y = \log_2 x$
$x = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$	$x = 2^y$

Kuvan perusteella aluetta rajaa oikealta suora $x = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$ ja vasemmalta käyrä $x = 2^y$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-2}^{0} ((-\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}) - 2^y)\,\mathrm{d}y$$

$$= 6 - \frac{3}{4\ln 2} \quad (\approx 4,9)$$

Laskin saattaa antaa ratkaisun eri muodossa.

Vastaus $6 - \frac{3}{4\ln 2}$

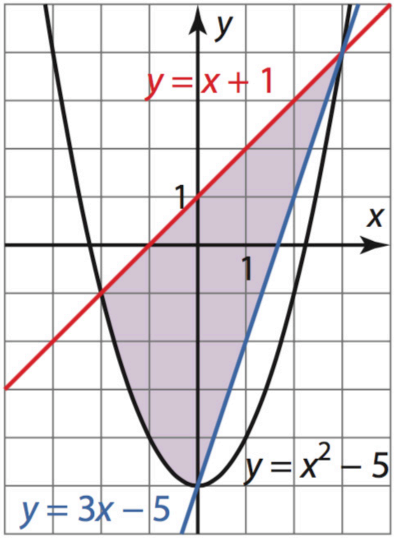
255

Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$x+1=x^2-5$	$3x-5=x^2-5$
$x=-2 \quad \text{tai} \quad x=3$	$x=0 \quad \text{tai} \quad x=3$

Välillä $[-2, 0]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y=x+1$ ja alapuolelta paraabeli $y=x^2-5$.

Välillä $[0, 3]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y=x+1$ ja alapuolelta suora $y=3x-5$.

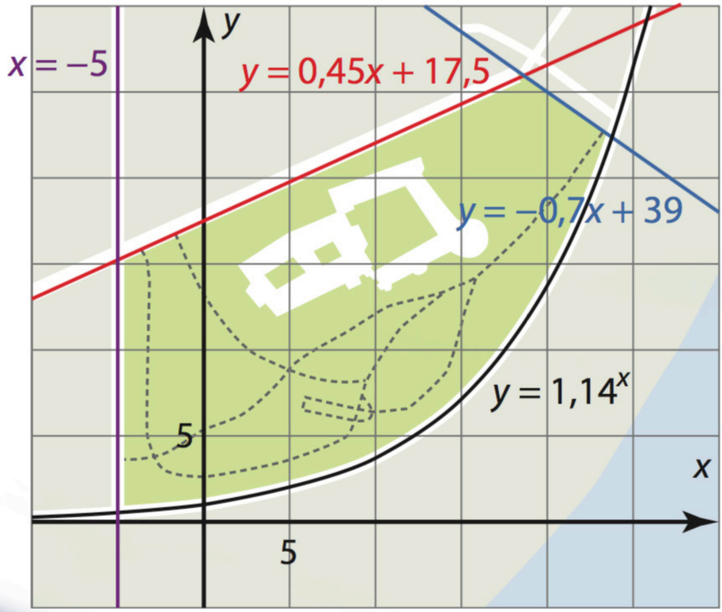


Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} (x+1-(x^2-5))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (x+1-(3x-5))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{3} (-x^2+x+6)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (-2x+6)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus $16\frac{1}{3}$

256



Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$0,45x+17,5=-0,7x+39$$
$$x=18,6956...$$

$$1,14^x=-0,7x+39$$
$$x=23,7254...$$

Välillä [–5, 18,6956...] aluetta rajaa yläpuolelta suora $y=0,45x+17,5$ ja alapuolelta käyrä $y=1,14^x$.

Välillä [18,6956…; 23,7254…] aluetta rajaa yläpuolelta suora $y=-0,7x+39$ ja alapuolelta käyrä $y=1,14^x$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-5}^{18,6956...} (0,45x + 17,5 - 1,14^x)\,\mathrm{d}x + \int_{18,6956...}^{23,7254...} (-0,7x + 39 - 1,14^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 442,24... \text{ (pinta-alayksikköä)}$$

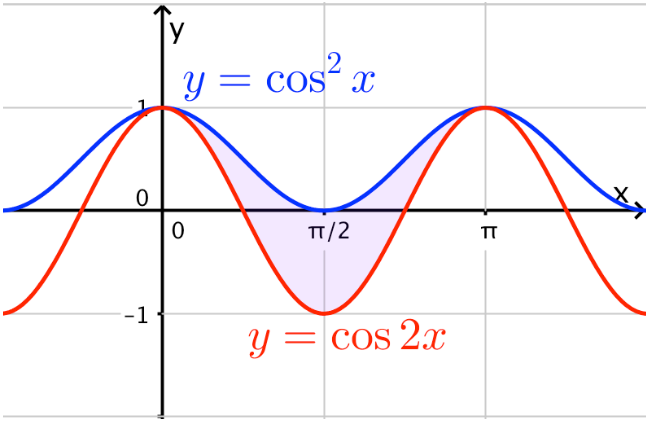
Koordinaatiston yksikkö on 10 metriä, joten pinta-alayksikkö on $10\text{ m} \cdot 10\text{ m} = 100\text{ m}^2 = 1\text{ a}$.

Alueen pinta-ala on siis noin 442 a.

Vastaus 442 a

257

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät.



Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$\cos^2 x = \cos 2x$$
$$x = n \cdot \pi \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Lasketaan sen alueen pinta-ala, joka jää käyrien väliin kahden peräkkäisen leikkauskohdan, esimerkiksi kohtien

$x_0 = 0 \ \ (n = 0)$ ja $x_1 = \pi \ \ (n = 1)$, välillä.

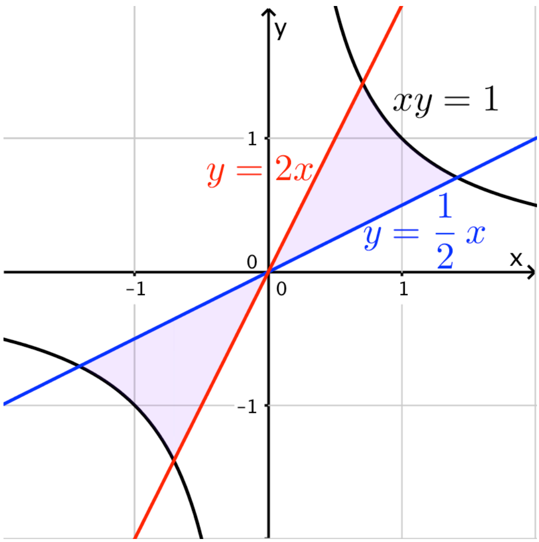
Kuvan perusteella välillä $[0, \pi]$ aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = \cos^2 x$ ja alapuolelta $y = \cos 2x$. Lasketaan alueen pinta-ala

$$A = \int_0^{\pi} (\cos^2 x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Vastaus $\frac{\pi}{2}$

258

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Ratkaistaan hyperbelin yhtälöstä y:n suhteen.

$$xy = 1$$
$$y = \frac{1}{x}$$

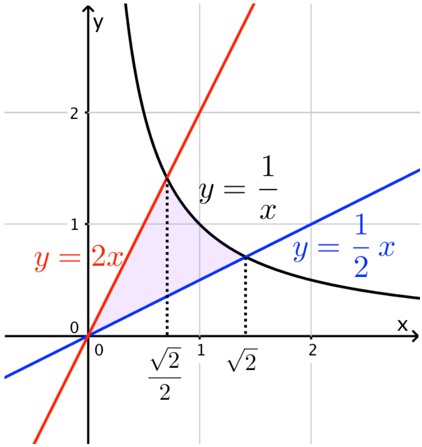
Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauskohdista.

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{x}$$
$$x = -\sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{2}$$

$$2x = \frac{1}{x}$$
$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Symmetrian perusteella 1. neljänneksessä ja 3. neljänneksessä olevat alueet ovat pinta-aloiltaan yhtä suuret. Lasketaan 1. neljänneksessä olevan alueen pinta-ala.

Välillä $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ aluetta rajaa
yläpuolelta suora $y = 2x$ ja
alapuolelta suora $y = \frac{1}{2}x$.



Välillä $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$ aluetta rajaa
yläpuolelta käyrä $y = \frac{1}{x}$ ja
alapuolelta suora $y = \frac{1}{2}x$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2x - \frac{1}{2}x)\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x)\,dx = \ln 2$$

Koko kaksiosaisen alueen pinta-ala on $2A = 2\ln 2 \approx 1{,}39$.

Vastaus $2\ln 2 \approx 1{,}39$

259

Välillä $[0, \pi]$ $\sin x \geq 0$, joten $f(x) + \sin x \geq f(x)$.

Välillä $[\pi, 2\pi]$ $\sin x \leq 0$, joten $f(x) \geq f(x) + \sin x$.

Koska aluetta yläpuolelta rajaavan funktion kuvaaja vaihtuu kohdassa $x = \pi$ lasketaan pinta-ala kahdessa osassa.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \big((f(x) + \sin x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \big(f(x) - (f(x) + \sin x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus 4

260

a) Ratkaistaan funktion kuvaajien leikkauskohdat.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
e^{2x} &= 4e^x - 3 \\
e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 \\
(e^x)^2 - 4e^x + 3 &= 0
\end{aligned}
$$

Merkitään $e^x = t$ ja ratkaistaan saatu toisen asteen yhtälö.

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$t = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad t = \frac{4-2}{2} = 1$$

Ratkaistaan x:n arvot.

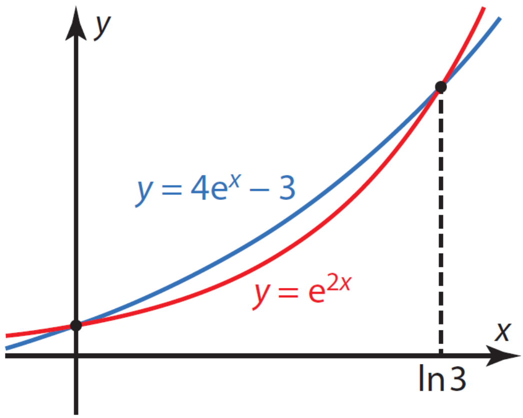
$$
\begin{array}{lcl}
e^x = t & \text{tai} & e^x = t \\
e^x = 3 & & e^x = 1 \\
x = \ln 3 & & x = \ln 1 = 0
\end{array}
$$

b) Tutkitaan kumman funktion kuvaaja on ylempänä leikkauskohtien välissä. Lasketaan funktioiden arvot jossakin välin $[0, \ln 3]$ kohdassa. Valitaan $x = \ln 2$.

$$f(\ln 2) = e^{2 \cdot \ln 2} = e^{\ln 2^2} = e^{\ln 4} = 4$$

$$g(\ln 2) = 4e^{\ln 2} - 3 = 4 \cdot 2 - 3 = 5$$

Koska $g(\ln 2) > f(\ln 2)$, niin $g(x) \geq f(x)$ välillä $\left[0, \ln 3\right]$.
Hahmotellaan alueen kuva.



c) Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^{\ln 3} ((4e^x - 3) - e^{2x})\,dx$$

$$= \Big/_0^{\ln 3} (4e^x - 3x - \frac{1}{2}e^{2x})$$

$$= (4e^{\ln 3} - 3\ln 3 - \frac{1}{2}e^{2\ln 3}) - (4e^0 - 3 \cdot 0 - \frac{1}{2}e^{2\cdot 0})$$

$$= 4 \cdot 3 - 3\ln 3 - \frac{1}{2}e^{\ln 3^2} - 4 + \frac{1}{2}$$

$$= 12 - 3\ln 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 4 + \frac{1}{2}$$

$$= 8 - 3\ln 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 8 - 3\ln 3 - 4$$

$$= 4 - 3\ln 3 \quad (\approx 0{,}70)$$

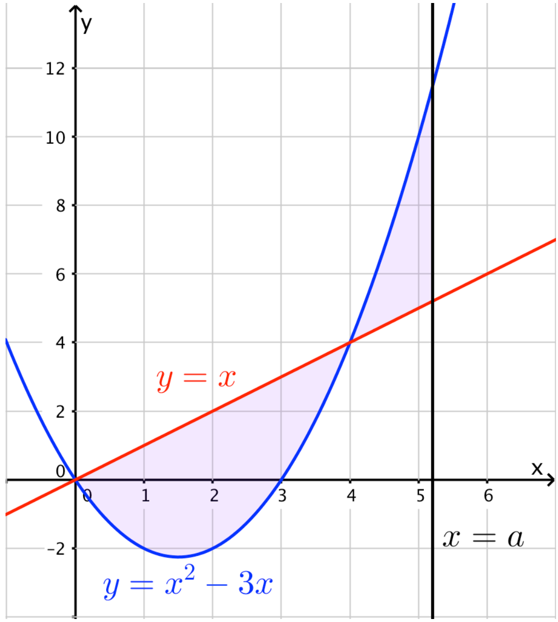
Vastaus a) $x = 0$ ja $x = \ln 3$

b) Funktion g kuvaaja on leikkauskohtien välissä ylempänä.

c) $4 - 3\ln 3$

261

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroimisrajat saadaan paraabelin ja suoran leikkauskohdista.

$$x^2 - 3x = x$$
$$x^2 - 4x =$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Kuvan perusteella välillä $[0, 4]$ aluetta rajaa yläpuolelta suora $y = x$ ja alapuolelta paraabeli $y = x^2 - 3x$. Välillä $[4, a]$ aluetta rajaa yläpuolelta paraabeli $y = x^2 - 3x$ ja alapuolelta suora $y = x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$\int_0^4 (x-(x^2-3x))\,\mathrm{d}x = \int_4^a ((x^2-3x)-x)\,\mathrm{d}x$$

Pinta-alat ovat yhtä suuret.

$$\int_0^4 (-x^2+4x)\,\mathrm{d}x = \int_4^a (x^2-4x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{32}{3} = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{32}{3}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a = 6$$

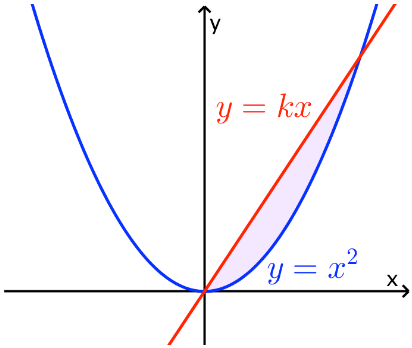
Koska $a > 4$, niin vain ratkaisu $a = 6$ kelpaa.

Vastaus $a = 6$

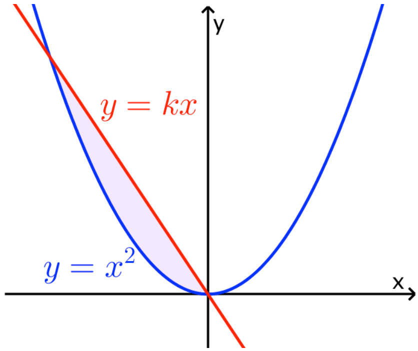
262

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Jotta suora ja paraabeli rajaavat alueen, pitää olla $k \neq 0$.

Kulmakerroin $k > 0$.



Kulmakerroin $k < 0$.



Integroimisrajat saadaan suoran ja paraabelin leikkauskohdista.

$$x^2 = kx$$

$$x^2 - kx = 0$$

$$x(x-k) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = k$$

Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta suora ja alapuolelta paraabeli. Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke ja ratkaistaan kulmakerroin k.

Kulmakerroin $k > 0$.

$$A = \int_0^k (kx - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{k^3}{6}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{k^3}{6} = 10\frac{2}{3}$$

$$\frac{k^3}{6} = \frac{32}{3}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$k = 4$$

Kulmakerroin $k < 0$.

$$A = \int_k^0 (kx - x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{k^3}{6}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$-\frac{k^3}{6} = 10\frac{2}{3}$$

$$-\frac{k^3}{6} = \frac{32}{3}$$

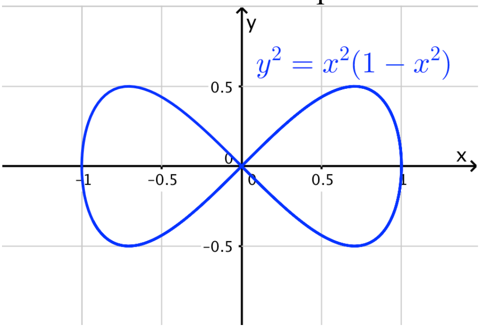
Ratkaistaan laskimella.

$$k = -4$$

Vastaus $k = 4$ tai $k = -4$

263

a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrä.



Integrointirajat saadaan käyrän ja x-akselin leikkauskohdista.

$$x^2(1-x^2)=0$$

$$x^2=0 \quad \text{tai} \quad 1-x^2=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x^2=1$$

$$x=1 \quad \text{tai} \quad x=-1$$

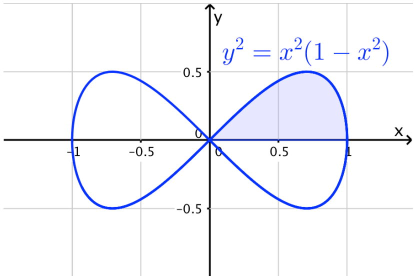
Ratkaistaan käyrän yhtälö muuttujan y suhteen.

$$y^2=x^2(1-x^2)$$

$$y=\sqrt{x^2(1-x^2)} \quad \text{tai} \quad y=-\sqrt{x^2(1-x^2)}$$

$$y=|x|\sqrt{(1-x^2)} \quad \text{tai} \quad y=-|x|\sqrt{(1-x^2)}$$

Käyrän rajaama alue on symmetrinen. Voidaan laskea käyrän ja x-akselin koordinatiston 1. neljänneksessä rajaama alue ja kertoa se neljällä. Rajaava käyrä on



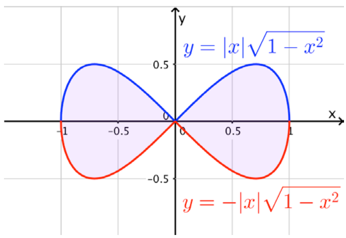
$$y = |x|\sqrt{1-x^2} \qquad |x > 0$$
$$= x\sqrt{1-x^2}$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

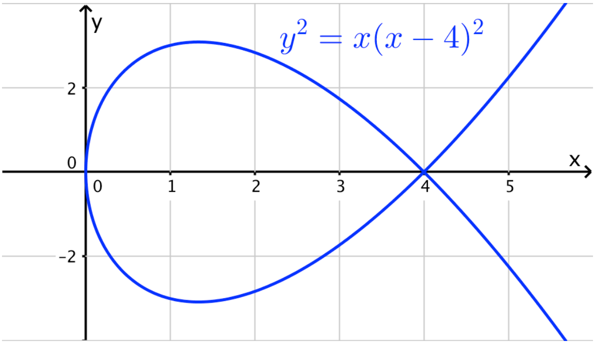
$$A = 4\int_0^1 (x\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Huomaa, että alueen pinta-alan voi laskea myös kahden käyrän välisenä pinta-alana.

$$A = \int_{-1}^{1} \left(|x|\sqrt{1-x^2} - (-|x|\sqrt{1-x^2}) \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(2|x|\sqrt{1-x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$



b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrä.



Integrointirajat saadaan käyrän ja x-akselin leikkauskohdista.

$$x(x-4)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

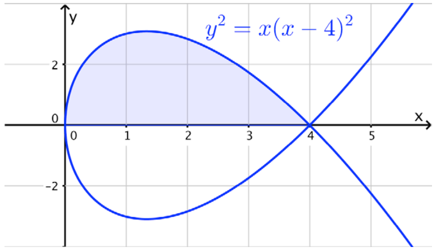
Ratkaistaan käyrän yhtälö muuttujan y suhteen..

$$y^2 = x(x-4)^2$$

$$y = \sqrt{x(x-4)^2} \quad \text{tai} \quad y = -\sqrt{x(x-4)^2}$$

$$y = \sqrt{x} \cdot |x-4| \quad \text{tai} \quad y = -\sqrt{x} \cdot |x-4|$$

Käyrän rajaama alue on symmetrinen. Voidaan laskea käyrän ja x-akselin koordinaatiston 1. neljänneksessä rajaama alue ja kertoa se kahdella. Rajaava käyrä on



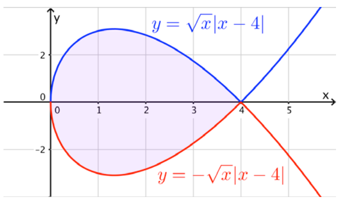
$$y = \sqrt{x}\cdot|x-4| \quad |x-4<0$$
$$= \sqrt{x}\cdot(-(x-4))$$
$$= \sqrt{x}\cdot(4-x)$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = 2\int_0^4 (\sqrt{x}(4-x))\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\cdot\frac{128}{15}$$
$$= \frac{256}{15} = 17\frac{1}{15}$$

Huomaa, että alueen pinta-alan voi laskea myös kahden käyrän välisenä pinta-alana.

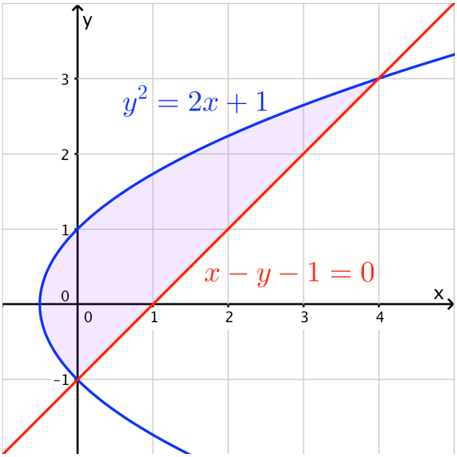
$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x}\cdot|x-4| - (-\sqrt{x}\cdot|x-4|)\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x}\cdot|x-4|\right)\mathrm{d}x = \frac{256}{15} = 17\frac{1}{15}$$



Vastaus a) $1\frac{1}{3}$ b) $17\frac{1}{15}$

264

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kun integroidaan muuttujan y suhteen aluetta rajaa kaksi käyrää. Ratkaistaan integrointia varten käyrien yhtälöistä x.

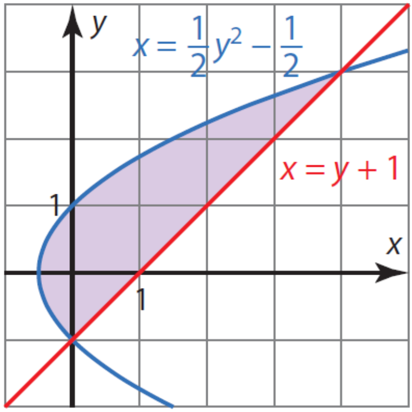
$$y^2 = 2x + 1$$
$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$$

$$x - y - 1 = 0$$
$$x = y + 1$$

Integroimisrajat saadaan käyrien leikkauspisteiden y-koordinaateista.

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = y + 1$$
$$y = -1 \quad \text{tai} \quad y = 3$$

Välillä $-1 \le y \le 3$ aluetta rajaa oikealta suora $x = y + 1$ ja vasemmalta paraabeli $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$.



Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^{3} ((y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}))\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{3} (-\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{3}{2}))\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Vastaus $5\frac{1}{3}$

265

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentit piirretään.

$$y = f(a) = \frac{1}{a}$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$, missä $a > 0$.

Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(a)$. Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

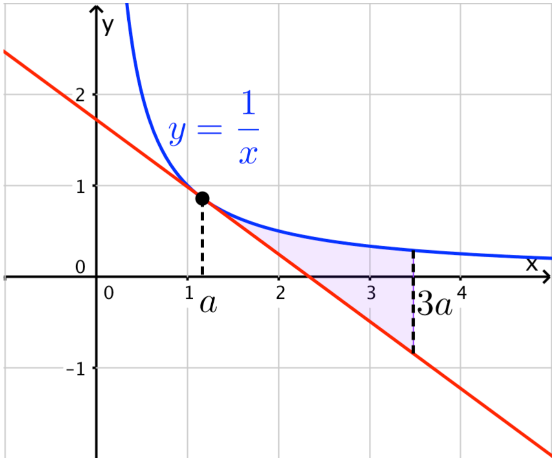
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.

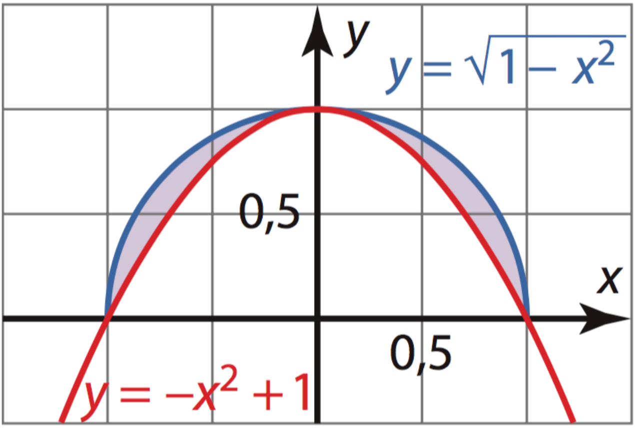


Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta tangenttisuora. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^{3a} \left(\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^{3a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a^2}x - \frac{2}{a}\right) \mathrm{d}x \\
&= \ln 3
\end{aligned}
$$

Alueen pinta-ala on siis aina $\ln 3$, joten pinta-ala ei riipu kohdasta, johon tangentti piirretään. □

266



Käyrä $y = \sqrt{1-x^2}$ on yksikköympyrän yläpuolinen osa. Siis varjostetun alueen pinta-ala saadaan, kun puoliympyrän pinta-alasta vähennetään paraabelin ja x-akselin rajaama pinta-ala.

Ratkaistaan paraabelin ja x-akselin leikkauspisteet.

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Lasketaan varjostetun alueen pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \Big/_{-1}^{1} (-\frac{1}{3}x^3 + x)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left((-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1) - (-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 \right)$$

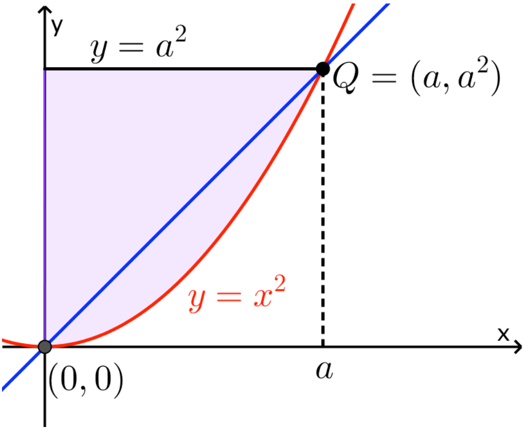
$$= \frac{\pi}{2} - (2 - \frac{2}{3})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

Vastaus $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

267

Olkoon piste $Q=(a,a^2)$. Kun piste yhdistetään y-akseliin vaakasuoralla janalla, saadaan jana, joka on osa suoraa $y=a^2$.

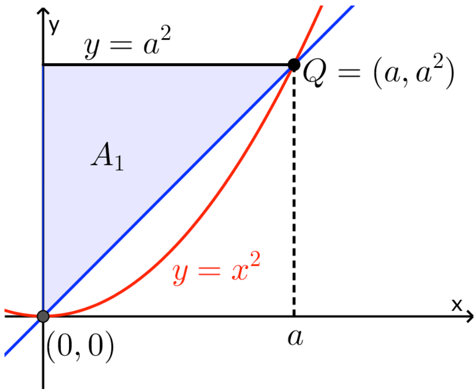


Suoran, joka kulkee origon ja pisteen Q kautta, kulmakerrroin on

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^2-0}{a-0}=\frac{a^2}{a}=a$$

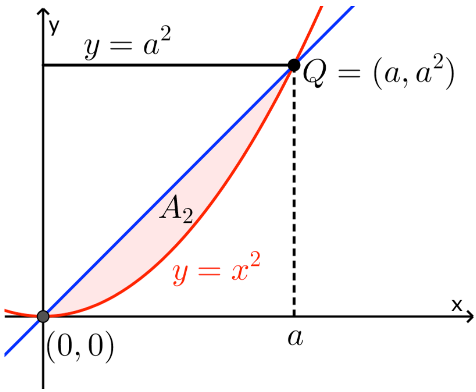
Suoran yhtälö on siis $y=ax$.

Suorien $y = ax$ ja $y = a^2$ sekä y-akselin rajaama alue on kolmio, jonka pinta-ala on



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot a^3$$

Lasketaan suoran $y = ax$ ja paraabelin $y = x^2$ rajaaman alueen pinta-ala.



$$A_2 = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \frac{a^3}{6}$$

Lasketaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{6}{a^3} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3:1$$

On osoitettu, että pinta-alojen suhde on vakio $3:1$. $\square$

268

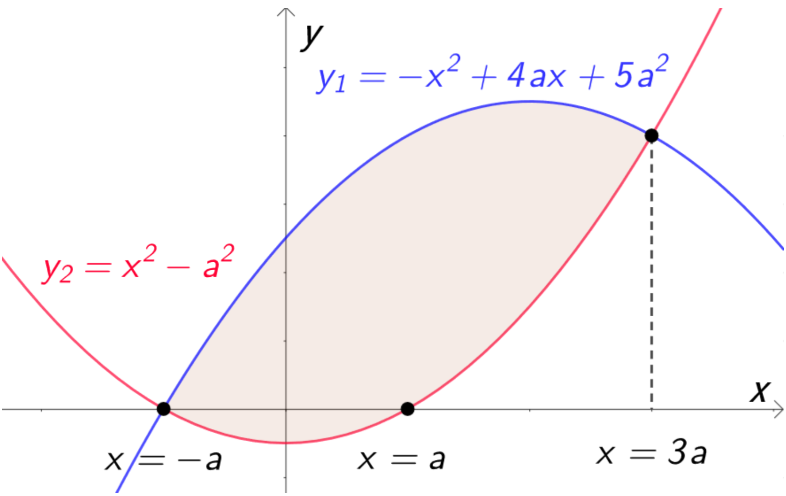
a) Määritetään käyrien leikkauspisteet. Ratkaistaan käyrien yhtälöistä muodostetusta yhtälöparista x ja y.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4ax + 5a^2 \\ y = x^2 - a^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella x ja y.

$x = -a$ ja $y = 0$ tai $x = 3a$ ja $y = 8a^2$

Leikkauspisteet ovat $(-a, 0)$ ja $(3a,\ 8a^2)$.



b) Lasketaan käyrien rajaaman alueen pinta-ala.

Jos $a > 0$:

$$A = \int_{-a}^{3a} ((-x^2 + 4ax + 5a^2) - (x^2 - a^2))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-a}^{3a} (-2x^2 + 4ax + 6a^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{64a^3}{3}$$

Jos $a < 0$:

$$A = \int_{3a}^{-a} (-2x^2 + 4ax + 6a^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{64a^3}{3}$$

c) Jos $a > 0$:

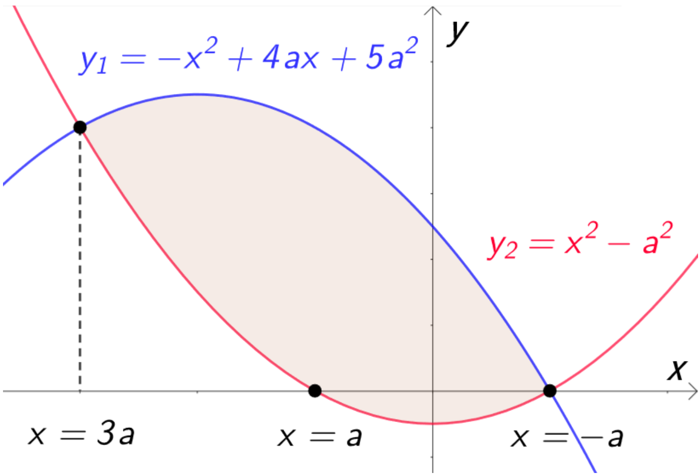
Tällöin x-akselin yläpuolella olevan alueen pinta-ala on

$$A_1 = \int_{-a}^{3a} (-x^2 + 4ax + 5a^2)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{3a} (x^2 - a^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{60a^3}{3}$$

Joten x-akselin yläpuolella olevan alueen pinta-alan suhde koko käyrien rajoittaman alueen pinta-alaan on

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{60a^3}{3}}{\frac{64a^3}{3}} = \frac{15}{16}$$

Jos $a < 0$, niin tällöin muodostuva pinta-ala on sama kuin tapauksessa $a > 0$, mutta ala on peilautunut y-akselin suhteen, jolloin pinta-alojen suhde pysyy samana.



On siis osoitettu, että riippumatta vakion a arvosta käyrien rajaamasta alueesta aina yhtä suuri osa on x-akselin yläpuolella.

Vastaus a) $(-a, 0)$ ja $(3a, 8a^2)$

b) $\frac{64a^3}{3}$, kun $a > 0$ ja $-\frac{64a^3}{3}$, kun $a < 0$.

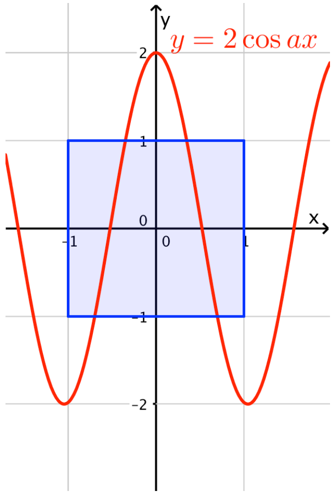
c) On osoitettu, että riippumatta vakion a arvosta käyrien rajaamasta alueesta aina $\frac{15}{16}$ on x-akselin yläpuolella.

269

Neliön pinta-ala on 4.

Käyrän $y = 2\cos ax$ origon kohdalla oleva huippu on korkeudella
$y = 2\cos(a \cdot 0) = 2 \cdot 1 = 2$.

Koska pinta-ala jakautuu kolmeen yhtä suureen osaan, on käyrän leikattava sekä suora $y = 1$, että suora $y = -1$.



Ratkaistaan käyrän ja suoran $y = 1$ leikkauskohdat.

$$2\cos ax = 1$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3a} + n \cdot \frac{\pi}{3a}$$

Kun leikkauskohtia on kaksi, ne ovat $x = \pm\frac{\pi}{3a}$.

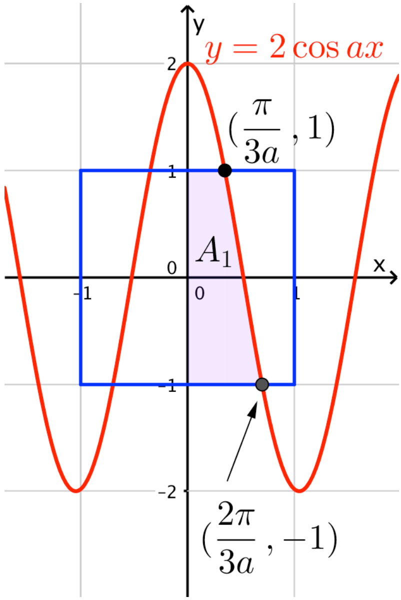
Ratkaistaan käyrän ja suoran $y = -1$ leikkauskohdat.

$$2\cos ax = -1$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3a} + n \cdot \frac{2\pi}{3a}$$

Kun leikkauskohtia on kaksi, ne ovat $x = \pm\frac{2\pi}{3a}$.

Lasketaan y-akselin, suorien $y = 1$ ja $y = -1$ sekä käyrän $y = 2\cos ax$ rajaaman alueen pinta-ala.



$$A_1 = \underbrace{\frac{\pi}{3a} \cdot 2}_{\text{neliö}} + \int_{\frac{\pi}{3a}}^{\frac{2\pi}{3a}} (2\cos ax - (-1))\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{a}$$

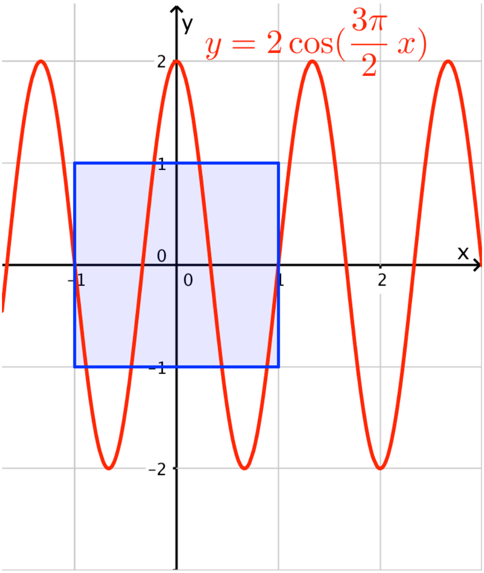
Tämä pinta-ala on puolet keskimmäisen alueen pinta-alasta. Koska neliö jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan, niin tämä pinta-ala on kuudesosa koko neliön pinta-alasta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$\frac{\pi}{a} = \frac{1}{6} \cdot 4$$

$$a = \frac{3\pi}{2}$$

Piirretään kuvaaja, kun $a = \frac{3\pi}{2}$.



Käyrä $y = 2\cos ax$ jakaa tällöin neliön viiteen osaan. Koska ainoa ratkaisuehdokas vakiolle a ei toteuta kaikkia vaadittuja ehtoja, ei tehtävällä ole ratkaisua. Siis käyrä $y = 2\cos ax$ ei jaa neliötä kolmeen yhtä suureen osaan millään vakion a arvolla.

Vastaus Ei millään vakion a arvolla.

Huomaa: Voit myös perustella, että saadulla vakion a arvolla käyrä leikkaa suoran $y = -1$ kahdesti välillä $-1 \leq x \leq 1$. Silloin neliö jakautuu useampaan kuin kolmeen osaan.