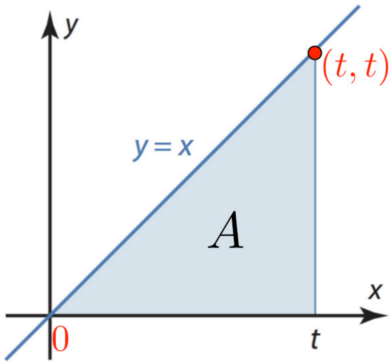
91

a) Kertymäfunktio $K_0(t)=\int_0^t x\mathrm{d}x$ ilmaisee sen pinta-alan, joka kertyy funktion $f(x)=x$ kuvaajan ja x-akselin väliin siirryttäessä kohdasta 0 kohtaan t.

Kuvan perusteella kohtaan t mennessä kuvaajan alle muodostunut alue on kolmio, jonka kanta on t ja korkeus t.



Kolmion pinta-ala on
$A=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t=\frac{1}{2}t^2$.

Täten $K_0(t)=\frac{1}{2}t^2$.

b) Lasketaan määrätty integraali kertymäfunktion avulla.

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}x=K_0(3)=\frac{1}{2}\cdot 3^2=\frac{9}{2}$$

Vastaus a) $K_0(t)=\frac{1}{2}t^2$ b) $\frac{9}{2}$

92

a) $\int_0^5 2x\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_0^5 2 \cdot \frac{1}{2} x^2$

$= \Big/_0^5 x^2$

$= 5^2 - 0^2 = 25$

b) $\int_{-1}^2 3\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_{-1}^2 3x$

$= 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)$

$= 6 + 3 = 9$

c) $\int_1^4 3x^2\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_1^4 3 \cdot \frac{1}{3} x^3$

$= \Big/_1^4 x^3$

$= 4^3 - 1^3 = 64 - 1 = 63$

Vastaus a) 25 b) 9 c) 63

93

a) $\int_{1}^{3}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_{1}^{3}(\frac{1}{4}x^4 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2)$

$= \Big/_{1}^{3}(\frac{1}{4}x^4 + x^2)$

$= \frac{1}{4}\cdot 3^4 + 3^2 - (\frac{1}{4}\cdot 1^4 + 1^2)$

$= \frac{81}{4} + 9 - \frac{1}{4} - 1$

$= \frac{80}{4} + 8$

$= 20 + 8 = 28$

b) $\int_{-2}^{4}(3x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_{-2}^{4}(3\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x)$

$= \Big/_{-2}^{4}(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x)$

$= 4^3 - \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4 - ((-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - 2)$

$= 64 - 8 + 4 - (-8 - 2 - 2)$

$= 60 - (-12) = 72$

Vastaus a) 28 b) 72

94

a) $\int_0^3 x(x-2)\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^3 (x^2-2x)\,\mathrm{d}x$

$=\overset{3}{\underset{0}{/}}(\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2)$

$=\overset{3}{\underset{0}{/}}(\frac{1}{3}x^3-x^2)$

$=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0^2)$

$=\frac{27}{3}-9$

$=9-9$

$=0$

b) $\int\limits_{-1}^{2} (x+1)^2 \,\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_{-1}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x)$

$= \Big/_{-1}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)$

$= \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 - (\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 1)$

$= \frac{8}{3} + 4 + 2 - (-\frac{1}{3} + 1 - 1)$

$= \frac{8}{3} + 4 + 2 + \frac{1}{3}$

$= 3 + 6$

$= 9$

Vastaus a) 0 b) 9

95

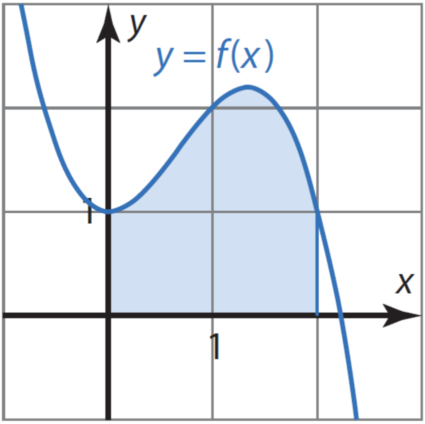
Funktion $f(x) = x^2 + 1$ arvot ovat epänegatiivisia kaikilla muuttujan x arvoilla. Funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[-2, 1]$ rajaaman alueen pinta-ala on yhtä suuri, kuin funktion f määrätty integraali -2:sta 1:een.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!\!-2}^{\,1} \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 2\right) \\
&= \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} - 2\right) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 2 \\
&= 4 + 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Vastaus 6

96

a)



b) $A = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \Big/_0^2 (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x)$

$= -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{2}{3}\cdot 2^3 + 2 - (-\frac{1}{4}\cdot 0^4 + \frac{2}{3}\cdot 0^3 + 0)$

$= -4 + \frac{16}{3} + 2$

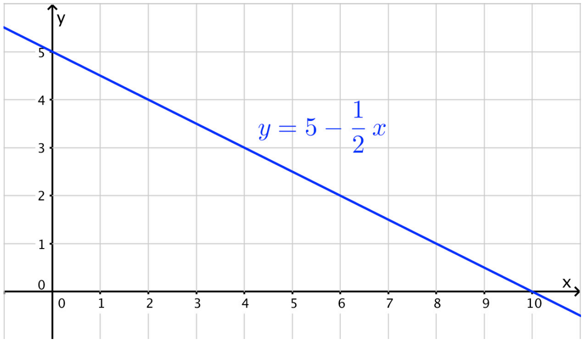
$= -\frac{12}{3} + \frac{16}{3} + \frac{6}{3}$

$= \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Vastaus $3\frac{1}{3}$

97

Funktion $f(x)=5-\frac{1}{2}x$ kuvaaja on suora, joka leikkaa y-akselin kohdassa 5 ja x-akselin kohdassa 10.



Koska funktio f on epänegatiivinen välillä $[3, 5]$, niin kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin funktion f määrätty integraali 3:sta 5:een.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_3^5 (5-\frac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!3}^{\,5} (5x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2) \\
&= \Big/_{\!3}^{\,5} (5x-\frac{1}{4}x^2) \\
&= 5\cdot 5-\frac{1}{4}\cdot 5^4-(5\cdot 3-\frac{1}{4}\cdot 3^2) \\
&= 25-\frac{25}{4}-15+\frac{9}{4}=10-4=6
\end{aligned}
$$

Vastaus 6

98

Lasketaan määrätty integraali.

$$f(x) = \int_2^x (2t^3 - 3t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \Big/_2^x (2 \cdot \frac{1}{4}t^4 - 3 \cdot \frac{1}{3}t^3)$$

$$= \Big/_2^x (\frac{1}{2}t^4 - t^3)$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - (\frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2^3)$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - (8 - 8)$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3$$

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^4 - x^3 = 0$$

$$x^3(\frac{1}{2}x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{1}{2}x - 1 = 0 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Vastaus $x = 0$ tai $x = 2$

99

Lasketaan ensin yhtälön $\int_a^4 (6x^2 - 8x)\mathrm{d}x = 64$ vasemmalla puolella oleva määrätty integraali.

$$\int_a^4 (6x^2 - 8x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_{a}^{4} (6 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 8 \cdot \frac{1}{2}x^2)$$
$$= \Big/_{a}^{4} (2x^3 - 4x^2)$$
$$= 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - (2 \cdot a^3 - 4 \cdot a^2)$$
$$= 128 - 64 - 2a^3 + 4a^2$$
$$= 64 - 2a^3 + 4a^2$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\int_a^4 (6x^2 - 8x)\mathrm{d}x = 64$$
$$64 - 2a^3 + 4a^2 = 64$$
$$-2a^3 + 4a^2 = 0$$
$$-2a^2(a - 2) = 0$$
$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a - 2 = 0$$
$$a = 2$$

Vastaus $a = 0$ tai $a = 2$

100

Funktio on $f(x) = ax + b$. Muodostetaan annetuista ehdoista yhtälöt.

$$\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 30$$
$$\int_1^7 (ax+b)\,\mathrm{d}x = 30$$
$$\Big/_1^7 \left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right) = 30$$
$$\frac{a}{2}\cdot 7^2 + b\cdot 7 - \left(\frac{a}{2}\cdot 1^2 + b\cdot 1\right) = 30$$
$$24a + 6b = 30$$

$$f(1) = -4$$
$$a\cdot 1 + b = -4$$
$$a + b = -4$$

Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan a ja b.

$$\begin{cases} 24a + 6b = 30 \\ a + b = -4 \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \end{cases}$$

Vastaus $a = 3$ ja $b = -7$

101

a) $f(x) = x + 2$

Kertymäfunktiolle $K_1(t)$ pätee, että $K_1{}'(t) = f(t) = t + 2$.

Siis $K_1(t) = \int f(t)\mathrm{d}t = \int (t+2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$.

Koska $K_1(1) = \int_1^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$

ja toisaalta $K_1(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + C = C + \frac{5}{2}$,

niin

$$C + \frac{5}{2} = 0$$
$$C = -\frac{5}{2}.$$

Kertymäfunktioksi saadaan $K_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{5}{2}$.

b) Lasketaan määrätty integraali kertymäfunktion avulla.

$$\int_1^5 (x+2)\,\mathrm{d}x = K_1(5)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5^2 + 2\cdot 5 - \frac{5}{2}$$

$$= 20$$

Vastaus a) $K_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{5}{2}$

b) 20

102

a) $\int_{3}^{6} (x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x$

$= \underset{3}{\overset{6}{/}} (\frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2)$

$= \underset{3}{\overset{6}{/}} (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2)$

$= \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 - (\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2)$

$= \frac{6}{3} \cdot 6^2 - 2 \cdot 36 - (\frac{27}{3} - 2 \cdot 9)$

$= 72 - 72 - 9 + 18$

$= 9$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (2x^3 + 4x^2)\,\mathrm{d}x$

$$= \Big/_{-2}^{1} (2 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 4 \cdot \frac{1}{3} x^3)$$

$$= \Big/_{-2}^{1} (\frac{1}{2} x^4 + \frac{4}{3} x^3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 - (\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 8$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 8 + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Vastaus a) 9 b) $4\frac{1}{2}$

103

a) $\int_1^2 \frac{3x - x^4}{x} \mathrm{d}x$

$= \int_1^2 (3 - x^3) \mathrm{d}x$

$= \overset{2}{\underset{1}{/}} (3x - \frac{1}{4}x^4)$

$= 3 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - (3 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^4)$

$= 6 - 4 - 3 + \frac{1}{4}$

$= -\frac{3}{4}$

b) $$\int_{-3}^{25} \frac{x^2-81}{x+9}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{25} \frac{\overset{1}{\cancel{(x+9)}}(x-9)}{\underset{1}{\cancel{(x+9)}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{25} (x-9)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{-3}^{25} (\frac{1}{2}x^2-9x)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 25^2 - 9\cdot 25 - (\frac{1}{2}\cdot(-3)^2 - 9\cdot(-3))$$

$$= \frac{625}{2} - 225 - \frac{9}{2} - 27$$

$$= \frac{616}{2} - 225 - 27$$

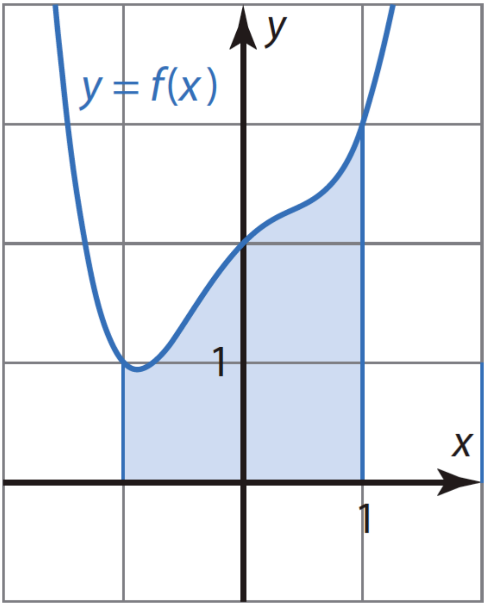
$$= 308 - 252$$

$$= 56$$

Vastaus a) $-\frac{3}{4}$ b) 56

104

a)



b) Funktio $f(x) \geq 0$ välillä $[-1, 1]$, joten kuvaajan ja alueen rajaaman alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin funktion f määrätty integraali -1:stä 1:een.

$$A = \int_{-1}^{1} (x^4 - x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underset{-1}{\overset{1}{/}} (\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 1^5 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - (\frac{1}{5}\cdot(-1)^5 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1))$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - (-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + 4$$

$$= \frac{6}{15} - \frac{10}{15} + 4$$

$$= 4 - \frac{4}{15} = 3\frac{11}{15}$$

Vastaus b) $3\frac{11}{15}$

105

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(\mathrm{e}^{4x^2} - 2) \\ &= \mathrm{e}^{4x^2} \cdot \mathrm{D}(4x^2) - 0 \\ &= 8x\mathrm{e}^{4x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x. □

b) $\int_0^2 8x\mathrm{e}^{4x^2}\,\mathrm{d}x$ F on eräs funktion f integraalifunktio.

$$\begin{aligned} &= \Big/_{\!0}^{2} \mathrm{e}^{4x^2} \\ &= \mathrm{e}^{4\cdot 2^2} - \mathrm{e}^{4\cdot 0^2} \\ &= \mathrm{e}^{16} - \mathrm{e}^{0} \\ &= \mathrm{e}^{16} - 1 \end{aligned}$$

Vastaus b) $\mathrm{e}^{16} - 1$

106

a) $\int_0^2 (\int_1^3 (2x+t)\,dx)\,dt$

Lasketaan ensin sisempi integraali. Integroitava muuttuja on x, jolloin t on vakio.

$$= \int_0^2 (\underset{1}{\overset{3}{/}} (2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + tx)\,dt$$

$$= \int_0^2 (\underset{1}{\overset{3}{/}} (x^2 + tx)\,dt$$

$$= \int_0^2 (3^2 + t \cdot 3 - (1^2 + t \cdot 1))\,dt$$

$$= \int_0^2 (9 + 3t - 1 - t)\,dt$$

$$= \int_0^2 (2t+8)\,dt$$

Lasketaan määrätty integraali. Integroitava muuttuja on t.

$$= \underset{0}{\overset{2}{/}} (2 \cdot \frac{1}{2}t^2 + 8t)$$

$$= \underset{0}{\overset{2}{/}} (t^2 + 8t)$$

$$= (2^2 + 8 \cdot 2) - (0^2 + 8 \cdot 0)$$

$$= 4 + 16$$

$$= 20$$

b) $$\int_0^2 \left(\int_1^3 (2x+t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Lasketaan ensin sisempi integraali. Integroitava muuttuja on t, jolloin x on vakio.

$$= \int_0^2 \left(\Big/_1^3 (2xt + \frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (2x\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 - (2x\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (6x + \frac{9}{2} - 2x - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (4x+4)\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan määrätty integraali. Integroitava muuttuja on x.

$$= \Big/_0^2 (4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x)$$

$$= \Big/_0^2 (2x^2 + 4x)$$

$$= (2\cdot 2^2 + 4\cdot 2) - (2\cdot 0^2 + 4\cdot 0)$$

$$= 8 + 8$$

$$= 16$$

Vastaus a) 20 b) 16

107

Laskettaan ensin yhtälön $\int_a^{a+1}(2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ vasemmalla puolella oleva määrätty integraali.

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+1}(2x+3)\,\mathrm{d}x &= \mathop{/}_{a}^{a+1}\left(2\cdot\frac{1}{2}x^2+3x\right)\\
&= \mathop{/}_{a}^{a+1}(x^2+3x)\\
&= (a+1)^2+3(a+1)-(a^2+3a)\\
&= a^2+2a+1+3a+3-a^2-3a\\
&= 2a+4
\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä a.

$$\int_a^{a+1}(2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
2a+4 &= \frac{1}{2} && \Big| \cdot 2\\
4a+8 &= 1\\
4a &= -7 && \Big| :4\\
a &= -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Vastaus $a = -\frac{7}{4}$

108

a) Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
|x-1| &= 0 \\
x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

b) Selvitetään milloin lausekkeen $x - 1$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$
\begin{aligned}
x-1 &\geq 0 \\
x &\geq 1
\end{aligned}
$$

Ilmaistaan funktion f lauseke ilman itseisarvoja.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x-1| \\
&= \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{kun } x < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

c) $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

Funktion lauseke vaihtuu kohdassa $x = 1$.

$$= \int_0^1 (-x+1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 + x) + \Big/_1^2 (\frac{1}{2}x^2 - x)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 - (-\frac{1}{2}\cdot 0^2 + 0) + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - (\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1$$

$$= 1$$

Vastaus a) $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$

c) 1

109

Ratkaistaan milloin itseisarvon sisällä oleva lauseke $x-a$ on epänegatiivinen.

$$x-a \geq 0$$

$$x \geq a$$

Itseisarvo voidaan kirjoittaa paloittain ilman itseisarvomerkkejä.

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{kun } x \geq a \\ -(x-a), & \text{kun } x < a \end{cases}$$

a) Kun $a < 1$, niin välillä $[1, 2]$ $x > a$. Siis $|x-a| = x-a$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 |x-a| \,\mathrm{d}x &= \int_1^2 (x-a)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - ax\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - a\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - a\cdot 1\right) \\
&= 2 - 2a - \frac{1}{2} + a \\
&= -a + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b) Kun $a > 2$, niin välillä $[1, 2]$ $x < a$. Siis $|x-a| = -(x-a)$.
Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_1^2 |x-a|\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (-(x-a))\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_1^2 (x-a)\,\mathrm{d}x$$

a-kohdassa on laskettu:

$$\int_1^2 (x-a)\,\mathrm{d}x = -a + \frac{3}{2}.$$

$$= -(-a + \frac{3}{2})$$

$$= a - \frac{3}{2}$$

c) Kun $1 < a < 2$, niin integroitava lauseke vaihtuu kohdassa a:

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{kun } x \geq a \\ -(x-a), & \text{kun } x < a. \end{cases}$$

Lasketaan määrätty integraali.

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 |x-a|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^a (-(x-a))\,\mathrm{d}x + \int_a^2 (x-a)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^a (-x+a)\,\mathrm{d}x + \int_a^2 (x-a)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_1^a (-\frac{1}{2}x^2 + ax) + \mathop{/}_a^2 (\frac{1}{2}x^2 - ax) \\
&= (-\frac{1}{2}a^2 + a\cdot a) - (-\frac{1}{2}\cdot 1^2 + a\cdot 1) + (\frac{1}{2}\cdot 2^2 - a\cdot 2) - (\frac{1}{2}a^2 - a\cdot a) \\
&= -\frac{1}{2}a^2 + a^2 + \frac{1}{2} - a + 2 - 2a - \frac{1}{2}a^2 + a^2 \\
&= a^2 - 3a + \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{3}{2} - a$ b) $-\frac{3}{2} + a$ c) $a^2 - 3a + \frac{5}{2}$

110

$$F(x)=\int_0^x \frac{t^2-1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$$

Merkitään $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+3}$. Olkoon funktio G jokin funktion g integraalifunktio. Tällöin

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\\&=\Big/_{\!0}^{\,x} G(t)\\&=G(x)-G(0).\end{aligned}$$

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion F derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}F'(x)&=\mathrm{D}(G(x)-G(0))\\&=g(x)-0\\&=\frac{x^2-1}{x^2+3}\end{aligned}$$

Derivaattafunktio on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla, sillä nimittäjällä ei ole nollakohtia. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

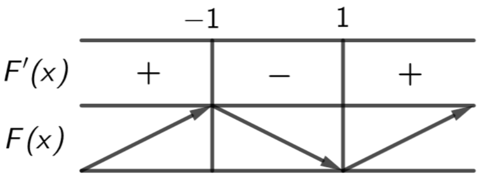
$$\frac{x^2-1}{x^2+3}=0 \qquad \Big| \cdot (x^2+3) \ \color{red}{\neq 0}$$

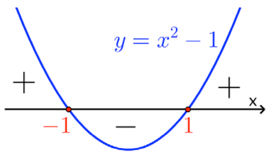
$$x^2-1=0$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \quad \text{tai} \quad x=-1$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio. Derivaattafunktio F' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Koska derivaattafunktion F' nimittäjä on aina positiivinen, niin osoittaja määrää merkin.





Funktion F maksimikohta on $x=-1$ ja minimikohta $x=1$.

Vastaus maksimikohta $x=-1$, minimikohta $x=1$

111

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja k on vakio. Olkoon funktion f integraalifunktio F ja funktion g integraalifunktio G. Tällöin $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = g(x)$.

a) Osoitetaan ensin, että $k \cdot F(x)$ on funktion $k \cdot f(x)$ integraalifunktio.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(k \cdot F(x)) &= k \cdot \mathrm{D}(F(x)) \\ &= k \cdot F'(x) \\ &= k \cdot f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että $k \cdot F(x)$ on funktion $k \cdot f(x)$ integraalifunktio.

Sievennetään yhtälön vasenta puolta.

$$\begin{aligned} \int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathop{/}_a^b k \cdot F(x) \\ &= k \cdot F(b) - k \cdot F(a) \\ &= k \cdot \big(F(b) - F(a)\big) \\ &= k \cdot \mathop{/}_a^b F(x) \\ &= k \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Funktio F on funktion f integraalifunktio.

On osoitettu, että $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ □

b) Osoitetaan ensin, että $F(x)+G(x)$ on funktion $f(x)+g(x)$ integraalifunktio.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(F(x)+G(x)) &= \mathrm{D}(F(x))+\mathrm{D}(G(x)) \\ &= F'(x)+G'(x) \\ &= f(x)+g(x)\end{aligned}$$

On osoitettu, että $F(x)+G(x)$ on funktion $f(x)+g(x)$ integraalifunktio.

Sievennetään yhtälön vasenta puolta.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_a^b (F(x)+G(x))$$

$$= \big(F(b)+G(b)\big)-\big(F(a)+G(a)\big)$$

$$= F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$$

$$= \big(F(b)-F(a)\big)+\big(G(b)-G(a)\big)$$

$$= \Big/_a^b F(x)+\Big/_a^b G(x)$$

F on funktion f integraalifunktio.
G on funktion g integraalifunktio.

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

On osoitettu, että $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ □

112

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja $F_1(x)$ sekä $F_2(x)$ ovat funktion f jotkin integraalifunktiot. Tällöin pätee, että $F_2(x) = F_1(x) + C$, jollakin vakiolla C.

Lasketaan määrätyn integraalin arvo kummallakin integraalifunktiolla.

Käytetään integraalifunktiota $F_1(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!a}^{\,b} F_1(x)$$

$$= F_1(b) - F_1(a)$$

Käytetään integraalifunktiota $F_2(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!a}^{\,b} F_2(x)$$

Sijoitetaan $F_2(x) = F_1(x) + C$

$$= \Big/_{\!a}^{\,b} (F_1(x) + C)$$

$$= F_1(b) + C - (F_1(a) + C)$$

$$= F_1(b) + C - F_1(a) - C$$

$$= F_1(b) - F_1(a)$$

On osoitettu, että määrätyn integraalin arvo on sama kumpaakin integraalifunktiota käyttäen. Siis määrätyn integraalin arvo ei riipu siitä, mitä integraalifunktiota käytetään. □

113

Integraalilaskennan väliarvolause:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a) \text{ jollakin } a \le c \le b.$$

a) Olkoon $f(x) = 2x + 3$.

Lasketaan määrätty integraali -1:stä 7:ään.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{7} (2x+3)\,\mathrm{d}x &= \Big/_{\!\!-1}^{7} (x^2+3x) \\ &= (7^2+3\cdot 7)-((-1)^2+3\cdot(-1)) \\ &= 49+21-1+3 \\ &= 72\end{aligned}$$

Ratkaistaan millä c:n arvolla väliarvolauseen mukainen yhtälö toteutuu.

$$\int_{-1}^{7} (2x+3)\,\mathrm{d}x = f(c)(7-(-1))$$

$$\begin{aligned}72 &= (2c+3)\cdot 8 \qquad \Big|:8 \\ 2c+3 &= 9 \\ 2c &= 6 \\ c &= 3\end{aligned}$$

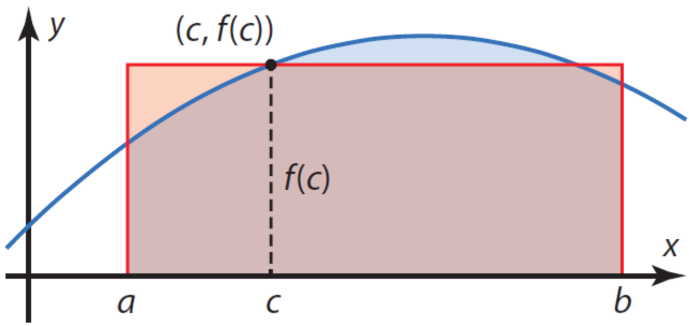
Väliarvo lause toteutuu, kun $c = 3$. Tämä arvo kuuluu välille $[-1, 7]$.

b) Kun $f(x) > 0$ välillä $[a, b]$, niin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala.

Lauseke $f(c)\cdot(b-a)$ ilmaisee sellaisen suorakulmion pinta-alan, jonka sivun pituudet ovat $f(c)$ ja $(b-a)$.

Integraalilaskennan väliarvolauseen geometrinen tulkinta positiivisen funktion tapauksessa on seuraava:

Ainakin yhdessä välin $[a, b]$ kohdassa c funktio f saa sellaisen arvon, että kuvassa olevan punaisen suorakulmion pinta-ala $f(c)\cdot(b-a)$ on yhtä suuri kuin funktion kuvaajan ja x-akselin tällä välillä rajaaman alueen pinta-ala.



c) Olkoon $f(x) = 3x^2$.

Lasketaan määrätty integraali –2:sta 4:ään.

$$\int_{-2}^{4} 3x^2 \, dx = \Big/_{\!\!-2}^{4} x^3$$
$$= 4^3 - (-2)^3$$
$$= 64 + 8$$
$$= 72$$

Ratkaistaan väliarvolauseen mukaisen yhtälöstä $f(c)$.

$$\int_{-2}^{4} 3x^2 \, dx = f(c)(4 - (-2))$$
$$72 = f(c) \cdot 6$$
$$f(c) = 12$$

Funktion $f(x) = 3x^2$ keskiarvo välillä [–2, 4] on 12.

Vastaus a) $c = 3$ c) 12