50

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$F(x) = 3x^2 - 5x + 13$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 6x - 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

51

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = (2x-3)^2$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}((2x-3)^2) \\ &= 2(2x-3)^1 \cdot \mathrm{D}(2x-3) \\ &= 2(2x-3)\cdot 2 \\ &= 4(2x-3) \\ &= 8x-12 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$, kun $x > 0$.

$$F(x) = \ln x - \sin x + 7$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(\ln x - \sin x + 7) \\ &= \mathrm{D}\ln x - \mathrm{D}\sin x + \mathrm{D}7 \\ &= \frac{1}{x} - \cos x + 0 \\ &= \frac{1}{x} - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

52

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

a) $F(x) = \sin 2x + \cos 3x + 4$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(\sin 2x + \cos 3x + 4) \\ &= \cos 2x \cdot 2 - \sin 3x \cdot 3 + 0 \\ &= 2\cos 2x - 3\sin 3x \\ &\neq f(x), \end{aligned}$$

sillä esimerkiksi $F'(\pi) = 2$ ja $f(\pi) = -2 \neq F'(\pi)$.

b) $F(x) = \sin^2 x + \cos^3 x + 9$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(\sin^2 x + \cos^3 x + 9) \\ &= \mathrm{D}((\sin x)^2) + \mathrm{D}((\cos x)^3) + \mathrm{D}9 \\ &= 2(\sin x)^1 \cdot \cos x + 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x) + 0 \\ &= 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x \sin x \\ &\neq f(x), \end{aligned}$$

sillä esimerkiksi $F'(\pi) = 0$ ja $f(\pi) = -2 \neq F'(\pi)$.

c) $F(x) = 2\sin x + 3\cos x + 5$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(2\sin x + 3\cos x + 5) \\ &= 2\cos x + 3(-\sin x) + 0 \\ &= 2\cos x - 3\sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus a) ei

b) ei

c) on

53

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

a) $F(x) = 16x^2 - 16x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(16x^2 - 16x) \\ &= 16 \cdot 2x - 16 \cdot 1 \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $F(x) = (4x-2)^2$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}((4x-2)^2) \\ &= 2(4x-2)^1 \cdot \mathrm{D}(4x-2) \\ &= 2(4x-2) \cdot 4 \\ &= 8(4x-2) \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

c) $F(x) = (2x-4)^2 + 12x^2$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}((2x-4)^2 + 12x^2) \\ &= 2(2x-4)^1 \cdot \mathrm{D}(2x-4) + 12 \cdot 2x \\ &= 2(2x-4) \cdot 2 + 24x \\ &= 4(2x-4) + 24x \\ &= 8x - 16 + 24x \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus Kaikki annetut funktiot ovat funktion f integraalifunktioita.

54

Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(3x^4 - 2x^2 + 2x) \\ &= 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \\ &= 12x^3 - 4x + 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus Esimerkiksi $F_0(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2x$.

55

a) Olkoon funktio $f(x) = 34x^{33}$.
Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = x^{34}$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(x^{34}) \\ &= 34x^{33} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Siis $\int 34x^{33}\,\mathrm{d}x = x^{34} + C$.

b) Olkoon funktio $f(x) = 6$.
Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = 6x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(6x) \\ &= 6 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Siis $\int 6\,\mathrm{d}x = 6x + C$.

Vastaus a) $x^{34} + C$

b) $6x + C$

56

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = x^4 + 5x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(x^4 + 5x) \\ &= 4x^3 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (4x^3 + 5)\,\mathrm{d}x \\ &= F_0(x) + C \\ &= x^4 + 5x + C \end{aligned}$$

c) Integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(-2, 14)$ kautta, kun $F(-2) = 14$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C.

$$\begin{aligned} F(-2) &= 14 \\ (-2)^4 + 5\cdot(-2) + C &= 14 \\ 16 - 10 + C &= 14 \\ 6 + C &= 14 \\ C &= 8 \end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = x^4 + 5x + 8$.

Vastaus a) Esimerkiksi $F_0(x) = x^4 + 5x$

b) $F(x) = x^4 + 5x + C$

c) $F(x) = x^4 + 5x + 8$

57

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = 6\sin x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(6\sin x) \\ &= 6\cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (6\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= F_0(x) + C \\ &= 6\sin x + C \end{aligned}$$

Funktion $\sin x$ arvojoukko on $[-1, 1]$, joten integraalifunktio F saa suurimman arvonsa, kun funktio $\sin x$ saa arvon 1.

$$\begin{aligned} 6\sin x + C &= 7 \\ 6\cdot 1 + C &= 7 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = 6\sin x + 1$.

Vastaus a) Esimerkiksi $F_0(x) = 6\sin x$

b) $F(x) = 6\sin x + 1$

58

a) Näytetään, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$, kun $x > 1$.

$$F_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \mathrm{D}((1-x)^{-1}) \\ &= -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot \mathrm{D}(1-x) \\ &= -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$F_2(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{D}x \cdot (1-x) - x \cdot \mathrm{D}(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Sievennetään erotus

$$F_1(x) - F_2(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1 \text{, kaikilla } x > 1.$$

c) Muokkaamalla b-kohdan ratkaisua, saadaan

$$F_1(x) - F_2(x) = 1$$
$$F_1(x) = F_2(x) + 1$$

Vastaus a) Näytettiin, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$.

b) $F_1(x) - F_2(x) = 1$, kaikilla $x > 1$.

c) $F_1(x) = F_2(x) + 1$

59

Näytetään, että jos $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$, niin $F'(x)=f(x)$.

1) $F(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sin x\cdot \cos x+0\\&=\sin x\cos x\\&=f(x)\end{aligned}$$

2) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$

$$\begin{aligned}F'(x)&=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \cos x\cdot (-\sin x)+0\\&=\cos x\sin x\\&=\sin x\cos x\\&=f(x)\end{aligned}$$

3) $F(x)=\sin x\cos x+C$

$$\begin{aligned}F'(x)&=\mathrm{D}(\sin x)\cdot \cos x+\sin x\cdot \mathrm{D}(\cos x)+0\\&=\cos x\cdot \cos x+\sin x\cdot(-\sin x)\\&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=\cos 2x\\&=f(x)\end{aligned}$$

Vastaus Kaikki ovat oikein.

60

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{(6x-8)^2}{4} = \frac{1}{4}(6x-8)^2$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{4}(6x-8)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(6x-8)^1\cdot \mathrm{D}(6x-8) \\ &= \frac{1}{2}(6x-8)\cdot 6 \\ &= 3(6x-8) \\ &= 18x-24 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$F(x) = \ln x + \cos x^3$, $x > 1$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(\ln x + \cos x^3) \\ &= \mathrm{D}\ln x + \mathrm{D}(\cos x^3) \\ &= \frac{1}{x} + (-\sin x^3)\cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{x} - 3x^2 \sin x^3 \\ &= \frac{1}{x} - \frac{3x^3 \sin x^3}{x} \\ &= \frac{1-3x^3\sin x^3}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

61

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \mathrm{e}^{2x}(2-x)^4$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \mathrm{D}(\mathrm{e}^{2x}) \cdot (2-x)^4 + \mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{D}((2-x)^4) \\
&= \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \cdot (2-x)^4 + \mathrm{e}^{2x} \cdot 4(2-x)^3 \cdot \mathrm{D}(2-x) \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}(2-x)^4 - 4\mathrm{e}^{2x}(2-x)^3 \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}((2-x)^4 - 2(2-x)^3) \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}((-1)^4(x-2)^4 - 2(-1)^3(x-2)^3) \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}((x-2)^4 + 2(x-2)^3) \\
&= 2\mathrm{e}^{2x}(x-2)^3((x-2)+2) \\
&= 2x \cdot \mathrm{e}^{2x}(x-2)^3 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{3x+4}{x-1}, \ x > 1$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{3x+4}{x-1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{D}(3x+4)\cdot(x-1)-(3x+4)\cdot\mathrm{D}(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3\cdot(x-1)-(3x+4)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x-3-3x-4}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{7}{(x-1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että $F'(x) = f(x)$, joten funktio F on funktion f integraalifunktio.

62

a) Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = x - 4\sqrt{x} + 9$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(x - 4x^{\frac{1}{2}} + 9) \\ &= 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 0 \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{D}\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}\cdot\mathrm{D}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \\
&\neq f(x)
\end{aligned}$$

c) Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \\ &= 2\left(\sqrt{x} - 2\right)^1 \cdot \mathrm{D}\left(\sqrt{x} - 2\right) \\ &= 2\left(\sqrt{x} - 2\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vastaus a) on

b) ei

c) on

63

a) $F(x) = x\ln x + 5$, $x > 0$ ja $f(x) = 1 + \ln x$, $x > 0$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}(x\ln x + 5) \\ &= \mathrm{D}x \cdot \ln x + x \cdot \mathrm{D}(\ln x) + 0 \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1 \\ &= 1 + \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $G(x) = 2x\ln x + 5$, $x > 0$ ja
$g(x) = 2 + \ln x^2$, $x \neq 0$.

$G(x)$ ei ole funktion $g(x)$ integraalifunktio, sillä funktioilla on eri määrittelyjoukko. $G(x)$ on määritelty, kun $x > 0$, mutta $g(x)$ silloin, kun $x \neq 0$.

Vastaus a) Osoitettu, että $F'(x) = f(x)$.

b) Ei ole, sillä funktioilla on eri määrittelyjoukko.

64

a) $F(x) = 18\int x^{17}\,\mathrm{d}x = x^{18} + C$, sillä $F'(x) = 18x^{17}$.

b) $F(x) = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$, sillä $F'(x) = \mathrm{e}^{x}$.

c) $F(x) = \int 6\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{6x} + C$, sillä $F'(x) = 6\mathrm{e}^{6x}$.

Vastaus a) $x^{18} + C$

b) $\mathrm{e}^{x} + C$

c) $\mathrm{e}^{6x} + C$

65

a) Osoitetaan, että $F_0'(x) = f(x)$.

$F_0(x) = \frac{3}{2}\ln(4-2x)$, missä $x < 2$

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4-2x}\cdot \mathrm{D}(4-2x) \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(-1)\cdot(2x-4)}\cdot(-2) \\ &= \frac{3}{2x-4} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $F(x) = \frac{3}{2}\ln(4-2x) + C$

c) Integraalifunktion kuvaaja kulkee origon $(0, 0)$ kautta, joten

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ \frac{3}{2}\ln(4-2\cdot 0) + C &= 0 \\ \frac{3}{2}\ln 4 + C &= 0 \\ C &= -\frac{3}{2}\ln 4 \end{aligned}$$

Siis $F(x) = \frac{3}{2}\ln(4-2x) - \frac{3}{2}\ln 4$.

Vastaus a) Osoitettiin, että $F_0'(x) = f(x)$.

b) $F(x) = \frac{3}{2}\ln(4-2x) + C$

c) $F(x) = \frac{3}{2}\ln(4-2x) - \frac{3}{2}\ln 4$

66

a) Integrointi suoritetaan muuttujan x suhteen. Merkitään $f(x) = tx^3 - 4t^3x$, jolloin x on muuttuja ja t on vakio.

Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = \frac{1}{4}tx^4 - 2t^3x^2$, sillä

$$\begin{aligned}F_0'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{4}tx^4 - 2t^3x^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot t\cdot 4x^3 - 2t^3\cdot 2x\\ &= tx^3 - 4t^3x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Siis $F(x) = \int (tx^3 - 4t^3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}tx^4 - 2t^3x^2 + C$.

b) Integrointi suoritetaan muuttujan t suhteen. Merkitään $g(t) = tx^3 - 4t^3x$, jolloin t on muuttuja ja x on vakio.

Funktion g eräs integraalifunktio on $G_0(t) = \frac{1}{2}x^3t^2 - xt^4$, sillä

$$\begin{aligned}G_0'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^3t^2 - xt^4\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot 2t - x\cdot 4t^3\\ &= tx^3 - 4t^3x\\ &= g(x)\end{aligned}$$

Siis $G(t) = \int (tx^3 - 4t^3x)\,\mathrm{dt}$

$$= \frac{1}{2}x^3t^2 - xt^4 + C$$

$$= \frac{1}{2}t^2x^3 - t^4x + C.$$

Vastaus a) $\frac{1}{4}tx^4 - 2t^3x^2 + C$

b) $\frac{1}{2}t^2x^3 - t^4x + C$

67

a) Osoitetaan, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$.

$$F_1(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

$$\begin{aligned}
F_1'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{x^2+3}\right) \\
&= \mathrm{D}((x^2+3)^{-1}) \\
&= -1 \cdot (x^2+3)^{-2} \cdot \mathrm{D}(x^2+3) \\
&= -\frac{1}{(x^2+3)^2} \cdot 2x \\
&= \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$F_2(x) = \frac{5x^2+16}{x^2+3}$$

$$\begin{aligned}
F_2'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{5x^2+16}{x^2+3}\right) \\
&= \frac{\mathrm{D}(5x^2+16)\cdot(x^2+3)-(5x^2+16)\cdot\mathrm{D}(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{10x\cdot(x^2+3)-(5x^2+16)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{10x^3+30x-10x^3-32x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Sievennetään erotus

$$\begin{aligned}
F_2(x)-F_1(x) &= \frac{5x^2+16}{x^2+3}-\frac{1}{x^2+3} \\
&= \frac{5x^2+15}{x^2+3} \\
&= \frac{5(x^2+3)}{x^2+3} \\
&= 5
\end{aligned}$$

c) Muokkaamalla b-kohdan ratkaisua, saadaan

$$F_2(x) - F_1(x) = 5$$
$$F_2(x) = F_1(x) + 5$$

Vastaus a) Näytettiin, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$.

b) $F_2(x) - F_1(x) = 5$ kaikilla x.

c) $F_2(x) = F_1(x) + 5$

68

a) Funktio $g(x)=\ln(x^2+3x+5)$ on määritelty, kun $x^2+3x+5>0$. Tutkitaan funktion $f(x)=x^2+3x+5$ nollakohtien lukumäärää diskriminantin avulla.

$$x^2+3x+5=0$$
$$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot 1\cdot 5=9-20=-11$$

Koska $D<0$, ei funktiolla f ole nollakohtia. Lisäksi funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten f sijaitsee x-akselin yläpuolella ja saa vain positiivisia arvoja kaikilla muuttujan x arvoilla.

Siis funktion $g(x)$ määrittelyjoukko on **R**.

b) Derivoidaan funktio $g(x)=\ln(x^2+3x+5)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2+3x+5}\cdot \mathrm{D}(x^2+3x+5) \\ &= \frac{2x+3}{x^2+3x+5} \end{aligned}$$

c) Lasketaan integraali b-kohdan avulla

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x=\ln(x^2+3x+5)+C$$

Vastaus a) $\mathbf{R}$

b) $g'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+5}$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+3x+5)+C$

69

Funktio f on kaikkialla jatkuva ja aidosti kasvava ja lisäksi funktiolla on erimerkkiset arvot $f(1) = -13 < 0$ ja $f(134) = 8 > 0$. Täten funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta. Merkitään nollakohtaa x_0.

Jos $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, niin $F'(x) = f(x)$. Täten siis integraalifunktion ääriarvoja voidaan tarkastella sen derivaatan eli funktion f arvojen merkin avulla.

Koska funktio f on aidosti kasvava, saa se ennen nollakohtaa x_0 negatiivisia arvoja ja sen jälkeen positiivisia arvoja.

Siis integraalifunktion arvot pienenevät ennen nollakohtaa x_0 ja kasvavat sen jälkeen. Tällöin integraalifunktio $F(x)$ saa pienimmän arvonsa kohdassa x_0.

Vastaus On osoitettu, että funktiolla F on pienin arvo.

70

Lause: Olkoon F_0 jokin funktion f integraalifunktio. Tällöin funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun $F(x) = F_0(x) + C$.

Pitää siis osoittaa, että

1) jokainen muotoa $F(x) = F_0(x) + C$ oleva funktio on funktion f integraalifunktio.

2) jokainen funktion f integraalifunktio on muotoa $F(x) = F_0(x) + C$.

Todistus:

1) Koska F_0 on funktion jokin f integraalifunktio, niin $F_0'(x) = f(x)$. Silloin

$$\mathrm{D}(F_0(x) + C) = \mathrm{D}F_0(x) + \mathrm{D}(C) = F_0'(x) + 0 = F_0'(x) = f(x)$$

2) Tarkastellaan erotusfunktiota $h = F(x) - F_0(x)$. Koska $\mathrm{D}(F(x) - F_0(x)) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$, niin $F(x) - F_0(x)$ on vakiofunktio. Merkitsemällä tätä vakiota kirjaimella C saadaan

$$F(x) - F_0(x) = C$$
$$F(x) = F_0(x) + C$$

Vastaus Lause on osoitettu todeksi.

71

a) $\int x^9 \, dx$

$= \frac{1}{9+1} x^{9+1} + C$

$= \frac{1}{10} x^{10} + C$

b) $\int 16x^7 \, dx$

$= 16 \int x^7 \, dx$

$= 16 \cdot \frac{1}{8} x^8 + C$

$= 2x^8 + C$

c) $\int 3x^5 \, dx$

$= 3 \cdot \frac{1}{6} x^6 + C$

$= \frac{1}{2} x^6 + C$

Vastaus a) $\frac{1}{10} x^{10} + C$

b) $2x^8 + C$

c) $\frac{1}{2} x^6 + C$

72

a) $\int \frac{x^5}{3}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\int x^5\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}x^6 + C$

$= \frac{1}{18}x^6 + C$

b) $\int 4\,\mathrm{d}x$

$= 4x + C$

c) $\int (\frac{3x}{2} + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \int (\frac{3}{2}x + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C$

$= \frac{3}{4}x^2 + x + C$

Vastaus a) $\frac{1}{18}x^6 + C$

b) $4x + C$

c) $\frac{3}{4}x^2 + x + C$

73

a) $f(x) = x^3 + 2x - 3$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x^3 + 2x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}x^4 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 3x + C \\ &= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

b) $f(x) = 5x^9 - 15x^4 + 6$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (5x^9 - 15x^4 + 6)\,\mathrm{d}x \\ &= 5\cdot\frac{1}{10}x^{10} - 15\cdot\frac{1}{5}x^5 + 6x + C \\ &= \frac{1}{2}x^{10} - 3x^5 + 6x + C \end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 3x + C$

b) $\frac{1}{2}x^{10} - 3x^5 + 6x + C$

74

a) $\int (1+2x)^2 \,\mathrm{d}x$

$= \int (1^2 + 2\cdot 1\cdot 2x + (2x)^2)\,\mathrm{d}x$

$= \int (1 + 4x + 4x^2)\,\mathrm{d}x$

$= \int (4x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{d}x$

$= 4\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C$

$= \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

b) $\int \frac{(2x-4)^2}{2}\,\mathrm{d}x$

$= \int (\frac{1}{2}((2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot(-4) + (-4)^2))\,\mathrm{d}x$

$= \int (\frac{1}{2}(4x^2 - 16x + 16)\,\mathrm{d}x$

$= \int (2x^2 - 8x + 8)\,\mathrm{d}x$

$= 2\cdot\frac{1}{3}x^3 - 8\cdot\frac{1}{2}x^2 + 8x + C$

$= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x + C$

Vastaus a) $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

b) $\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x + C$

75

a) $\int (x-2)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

b) $\int (x-2)(x-4)\,\mathrm{d}x$

$= \int (x^2 - 4x - 2x + 8)\,\mathrm{d}x$

$= \int (x^2 - 6x + 8)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + 8x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + C$

c) $\int (x-2)^2\,\mathrm{d}x$

$= \int (x^2 + 2\cdot x\cdot(-2) + (-2)^2)\,\mathrm{d}x$

$= \int (x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3 - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$

Vastaus a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

b) $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + C$

c) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$

76

a) $\int \frac{3x^2}{8} \mathrm{d}x$

$= \frac{3}{8} \int x^2 \, \mathrm{d}x$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$

$= \frac{1}{8} x^3 + C$

b) $\int (\frac{x^3}{5} - \frac{2x}{5} + \frac{1}{5}) \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{5} \int (x^3 - 2x + 1) \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{5} (\frac{1}{4} x^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + x) + C$

$= \frac{1}{20} x^4 - \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{5} x + C$

c) $\int (8x^4 + \pi)\,\mathrm{d}x + 8\int (\pi - x^4)\,\mathrm{d}x$

$= \int 8x^4\,\mathrm{d}x + \int \pi\,\mathrm{d}x + 8\int \pi\,\mathrm{d}x - 8\int x^4\,\mathrm{d}x$

$= \int 8x^4\,\mathrm{d}x + \int \pi\,\mathrm{d}x + 8\int \pi\,\mathrm{d}x - \int 8x^4\,\mathrm{d}x$

$= \int \pi\,\mathrm{d}x + 8\int \pi\,\mathrm{d}x$

$= 9\int \pi\,\mathrm{d}x$

$= 9\pi x + C$

Vastaus

a) $\frac{1}{8}x^3 + C$

b) $\frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + C$

c) $9\pi x + C$

77

a) $\int(5x^7-9x-3)\,\mathrm{d}x+\int(-5x^7-7x+3)\,\mathrm{d}x$

$=\int(5x^7-9x-3-5x^7-7x+3)\,\mathrm{d}x$

$=\int -16x\,\mathrm{d}x$

$=-16\cdot\frac{1}{2}x^2+C$

$=-8x^2+C$

b) $\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x-\int(x+1)^2\,\mathrm{d}x$

$=\int(x^2-2x+1-(x^2+2x+1))\,\mathrm{d}x$

$=\int(x^2-2x+1-x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x$

$=\int(-4x)\,\mathrm{d}x$

$=-4\cdot\frac{1}{2}x^2+C$

$=-2x^2+C$

Vastaus a) $-8x^2+C$

b) $-2x^2+C$

78

Funktion $f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{2}$ integraalifunktiot ovat muotoa

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{3x^2-4x}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int(3x^2-4x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2)+C\\&=\frac{1}{2}(x^3-2x^2)+C\\&=\frac{1}{2}x^3-x^2+C\end{aligned}$$

Integraalifunktioista origon $(0,0)$ kautta kulkee se, jolle

$$\begin{aligned}F(0)&=0\\\frac{1}{2}\cdot 0^2-0^2+C&=0\\C&=0\end{aligned}$$

Siis kysytty integraalifunktio on $F(x)=\dfrac{1}{2}x^3-x^2$.

Vastaus $F(x)=\dfrac{1}{2}x^3-x^2$

79

a) $f''(x) = 2x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + C \\ &= x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x^2 + x + C)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D \end{aligned}$$

b) Funktio on $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$. Ratkaistaan vakiot C ja D annettujen tietojen perusteella.

Funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta, joten

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C \cdot 0 + D &= 2 \\ D &= 2 \end{aligned}$$

Funktion f derivaattafunktiolla on nollakohta $x = 1$ eli

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ 1^2 + 1 + C &= 0 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

Siis kysytty funktio on $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

Vastaus a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

80

a) Esimerkissä 3 sivulla 48 on auton nopeudelle määritetty lauseke $v(t) = at + v_0$

Koska $x'(t) = v(t)$, niin

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t \\ &= a \cdot \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + C \\ &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C \end{aligned}$$

Ratkaistaan integroimisvakio C alkutietojen perusteella.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C &= x_0 \\ C &= x_0 \end{aligned}$$

Auton paikan lauseke on siis $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

b) Ajan mittaus aloitetaan hetkellä $t=0$, jolloin alkaa myös jarrutusmatkan mittaus eli $x_0=0$. Nopeus jarrutuksen aloitushetkellä on $v_0=18$ m/s. Matka, jonka auto kulkee jarrutuksen aikana on sama, kuin auton paikka hetkellä 2,6 s.

$$x(2,6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-18}{2,6}\cdot 2,6^2+18\cdot 2,6+0=23,4\approx 23\ \text{(m)}$$

Vastaus a) $x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

b) 23 m

81

a) $\int 2x^5 \, dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{6} x^6 + C$

$= \frac{1}{3} x^6 + C$

b) $\int \frac{2x^3}{5} \, dx$

$= \frac{2}{5} \int x^3 \, dx$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} x^4 + C$

$= \frac{1}{10} x^4 + C$

c) $\int 12 \, dx$

$= 12x + C$

Vastaus a) $\frac{1}{3} x^6 + C$

b) $\frac{1}{10} x^4 + C$

c) $12x + C$

82

a) $\int (9x^2 - 3x + 6)\,\mathrm{d}x$

$= 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 6x + C$

$= 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + C$

b) $\int \frac{2x^2 - 4x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \mid x < 0$

$= \int (\frac{2x^2}{x} - \frac{4x}{x})\,\mathrm{d}x$

$= \int (2x - 4)\,\mathrm{d}x$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

$= x^2 - 4x + C$

Vastaus a) $3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + C$

b) $x^2 - 4x + C$

83

a) $\int (3x^5 + x + 6)\,\mathrm{d}x + \int (-3x^5 + x - 6)\,\mathrm{d}x$

$= \int (3x^5 + x + 6 - 3x^5 + x - 6)\,\mathrm{d}x$

$= \int 2x\,\mathrm{d}x$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

$= x^2 + C$

b) $\int (5x-2)^2\,\mathrm{d}x - \int (5x+2)^2\,\mathrm{d}x$

$= \int (25x^2 - 20x + 4 - (25x^2 + 20x + 4))\,\mathrm{d}x$

$= \int (25x^2 - 20x + 4 - 25x^2 - 20x - 4)\,\mathrm{d}x$

$= \int -40x\,\mathrm{d}x$

$= -40 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

$= -20x^2 + C$

c) $\int (x^2 + 2x)^2\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x$

$= \int (x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x$

$= \int (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$

Vastaus

a) $x^2 + C$

b) $-20x^2 + C$

c) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$

84

a) $\int (4x^3 + 3x)\,\mathrm{d}x$

$= 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$

$= x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $\int (4t^3 + 3t)\,\mathrm{d}t$

$= 4 \cdot \frac{1}{4}t^4 + 3 \cdot \frac{1}{2}t^2 + C$

$= t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C$

c) $\int (4t^3 + 3t)\,\mathrm{d}x$

$= 4t^3x + 3tx + C$

Vastaus a) $x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C$

c) $4t^3x + 3tx + C$

85

a) $\int \frac{(x^2-9)}{x+3}\,\mathrm{d}x \qquad \mid x > -3$

$= \int \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\,\mathrm{d}x$

$= \int (x-3)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

b) $\int \frac{(2x^2-5x-7)}{x+1}\,\mathrm{d}x,\ x < -1$

Jaetaan osoittaja laskimen avulla tekijöihin ennen integraalin laskemista.

$\int \frac{(2x^2-5x-7)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{(x+1)(2x-7)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

$= \int (2x-7)\,\mathrm{d}x$

$= 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 7x + C$

$= x^2 - 7x + C$

Vastaus a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

b) $x^2 - 7x + C$

86

Funktion $f(x) = ax^3 - 2x + a$ integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (ax^3 - 2x + a)\,\mathrm{d}x \\ &= a \cdot \frac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + ax + C \\ &= \frac{a}{4}x^4 - x^2 + ax + C \end{aligned}$$

Integroimisvakio C saadaan selville ehdosta

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ \frac{a}{4} \cdot 0^4 - 0^2 + a \cdot 0 + C &= 2 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Tällöin $F(x) = \frac{a}{4}x^4 - x^2 + ax + 2$.

Vakion a arvo saadaan selville ehdosta

$$F(2)=6$$

$$\frac{a}{4}\cdot 2^4-2^2+a\cdot 2+2=6$$

$$\frac{a}{4}\cdot 16-4+2a+2=6$$

$$4a-4+2a+2=6$$

$$6a-2=6$$

$$6a=8$$

$$a=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}x^4-x^2+\frac{4}{3}x+2$$

$$=\frac{1}{3}x^4-x^2+\frac{4}{3}x+2$$

Vastaus $\quad a=\frac{4}{3},\quad F(x)=\frac{1}{3}x^4-x^2+\frac{4}{3}x+2$

87

Funktion $f(x) = -3x^2 - x + 2$ integraalifunktiot ovat

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (-3x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= -3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C \\
&= -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C
\end{aligned}
$$

Integraalifunktion ääriarvoja voidaan tarkastella funktion f avulla, koska $F'(x) = f(x)$.

Määritetään derivaatan F' nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= 0 \\
f(x) &= 0 \\
-3x^2 - x + 2 &= 0 \\
x = -1 \quad \text{tai} \quad x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolloin nollakohtien välissä se saa positiivisia arvoja. Laaditaan kulkukaavio:

		-1		$\frac{2}{3}$	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		min		*max*	

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla $F(x)$ on minimikohta $x=-1$, jossa minimiarvo on 3, joten

$$\begin{aligned}
F(-1) &= 3 \\
-(-1)^3-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+C &= 3 \\
1-\frac{1}{2}-2+C &= 3 \\
-\frac{3}{2}+C &= 3 \\
C &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Siis kysytty integraalifunktio on $F(x)=-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{9}{2}$.

Vastaus $\quad F(x)=-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{9}{2}$

88

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -6x+2 \\
f'(x) &= \int f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (-6x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= -6\cdot\frac{1}{2}x^2+2x+C \\
&= -3x^2+2x+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (-3x^2+2x+C)\,\mathrm{d}x \\
&= -3\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2+Cx+D \\
&= -x^3+x^2+Cx+D
\end{aligned}
$$

Funktio on $f(x)=-x^3+x^2+Cx+D$.
Ratkaistaan vakiot C ja D annettujen tietojen perusteella.

Funktion f kuvaaja kulkee pisteiden $(0,3)$ ja $(2,1)$ kautta, joten

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 3 \\
-0^3+0^2+C\cdot 0+D &= 3 \\
D &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 1 \\
-2^3 + 2^2 + C \cdot 2 + 3 &= 1 \\
-8 + 4 + 2C + 3 &= 1 \\
2C - 1 &= 1 \\
2C &= 2 \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

Siis kysytty funktio on $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$.

Vastaus $\quad f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

89

$$f''(x) = 3x - 5$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (3x-5)\,\mathrm{d}x \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 5x + C \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 5x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int (\frac{3}{2}x^2 - 5x + C)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 + Cx + D \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + Cx + D \end{aligned}$$

Funktio on $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + Cx + D$.

Ratkaistaan vakiot C ja D annettujen tietojen perusteella.

Pisteeseen $(1,1)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on yhtä kuin funktion derivaattafunktion arvo kohdassa $x=1$, joten

$$f'(1)=-2$$

$$\frac{3}{2}\cdot 1^2-5\cdot 1+C=-2$$

$$C=-2-\frac{3}{2}+5$$

$$C=\frac{3}{2}$$

Funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(1,1)$ kautta, joten

$$f(1)=1$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1^3-\frac{5}{2}\cdot 1^2+\frac{3}{2}\cdot 1+D=1$$

$$-\frac{1}{2}+D=1$$

$$D=\frac{3}{2}$$

Siis kysytty funktio on $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$.

Vastaus $\quad f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

90

a) Koska $p(t) = m \cdot v(t)$, niin

$$\begin{aligned} p'(t) &= \mathrm{D}(m \cdot v(t)) \\ &= m \cdot \mathrm{D}(v(t)) \\ &= m \cdot v'(t) \\ &= m \cdot a(t) \end{aligned}$$

Siis yhtälö $F(t) = p'(t)$ on yhtäpitävä dynamiikan peruslain $F = ma$ kanssa, kun kappaleen massa on vakio.

b) Kappaletta kiihdyttävä voima on vakio, jolloin $F(t) = F$.
Koska $F = p'$, saadaan liikemäärälle lauseke

$$\begin{aligned} p(t) &= \int F \, \mathrm{d}t \\ &= Ft + C \end{aligned}$$

Hetkellä $t = 0$ liikemäärä on p_0.

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ F \cdot 0 + C &= p_0 \\ C &= p_0 \end{aligned}$$

Lauseke liikemäärälle on siis $p(t) = Ft + p_0$.

c) Liikemäärän muutos saadaan b-kohdan liikemäärän lausekkeesta, kun satelliittia kiihdytettiin levosta eli $p_0 = 0$ ja $v_0 = 0$.

$$\begin{aligned} p(t) &= Ft + p_0 \\ &= Ft + 0 \\ &= Ft \end{aligned}$$

$$p(6,0) = 40,0\,\mathrm{N} \cdot 6,0\,\mathrm{s} = 240\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Satelliitin nopeus hetkellä t saadaan,

$$\begin{aligned} p(t) &= Ft \\ mv(t) &= Ft \\ v(t) &= \frac{Ft}{m} \\ v(6,0) &= \frac{240\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{25,0\,\mathrm{kg}} = 9,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Vastaus a) Osoitettu, että yhtälö on $p'(t) = ma(t)$.

b) $p(t) = Ft + p_0$

c) Liikemäärän muutos on $240\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

ja loppunopeus $9,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.