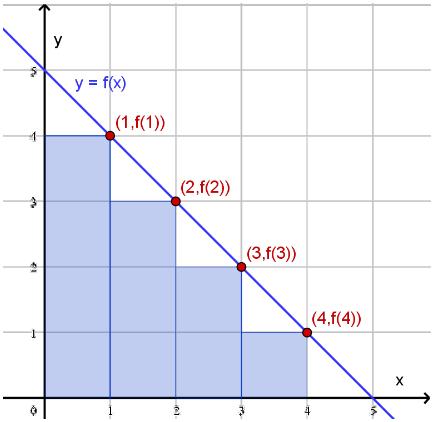
1

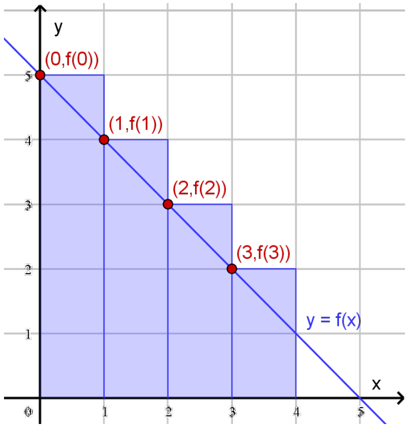
$f(x) = -x + 5$ ja välin $[0,4]$ pituus on $4 - 0 = 4$. Kun väli jaetaan neljään osaväliin, niin yhden osavälin pituus on
$d = \frac{4}{4} = 1$.

Piirretään kuvat kummastakin tapauksesta.

Alasumma



Yläsumma



a) Lasketaan alasumma

$$
\begin{aligned}
s_4 &= \sum_{k=1}^{4} m_k d \\
&= f(1)d + f(2)d + f(3)d + f(4)d \\
&= 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan yläsumma

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{k=1}^{4} M_k d \\
&= f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d \\
&= 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 10
b) 14

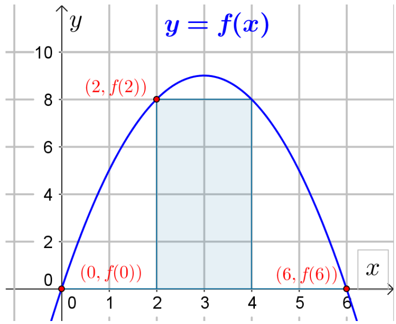
2

$f(x)=6x-x^2$ ja väli on $[0,6]$. Kun väli jaetaan kolmeen osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{6-0}{3}=2.$$

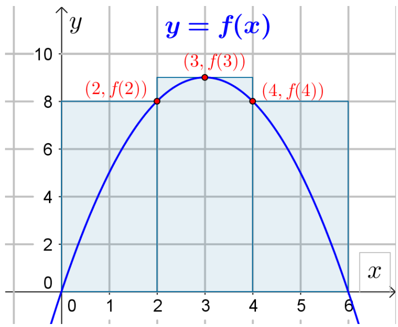
a) Lasketaan alasumma

$$\begin{aligned}s_3&=\sum_{k=1}^{3}m_k d\\&=f(0)d+f(2)d+f(6)d\\&=0\cdot 2+8\cdot 2+0\cdot 2\\&=16\end{aligned}$$



b) Lasketaan yläsumma

$$\begin{aligned}S_3&=\sum_{k=1}^{3}M_k d\\&=f(2)d+f(3)d+f(4)d\\&=8\cdot 2+9\cdot 2+8\cdot 2\\&=50\end{aligned}$$



Vastaus a) 16
b) 50

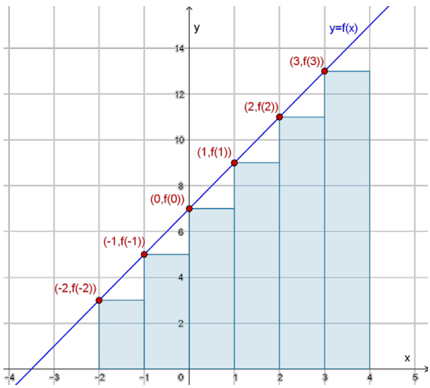
3

a) $f(x) = 2x + 7$ ja väli on $[-2, 4]$. Kun väli jaetaan kuuteen osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

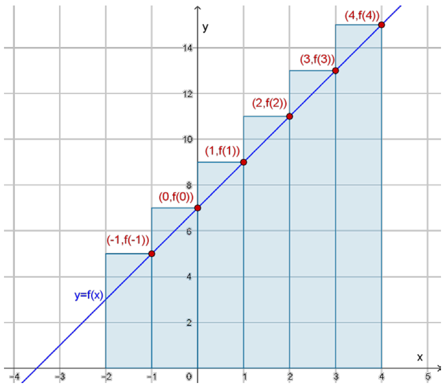
$$d = \frac{4-(-2)}{6} = 1.$$

Piirretään kuvat.

Alasumma



Yläsumma



Lasketaan alasumma

$$\begin{aligned} s_6 &= \sum_{k=1}^{6} m_k d \\ &= f(-2)d + f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d \\ &= 3\cdot 1 + 5\cdot 1 + 7\cdot 1 + 9\cdot 1 + 11\cdot 1 + 13\cdot 1 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Lasketaan yläsumma

$$
\begin{aligned}
S_6 &= \sum_{k=1}^{6} M_k d \\
&= f(-1)d + f(0)d + f(1)d + f(2)d + f(3)d + f(4)d \\
&= 5\cdot 1 + 7\cdot 1 + 9\cdot 1 + 11\cdot 1 + 13\cdot 1 + 15\cdot 1 \\
&= 60
\end{aligned}
$$

b) Funktion arvot välillä $[-2,4]$ ovat positiivisia, joten alasumma ja yläsumma antavat arvion funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaamalle pinta-alalle. Pinta-ala A on siis lukujen 48 ja 60 välissä eli $48 < A < 60$.

Vastaus a) $s_6 = 48$ ja $S_6 = 60$
b) lukujen 48 ja 60 välissä

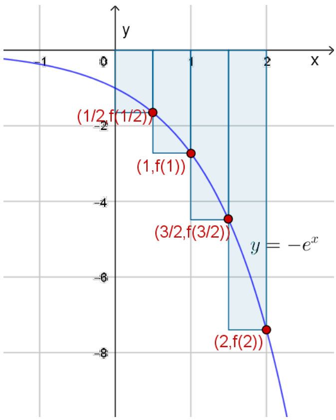
4

Tapa 1:

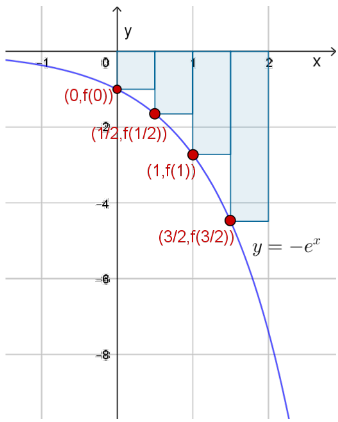
a) $f(x) = -e^x$ ja väli on $[0,2]$. Kun väli jaetaan neljään osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}.$$

Alasumma



Yläsumma



Lasketaan alasumma:

$$
\begin{aligned}
s_4 &= \sum_{k=1}^{4} m_k d \\
&= f\left(\frac{1}{2}\right)d + f(1)d + f\left(\frac{3}{2}\right)d + f(2)d \\
&= -e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^1\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^2\right) \cdot \frac{1}{2} \\
&= -8{,}11887\ldots \\
&\approx -8{,}12
\end{aligned}
$$

Lasketaan yläsumma

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} M_k d$$

$$= f(0)d + f\left(\frac{1}{2}\right)d + f(1)d + f\left(\frac{3}{2}\right)d$$

$$= -e^0 \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^1\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-e^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -4{,}92435...$$

$$\approx -4{,}92$$

b) Funktion f arvot ovat välillä $[0,2]$ negatiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluvulle. Pinta-alan vastaluku on lukujen $-8{,}2$ ja $-4{,}9$ välissä, joten A on lukujen $4{,}9$ ja $8{,}2$ välissä.

Vastaus a) $s_4 = -8{,}12$ ja $S_4 = -4{,}92$

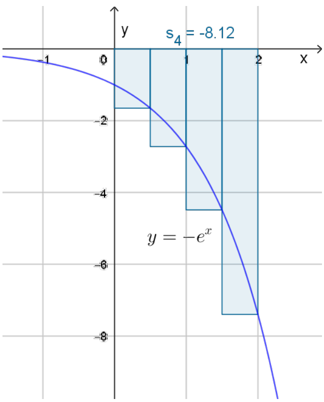
b) lukujen $4{,}9$ ja $8{,}2$ välissä

Tapa 2:

a) Piirretään funktion $f(x) = -e^x$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla alasumma ja yläsumma välillä $[0,2]$, kun osavälejä on 4. Ala- ja yläsumman saa määritettyä GeoGebralla komennoilla

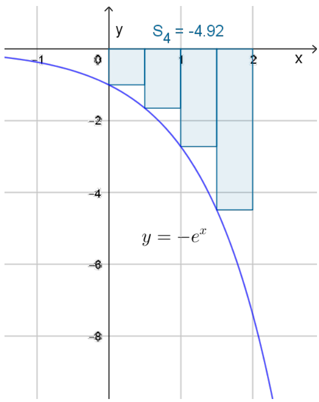
```
Alasumma(f,0,2,4)
Yläsumma(f,0,2,4)
```

Alasumma



Alasumma $s_4 \approx -8{,}12$

Yläsumma



Yläsumma $S_4 \approx -4{,}92$

b) Funktion f arvot ovat välillä $[0,2]$ negatiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluvulle. Pinta-alan vastaluku on lukujen $-8{,}2$ ja $-4{,}9$ välissä, joten A on lukujen $4{,}9$ ja $8{,}2$ välissä.

Vastaus a) $s_4 = -8{,}12$ ja $S_4 = -4{,}92$

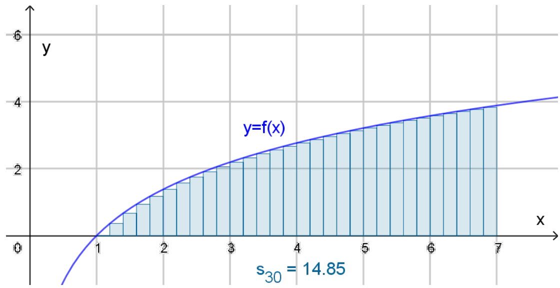
b) lukujen $4{,}9$ ja $8{,}2$ välissä

5

a) Piirretään funktion $f(x) = \ln x^2$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[1,7]$, kun osavälejä on 30. Ala- ja yläsumman saa määritettyä GeoGebralla komennoilla

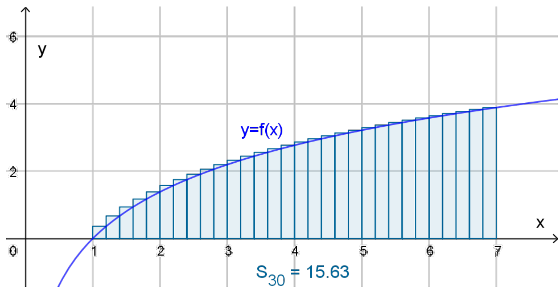
```
Alasumma(f,1,7,30)
Yläsumma(f,1,7,30)
```

Alasumma



$s_{30} \approx 14{,}85$

Yläsumma



$S_{30} \approx 15{,}63$

b) Funktion f arvot ovat välillä $[1,7]$ positiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alalle. Pinta-ala on lukujen $14{,}8$ ja $15{,}7$ välissä eli $14{,}8 < A < 15{,}7$.

Vastaus a) $s_4 = 14,85$ ja $S_4 = 15,63$

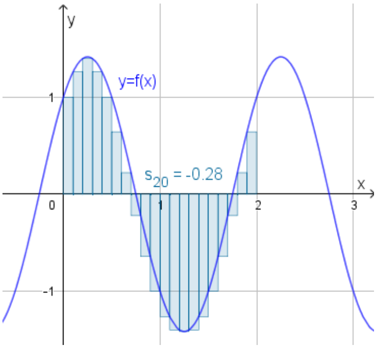
b) $14,8 < A < 15,7$

6

a) Piirretään funktion $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x)$ kuvaaja ja määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[0, 2]$, kun osavälejä on 20. Ala- ja yläsumman saa määritettyä GeoGebralla komennoilla

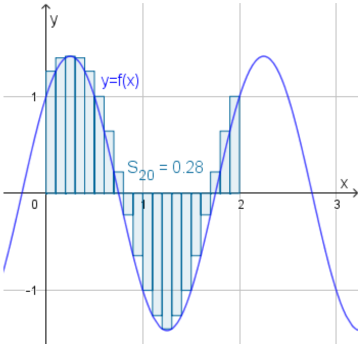
```
Alasumma(f,0,2,20)
Yläsumma(f,0,2,20)
```

Alasumma



$s_{20} \approx -0,28$

Yläsumma

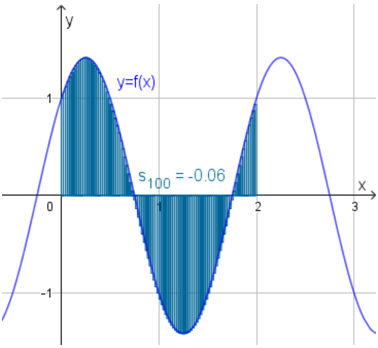


$S_{20} \approx 0,28$

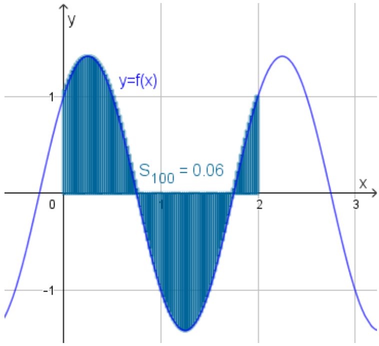
b) Muutetaan osavälien määräksi 100 ja vastaavasti kuin edellä

```
Alasumma(f,0,2,100)
Yläsumma(f,0,2,100)
```

Alasumma



Yläsumma



$s_{100} \approx -0,06$ $\qquad$ $S_{100} \approx 0,06$

c) Näyttää siltä, että ala- ja yläsummien arvot lähestyvät nollaa, kun osavälien määrä suurenee. Tämä tarkoittaa sitä, että kuvaajan ja x-akselin välinen ”positiivinen pinta-ala” x-akselin yläpuolella on yhtä suuri kuin kuvaajan ja x-akselin välinen ”negatiivinen pinta-ala” x-akselin alapuolella.

Vastaus

a) $s_{20} = -0,28$ ja $S_{20} = 0,28$

b) $s_{100} = -0,06$ ja $S_{100} = 0,06$

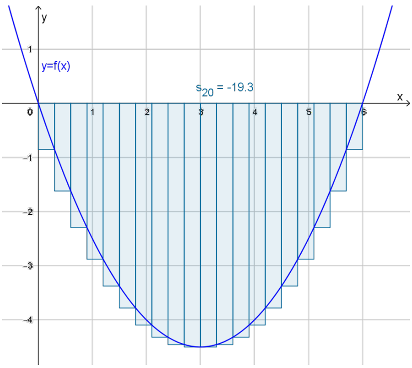
c) Kuvaajan ja x-akselin välinen kokonaispinta-ala x-akselin yläpuolella on yhtä suuri kuin kuvaajan ja x-akselin välinen kokonaispinta-ala x-akselin alapuolella.

7

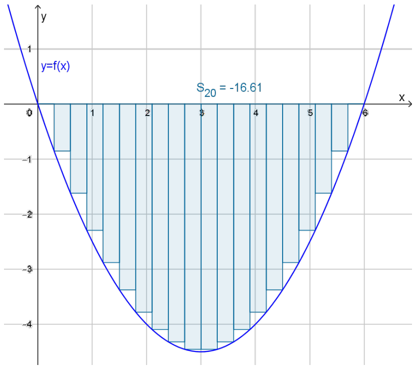
Piirretään funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$ kuvaaja ja määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[0,6]$ eri osaväleillä. Valitaan esimerkiksi osavälien määräksi 20 ja 100.

```
Alasumma(f,0,2,20)
Yläsumma(f,0,2,20)
```

Alasumma



Yläsumma



$s_{20}\approx -19,30$

$S_{20}\approx -16,63$

Kun osavälejä on 100, niin ala- ja yläsummiksi saadaan

$s_{100}\approx -18,27$

$S_{100}\approx -17,73$

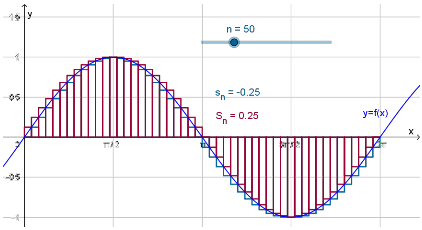
Osavälejä lisäämällä (liukusäädin helpottaa kokeilua) huomataan, että summat lähestyvät lukua -18, joka on pinta-alan vastaluku. Pinta-ala on siis 18.

Vastaus $\quad 18$

8

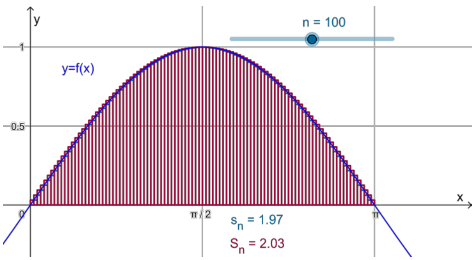
Piirretään funktion $f(x) = \sin x$ kuvaaja ja määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[0, 2\pi]$eri osaväleillä. Luodaan tätä varten liukukytkin n ja lasketaan ala- ja yläsummat komennoilla samanaikaisesti

```
Alasumma(f,0,2π,n)
Yläsumma(f,0,2π,n)
```



$$s_{50} \approx -0,25$$
$$S_{50} \approx 0,25$$

Funktion symmetrisyyden takia x- akselin ala- ja yläpuolella olevat alat ovat yhtä suuret, jolloin summat lähestyvät nollaa. Symmetrisyyden perusteella alat väleillä $[0, \pi]$ ja $[\pi, 2\pi]$ ovat yhtä suuria, joten riittää tarkastella väliä $[0, \pi]$.



$$s_{100} \approx 1,97$$
$$S_{100} \approx 2,03$$

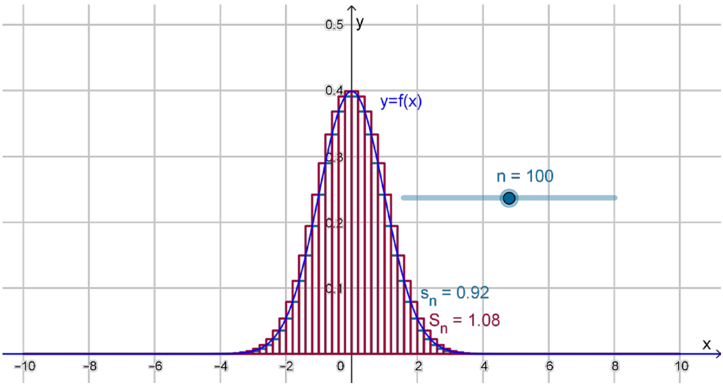
Osavälejä lisäämällä huomataan, että summat lähestyvät lukua 2,0, joka on kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, \pi]$ rajaaman alueen pinta-ala.
Kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 2\pi]$ rajaaman alueen pinta-ala on tällöin $2 \cdot 2,0 = 4,0$.

Vastaus 4,0

9

Piirretään funktion $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ kuvaaja ja määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[-10,10]$ eri osaväleillä. Luodaan tätä varten liukukytkin n ja lasketaan ala- ja yläsummat komennoilla samanaikaisesti.

```
Alasumma(f,-10,10,n)
Yläsumma(f,-10,10,n)
```



$s_{100} \approx 0{,}92$
$S_{100} \approx 1{,}08$

Osavälejä lisäämällä huomataan, että summat lähestyvät lukua $1{,}00$, jolloin funktion ja x-akselin rajaama pinta-ala välillä $[-10,10]$ on yhden desimaalin tarkkuudella $1{,}0$.

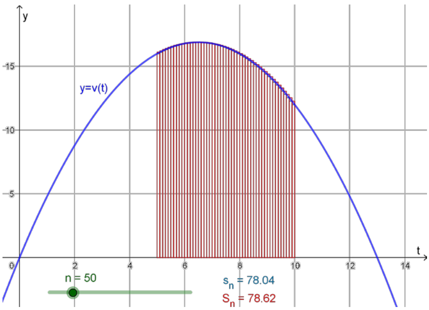
Vastaus $1{,}0$

10

Piirretään funktion $v(t) = -0,4t^2 + 5,2t$ kuvaaja ja määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsumma kysytyille väleille eri osaväleillä. Luodaan tätä varten liukukytkin n ja lasketaan ala- ja yläsummat komennoilla samanaikaisesti

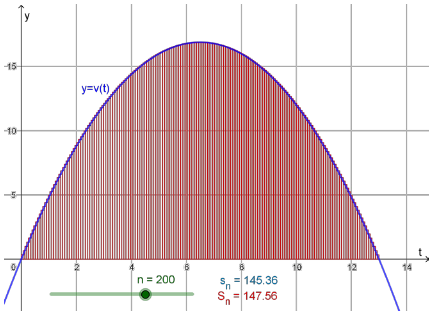
a) välillä $[5,10]$

```
Alasumma(v,5,10,n)
Yläsumma(v,5,10,n)
```



b) välillä $[0,13]$

```
Alasumma(v,0,13,n)
Yläsumma(v,0,13,n)
```



Funktion v kuvaajan ja t-akselin rajaama pinta-ala tietyllä aikavälillä on yhtä suuri kuin aikavälillä kuljettu matka.

a) Välillä $[5,10]$ jo 50 osavälillä nähdään pinta-alan olevan noin 78. Kappaleen kulkema matka 10 metrin tarkkuudella on 80 m.

b) Välillä $[0,13]$ pinta-alan voidaan arvioida olevan noin 146. Kappaleen kulkema matka on 10 metrin tarkkuudella 150 m.

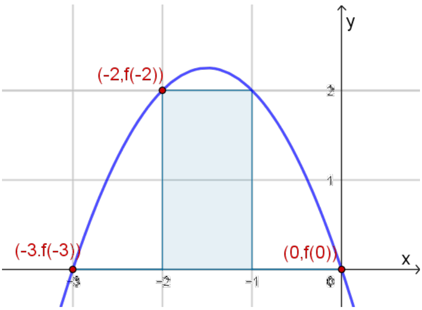
Vastaus a) 80 m
b) 150 m

11

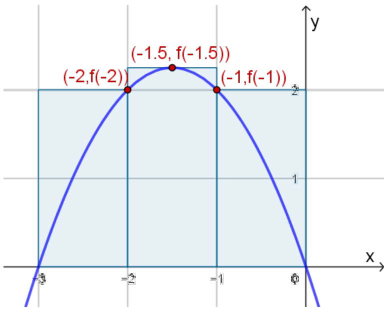
$f(x) = -x^2 - 3x$ ja välin $[-3, 0]$ pituus on $0 - (-3) = 3$. Kun väli jaetaan kolmeen osaväliin, niin yhden osavälin pituus on
$d = \frac{3}{3} = 1$.

Piirretään kuvat kummastakin tapauksesta.

Alasumma



Yläsumma



a) Lasketaan alasumma

$$
\begin{aligned}
s_3 &= \sum_{k=1}^{3} m_k d \\
&= f(-3)d + f(-2)d + f(0)d \\
&= 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan yläsumma

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} M_k d$$

$$= f(-2)d + f\left(-\frac{3}{2}\right)d + f(-1)d$$

$$= 2 \cdot 1 + \frac{9}{4} \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$= 6\frac{1}{4}$$

Vastaus a) $s_3 = 2$

b) $S_3 = 6\frac{1}{4}$

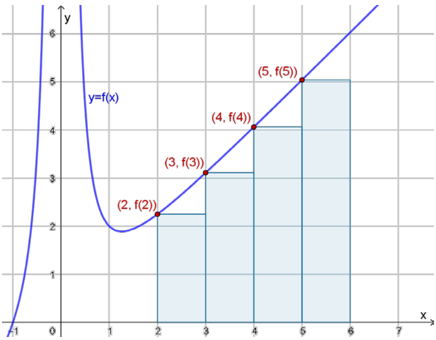
12

$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ja väli on $[2,6]$. Kun väli jaetaan neljään osaväliin, niin yhden osavälin pituus on

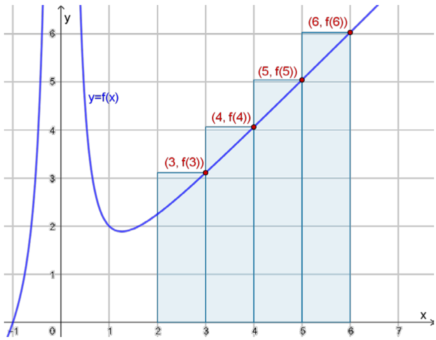
$d = \frac{6-2}{4} = 1$.

Piirretään kuvat kummastakin tapauksesta.

Alasumma



Yläsumma



a) Lasketaan alasumma

$$\begin{aligned} s_4 &= \sum_{k=1}^{4} m_k d \\ &= f(2)d_4 + f(3)d + f(4)d + f(5)d \\ &= 14{,}463611\ldots \\ &\approx 14{,}46 \end{aligned}$$

Lasketaan yläsumma

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{k=1}^{4} M_k d \\
&= f(3)d + f(4)d + f(5)d + f(6)d \\
&= 18,241388... \\
&\approx 18,24
\end{aligned}
$$

b) Funktion arvot välillä $\left[2,6\right]$ ovat positiivisia, joten alasumma ja yläsumma antavat arvion funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaamalle pinta-alalle. Pinta-ala A on siis lukujen 14,46 ja 18,24 välissä eli yhden desimaalin tarkkuudella $14,4 < A < 18,3$.

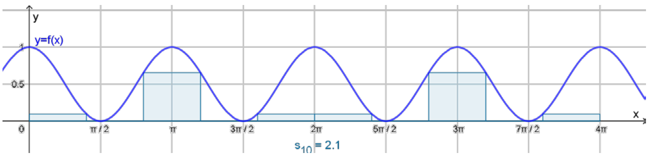
Vastaus a) $s_4 = 14,46$ ja $S_4 = 18,24$

b) $14,4 < A < 18,3$

13

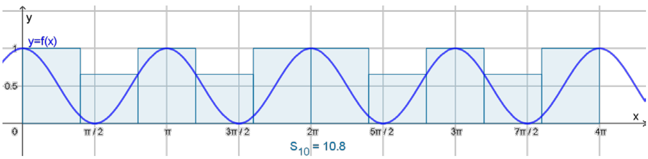
a) Piirretään funktion $f(x)=\cos^2 x$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[0,4\pi]$, kun osavälejä on 10. Nämä saa määritettyä GeoGebralla komennoilla `Alasumma(f,0,4π,10)` ja `Yläsumma(f,0,4π,10)`.

Alasumma



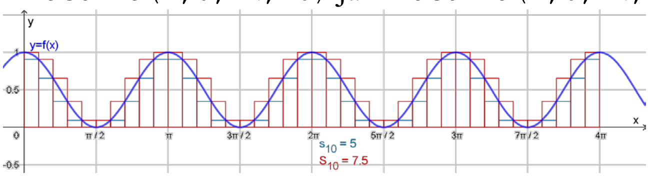
$s_{10} \approx 2{,}1$

Yläsumma



$S_{10} \approx 10{,}8$

b) Vastaavasti 40 osavälille saadaan ala- ja yläsummat komennoilla `Alasumma(f,0,4π,40)` ja `Yläsumma(f,0,4π,40)`, jolloin



$s_{40} \approx 5{,}0$

$S_{40} \approx 7{,}5$

c) Funktion f arvot ovat välillä $[0,4\pi]$ positiivisia, jolloin ala- ja yläsumma antavat arvion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alalle. Pinta-ala on lukujen 5,0 ja 7,5 välissä eli kokonaislukujen tarkkuudella $5 < A < 8$.

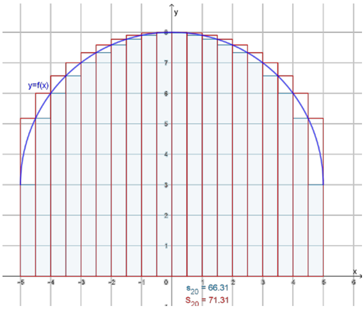
Vastaus a) $s_{10} \approx 2{,}1$ ja $S_{10} \approx 10{,}8$

b) $s_{40} \approx 5{,}0$ ja $S_{40} \approx 7{,}5$

c) $5 < A < 8$

14

a) Piirretään funktion $f(x)=\sqrt{25-x^2}+3$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[-5,5]$, kun osavälejä on 20. Nämä saa määritettyä GeoGebralla komennoilla `Alasumma(f,-5,5,20)` ja `Yläsumma(f,-5,5,20)`.



$s_{20}\approx 66,31$

$S_{20}\approx 71,31$

b) Vastaavasti 200 osavälille saadaan ala- ja yläsummat komennoilla `Alasumma(f,-5,5,200)` ja `Yläsumma(f,-5,5,200)`, jolloin $s_{200}\approx 69,01$ ja $S_{200}\approx 69,51$.

c) Funktion f kuvaaja on (0, 3)-keskisen, 5-säteisen ympyrän yläpuolikas. Tarkka pinta-ala saadaan laskemalla puoliympyrän ja sen alapuolelle jäävän suorakulmion pinta-alat yhteen.

$$\begin{aligned}A &= A_{puoliympyrä}+A_{suorakaide}\\ &=\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2+(5-(-5))\cdot 3\\ &=30+\frac{25\pi}{2}=69,2699...\end{aligned}$$

Vastaus a) $s_{20} \approx 66,31$ ja $S_{20} \approx 71,31$

b) $s_{200} \approx 69,01$ ja $S_{200} \approx 69,51$

c) $A = 30 + \frac{25\pi}{2} = 69,2699...$

15

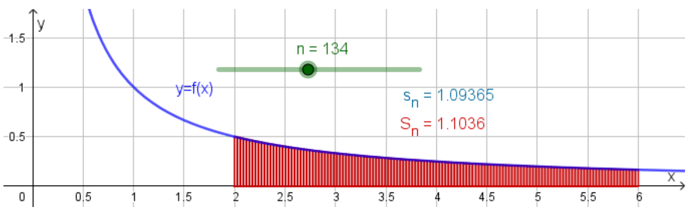
Piirretään funktion $f(x)=\dfrac{1}{x}$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[2,6]$ eri osavälien määrillä. Luodaan tätä varten liukukytkin n osavälien määrälle ja muodostetaan ala- ja yläsumman komennot sen avulla.

```
ala=Alasumma(f,2,6,n)
yla=Yläsumma(f,2,6,n)
```

Lisäksi voidaan luoda erotuksen laskeva muuttuja

```
erotus=yla-ala,
```

joka kertoo summien välisen erotuksen.



Luku
- ala = 1.09365
- erotus = 0.00995
- n = 134
- yla = 1.1036

Asettamalla pyöristystarkkuudeksi 5 desimaalia huomataan, että ala- ja yläsumman välinen erotus on pienempää kuin 0,01, kun osavälejä on vähintään 134.

Vastaus Vähintään 134 osaväliin

16

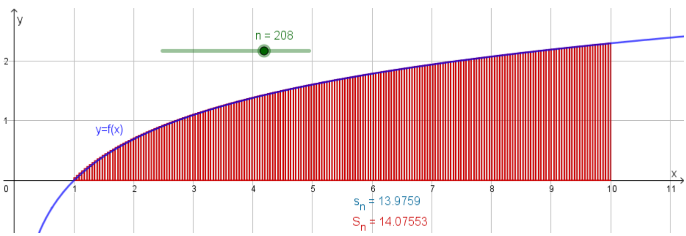
Piirretään funktion $f(x)=\ln x$ kuvaaja ja määritetään geometria-ohjelmalla ala- ja yläsumma välillä $[1,10]$ eri osavälien määrillä. Luodaan liukukytkin n osavälien määrälle ja muodostetaan ala- ja yläsumman komennot sen avulla.

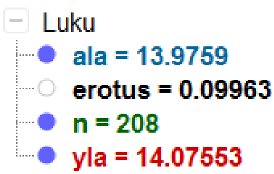
```
ala=Alasumma(f,1,10,n)
yla=Yläsumma(f,1,10,n)
```

Lisäksi voidaan luoda erotuksen laskeva muuttuja

```
erotus=yla-ala,
```

joka kertoo summien välisen erotuksen.





Asettamalla pyöristystarkkuudeksi 5 desimaalia huomataan, että ala- ja yläsumman välinen erotus on pienempää kuin $\frac{1}{10}$, kun osavälejä on vähintään 208.

Vastaus Vähintään 208 osaväliin

17

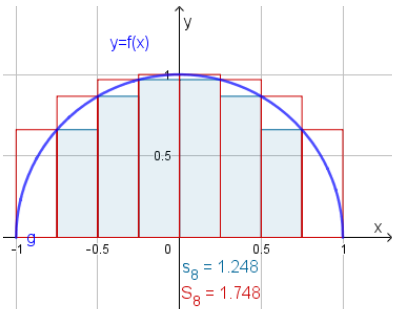
Ratkaistaan ympyrän yhtälöstä lauseke funktiolle, jonka kuvaaja on ympyrän ylempi puolikas.

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2 \qquad | \; 1 - x^2 \geq 0, \text{ kun } -1 \leq x \leq 1$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad | \text{ yläpuolikkaassa } \; y \geq 0$$
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Määritellään $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$, missä $-1 \leq x \leq 1$, jolloin funktion f kuvaaja on yksikköympyrän ylempi puolikas.

a) Määritetään ala- ja yläsumma välillä $[-1,1]$, kun osavälejä on 8.

```
ala=Alasumma(f,-1,1,8)
yla=Yläsumma(f,-1,1,8)
```



$s_8 \approx 1{,}248$

$S_8 \approx 1{,}748$

b) Pinta-alan tarkka arvo on puolet 1-säteisen ympyrän pinta-alasta. Arvioiden osuudet tarkasta arvosta ovat

$$\frac{s_4}{A_{puoliymp}} = \frac{1,248}{\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2} = 0,794501... \approx 79\%$$

$$\frac{S_4}{A_{puoliymp}} = \frac{1,748}{\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2} = 1,112811... \approx 111\%$$

eli alasumman arvio on 21 % liian pieni ja yläsumman arvio 11 % liian suuri.

c) Summien keskiarvo

$$A_s = \frac{s_8 + S_8}{2} = \frac{2,998}{2} = 1,498$$

Sen osuus tarkasta arvosta on

$$\frac{A_S}{A_{puoliymp}} = \frac{1,498}{\frac{1}{2}\pi} = 0,953656... \approx 95,4\%$$

eli keskiarvon antama arvio on 4,6 % liian pieni

Vastaus a) ala-arvio $s_8 \approx 1,248$ ja yläarvio $S_8 \approx 1,748$

b) s_8 on 21 % liian pieni ja S_8 on 11 % liian suuri.

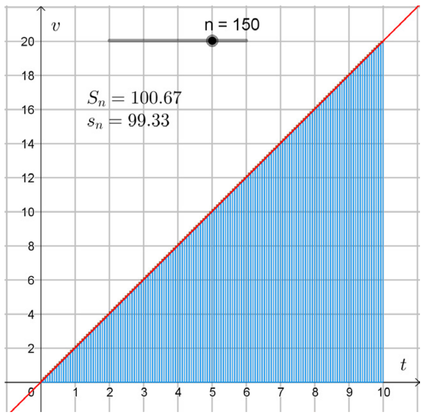
c) keskiarvo 1,498 on 4,6 % liian pieni

18

Kappaleen kulkema matka tietyllä aikavälillä on yhtä suuri kuin funktion v kuvaajan ja t-akselin rajaama pinta-ala kyseisellä välillä. Määritetään geometriaohjelmalla ala- ja yläsummat, kun osavälien määrää muutetaan liukukytkimen avulla.

a) Piirretään funktion $v(t) = 2t$ kuvaaja ja määritetään sille ala- ja yläsumma välillä $[0,10]$, kun osavälejä on n kappaletta.

```
Alasumma(v,0,10,n)
Yläsumma(v,0,10,n)
```

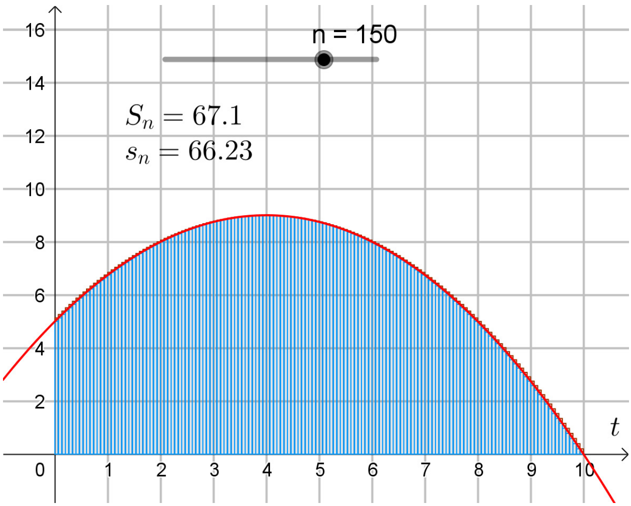


Osavälien määrän kasvaessa ala- ja yläsumma lähestyvät lukua 100 eli kappale kulkee 100 m.

Huom. Tutkittava alue on kolmio, jonka kanta on 10 ja korkeus $2 \cdot 10 = 20$, eli pinta-ala voidaan laskea tarkasti.

b) Piirretään funktion $v(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t + 5$ kuvaaja ja määritetään sille ala- ja yläsumma välillä $[0,10]$, kun osavälejä on n kappaletta.

```
Alasumma(v,0,10,n)
Yläsumma(v,0,10,n)
```



Osavälien määrän kasvaessa ala- ja yläsumma lähestyvät lukua 67, eli kappale kulkee kymmenen metrin tarkkuudella 70 m.

Vastaus a) 100 m
b) 70 m

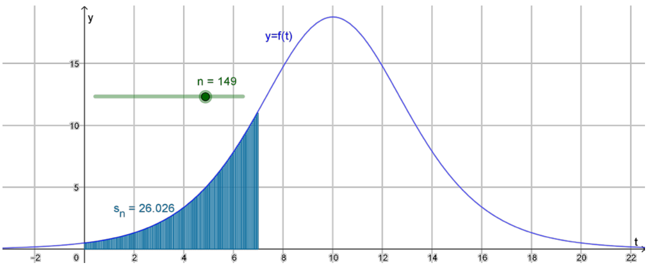
19

Piirretään funktio $f(t)=\dfrac{1175e^{-\frac{1}{2}t}}{\left(149e^{-\frac{1}{2}t}+1\right)^2}$ kuvaaja.

Sairastuneiden opiskelijoiden määrä tietyllä aikavälillä on yhtä suuri kuin funktion f kuvaajan ja t-akselin rajaama pinta-ala kyseisellä aikavälillä. Määritetään geometriaohjelmalla alasumma, kun osavälien määrää muutetaan liukukytkimen avulla.

a) Viikon aikana sairastuneiden määrä saadaan väliltä $[0,7]$.

```
Alasumma(f,0,7,n)
```



Osavälien määrän kasvaessa alasumma näyttää lähestyvän kokonaislukua 26 eli 10 opiskelijan tarkkuudella sairastuneita on 30.

b) Kolmen viikon aikana sairastuneiden määrä saadaan väliltä $[0,21]$.

```
Alasumma(f,0,21,n).
```

Osavälien määrän kasvaessa alasumma lähestyy lukua 148 eli 10 opiskelijan tarkkuudella sairastuneita on 150.

Vastaus a) 30 opiskelijaa
b) 150 opiskelijaa

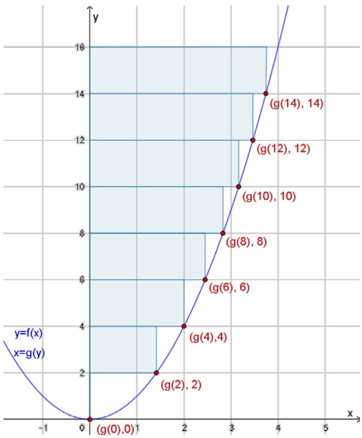
20

Piirretään funktion $f(x)=x^2$ kuvaaja. Nyt halutaan määrittää funktion f kuvaajan y-akselin rajoittama pinta-ala, kun $0 \le x \le 4$. Tarkastelu suoritetaan y-akselin suhteen, joten ratkaistaan yhtälö $y=x^2$ muuttujan x suhteen.

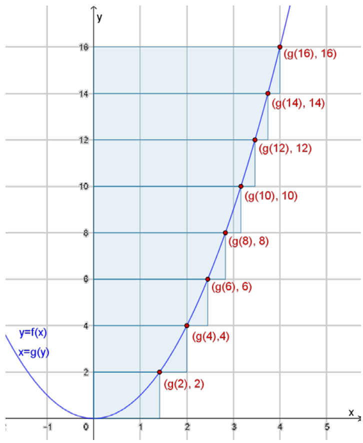
$$y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{y} \quad | \; x \ge 0$$
$$x = \sqrt{y}$$

Määritellään $g(y)=\sqrt{y}$. Kun $0 \le x \le 4$, niin $0 \le y \le 16$. Kun y-akselin väli $[0, 16]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus $d=\dfrac{16-0}{8}=2$.

Alasumma



Yläsumma



Lasketaan alasumma:

$$
\begin{aligned}
s_8 &= \sum_{k=1}^{8} m_k d \\
&= g(0)d + g(2)d + g(4)d + \cdots + g(12)d + g(14)d \\
&= \sqrt{0}\cdot 2 + \sqrt{2}\cdot 2 + \sqrt{4}\cdot 2 + \sqrt{6}\cdot 2 + \sqrt{8}\cdot 2 + \sqrt{10}\cdot 2 + \sqrt{12}\cdot 2 + \sqrt{14}\cdot 2 \\
&= 38{,}1203...
\end{aligned}
$$

Lasketaan yläsumma:

$$
\begin{aligned}
S_8 &= \sum_{k=1}^{8} M_k d \\
&= g(2)d + g(4)d + g(6)d \cdots + g(14)d + g(16)d \\
&= \sqrt{2}\cdot 2 + \sqrt{4}\cdot 2 + \sqrt{6}\cdot 2 + \sqrt{8}\cdot 2 + \sqrt{10}\cdot 2 + \sqrt{12}\cdot 2 + \sqrt{14}\cdot 2 + \sqrt{16}\cdot 2 \\
&= 46{,}1203...
\end{aligned}
$$

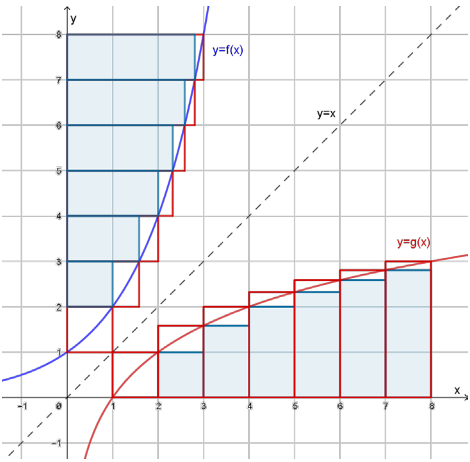
Funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan ja y-akselin rajoittama pinta-ala on siis kokonaislukujen 38 ja 47 välissä.

Vastaus $\quad 38 < A < 47$

21

a) Funktioiden $f(x) = 2^x$ ja $g(x) = \log_2 x$ kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

b) Koska funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen, niin funktion f kuvaajan ja y-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $0 \le x \le 3$ on yhtä suuri kuin funktion g kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $0 \le y \le 3$. Väliksi x-akselilla saadaan tällöin $[1,8]$.



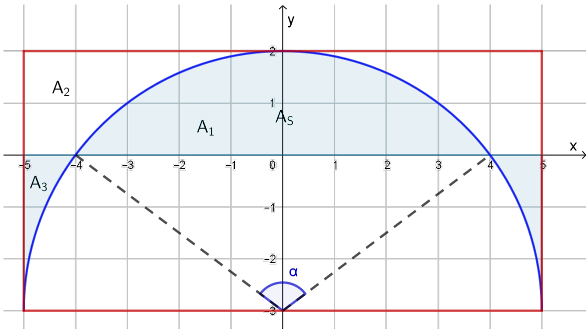
Kun lasketaan funktion g ala- ja yläsummia välillä $[1, 8]$ ja lisätään osavälien lukumäärää liukusäätimellä, nähdään summien arvojen lähestyvän lukua 13,9. Tämä on myös funktion f kuvaajan ja y-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $0 \le x \le 3$.

Vastaus a) Kuvaajat ovat toistensa peilikuvat suoran $y = x$ suhteen

b) 13,9

22

Funktion $f(x)=\sqrt{25-x^2}-3$ kuvaajan ja x-akselin rajaama pinta-ala on merkitty kuvaan sinisellä. Käytetään apuna oheista apukuviota.



x-akselin yläpuolelle jäävä osa on ympyrän segmentti. Sektorin keskuskulma α voidaan ratkaista trigonometrian avulla.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\alpha=2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\alpha=106{,}2602...^\circ$$

Segmentin alaksi saadaan

$$A_S=\frac{\alpha}{360^\circ}\pi\cdot5^2-\frac{1}{2}\cdot8\cdot3$$
$$=11{,}18238...$$

x-akselin alapuolelle jäävät osat ovat yhtä suuria, joten riittää selvittää toinen.

Pinta-ala saadaan vähentämällä y-akselin vasemmalla puolella olevasta 5×5-neliöstä neljännes ympyrän pinta-alasta, sekä pinta-ala A_2. Pinta-ala A_2 puolestaan saadaan vähentämällä 5×2-suorakulmion pinta-alasta edellä lasketun segmentin pinta-alan A_5 puolikas.

$$\begin{aligned}A_3 &= 5\cdot5 - A_{1/4\,ympyrä} - A_2\\ &= 25-\frac{1}{4}\pi\cdot5^2-\left(5\cdot2-A_1\right)\\ &= 25-\frac{1}{4}\pi\cdot25-\left(10-\frac{1}{2}A_S\right)\\ &= 0,95624...\end{aligned}$$

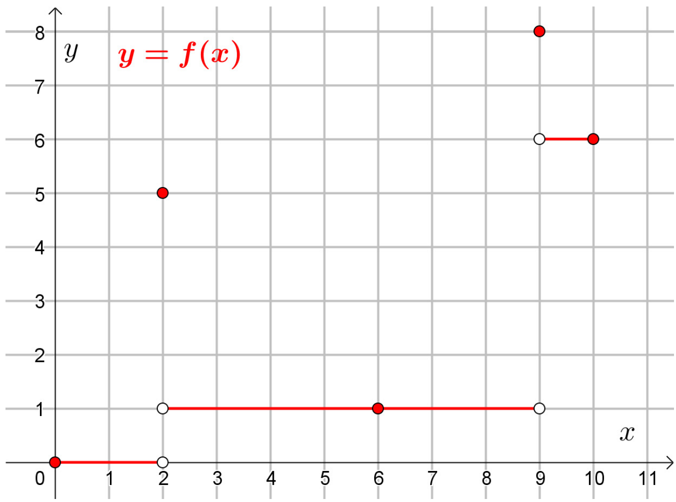
Koko alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= A_s + 2\cdot A_3\\ &= 13,09485...\\ &\approx 13,09\end{aligned}$$

Vastaus 13,09

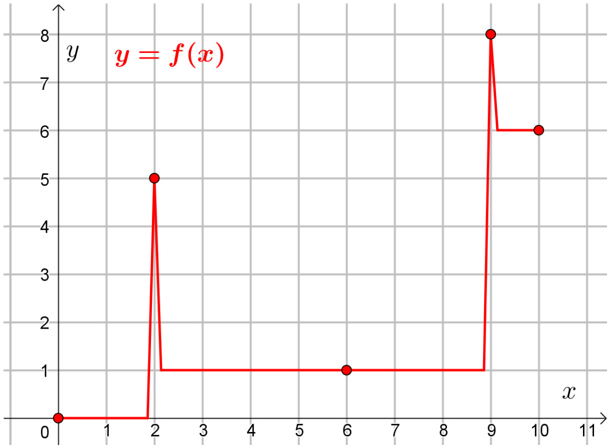
23

a) Unohdetaan aluksi oletus funktion jatkuvuudesta ja piirretään paloista koostuva kuvaaja, joka rajaa muilla annetuilla oletuksilla mahdollisimman pienen pinta-alan.



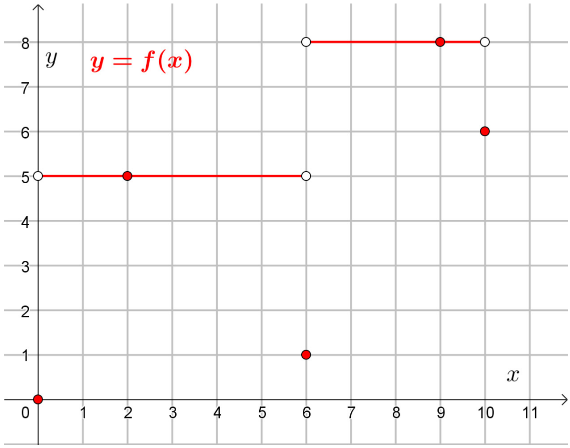
Pinta-ala on $(9-2)\cdot 1 + (10-9)\cdot 6 = 13$

Muokkaamalla tätä funktiota rajakohdissa saadaan aikaan jatkuva funktio, joka toteuttaa kaikki tehtävän ehdot.



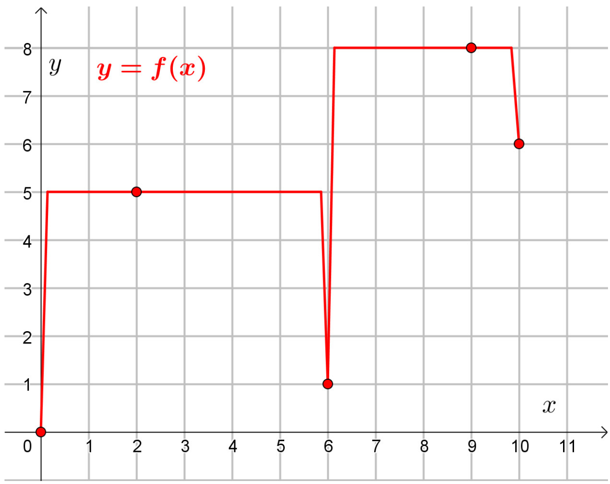
Liitosjanoja jyrkentämällä saadaan tämän funktion ja x-akselin välillä $[0, 10]$ rajaama pinta-ala niin lähelle lukua 13, kuin halutaan.
Paras mahdollinen alaraja pinta-alalle on siis 13.

Muodostetaan sitten vastaavalla idealla funktio, joka rajaa mahdollisimman suuren pinta-alan.



Pinta-ala on $(6-0)\cdot 5 + (10-6)\cdot 8 = 62$

Muokkaamalla tätä saadaan jatkuva, ehdot täyttävä funktio, jonka rajaama pinta-ala saadaan halutun lähelle arvoa 62.



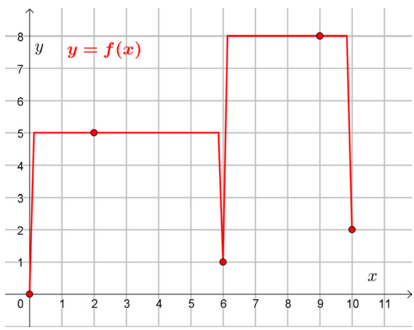
Paras mahdollinen yläraja pinta-alalle on siis 62.

b) Koska annettu yläraja 62 on sama kuin a-kohdassa, voidaan päätellä ainoastaan, että $f(10)$ on korkeintaan 8 (muuten funktio ei ole vähenevä välillä [9, 10]).

Kuten kohdassa a, nytkin voidaan päätellä, että pinta-ala on vähintään $(9-2)\cdot 1+(10-9)\cdot f(10)=7+f(10)$.

Saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
7+f(10)&=9\\
f(10)&=2
\end{aligned}
$$



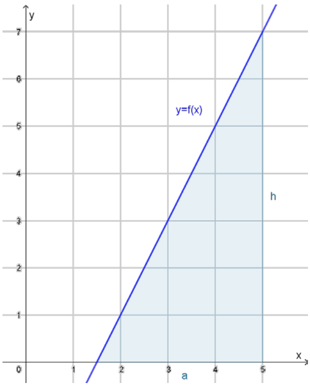
Vastaus a) Pinta-ala on varmuudella lukujen 13 ja 62 välissä
b) $f(10)=2$

24

a) Piirretään funktion $f(x) = 2x - 3$ kuvaaja. Välillä $\left[\frac{3}{2}, 5\right]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on suorakulmainen kolmio, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella.

Kolmion kanta on $5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ ja korkeus $f(5) = 7$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

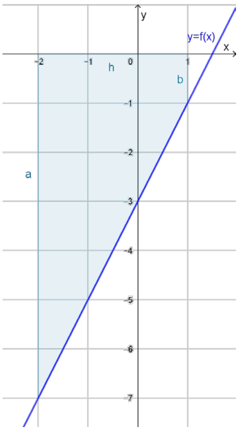


$$A = \frac{1}{2}ah$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 7$$
$$= \frac{49}{4}$$

Funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella, joten

$$\int_{\frac{3}{2}}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{49}{4}.$$

b) Välillä $[-2,1]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas, joka sijaitsee x-akselin alapuolella. Pinta-ala on siis määrätyn integraalin vastaluku. Lasketaan alueen pinta-ala.



$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2}h \\ &= \frac{|f(-2)|+|f(1)|}{2}\cdot(1-(-2)) \\ &= \frac{7+1}{2}\cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Määrätty integraali on pinta-alan vastaluku.

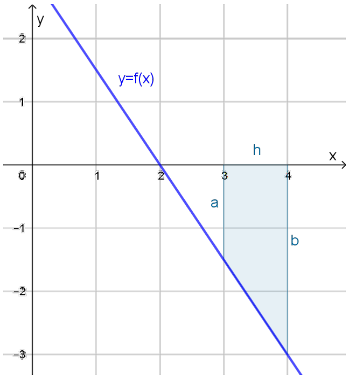
$$\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -12$$

Vastaus a) $\frac{49}{4}$

b) -12

25

a) Piirretään kuva. Välillä $[3,4]$ funktion $f(x)=-\frac{3}{2}x+3$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas, joka sijaitsee x-akselin alapuolella. Pinta-ala on siis määrätyn integraalin vastaluku. Lasketaan alueen pinta-ala.

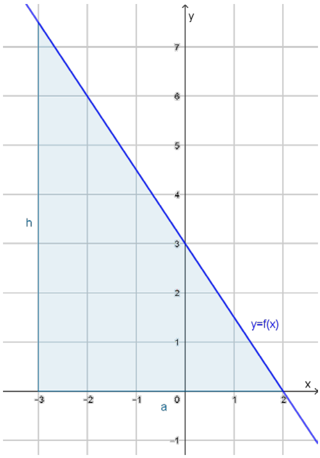


$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a+b}{2}h \\
&= \frac{|f(3)|+|f(4)|}{2}\cdot(4-3) \\
&= \frac{\frac{3}{2}+3}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Päätellään määrätty integraali.

$$\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{9}{4}$$

b) Välillä $[-3, 2]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on suorakulmainen kolmio, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella. Pinta-ala ja määrätty integraali ovat yhtä suuret. Lasketaan alueen pinta-ala.



$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ah \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(2-(-3)\right)\cdot f(-3) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\frac{1}{2} \\
&= \frac{75}{4}
\end{aligned}
$$

Päätellään määrätty integraali.

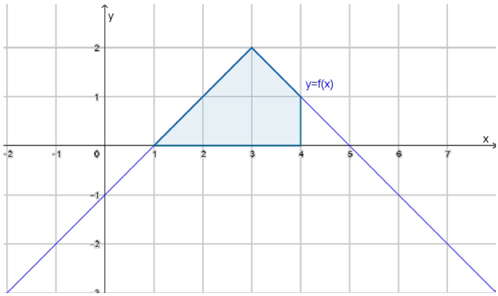
$$\int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{75}{4}$$

Vastaus a) $-\frac{9}{4}$

b) $\frac{75}{4}$

26

a) Kuvasta nähdään, että välillä $[1,4]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue sijaitsee x-akselin yläpuolella.



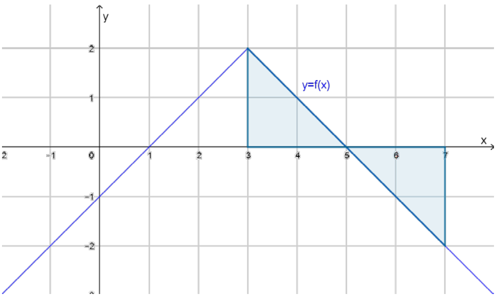
Alue koostuu suorakulmaisesta kolmiosta välillä [1, 3] ja puolisuunnikkaasta välillä [3, 4]. Pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{2+1}{2} \cdot 1 = 3\frac{1}{2}.$$

Määrätty integraali on yhtä suuri kuin alueen pinta-ala.

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3\frac{1}{2}$$

b) Kuvasta nähdään, että välillä $[3,5]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on kolmio, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella ja välillä $[5,7]$ kolmio, joka sijaitsee x-akselin alapuolella.



Kolmiot ovat yhtä suuria ja yhden kolmion ala on

$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Päätellään määrätyt integraalit ja lasketaan niiden summa

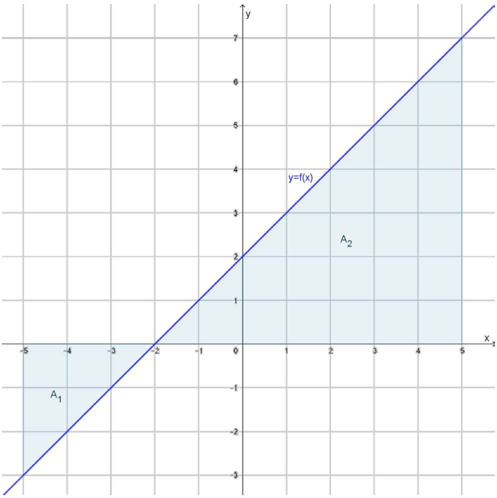
$$\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x + \int_5^7 f(x)\mathrm{d}x = A + (-A) = 2 - 2 = 0.$$

Vastaus a) $3\frac{1}{2}$

b) 0

27

a) Kuvasta nähdään, että välillä $[-5,-2]$ funktion $f(x)=x+2$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue sijaitsee x-akselin alapuolella ja välillä $[-2,5]$ x-akselin yläpuolella.



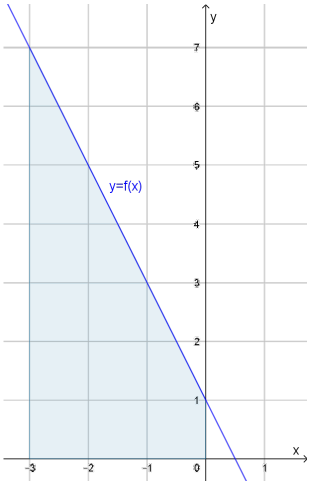
Kumpikin alue on kolmio. Pinta-alat ovat

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\left(-2-(-5)\right)\cdot\left|f(-5)\right|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4\frac{1}{2} \quad \text{ja}$$
$$A_2=\frac{1}{2}\cdot\left(5-(-2)\right)\cdot f(5)=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7=24\frac{1}{2}.$$

Määrätty integraali voidaan jakaa osiin ja laskea pinta-alojen avulla.

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{5}(x+2)\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{-2}(x+2)\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{5}(x+2)\,\mathrm{d}x\\ &= -A_1+A_2\\ &= -4\frac{1}{2}+24\frac{1}{2}\\ &= 20\end{aligned}$$

b) Kuvasta nähdään, että välillä $[-3,0]$ funktion $f(x)=1-2x$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella. Lasketaan kuvion pinta-ala.



$$
\begin{aligned}
A &= \frac{f(-3)+f(0)}{2}\cdot\left(0-(-3)\right) \\
&= \frac{7+1}{2}\cdot 3 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Päätellään määrätty integraali.

$$\int_{-3}^{0}\left(1-2x\right)\mathrm{d}x = A = 12$$

Vastaus a) 20
b) 12

28

a) Muokataan integraali muotoon, jossa näkyvät vain tehtävässä annetut integraalit.

$$\int_0^2 \left(4x^3 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 4x^3\mathrm{d}x + \int_0^2 -\frac{1}{2}x\mathrm{d}x$$
$$= 4\int_0^2 x^3\mathrm{d}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^2 x\mathrm{d}x$$
$$= 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2$$
$$= 15$$

b) Muokataan vastaavasti.

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 x^3\mathrm{d}x + \int_0^2 -x^2\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\mathrm{d}x + \int_0^2 -3x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 x^3\mathrm{d}x - \int_0^2 x^2\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\mathrm{d}x - 3\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 x^3\mathrm{d}x + \underbrace{\left(-\int_0^2 x^2\mathrm{d}x + \int_0^2 x^2\mathrm{d}x\right)}_{=0} - 3\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= 4 - 3\cdot 2$$
$$= -2$$

Vastaus a) 15
b) −2

29

Muokataan lausekkeita niin, että näkyviin saadaan tunnetut integraalit.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(2x^3+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2 \left(2x^3+x\right)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left(2x^3+x\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 2x^3\mathrm{d}x+\int_0^2 x\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^2 x^3\mathrm{d}x+\int_0^2 x\mathrm{d}x\\ &= 2\cdot 4+2\\ &= 10\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x-\int_2^1 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x-\left(-\int_1^2 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_0^1 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 x^3\mathrm{d}x-4\int_0^2 x\mathrm{d}x\\ &= 4-4\cdot 2\\ &= -4\end{aligned}$$

Vastaus a) 10
b) –4

30

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin ominaisuuksien mukaisesti niin, että voidaan hyödyntää tunnettuja pinta-aloja. Alue A_1 on x-akselin yläpuolella ja A_2 sen alapuolella.

a) $\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = A_1 = 21$

b) $\int_{4}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -A_2 = -3$

c)
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{7} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x + \int_{4}^{7} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 21 - 3 \\ &= 18\end{aligned}$$

Vastaus a) 21
b) −3
c) 18

31

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin ominaisuuksien mukaisesti niin, että voidaan hyödyntää tunnettuja pinta-aloja. Alueet A_1 ja A_2 ovat x-akselin alapuolella ja A_3 sen yläpuolella.

a)
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \left|\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{5} g(x)\mathrm{d}x\right| + \int_{5}^{10} g(x)\mathrm{d}x \\ &= 9 + 5 + 18 \\ &= 32 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \int_{-3}^{10} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} g(x)\mathrm{d}x + \int_{5}^{10} g(x)\mathrm{d}x \\ &= -9 - 5 + 18 \\ &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \int_{-3}^{5} g(x)\mathrm{d}x - \int_{10}^{-3} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{5} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-3}^{10} g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-3}^{10} g(x)\mathrm{d}x \\ &= -9 + (-5) + 4 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Vastaus
a) 32
b) 4
c) −10

32

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin ominaisuuksien mukaisesti mahdollisimman sievään muotoon.

$$\int_0^5 \left(2x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x - 2\int_0^5 \left(x^2-\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x$$

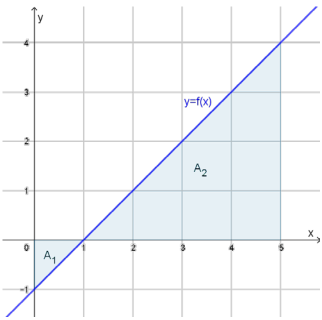
$$= \int_0^5 2x^2\mathrm{d}x + \int_0^5 -2x\,\mathrm{d}x + \int_0^5 1\,\mathrm{d}x - 2\left(\int_0^5 x^2\mathrm{d}x + \int_0^5 -\frac{3}{2}x\,\mathrm{d}x + \int_0^5 1\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= 2\int_0^5 x^2\mathrm{d}x - 2\int_0^5 x\,\mathrm{d}x + \int_0^5 1\,\mathrm{d}x - 2\int_0^5 x^2\mathrm{d}x + 3\int_0^5 x\,\mathrm{d}x - 2\int_0^5 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^5 x\,\mathrm{d}x - \int_0^5 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^5 (x-1)\,\mathrm{d}x$$

Päätellään määrätyn integraalin arvo funktion $f(x)=x-1$ ja x-akselin rajaaman pinta-alan avulla.



$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot f(0) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot(5-1)\cdot f(5) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$$

$$\int_0^5 (x-1)\,\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 = \frac{15}{2}$$

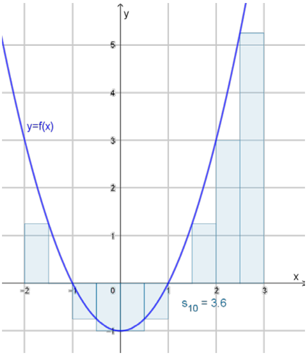
Vastaus $\quad \dfrac{15}{2}$

33

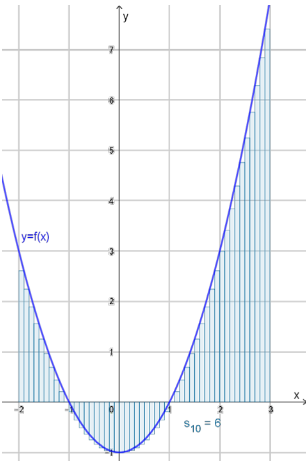
Piirretään funktion $f(x)=x^2-1$ kuvaaja ja määritetään sille alasumma välillä $[-2,3]$. Näin saadaan likiarvo integraalille

$$\int_{-2}^{3}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x.$$

a) Alasumma 10 osavälillä voidaan määrittää komennolla `Alasumma(f,-2,3,10)`, jolloin $s_{10}\approx 3{,}6$.



b) Vastaavasti 50 osavälillä alasummaksi saadaan $s_{50}\approx 6{,}0$



Vastaus a) $s_{10} \approx 3,6$

b) $s_{50} \approx 6,0$

34

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaisesti mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

a)

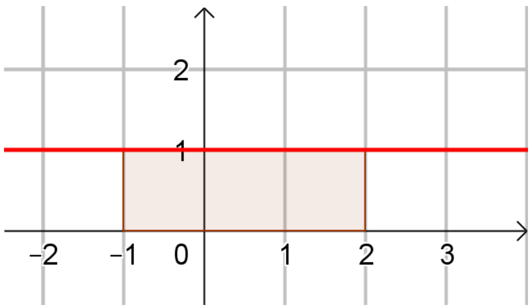
$$\int_{-1}^{2} \left(e^x + 1\right)^2 dx - \int_{-1}^{2} \left(e^{2x} + 2e^x\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(e^x + 1\right)^2 - \left(e^{2x} + 2e^x\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} - 2e^x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 1 \, dx$$

Lasketaan funktion $f(x) = 1$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $[-1, 2]$.



Alue on suorakulmio x-akselin yläpuolella. Sen leveys on $2 - (-1) = 3$ ja korkeus on 1.
$A = 3 \cdot 1 = 3$.

Integraalin arvo on siis 3.

b) Hyödynnetään trigonometrian laskusääntöjä sieventämisessä

$$\int_0^4 2\sin x(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_0^4 \left(2\cos^2 x-\sin 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4 \left(2\sin x\cos x+2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x+\int_0^4 \left(2\cos^2 x-\sin 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4 \left(\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}+2\sin^2 x+2\cos^2 x-\sin 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4 2\left(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4 2\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan siis funktion $f(x)=2$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $[0,4]$. Alue on suorakulmio x-akselin yläpuolella. Sen leveys on 4 – 0 = 4 ja korkeus on 2. Pinta-ala on

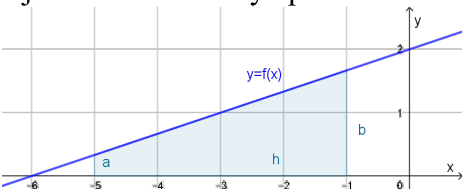
$$A=4\cdot 2=8.$$

Integraalin arvo on siis 8.

Vastaus a) 3
b) 8

35

a) Piirretään kuva. Välillä $[-5,-1]$ funktion $f(x)=\frac{1}{3}x+2$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.



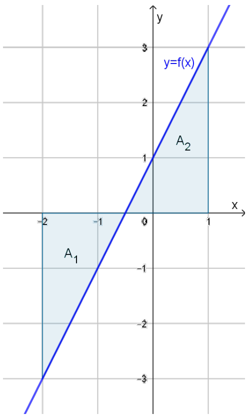
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a+b}{2}h \\
&= \frac{f(-5)+f(-1)}{2}\cdot\left(-1-(-5)\right) \\
&= \frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{2}\cdot 4 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Päätellään määrätty integraali.

$$\int_{-5}^{-1}\left(\frac{1}{3}x+2\right)\mathrm{d}x = 4$$

b) Välillä $[-2,1]$ funktion $f(x)=2x+1$ kuvaajan ja x -akselin rajaama alue koostuu kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta, joista toinen sijaitsee x -akselin alapuolella ja toinen yläpuolella. Lasketaan alueiden pinta-alat ja määritetään sitä varten funktion nollakohta.
Funktion f nollakohta on

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$



$$A_1=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-(-2)\right)\cdot\left|f(-2)\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$$

$$A_2=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot f(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$$

Lasketaan integraalin arvo.

$$\int_{-2}^{1}(2x-1)\,\mathrm{d}x=-A_1+A_2=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=0$$

Vastaus a) 4
b) 0

36

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaan ja hyödynnetään tunnettuja tietoja.

a)
$$\int_0^5 \left(-2x^2-4x+15\right)\mathrm{d}x = \int_0^5 -2x^2\mathrm{d}x + \int_0^5 -4x\,\mathrm{d}x + \int_0^5 15\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\int_0^5 x^2\mathrm{d}x - 4\int_0^5 x\,\mathrm{d}x + 15\int_0^5 1\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\cdot\frac{125}{3} - 4\cdot\frac{25}{2} + 15\cdot 5$$
$$= -\frac{175}{3}$$

b)

$$\int_0^3 \left(x^2+1\right)dx + \int_3^5 (x-1)^2\,dx + 2\int_3^0 x\,dx$$

$$= \int_0^3 x^2 dx + \int_0^3 1\,dx + \int_3^5 \left(x^2-2x+1\right)dx - 2\int_0^3 x\,dx$$

$$= \int_0^3 x^2 dx + \int_0^3 1\,dx + \int_3^5 x^2 dx - 2\int_3^5 x\,dx + \int_3^5 1\,dx - 2\int_0^3 x\,dx$$

$$= \int_0^5 x^2 dx - 2\int_0^5 x\,dx + \int_0^5 1\,dx$$

$$= \frac{125}{3} - 2\cdot\frac{25}{2} + 5$$

$$= \frac{65}{3}$$

Vastaus a) $-\dfrac{175}{3}$

b) $\dfrac{65}{3}$

37

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaan sellaiseen muotoon, että voidaan hyödyntää pinta-aloja. Alueet A_1 ja A_3 ovat x-akselin yläpuolella ja A_2 sen alapuolella.

a)
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{10} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x \\ &= A_1 - A_2 + A_3 \\ &= 13 - 48 + 32 \\ &= -3\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}&\int_{0}^{8} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{8} f(x)\mathrm{d}x + \int_{8}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -A_1 \\ &= -13\end{aligned}$$

c)

$$\int_{0}^{10} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{7} f(x)\mathrm{d}x + \int_{10}^{7} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{10} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{7} f(x)\mathrm{d}x - \int_{7}^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{10} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{10} f(x)\mathrm{d}x + \int_{10}^{-3} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

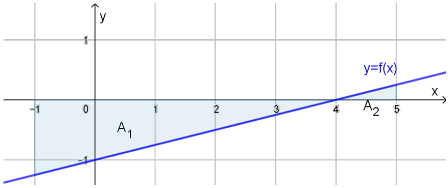
$$= -A_1$$

$$= -13$$

Vastaus a) -3
b) -13
c) -13

38

a) Piirretään kuva.



Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x-1$ kuvaajan ja x -akselin rajaama alue välillä $\left[-1,5\right]$ muodostuu kahdesta kolmion muotoisesta alueesta, joista A_1 on x -akselin alapuolella ja A_2 sen yläpuolella.
Funktion nollakohta on $x=4$. Lasketaan kokonaispinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A = A_1 + A_2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(4-(-1)\right)\cdot\left|f(-1)\right| + \frac{1}{2}\cdot\left(5-4\right)\cdot f(5) \\
&= \frac{25}{8}+\frac{1}{8} \\
&= \frac{13}{4}
\end{aligned}
$$

b) Muokataan määrätty integraali muotoon, jossa voidaan hyödyntää edellä laskettuja pinta-aloja.

$$\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{4}x-1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{4}x-1\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{5}\left(\frac{1}{4}x-1\right)\mathrm{d}x$$
$$=-A_1+A_2$$
$$=-\frac{25}{8}+\frac{1}{8}$$
$$=-3$$

Vastaus a) $\frac{13}{4}$

b) -3

39

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaisesti niin, että voidaan hyödyntää tunnettuja arvoja.

a) $$\int_0^3 \left(3x^2-4\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 3x^2\mathrm{d}x + \int_0^3 -4\,\mathrm{d}x$$
$$= 3\int_0^3 x^2\mathrm{d}x - \int_0^3 4\,\mathrm{d}x$$

Ensimmäisen integraalin arvo on $3 \cdot 9 = 27$.

Kun $f(x) = 4$, niin funktion kuvaaja on vaakasuora suora $y = 4$ ja sen ja x-akselin välillä $[0, 3]$ rajaama alue on suorakulmio, jonka pinta-ala on $(3 - 0) \cdot 4 = 12$. Tämä on samalla jälkimmäisen integraalin arvo.
Saadaan, että

$$\int_0^3 \left(3x^2-4\right)\mathrm{d}x = 3\int_0^3 x^2\mathrm{d}x - \int_0^3 4\,\mathrm{d}x = 27-12=15$$

b)

$$\int_3^0 \left(-x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x + \int_0^3 \left(-5x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^3 \left(-x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x + \int_0^3 \left(-5x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x + \int_0^3 \left(-5x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$$

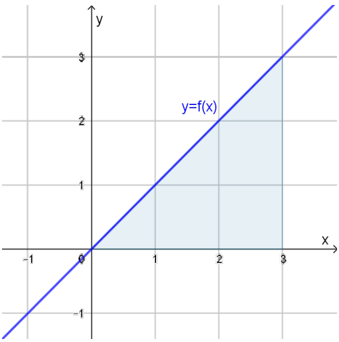
$$= \int_0^3 \left(x^2-3x+2-5x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 \left(-4x^2+2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= -4\int_0^3 x^2\mathrm{d}x + 2\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$$

Ensimmäisen integraalin arvo on $-4 \cdot 9 = -36$.

Piirretään funktion $f(x) = x$ kuvaaja.



Kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 3]$ suorakulmaisen kolmion, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}$.

Saadaan, että

$$\int_3^0 \left(-x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x+\int_0^3 \left(-5x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=-4\int_0^3 x^2\mathrm{d}x+2\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$=-36+2\cdot\frac{9}{2}$$

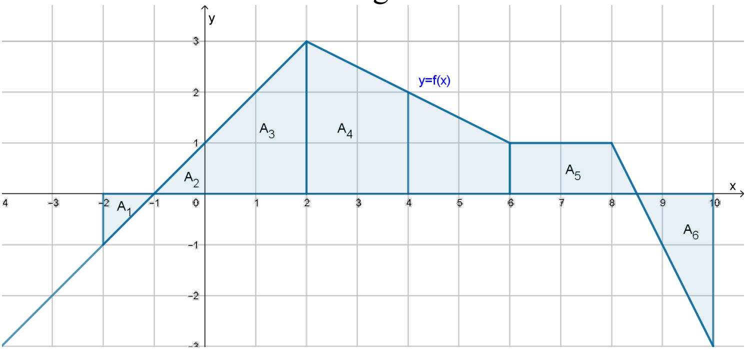
$$=-27$$

Vastaus a) 15

b) -27

40

Jaetaan funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue osiin, joiden avulla voidaan määrittää integraalit.



a) $$\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -A_1 + (A_2 + A_3) + A_4$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right) + \left(\frac{3+2}{2}\cdot 2\right)$$

$$= 9$$

b)

$$\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = A_3 + A_4 + A_5 - A_6$$

$$= \left(\frac{3+1}{2}\cdot 2\right) + \left(\frac{3+2}{2}\cdot 2\right) + \left(\frac{\frac{5}{2}+2}{2}\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot \frac{3}{2}\cdot 3\right)$$

$$= 9$$

Vastaus a) 9
b) 9

41

Muokataan lausekkeita määrätyn integraalin laskusääntöjen mukaan.

a) $$\int_1^6 \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^6 g(x)\mathrm{d}x$$
$$= 6+1$$
$$= 7$$

b) $$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x$$
$$= 6-(-2)$$
$$= 8$$

c) $$\int_3^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_6^1 \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\underbrace{\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x}_{b)} - \underbrace{\int_1^6 \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x}_{a)}$$
$$= -8-7$$
$$= -15$$

Vastaus a) 7
b) 8
c) −15

42

a) Tummennettu alue on funktion f ja x-akselin rajaama alue välillä $[1,3]$ ja se sijaitsee x-akselin yläpuolella.

$$A = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$$

b) Tummennettu alue on funktion g ja x-akselin rajaama alue välillä $[1,6]$. Välillä $[2,4]$ alue on x-akselin alapuolella ja väleillä $[1, 2]$ ja $[4, 6]$ x-akselin yläpuolella.

$$A = \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_2^4 g(x)\mathrm{d}x + \int_4^6 g(x)\mathrm{d}x$$

c) Tummennettu alue on x-akselin yläpuolella. Se koostuu funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaamasta alueesta välillä $[-6,2]$ ja funktion g kuvaajan ja x-akselin rajaamasta alueesta välillä $[2,6]$.

$$A = \int_{-6}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Vastaus

a) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$

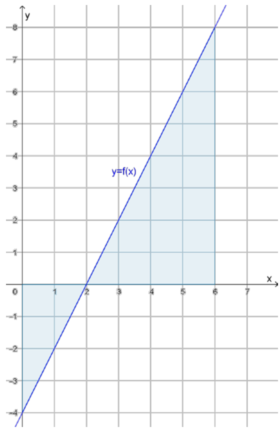
b) $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_2^4 g(x)\mathrm{d}x + \int_4^6 g(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-6}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$

43

Piirretään funktion $f(x) = 2x - 4$ kuvaaja ja hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä. Funktion nollakohta on $x = 2$, joten välillä $[0,2]$ integraali on pinta-alan vastaluku eli

$$\int_0^2 (2x-4)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot |f(0)| = -4$$



On siis löydettävä sellainen a, että

$$\int_2^a (2x-4)\,\mathrm{d}x = 21-(-4) = 25.$$

Kun $a > 2$, niin funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[2, a]$ suorakulmaisen kolmion, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella.

Kolmion pinta-ala ja integraalin $\int_2^a (2x-4)\,\mathrm{d}x$ arvo on

$$\frac{1}{2}\cdot(a-2)\cdot f(a) = \frac{1}{2}(a-2)(2a-4) = a^2 - 4a + 4$$

Ratkaistaan a yhtälöstä.

$$a^2 - 4a + 4 = 25$$

$$a = -3 \text{ tai } a = 7$$

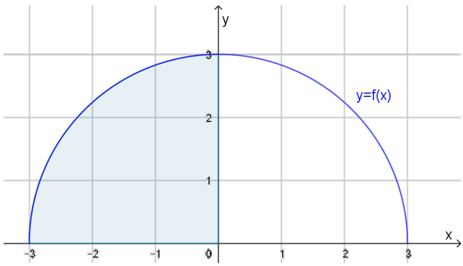
Koska on oltava $a > 0$, niin vain $a = 7$ kelpaa.

HUOM! Tehtävän voi myös ratkaista luomalla geometriaohjelmassa muuttujan `integraali=1/2*(a-2)*f(a)` avulla asettamalla liukukytkimen tuntemattomalle a.

Vastaus $\quad a = 7$

44

a) Piirretään käyrän $y=\sqrt{9-x^2}$ kuvaaja ja hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



Käyrä on x-akselin yläpuolella, joten määrätty integraali on yhtä suuri kuin käyrän ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala annetulla välillä.

Käyrä $y=\sqrt{9-x^2}$ on puoliympyrä, sillä

$$y=\underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{\geq 0} \quad \Big|\,()^2,\ \text{yhtälö toteutuu, kun } y\geq 0$$

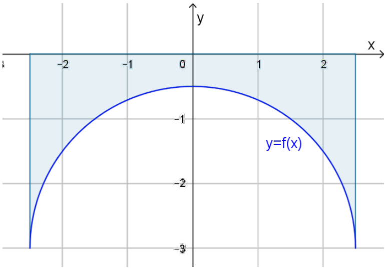
$$y^2=9-x^2$$

$$x^2+y^2=3^2,\ \text{missä } y\geq 0$$

Yhtälö esittää ylempää puolikasta ympyrästä, jonka keskipiste on $(0,0)$ ja säde on 3. Määrätty integraali on neljännesympyrän ala.

$$\int_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2=\frac{9\pi}{4}$$

b) Piirretään käyrän $y=\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-3$ kuvaaja ja hyödynnetään jälleen integraalin ja pinta-alan yhteyttä.



Käyrä on x-akselin alapuolella, joten määrätty integraali on yhtä suuri kuin käyrän ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluku annetulla välillä.
Käyrä on puoliympyrän kuvaaja, sillä

$$y=\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-3$$

$$y+3=\underbrace{\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}}_{\geq 0} \qquad \left|\,()^2,\right. \text{ yhtälö toteutuu, kun } y\geq -3$$

$$(y+3)^2=\frac{25}{4}-x^2$$

$$x^2+(y+3)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2, \text{ missä } y\geq -3$$

Yhtälö esittää ylempää puolikasta ympyrästä, jonka keskipiste on $(0,-3)$ ja säde on $\frac{5}{2}$. Väritetty pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmiosta puoliympyrän ala. Integraali on siis tämän pinta-alan vastaluku.

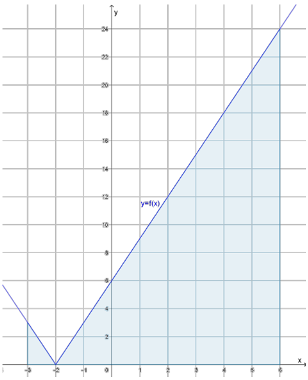
$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-3\right)\mathrm{d}x=-\left(\left(\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\cdot 3-\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)=\frac{25\pi}{8}-15$$

Vastaus a) $\frac{9\pi}{4}$

b) $\frac{25\pi}{8}-15$

45

a) Piirretään funktion $f(x)=|3x+6|$ kuvaaja ja hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä välillä $[-3,6]$.



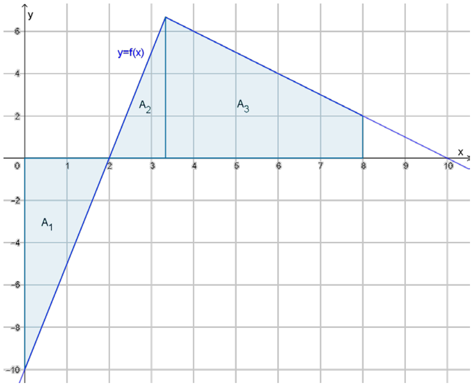
Kuvaaja on x-akselin yläpuolella, joten määrätty integraali on yhtä suuri kuin kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala annetulla välillä. Pinta-ala muodostuu kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\int_{-3}^{6}|3x+6|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-2}|3x+6|\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{6}|3x+6|\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\big(-2-(-3)\big)\cdot f(-3)+\frac{1}{2}\cdot\big(6-(-2)\big)\cdot f(6)$$

$$=\frac{195}{2}$$

b) Piirretään funktion $f(x)=2x-|3x-10|$ kuvaaja ja hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä välillä $[0,8]$.



Kuvaaja on välillä $[0,2]$ x -akselin alapuolella, jolloin määrätty integraali on yhtä suuri kuin pinta-alan vastaluku ja välillä $[2,8]$ x -akselin yläpuolella, jolloin määrätty integraali on yhtä suuri kuin kuvaajan ja x -akselin rajaaman alueen pinta-ala.

Pinta-ala muodostuu kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta ja yhdestä puolisuunnikkaasta. Kuvaajan huippu sijaitsee kohdassa, jossa lauseke saavuttaa maksimiarvonsa eli kun

$$3x-10=0$$
$$x=\frac{10}{3}$$

Nyt voidaan laskea pinta-alat ja määrätty integraali:

$$\int_0^8 2x - |3x-10| \, \mathrm{d}x = -A_1 + A_2 + A_3$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |f(0)| + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{3} - 2 \right) \cdot f\left(\frac{10}{3} \right) + \frac{f\left(\frac{10}{3} \right) + f(8)}{2} \cdot \left(8 - \frac{10}{3} \right)$$

$$= -10 + \frac{40}{9} + \frac{182}{9}$$

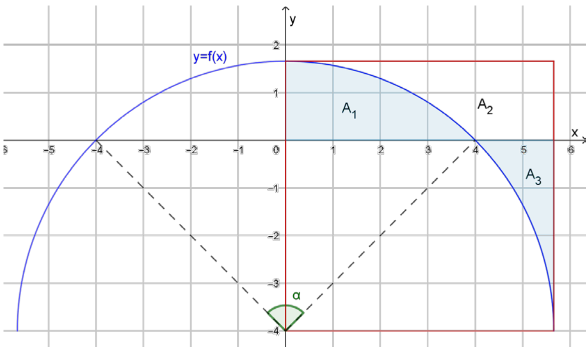
$$= \frac{44}{3}$$

Vastaus a) $\frac{195}{2}$

b) $\frac{44}{3}$

46

Piirretään käyrän $y=\sqrt{32-x^2}-4$ kuvaaja ja hyödynnetään integraalin ja pinta-alan yhteyttä välillä $\left[0,4\sqrt{2}\right]$. Kuvaaja on välillä $[0,4]$ x-akselin yläpuolella, ja välillä $\left[4,4\sqrt{2}\right]$ x-akselin alapuolella. Piirretään lisäksi apukuvioita, joita voidaan hyödyntää pinta-alan laskemisessa.



Käyrä on puoliympyrän kuvaaja, sillä

$$y=\sqrt{32-x^2}-4$$

$$y+4=\underbrace{\sqrt{32-x^2}}_{\geq 0} \qquad \Big|\,()^2,\ \text{yhtälö toteutuu, kun } y\geq -4$$

$$(y+4)^2=32-x^2$$

$$x^2+(y+4)^2=32,\ \text{missä } y\geq -4$$

Yhtälö esittää ylempää puolikasta ympyrästä, jonka keskipiste on $(0,-4)$ ja säde $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Kuvan punainen alue on siis neliö, jonka sivun pituus on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

Lasketaan pinta-ala osissa. A_1 on puolet kulman α ja x-akselin rajaaman segmentin alasta. Kulman suuruus on

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4}{4}$$

$$\alpha=90°$$

ja pinta-alaksi saadaan

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{360°}\pi\cdot\left(\sqrt{32}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=4\pi-8\,.$$

x-akselin alapuolelle jäävä ala A_3 saadaan x-akselin yläpuolelle muodostuvan suorakaiteen, ympyrän neljänneksen ja punaisen neliön avulla.

$$\begin{aligned}
A_3 &= A_{\text{neliö}}-A_{\frac{1}{4}-\text{ympyrä}}-A_2\\
&=4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}-\frac{1}{4}\pi\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(\underbrace{4\sqrt{2}\cdot\left(4\sqrt{2}-4\right)}_{A_{\text{suorakaide}}}-\underbrace{\left(4\pi-8\right)}_{A_1}\right)\\
&=32-8\pi-\left(40-16\sqrt{2}-4\pi\right)\\
&=-8+16\sqrt{2}-4\pi
\end{aligned}$$

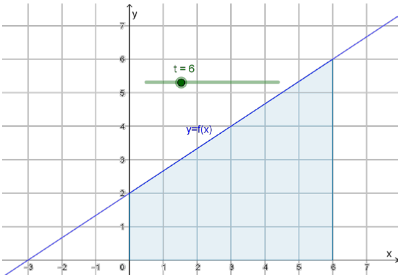
Integraalin tarkka arvo saadaan määritettyä pinta-alojen avulla

$$\begin{aligned}\int_0^{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{32-x^2}-4\right)\mathrm{d}x &= A_1 - A_3 \\ &= 4\pi - 8 - \left(-8 + 16\sqrt{2} - 4\pi\right) \\ &= 8\pi - 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

Vastaus $\quad 8\pi - 16\sqrt{2}$

47

a) Piirretään funktion $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ kuvaaja. Kuvaaja on välillä $[0,t]$ x-akselin yläpuolella ja rajaa puolisuunnikkaan muotoisen alueen.



Integraalin lauseke pinta-alan avulla lausuttuna on

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{2}{3}x+2\right)\mathrm{d}x &= \frac{2+f(t)}{2}\cdot t\\ &= \frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{3}t+2\right)t\\ &= \frac{1}{3}t^2+2t\end{aligned}$$

b) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{3}t^2+2t\right)=2\cdot\frac{1}{3}t+2=\frac{2}{3}t+2$.

Derivoitu lauseke eroaa alkuperäisestä lausekkeesta vain muuttujakirjaimen osalta, muuten lauseke on sama.

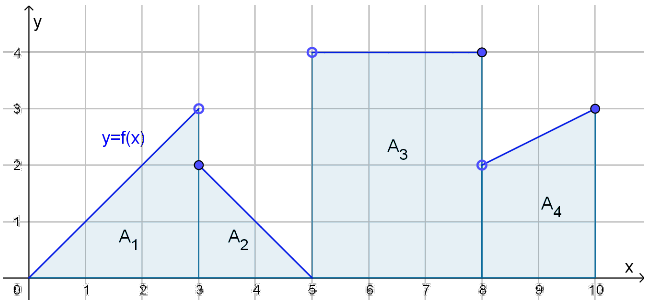
Vastaus a) $\frac{1}{3}t^2+2t$

b) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{3}t^2+2t\right)=\frac{2}{3}t+2$.

Lauseke on muuttujakirjainta vaille sama kuin alkuperäinen integroitava lauseke.

48

Määrätty integraali saadaan laskettua yhteen integraalien arvot epäjatkuvuuskohtien rajaamilta väleiltä, sillä epäjatkuvuuskohtia on äärellinen määrä. Määritetään integraali pinta-alojen avulla ja määrätyn integraalin laskusääntöjä hyödyntäen.

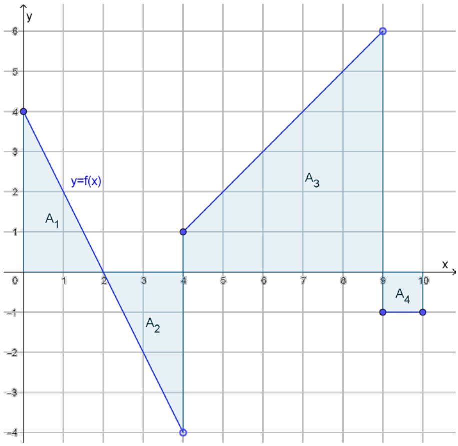


$$
\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^8 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_8^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right) + (3\cdot 4) + \left(\frac{2+3}{2}\cdot 2\right) \\
&= 23\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus $23\frac{1}{2}$

49

Piirretään paloittain määritellyn funktion f kuvaaja. Edellisen tehtävän perusteella integraali voidaan määrittää laskemalla yhteen integraalien arvot epäjatkuvuuskohtien rajaamilla väleillä. Määritetään integraali pinta-alojen ja määrätyn integraalin laskusääntöjen avulla.



$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{4} f(x)\mathrm{d}x + \int_4^{9} f(x)\mathrm{d}x + \int_9^{10} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right) + \left(\frac{1+6}{2}\cdot 5\right) - (1\cdot 1)$$

$$= 4 - 4 + \frac{35}{2} - 1$$

$$= \frac{33}{2}$$

Vastaus $\frac{33}{2}$