224

Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio funktion $f(x)=x^2+1$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[-1, 2]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen kolmea osaväliä ja laskentapisteenä osavälin keskipistettä.

Jaetaan väli $[-1, 2]$ kolmeen osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d=\frac{2-(-1)}{3}=1$.

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot f(-0,5)+1\cdot f(0,5)+1\cdot f(1,5)\\ &= f(-0,5)+f(0,5)+f(1,5)\\ &= 1,25+1,25+3,25\\ &= 5,75\approx 5,8\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 5,8$

225

Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio suoran $y = f(x) = 2 - x$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[-2, 2]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen neljää osaväliä.

Jaetaan väli $[-2, 2]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d = \dfrac{2-(-2)}{4} = 1$.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä.

$$\begin{aligned} A &\approx 1 \cdot (f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)) \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä.

$$\begin{aligned} A &\approx 1 \cdot (f(-1,5) + f(-0,5) + f(0,5) + f(1,5)) \\ &= 3,5 + 2,5 + 1,5 + 0,5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $A \approx 10$ b) $A \approx 8$

Pinta-alan tarkka arvo on $A = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

226

Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, 4]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen kolmea osaväliä.

Jaetaan väli $[1, 4]$ kolmeen osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d = \frac{4-1}{3} = 1$.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1 \cdot (f(1) + f(2) + f(3)) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \\
&= \frac{11}{6} = 1{,}833... \approx 1{,}8
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1 \cdot (f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5)) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} \\
&= \frac{142}{105} = 1{,}352... \approx 1{,}4
\end{aligned}
$$

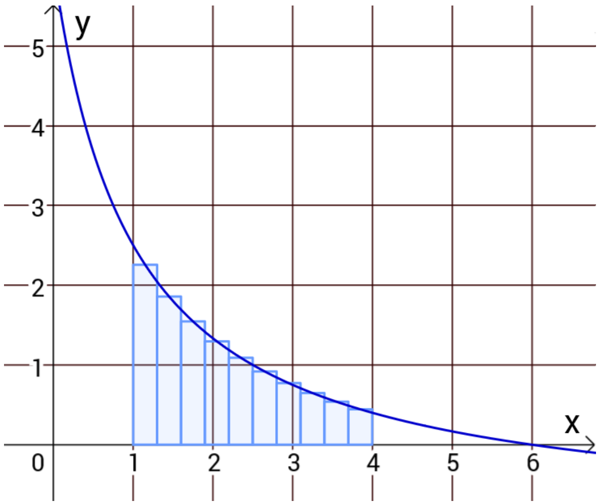
Vastaus a) $A \approx 1,8$ b) $A \approx 1,4$

Keskipistettä käyttämällä saadaan tarkempi arvio.

227

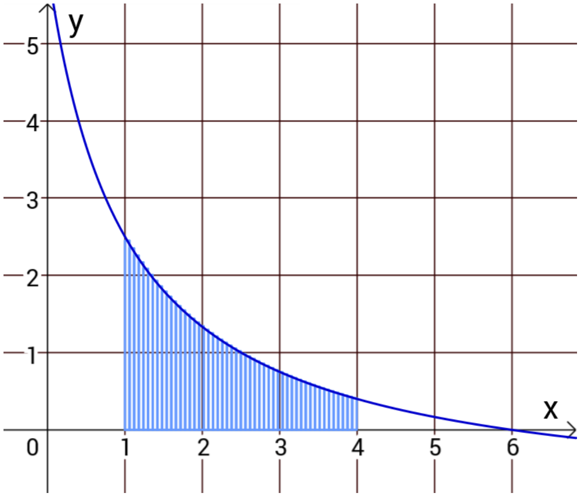
Funktion $f(x)=\dfrac{6-x}{x+1}$ kuvaaja ja x -akseli rajaavat välillä $[1, 4]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 10.



$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\frac{6-x}{x+1}, 1, 4, 10, 0.5\right) \approx 3{,}409$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 50.



$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\frac{6-x}{x+1}, 1, 4, 50, 0.5\right) \approx 3,414$$

Vastaus a) $A \approx 3,409$ b) $A \approx 3,414$

228

Käyrä $y = f(x) = -0,2x^2 + 2$ ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 3]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä ja osavälien lukumäärää 10, 50 ja 100.

$$A_{10} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 10, 0\right) \approx 4,4610$$
$$A_{50} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 50, 0\right) \approx 4,2536$$
$$A_{100} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 100, 0\right) \approx 4,2269$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 10, 50 ja 100.

$$A_{10} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 10, 0.5\right) \approx 4,2045$$
$$A_{50} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 50, 0.5\right) \approx 4,2002$$
$$A_{100} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(-0.2x^2 + 2, 0, 3, 100, 0.5\right) \approx 4,2000$$

Vastaus a) $A_{10} \approx 4,4610$, $A_{50} \approx 4,2536$, $A_{100} \approx 4,2269$

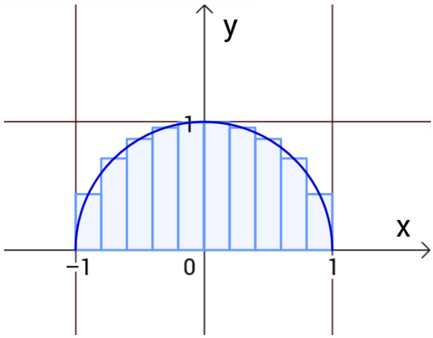
b) $A_{10} \approx 4,2045$, $A_{50} \approx 4,2002$, $A_{100} \approx 4,2000$

Keskipistettä käytettäessä arvio suppenee nopeammin kohti oikeaa pinta-alaa.

229

Funktion $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ kuvaaja ja x -akseli rajaavat välillä $[-1,1]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 10.



$$A_{10} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\text{sqrt}(1-x^2), -1, 1, 10, 0.5\right) \approx 1{,}5860$$

b) Alkuperäisen funktion $f(x)$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-1, 1]$ yksikköympyrän puolikkaan.

a-kohdan perusteella yksikköympyrän pinta-ala on siis
$A \approx 2 \cdot A_{10} \approx 3{,}172$

Yksikköympyrän pinta-alan tarkka arvo on $A = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta.

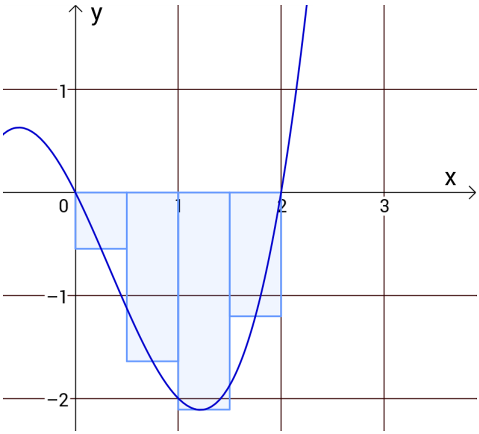
$$\frac{3{,}172 - \pi}{\pi} \cdot 100\,\% = 0{,}9678...\% \approx 0{,}97\,\%$$

Vastaus a) $A \approx 1{,}5860$

b) $A \approx 3{,}172$, ero oikeaan pinta-alaan (π) on noin $0{,}97\,\%$

230

Funktion $f(x)=x^3-x^2-2x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,2]$ alueen.



Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja neljää osaväliä. Jaetaan väli $[0,2]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{2-0}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5\,.$$

Kuvaajasta voidaan huomata, että alue sijaitsee x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned}A&\approx 0,5\cdot(|f(0,25)|+|f(0,75)|+|f(1,25)|+|f(1,75)|)\\&=0,5\cdot(0,546875+1,640625+2,109375+1,203125)\\&=2,75\approx 2,8\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 2,8$

231

Funktiolla $f(x) = x^2 - 4$ on nollakohdat $x = -2$ ja $x = 2$, joten funktion kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-2, 2]$ alueen. Alue rajautuu x-akselin alapuolelle, koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli.

Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja neljää osaväliä. Jaetaan väli $[-2, 2]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{2-(-2)}{4} = 1.$$

Alue sijaitsee siis x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned} A &\approx 1 \cdot (|f(-1,5)| + |f(-0,5)| + |f(0,5)| + |f(1,5)|) \\ &= 1 \cdot (1,75 + 3,75 + 3,75 + 1,75) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Vastaus $A \approx 11$

232

Funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $[0,1]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,2$ ja osavälien lukumäärä on 5.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
***f*(*x*)**	0,23	0,64	0,65	0,53	1,06	1,26

$$\begin{aligned} A &\approx 0,2\cdot(f(0)+f(0,2)+f(0,4)+f(0,6)+f(0,8)) \\ &= 0,2\cdot(0,23+0,64+0,65+0,53+1,06) \\ &= 0,622 \approx 0,62 \end{aligned}$$

Vastaus $\quad A \approx 0,62$

233

Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio funktion $g(x)=\sqrt{\log_2 x}$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, 5]$ rajaaman alueen pinta-alalle käyttäen neljää osaväliä ja laskentapisteenä osavälin keskipistettä.

Jaetaan väli $[1, 5]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d=\frac{5-1}{4}=1$.

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx 1\cdot(f(1,5)+f(2,5)+f(3,5)+f(4,5)) \\ &= 4,732... \approx 4,73 \end{aligned}$$

Vastaus $\quad A \approx 4,73$

234

Funktion $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,3]$ alueen, jonka pinta-alan tarkka arvo on $3\sqrt[3]{4}-0,75\ (\approx 4,01)$.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä ja kolmea osaväliä.

Osavälin pituudeksi saadaan $d=\dfrac{3-0}{3}=1$.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot(f(0)+f(1)+f(2))\\ &=3,702...\approx 3,70\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia arvio eroaa oikeasta arvosta.

$$\frac{3\sqrt[3]{4}-0,75-3,70}{3\sqrt[3]{4}-0,75}\cdot 100\,\%=7,78...\,\%\approx 7,8\,\%\ \text{(liian pieni)}$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja kolmea osaväliä.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot(f(0,5)+f(1,5)+f(2,5))\\ &=4,020...\approx 4,02\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia arvio eroaa oikeasta arvosta.

$$\frac{4,02-3\sqrt[3]{4}-0,75}{3\sqrt[3]{4}-0,75}\cdot 100\,\%=0,19...\,\%\approx 0,2\,\%\ \text{(liian suuri)}$$

Vastaus a) $A \approx 3,70$, arvio on noin $7,8\%$ liian pieni.

b) $A \approx 4,02$, arvio on noin $0,2\%$ liian suuri.

235

Funktion $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{1+x^2}}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 4]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 10.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\frac{10}{\text{sqrt}(1+x^2)}, 0, 4, 10, 0.5\right) \approx 20{,}951$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 30.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\frac{10}{\text{sqrt}(1+x^2)}, 0, 4, 30, 0.5\right) \approx 20{,}948$$

c) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja osavälien lukumäärää 100.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\frac{10}{\text{sqrt}(1+x^2)}, 0, 4, 100, 0.5\right) \approx 20{,}947$$

Vastaus a) $A \approx 20{,}951$ b) $A \approx 20{,}948$ c) $A \approx 20{,}947$

236

Funktion $f(x) = x^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 2]$ alueen. Pinta-alan tarkka arvo kuuden desimaalin tarkkuudella on 2,050446.

a) Tutkitaan geometriaohjelmalla, kuinka monta osaväliä käyttäen saadaan oikea arvio pinta-alalle kolmen desimaalin tarkkuudella ($A \approx 2,050$), kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä.

$$A_{10} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 10, 0.5\right) \approx 2,048$$

$$A_{15} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 15, 0.5\right) \approx 2,049$$

$$A_{16} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 16, 0.5\right) \approx 2,050$$

b) Tutkitaan geometriaohjelmalla, kuinka monta osaväliä käyttäen saadaan oikea arvio pinta-alalle neljän desimaalin tarkkuudella ($A \approx 2,0504$), kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä.

$$A_{20} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 20, 0.5\right) \approx 2,0498$$

$$A_{40} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 40, 0.5\right) \approx 2,0503$$

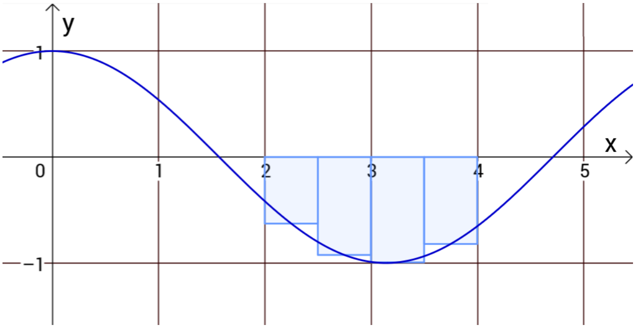
$$A_{49} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 49, 0.5\right) \approx 2,0503$$

$$A_{50} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(x^x, 1, 2, 50, 0.5\right) \approx 2,0504$$

Vastaus a) 16 (A_{16} = 2,0495...) b) 50 (A_{50} = 2,05035...)

237

Funktion $y = f(x) = \cos x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[2, 4]$ alueen.



Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja neljää osaväliä. Jaetaan väli $[2, 4]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

Kuvaajasta voidaan huomata, että alue sijaitsee x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned} A &\approx 0,5 \cdot (|f(2,25)| + |f(2,75)| + |f(3,25)| + |f(3,75)|) \\ &= 1,6835 \approx 1,68 \end{aligned}$$

Vastaus $\quad A \approx 1,68$

238

Funktiolla $f(x)=x^2+5x$ on nollakohdat $x=-5$ ja $x=0$, joten funktion kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-5, 0]$ alueen. Alue rajautuu x-akselin alapuolelle, koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli.

Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja 30 osaväliä.

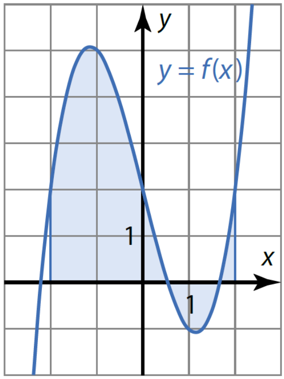
Alue sijaitsee siis x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$A \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\left|x^2+5x\right|, -5, 0, 30, 0.5\right) \approx 20{,}845$$

Vastaus $\quad A \approx 20{,}845$

239

Funktion $f(x)=x^3-4x+2$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-2, 2]$ alueen.



Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin keskipistettä ja neljää osaväliä. Jaetaan väli $[-2, 2]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{2-(-2)}{4}=1.$$

Kuvaajasta voidaan huomata, että osa alueesta sijaitsee x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot(|f(-1,5)|+|f(-0,5)|+|f(0,5)|+|f(1,5)|)\\ &=1\cdot(4,625+3,875+0,125+0,625)\\ &=9,25\approx 9,3\end{aligned}$$

Vastaus $A\approx 9,3$

240

Funktion $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ kuvaaja ja x -akseli rajaavat välillä $[-1,2]$ alueen.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla arvio pinta-alalle käyttämällä suorakaidesääntöä. Käytetään laskentapisteenä osavälin alkupistettä ja 100 osaväliä. Jaetaan väli $[-1,2]$ sataan osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on

$$d=\frac{2-(-1)}{100}=\frac{3}{100}=0,03.$$

Suorakaidesäännön mukainen arvio pinta-alalle on

$$A\approx 0,03\cdot(f(-1)+f(-1+0,03)+f(-1+2\cdot 0,03)+...+f(1,97)).$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla osavälien alkupisteet, funktion arvot näissä kohdissa ja funktion arvojen summa kerrottuna osavälin pituudella.

	A	B	C	D	E	F
=						
1	-1	0	4.04			
2	-0.97	0.296				
3	-0.94	0.412				
4	-0.91	0.496				
5	-0.88	0.564				
6	-0.85	0.621				
7	-0.82	0.67				
8	-0.79	0.712				

A2 =a1+0.03

	A	B	C	D	E	F
=						
97	1.88	2.76				
98	1.91	2.82				
99	1.94	2.88				
100	1.97	2.94				
101						
102						
103						
104						

A100 =a99+0.03

	A	B	C	D	E	F
=						
1	-1	0	4.04			
2	-0.97	0.296				
3	-0.94	0.412				
4	-0.91	0.496				
5	-0.88	0.564				
6	-0.85	0.621				
7	-0.82	0.67				
8	-0.79	0.712				

B1 $=\sqrt{a1^3+1}$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	-1	0	4.04			
2	-0.97	0.296				
3	-0.94	0.412				
4	-0.91	0.496				
5	-0.88	0.564				
6	-0.85	0.621				
7	-0.82	0.67				
8	-0.79	0.712				

C1 $=0.03\cdot \mathrm{sum}(b1{:}b100)$

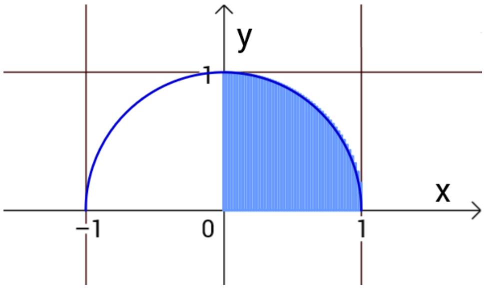
Pinta-alan arvioksi saadaan $A \approx 4,04$.

Vastaus $\quad A \approx 4,04$

241

Funktion $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,1]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä ja osavälien lukumäärää 50.



$A_{50} \approx \text{suorakulmiosumma}\left(\text{sqrt}(1-x^2), 0, 1, 50, 0\right) \approx 0,7946$

b) Alkuperäisen funktion $f(x)$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,1]$ yksikköympyrän neljänneksen.

a-kohdan perusteella yksikköympyrän pinta-ala on siis $A \approx 4 \cdot A_{50} \approx 3,18$.

Yksikköympyrän pinta-alan tarkka arvo on $A=\pi r^2=\pi \cdot 1^2=\pi$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta.

$$\frac{3,18-\pi}{\pi} \cdot 100\,\% \approx 1,2\,\%$$

Vastaus a) $A \approx 0,7946$

b) $A \approx 3,18$, ero oikeaan pinta-alaan (π) on noin $1,2\,\%$.

242

Funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $\left[0,2\right]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä käyttäen laskentapisteenä osavälin alkupistettä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,25$ ja osavälien lukumäärä on 8.

Funktion arvoista voidaan huomata, että alue sijaitsee osittain x-akselin alapuolella. Tällöin suorakulmioiden korkeudet saadaan ottamalla itseisarvot vastaavista funktioiden arvoista.

$$\begin{aligned}A &\approx 0,25\cdot(\left|f(0)\right|+\left|f(0,25)\right|+\left|f(0,50)\right|+\left|f(0,75)\right|+\left|f(1,00)\right| \\ &\quad +\left|f(1,25)\right|+\left|f(1,50)\right|+\left|f(1,75)\right|) \\ &= 0,25\cdot(0,50+0,10+0,15+0,55+2,25+0,20+1,20+1,55) \\ &= 1,625\approx 1,63\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 1,63$

243

Lasketaan virheen suuruus virhekaavalla $E_n = \dfrac{(b-a)^3 \cdot f''(t)}{24n^2}$, missä $[a, b]$ on tarkasteltava väli, n on osavälien lukumäärä, f'' on funktion f toinen derivaatta ja t on jokin välille $]a, b[$ kuuluva luku.

a) Lasketaan funktion $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 7x$ toinen derivaatta.

$$f'(x) = 3x + 7$$
$$f''(x) = 3$$

Tällöin virheen suuruus käytettäessä neljää osaväliä on

$$E_4 = \frac{(4-2)^3 \cdot 3}{24 \cdot 4^2} = 0{,}0625$$

b) Lasketaan funktion $f(x) = 4x^2 - x^3$ toinen derivaatta.

$$f'(x) = 8x - 3x^2$$
$$f''(x) = 8 - 6x$$

Jos tarkastellaan vain virheen suuruutta, voidaan määrittää milloin $\left|f''(t)\right|$ saa suurimman arvonsa. Tällöin saadaan myös virheelle suurin mahdollinen arvio. Koska $f''(t)$ on ensimmäisen asteen polynomifunktio, saa se kaikki arvot päätepistearvojensa väliltä tarkasteluvälillä $\left[0, 4\right]$. Tällöin $f''(0) = 8$ ja $f''(4) = -16$, joten suurin arvo, minkä $\left|f''(t)\right|$ voi saada on 16.

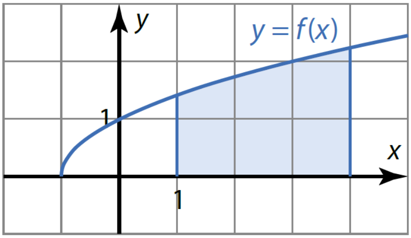
Tällöin virheen suuruus käytettäessä kahdeksaa osaväliä on

$$\left|E_8\right| = \frac{(4-0)^3 \cdot 16}{24 \cdot 8^2} = \frac{2}{3} = 0{,}6666... \approx 0{,}667$$

Vastaus a) $0{,}0625$ b) $0{,}6666... \approx 0{,}667$

244

Funktion $f(x)=\sqrt{x+1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,4]$ alueen.



a) Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen yhtä osaväliä. Jaetaan väli $[1,4]$ yhteen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h=\frac{4-1}{1}=3.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A&\approx 3\cdot(\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(4))\\&=3\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})\\&=5,4754...\approx 5,5\end{aligned}$$

b) Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kolmea osaväliä. Jaetaan väli $[1, 4]$ kolmeen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h = \frac{4-1}{3} = 1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \frac{1}{2} f(4)\right) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \\ &= 5,557... \approx 5,6 \end{aligned}$$

Vastaus a) $A \approx 5,5$ b) $A \approx 5,6$

245

Funktion $f(x)=2^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,3]$ alueen.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen neljää osaväliä. Jaetaan väli $[1,3]$ neljään osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5\,.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx 0,5\cdot\left(\frac{1}{2}f(1)+f(1,5)+f(2)+f(2,5)+\frac{1}{2}f(3)\right)\\ &=8,7426...\approx 8,7\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 8,7$

246

Käyrä $y = f(x) = 4 - x^2$ leikkaa x-akselin kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$. Kuvaaja ja x-akseli rajaavat siis välillä $[-2, 2]$ alueen.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen yksikön mittaisia osavälejä. Välillä $[-2, 2]$ on siis neljä osaväliä.

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2} f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + \frac{1}{2} f(2)\right) \\
&= 10{,}0
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad A \approx 10{,}0$

247

Funktion $f(x)=\dfrac{6-x}{x+1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 4]$ alueen. Määritetään arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä.

a) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 10.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(\frac{6-x}{x+1}, 1, 4, 10\right) \approx 3{,}425$$

b) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 50.

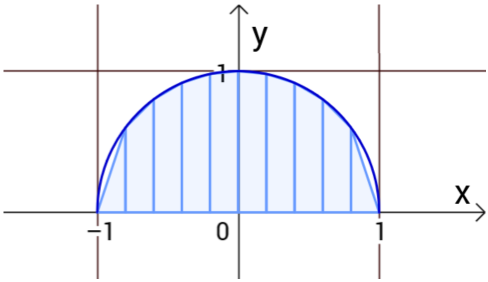
$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(\frac{6-x}{x+1}, 1, 4, 50\right) \approx 3{,}414$$

Vastaus a) $A \approx 3{,}425$ b) $A \approx 3{,}414$

248

Funktion $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-1,1]$ alueen.

a) Lasketaan arvio pinta-alalle geometriaohjelmalla puolisuunnikassäännöllä käyttäen osavälien lukumäärää 10.



$A_{10} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(\text{sqrt}(1-x^2), -1, 1, 10\right) \approx 1{,}5185$

b) Alkuperäisen funktion $f(x)$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-1,1]$ yksikköympyrän puolikkaan.

a-kohdan perusteella yksikköympyrän pinta-ala on siis
$A \approx 2 \cdot A_{10} \approx 3{,}037$

Yksikköympyrän pinta-alan tarkka arvo on $A=\pi r^2=\pi\cdot 1^2=\pi$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta.

$$\frac{\pi-3{,}037}{\pi}\cdot 100\,\% = 3{,}329...\,\% \approx 3{,}3\,\% \quad \text{(liian pieni)}$$

Vastaus a) $A \approx 1,5185$
b) $A \approx 3,037$, ero oikeaan pinta-alaan (π) on noin $3,3\%$.

249

Funktion f kuvaaja ja x -akseli rajaavat alueen välillä $[-1, 2]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 6.

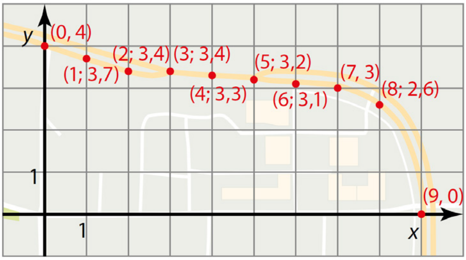
x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
***f*(*x*)**	0,8	0,7	1,0	1,7	2,8	3,3	2,2

$$
\begin{aligned}
A &\approx 0,5\cdot\left(\frac{1}{2}f(-1)+f(-0,5)+f(0)+f(0,5)+f(1)+f(1,5)+\frac{1}{2}f(2)\right)\\
&=0,5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0,8+0,7+1,0+1,7+2,8+3,3+\frac{1}{2}\cdot 2,2\right)\\
&=5,5
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad A\approx 5,5$

250

Annettujen pisteiden avulla voidaan laskea puolisuunnikassäännöllä pinta-ala, jonka rajaavat keltaisena näkyvä tie ja x-akseli välillä $[0,9]$.



Kuvasta voidaan havaita, että osavälin pituus on 1 ja osavälien lukumäärä on 9.

$$A \approx 1\cdot(\frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$$
$$+f(8)+\frac{1}{2}f(9))$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4+3,7+3,4+3,4+3,3+3,2+3,1+3+2,6+\frac{1}{2}\cdot 0$$
$$=27,7 \text{ (pinta-alayksikköä)}$$

1 pinta-alayksikkö $=50\,\text{m}\cdot 50\,\text{m}=2500\,\text{m}^2=0,25\,\text{ha}$

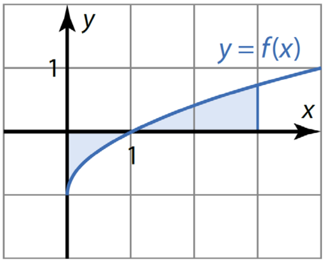
Tällöin alueen pinta-ala hehtaareina on

$$27,7\cdot 0,25\,\text{ha}=6,925\,\text{ha}\approx 6,9\,\text{ha}.$$

Vastaus $\quad A\approx 6,9\,\text{ha}$

251

Funktion $f(x)=\sqrt{x}-1$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 3]$ alueen.



Kuvasta nähdään, että osa alueesta muodostuu x-akselin alapuolelle. Tällöin puolisuunnikkaan sivun pituuden laskemiseksi, funktion arvosta pitää laskea itseisarvo.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kolmea osaväliä. Jaetaan väli $[0, 3]$ kolmeen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h=\frac{3-0}{3}=1.$$

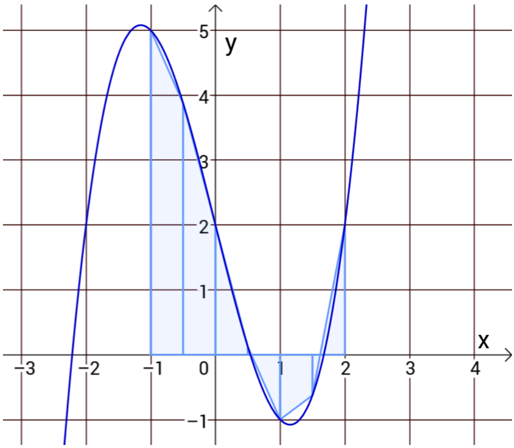
Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx 1\cdot(\frac{1}{2}|f(0)|+|f(1)|+|f(2)|+\frac{1}{2}|f(3)|)\\ &=1,2802...\approx 1,3\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 1,3$

252

Funktion $f(x) = x^3 - 4x + 2$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-1, 2]$ alueen.



Kuvasta nähdään, että osa alueesta muodostuu x-akselin alapuolelle. Tällöin puolisuunnikkaan sivun pituuden laskemiseksi, funktion arvosta pitää laskea itseisarvo.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kuutta osaväliä. Jaetaan väli $[-1, 2]$ kuuteen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx 0,5 \cdot (\frac{1}{2}\left|f(-1)\right| + \left|f(-0,5)\right| + \left|f(0)\right| + \left|f(0,5)\right| + \left|f(1)\right|$$

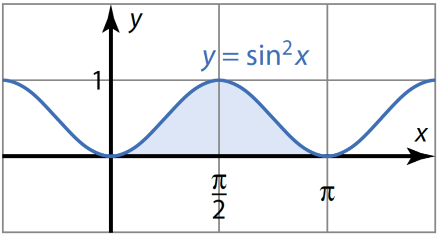
$$+\left|f(1,5)\right| + \frac{1}{2}\left|f(2)\right|)$$

$$= 5,5625... \approx 5,6$$

Vastaus $\qquad A \approx 5,6$

253

Käyrän $y = f(x) = \sin^2 x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, \pi]$ alueen.



Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kahta osaväliä. Jaetaan väli $[0, \pi]$ kahteen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h = \frac{\pi - 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} f(\pi)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57
\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A \approx 1{,}57$

254

a) Funktion $f(x)=\dfrac{1}{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 5]$ alueen. Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen neljää osaväliä. Jaetaan väli $[1, 5]$ neljään osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h=\frac{5-1}{4}=1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx 1\cdot(\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\frac{1}{2}f(5)) \\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} \\ &=1,6833...\approx 1,68 \end{aligned}$$

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta $\ln 5$.

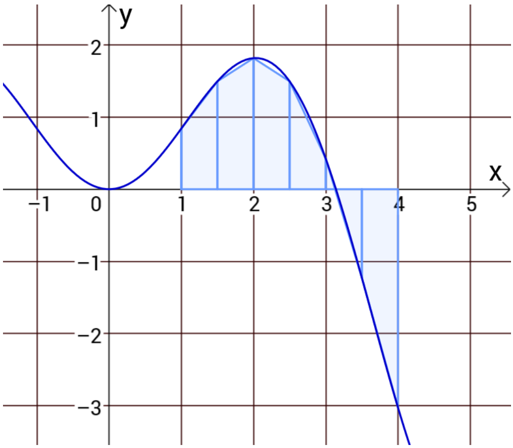
$$\frac{1,68-\ln 5}{\ln 5}\cdot 100\,\% = 4,384...\,\% \approx 4,4\,\% \quad \text{(liian suuri)}$$

Vastaus a) $A\approx 1,68$

b) Arvio on $4,4\,\%$ liian suuri

255

Funktion $f(x) = x\sin x$ kuvaaja ja x -akseli rajaavat välillä $[1, 4]$ alueen.



Kuvasta nähdään, että osa alueesta muodostuu x -akselin alapuolelle. Tällöin puolisuunnikkaan sivun pituuden laskemiseksi, funktion arvosta pitää laskea itseisarvo.

Lasketaan arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä käyttäen kuutta osaväliä. Jaetaan väli $[1, 4]$ kuuteen osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx 0,5 \cdot (\frac{1}{2}|f(1)| + |f(1,5)| + |f(2)| + |f(2,5)| + |f(3)|$$

$$+|f(3,5)| + \frac{1}{2}|f(4)|)$$

$$= 4,1982... \approx 4,2$$

Vastaus $\quad A \approx 4,2$

256

Funktion $f(x)=3e^{x^2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-2, 2]$ alueen. Määritetään arvio pinta-alalle puolisuunnikassäännöllä.

a) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 10.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(3e^{x^2}, -2, 2, 10\right) \approx 115{,}26$$

b) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 50.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(3e^{x^2}, -2, 2, 50\right) \approx 99{,}41$$

b) Lasketaan geometriaohjelmalla arvio pinta-alalle, kun osavälien lukumäärä on 100.

$$A \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(3e^{x^2}, -2, 2, 100\right) \approx 98{,}89$$

Vastaus a) $A \approx 115{,}26$ b) $A \approx 99{,}41$ c) $A \approx 98{,}89$

257

Funktion $f(x) = x^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 2]$ alueen. Pinta-alan tarkka arvo kuuden desimaalin tarkkuudella on 2,050446.

a) Tutkitaan geometriaohjelmalla, kuinka monta osaväliä käyttäen saadaan oikea arvio pinta-alalle kolmen desimaalin tarkkuudella ($A \approx 2{,}050$), kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä.

$$A_{10} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 10\right) \approx 2{,}055$$

$$A_{50} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 50\right) \approx 2{,}051$$

$$A_{90} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 90\right) \approx 2{,}051$$

$$A_{94} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 94\right) \approx 2{,}051$$

$$A_{95} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 95\right) \approx 2{,}050$$

b) Tutkitaan geometriaohjelmalla, kuinka monta osaväliä käyttäen saadaan oikea arvio pinta-alalle neljän desimaalin tarkkuudella ($A \approx 2{,}0504$), kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä.

$$A_{50} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 50\right) \approx 2{,}0506$$

$$A_{150} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 150\right) \approx 2{,}0505$$

$$A_{300} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 300\right) \approx 2{,}0505$$

$$A_{350} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 350\right) \approx 2{,}0505$$

$$A_{357} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 357\right) \approx 2{,}0505$$

$$A_{358} \approx \text{puolisuunnikassumma}\left(x^x, 1, 2, 358\right) \approx 2{,}0504$$

Vastaus a) 95 ($A_{95} \approx 2,050$) b) 358 ($A_{358} \approx 2,0504$)

258

Aikavälillä $[0, 8]$ kuljettu matka on yhtä suuri kuin funktion v kuvaajan ja t-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Lasketaan pinta-ala puolisuunnikassäännöllä. Taulukosta nähdään, että osavälin pituus on yksi ja osavälien lukumäärä kahdeksan.

$$
\begin{aligned}
A &\approx 1\cdot(\frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6) \\
&\quad +f(7)+\frac{1}{2}f(8)) \\
&=\frac{1}{2}\cdot 0,0+7,8+15,8+23,9+32,2+41,4+52,2+65,6+\frac{1}{2}\cdot 76,7 \\
&=277,25\approx 280
\end{aligned}
$$

Vastaus 280 m

259

Lasketaan aluksi puupinon poikkileikkauksen pinta-ala puolisuunnikassäännöllä. Taulukosta nähdään, että osavälin pituus on 0,5 ja osavälien lukumäärä kahdeksan.

$$A \approx 0,5 \cdot (\frac{1}{2} f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3)$$
$$+ f(3,5) + \frac{1}{2} f(4))$$
$$= 0,5 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1,15 + 1,25 + 1,30 + 1,25 + 1,35 + 1,25 + 1,20 + 1,10 + \frac{1}{2} \cdot 1,05)$$
$$= 4,9$$

Puupino on lieriö, jonka pohjan ala on 4,9 m^2 ja korkeus 0,5 m, joten tilavuus on

$$V = Ah = 4,9 \cdot 0,5 = 2,45 \ \text{(m}^3\text{)}.$$

Pinon tilavuudesta puun osuudeksi arvioidaan noin 80 %, joten pinon sisältämä puumäärä on

$$0,80 \cdot V = 0,80 \cdot 2,45 = 1,96 \approx 2 \ \text{(m}^3\text{)}$$

Vastaus n. 2 m^3 (1,96 m^3)

260

a) Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,4]$ alueen. Määritetään puolisuunnikassäännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio alueen pinta-alalle. Yleisesti puolisuunnikassääntö on muotoa

$$A_n \approx h\cdot(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)).$$

Osavälin pituus on nyt $h=\dfrac{4-0}{n}=\dfrac{4}{n}$. Lisäksi $x_0=0$,

$x_1=0+\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{n}$, $x_2=\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{4\cdot 2}{n}$, $x_k=\dfrac{4k}{n}$.

Tällöin puolisuunnikassääntö voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$A_n \approx \frac{4}{n}\cdot(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(4)+\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{4k}{n})).$$

b) Arvioidaan alueen pinta-alaa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 10 ja 50.

$$A_{10} \approx \frac{4}{10}\cdot(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(4)+\sum_{k=1}^{9}f(\frac{4k}{10}))=5{,}284...\approx 5{,}28$$

$$A_{50} \approx \frac{4}{50}\cdot(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(4)+\sum_{k=1}^{49}f(\frac{4k}{50}))=5{,}328...\approx 5{,}33$$

Vastaus a) $A_n \approx \frac{4}{n} \cdot (\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(4) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{4k}{n}))$

b) $A_{10} \approx 5,28$, $A_{50} \approx 5,33$

261

a) Funktion $f(x)=x^2-3$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,3]$ alueen. Osa pinta-alasta on x-akselin alapuolella, joten tämä huomioidaan laskemalla itseisarvot funktioiden arvoista. Määritetään puolisuunnikassäännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio alueen pinta-alalle. Yleisesti puolisuunnikassääntö on muotoa

$$A_n \approx h\cdot(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)).$$

Osavälin pituus on nyt $h=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$. Lisäksi $x_0=1$,

$x_1=1+\frac{2}{n}=\frac{2}{n}+1$, $x_2=\frac{2}{n}+1+\frac{2}{n}=\frac{2\cdot 2}{n}+1$, $x_k=\frac{2k}{n}+1$.

Tällöin puolisuunnikassääntö voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$A_n \approx \frac{2}{n}\cdot(\frac{1}{2}|f(1)|+\frac{1}{2}|f(3)|+\sum_{k=1}^{n-1}\left|f(\frac{2k}{n}+1)\right|).$$

b) Arvioidaan alueen pinta-alaa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 10 ja 50.

$$A_{10} \approx \frac{2}{10}\cdot(\frac{1}{2}|f(1)|+\frac{1}{2}|f(3)|+\sum_{k=1}^{9}\left|f(\frac{2k}{10}+1)\right|)=4,296...\approx 4,30$$

$$A_{50} \approx \frac{2}{50}\cdot(\frac{1}{2}|f(1)|+\frac{1}{2}|f(3)|+\sum_{k=1}^{49}\left|f(\frac{2k}{50}+1)\right|)=4,262...\approx 4,26$$

Vastaus a) $A_n \approx \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{2}|f(1)| + \frac{1}{2}|f(3)| + \sum_{k=1}^{n-1} \left| f(\frac{2k}{n} + 1) \right|)$

b) $A_{10} \approx 4,30$, $A_{50} \approx 4,26$

262

Lasketaan virheen suuruus virhekaavalla $E_n = -\frac{(b-a)^3 \cdot f''(t)}{12n^2}$,

missä $[a, b]$ on tarkasteltava väli, n on osavälien lukumäärä, f'' on funktion f toinen derivaatta ja t on jokin välille $]a, b[$ kuuluva luku.

a) Lasketaan funktion $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x$ toinen derivaatta.

$$f'(x) = 3x + 7$$
$$f''(x) = 3$$

Tällöin virheen suuruus käytettäessä neljää osaväliä on

$$E_4 = -\frac{(4-2)^3 \cdot 3}{12 \cdot 4^2} = -0{,}125.$$

b) Lasketaan funktion $f(x)=4x^2-x^3$ toinen derivaatta.

$$f'(x)=8x-3x^2$$
$$f''(x)=8-6x$$

Jos tarkastellaan vain virheen suuruutta, voidaan määrittää milloin $|f''(t)|$ saa suurimman arvonsa. Tällöin saadaan myös virheelle suurin mahdollinen arvio. Koska $f''(t)$ on ensimmäisen asteen polynomifunktio, saa se kaikki arvot päätepistearvojensa väliltä tarkasteluvälillä $[0, 4]$. Tällöin $f''(0)=8$ ja $f''(4)=-16$, joten suurin arvo, minkä $|f''(t)|$ voi saada, on 16.

Tällöin virheen suuruus käytettäessä kahdeksaa osaväliä on

$$|E_8|=\left|-\frac{(4-0)^3\cdot 16}{12\cdot 8^2}\right|=1,3333...1,333\,.$$

Vastaus a) $-0,125$ b) $1,3333...\approx 1,333$

263

Lasketaan virheen suuruus virhekaavalla $E_n = -\dfrac{(b-a)^3 \cdot f''(t)}{12n^2}$,
missä $[a, b]$ on tarkasteltava väli, n on osavälien lukumäärä, f'' on funktion f toinen derivaatta ja t on jokin välille $]a, b[$ kuuluva luku.

Lasketaan funktion $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ toinen derivaatta.

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Suurin arvo, jonka $f''(x)$ voi välillä $]1, 5[$ saada on 2, kun $x = 1$.

Lasketaan kuinka monta osaväliä vähintään tarvitaan, jotta virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

$$\left| -\frac{(5-1)^3 \cdot 2}{12 \cdot n^2} \right| < 0{,}01$$

$$\frac{128}{12n^2} < 0{,}01$$

$$0{,}12n^2 - 128 > 0$$

Ratkaistaan laskimella.

$n < -32,659...$ tai $n > 32,659...$

Osavälien lukumäärä on positiivinen, joten virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01, kun osavälien lukumäärä on vähintään 33.

Vastaus vähintään 33 osaväliä

264

Funktion $f(x)=2^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,3]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännön perusmuodolla eli osavälejä on kaksi. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{3-1}{2}=1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A&\approx\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(f(1)+4f(2)+f(3))\\&=\frac{1}{3}\cdot(2^1+4\cdot 2^2+2^3)\\&=\frac{1}{3}\cdot(2+16+8)\\&=\frac{26}{3}\\&=8{,}666...\approx 8{,}7\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 8{,}7$

265

Funktion $f(x)=\sqrt{x+1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1,4]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännön perusmuodolla eli osavälejä on kaksi. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}=1,5.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{3}\cdot 1,5\cdot(f(1)+4f(2,5)+f(4))\\ &=0,5\cdot(\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{3,5}+\sqrt{5})\\ &=5,5667...\approx 5,57\end{aligned}$$

Vastaus $\quad A\approx 5,57$

266

Funktion $f(x)=\dfrac{10}{x^2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[2,6]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{6-2}{4}=1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(f(2)+4f(3)+2f(4)+4f(5)+f(6))\\ &=3{,}3574\ldots\approx 3{,}36\end{aligned}$$

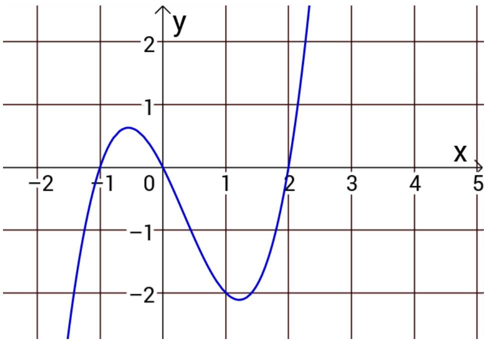
Vastaus $\quad A\approx 3{,}36$

267

a) Funktion $f(x)=x^3-x^2-2x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,2]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}=0,5\,.$$

Kuvan perusteella huomataan, että muodostuva alue on x-akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A\approx\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(|f(0)|+4\left|f(\frac{1}{2})\right|+2|f(1)|+4\left|f(\frac{3}{2})\right|+|f(2)|)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot(0+4\cdot\frac{9}{8}+2\cdot2+4\cdot\frac{15}{8}+0)$$
$$=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$
$$=2,6666...\approx2,67$$

b) Simpsonin säännöllä saatu pinta-alan arvio on sama kuin pinta-alan tarkka arvo $2\frac{2}{3}$.

Vastaus a) $A \approx 2,67$

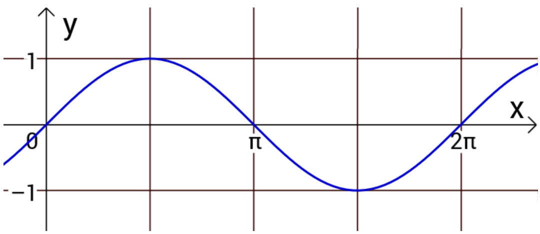
b) Simpsonin säännöllä saatu pinta-alan arvio on sama kuin pinta-alan tarkka arvo.

268

a) Funktion $f(x) = \sin x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 2\pi]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Kuvan perusteella huomataan, että osa muodostuvasta alueesta on x-akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (|f(0)| + 4\left|f(\frac{\pi}{2})\right| + 2|f(\pi)| + 4\left|f(\frac{3\pi}{2})\right| + |f(2\pi)|)$$
$$= \frac{\pi}{6} \cdot (0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0)$$
$$= \frac{\pi}{6} \cdot 8 = \frac{4\pi}{3}$$
$$= 4{,}188... \approx 4{,}2$$

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta 4.

$$\frac{4,2-4}{4}\cdot 100\,\% = 5\,\% \quad \text{(liian suuri)}$$

Vastaus a) $A \approx 4,2$

b) Arvio on $5\,\%$ liian suuri.

269

Funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $[1, 7]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on 1 ja osavälien lukumäärä on 6.

x	1	2	3	4	5	6	7
***f*(*x*)**	2,4	2,7	2,3	1,5	1,7	2,7	3,3

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + 2f(5) + 4f(6) + f(7))$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (2,4 + 4 \cdot 2,7 + 2 \cdot 2,3 + 4 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,7 + 4 \cdot 2,7 + 3,3)$$
$$= 13,7666... \approx 13,8$$

Vastaus $\quad A \approx 13,8$

270

Annettujen pisteiden avulla voidaan laskea Simpsonin säännöllä pinta-ala, jonka rajaavat järvi ja x-akselilla oleva tie välillä $[0,10]$.

Kuvasta voidaan havaita, että osavälin pituus on 1 ja osavälien lukumäärä on 10.

$$A \approx \frac{1}{3}\cdot 1\cdot (f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+2f(4)+4f(5)+2f(6)$$
$$+4f(7)+2f(8)+4f(9)+f(10))$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(2+4\cdot 2{,}2+2\cdot 3{,}8+4\cdot 4{,}4+2\cdot 5{,}6+4\cdot 5{,}9+2\cdot 6{,}2+4\cdot 6{,}6$$
$$+2\cdot 6{,}6+4\cdot 6{,}5+6{,}5)$$
$$=51{,}7666...\ \text{(pinta-alayksikköä)}$$

1 pinta-alayksikkö $=100\,\text{m}\cdot 100\,\text{m}=10000\,\text{m}^2=1\,\text{ha}$

Tällöin alueen pinta-ala hehtaareina on

$51{,}7666...\cdot 1\,\text{ha}=51{,}7666...\,\text{ha}\approx 52\,\text{ha}$.

Vastaus $\quad A\approx 52\,\text{ha}$

271

Aikavälillä $[0, 6]$ kuljettu matka on yhtä suuri kuin funktion v kuvaajan ja t-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Lasketaan pinta-ala Simpsonin säännöllä. Taulukosta nähdään, että osavälin pituus on yksi ja osavälien lukumäärä kuusi.

t **(s)**	0	1	2	3	4	5	6
v**(m/s)**	0	7,8	15,8	23,9	32,2	42,4	52,2

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + 2f(4) + 4f(5) + f(6))$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 7,8 + 2 \cdot 15,8 + 4 \cdot 23,9 + 2 \cdot 32,2 + 4 \cdot 42,4 + 52,2)$$

$$= 148,2 \approx 150$$

Vastaus 150 m

272

a) Funktion $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,3]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännön perusmuodolla eli osavälejä on kaksi. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{3-0}{2}=\frac{3}{2}.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(f(0)+4f(1,5)+f(3))\\ &=4,008...\approx 4,01\end{aligned}$$

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa tarkasta arvosta $3\sqrt[3]{4}-0,75$.

$$\frac{3\sqrt[3]{4}-0,75-4,01}{4,01}\cdot 100\,\% = 0,0549...\,\% \approx 0,05\,\% \quad \text{(liian pieni)}$$

Vastaus a) $A\approx 4,01$

b) Arvio on $0,05\,\%$ liian pieni.

273

Funktion $f(x)=\mathrm{e}^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,2]$ alueen.

a) Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen kahta osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{2-0}{2}=1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A&\approx\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(f(0)+4f(1)+f(2))\\&=6{,}4207...\approx 6{,}42\end{aligned}$$

b) Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A&\approx\frac{1}{3}\cdot 0{,}5\cdot(f(0)+4f(0{,}5)+2\cdot f(1)+4\cdot f(1{,}5)+f(2))\\&=6{,}3912...\approx 6{,}39\end{aligned}$$

Vastaus a) $A\approx 6{,}42$ b) $A\approx 6{,}39$

274

a) Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 5]$ alueen. Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Jaetaan väli $[1, 5]$ neljään osaväliin, jolloin osavälin pituus on

$$h = \frac{5-1}{4} = 1.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + f(5)) \\ &= 1{,}6222... \approx 1{,}62 \end{aligned}$$

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta $\ln 5$.

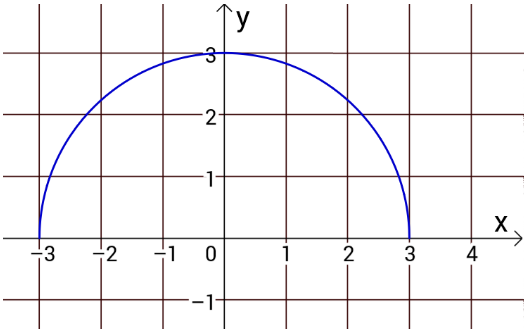
$$\frac{1{,}62 - \ln 5}{\ln 5} \cdot 100\,\% = 0{,}656...\,\% \approx 0{,}7\,\% \quad \text{(liian suuri)}$$

Vastaus a) $A \approx 1{,}62$

b) Arvio on $0{,}7\,\%$ liian suuri.

275

Funktion $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0,3]$ alueen.



a) Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen kuutta osaväliä. Lasketaan yhden osavälin pituus.

$$h=\frac{3-0}{6}=\frac{1}{2}=0,5.$$

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(0)+4f(0,5)+2f(1)+4f(1,5)+2f(2)\\ &\quad +4f(2,5)+f(3))\\ &=6,9977\ldots\approx 6,998\end{aligned}$$

b) Alkuperäisen funktion $f(x)$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 3]$ ympyrän (säde on 3) neljänneksen.

a-kohdan perusteella arvio tällaisen ympyrän pinta-alalle on siis $A_y \approx 4 \cdot A \approx 27{,}992$.

Ympyrän, jonka säde on kolme, pinta-alan tarkka arvo on $A = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo eroaa oikeasta arvosta.

$$\frac{9\pi - 27{,}992}{9\pi} \cdot 100\,\% = 0{,}9985...\% \approx 1{,}0\,\%$$

Vastaus a) $A \approx 6{,}998$

b) $A \approx 27{,}992$, arvio eroaa oikeasta pinta-alasta (9π) noin $1{,}0\,\%$.

276

Funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $[-1, 2]$.

Lasketaan arvio pinta-alalle Simpsonin säännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 6.

x	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
***f*(*x*)**	0,8	0,7	1,0	1,7	2,8	3,3	2,2

$$
\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(-1)+4f(-0,5)+2f(0)+4f(0,5)\\
&\quad +2f(1)+4f(1,5)+f(2))\\
&=\frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(0,8+4\cdot 0,7+2\cdot 1,0+4\cdot 1,7+2\cdot 2,8+4\cdot 3,3+2,2)\\
&=5,5666\ldots\approx 5,6
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad A\approx 5,6$

277

Aikavälillä $[0, 6]$ auton nopeuden muutos on yhtä suuri kuin funktion a kuvaajan ja t-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Lasketaan pinta-ala Simpsonin säännöllä. Taulukosta nähdään, että osavälin pituus on yksi ja osavälien lukumäärä kuusi.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{3}\cdot 1\cdot (f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+2f(4)+4f(5)+f(6))\\ &=\frac{1}{3}\cdot(0+4\cdot 2,5+2\cdot 3,8+4\cdot 5,4+2\cdot 3,5+4\cdot 2,1+1,3)\\ &=18,6333...\approx 18,6\end{aligned}$$

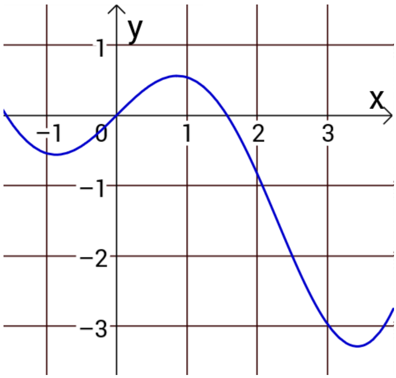
Vastaus Nopeus muuttui 18,6 m/s (67,1 km/h).

278

Funktion $f(x) = x\cos x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-1, 3]$ alueen. Lasketaan arvio alueen pinta-alalle Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h = \frac{3-(-1)}{4} = 1.$$

Kuvan perusteella huomataan, että osa muodostuvasta alueesta on x-akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (|f(-1)| + 4|f(0)| + 2|f(1)| + 4|f(2)| + |f(3)|)$$
$$= 2,640... \approx 2,6$$

Vastaus $\quad A \approx 2,6$

279

Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, 5]$ alueen.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla arvio pinta-alalle käyttämällä Simpsonin sääntöä ja 20 osaväliä. Jaetaan väli $[1, 5]$ kahteenkymmeneen osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus on $d=\frac{5-1}{20}=\frac{4}{20}=0,2$.

Simpsonin säännön mukainen arvio pinta-alalle on

$$A\approx\frac{1}{3}\cdot 0,2\cdot(f(1)+4f(1+0,2)+2f(1+2\cdot 0,2)+\ldots+4f(4,8)+f(5)).$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla osavälien päätepisteet, osavälien alaindeksit, painokertoimet, summan termit ja pinta-alan arvio.

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	0	1	1	1.609	
2	1.2	1	4	3.333		
3	1.4	2	2	1.429		
4	1.6	3	4	2.5		
5	1.8	4	2	1.111		
6	2.	5	4	2.		
7	2.2	6	2	0.9091		
8	2.4	7	4	1.667		

A2 =a1+0.2

	A	B	C	D	E	F
=						
16	4.	15	4	1.		
17	4.2	16	2	0.4762		
18	4.4	17	4	0.9091		
19	4.6	18	2	0.4348		
20	4.8	19	4	0.8333		
21	5.	20	1	0.2		
22						
23						

D25

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	0	1	1	1.609	
2	1.2	1	4	3.333		
3	1.4	2	2	1.429		
4	1.6	3	4	2.5		
5	1.8	4	2	1.111		
6	2.	5	4	2.		
7	2.2	6	2	0.9091		
8	2.4	7	4	1.667		

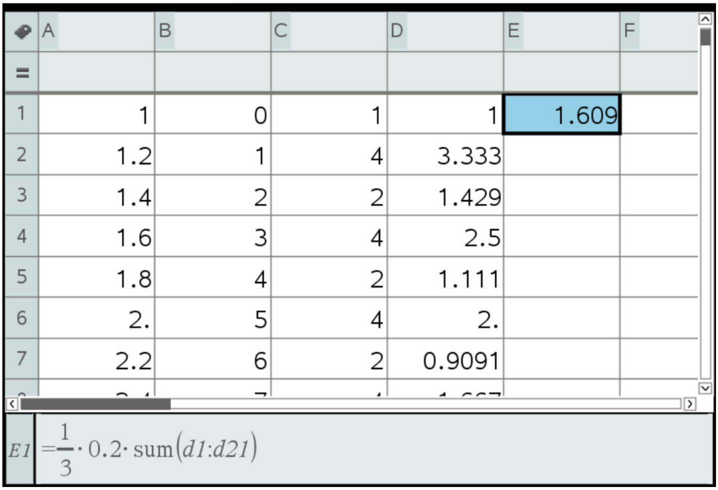
B2 $=b1+1$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	0	1	1	1.609	
2	1.2	1	4	3.333		
3	1.4	2	2	1.429		
4	1.6	3	4	2.5		
5	1.8	4	2	1.111		
6	2.	5	4	2.		
7	2.2	6	2	0.9091		
8	2.4	7	4	1.667		

C2 $=3-(-1)^{b2}$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	0	1	1	1.609	
2	1.2	1	4	3.333		
3	1.4	2	2	1.429		
4	1.6	3	4	2.5		
5	1.8	4	2	1.111		
6	2.	5	4	2.		
7	2.2	6	2	0.9091		

D1 $=c1\cdot\frac{1}{a1}$



	A	B	C	D	E	F
=						
1	1	0	1	1	1.609	
2	1.2	1	4	3.333		
3	1.4	2	2	1.429		
4	1.6	3	4	2.5		
5	1.8	4	2	1.111		
6	2.	5	4	2.		
7	2.2	6	2	0.9091		

E1 $=\frac{1}{3}\cdot 0.2\cdot \mathrm{sum}(d1:d21)$

Pinta-alan arvioksi saadaan $A \approx 1,609$.

Vastaus $A \approx 1,609$

280

Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 2]$ alueen.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla arvio pinta-alalle käyttämällä Simpsonin sääntöä ja 40 osaväliä. Lasketaan yhden osavälin pituus

$$d = \frac{2-0}{40} = \frac{2}{40} = 0{,}05\,.$$

Simpsonin säännön mukainen arvio pinta-alalle on

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 \cdot (f(0) + 4f(0{,}05) + 2f(2 \cdot 0{,}05) + \ldots + 4f(1{,}95) + f(2))\,.$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla osavälien päätepisteet, osavälien alaindeksit, painokertoimet, summan termit ja pinta-alan arvio.

	A	B	C	D	E	F
=						
1	0.	0	1	1.	6.389	
2	0.05	1	4	4.205		
3	0.1	2	2	2.21		
4	0.15	3	4	4.647		
5	0.2	4	2	2.443		
6	0.25	5	4	5.136		
7	0.3	6	2	2.7		
8	0.35	7	4	5.676		

A2 =a1+0.05

	A	B	C	D	E	F
=						
1	0.	0	1	1.	6.389	
2	0.05	1	4	4.205		
3	0.1	2	2	2.21		
4	0.15	3	4	4.647		
5	0.2	4	2	2.443		
6	0.25	5	4	5.136		
7	0.3	6	2	2.7		
8	0.35	7	4	5.676		

B2 $=b1+1$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	0.	0	1	1.	6.389	
2	0.05	1	4	4.205		
3	0.1	2	2	2.21		
4	0.15	3	4	4.647		
5	0.2	4	2	2.443		
6	0.25	5	4	5.136		
7	0.3	6	2	2.7		
8	0.35	7	4	5.676		

C2 $=3-(-1)^{b2}$

	A	B	C	D	E	F
=						
1	0.	0	1	1.	6.389	
2	0.05	1	4	4.205		
3	0.1	2	2	2.21		
4	0.15	3	4	4.647		
5	0.2	4	2	2.443		
6	0.25	5	4	5.136		
7	0.3	6	2	2.7		
8	0.35	7	4	5.676		

D1 $=c1\cdot \mathbf{e}^{a1}$

	A	B	C	D	E	F
=						
37	1.8	36	2	12.1		
38	1.85	37	4	25.44		
39	1.9	38	2	13.37		
40	1.95	39	4	28.11		
41	2.	40	1	7.389		
42						
43						
44						

E45

	A	B	C	D	E	F
=						
1	0.	0	1	1.	6.389	
2	0.05	1	4	4.205		
3	0.1	2	2	2.21		
4	0.15	3	4	4.647		
5	0.2	4	2	2.443		
6	0.25	5	4	5.136		
7	0.3	6	2	2.7		
8	0.35	7	4	[illegible]		

E1 $=\frac{1}{3}\cdot 0.05\cdot \mathrm{sum}(d1{:}d41)$

Pinta-alan arvioksi saadaan $A \approx 6,389$.

Vastaus $A \approx 6,389$

281

a) Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[0, 4]$ alueen. Määritetään Simpsonin säännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio alueen pinta-alalle. Yleisesti Simpsonin sääntö on muotoa

$$A_n \approx \frac{1}{3}h\cdot(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

Osavälin pituus on nyt $h=\dfrac{4-0}{n}=\dfrac{4}{n}$. Lisäksi $x_0=0$,

$x_1=0+\dfrac{4}{n}=\dfrac{4}{n}$, $x_2=\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{4\cdot 2}{n}$, $x_k=\dfrac{4k}{n}$.

Vuorotteleva kerroin $4, 2, 4, ...$ saadaan lausekkeesta $3-(-1)^k$, missä $k=1, 2, 3, ...$.

Tällöin Simpsonin sääntö voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$A_n \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{n}\cdot(f(0)+f(4)+\sum_{k=1}^{n-1}(3-(-1)^k)\cdot f(\frac{4k}{n})).$$

b) Arvioidaan alueen pinta-alaa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 10 ja 50.

$$A_{10} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot (f(0) + f(4) + \sum_{k=1}^{9} (3 - (-1)^k) \cdot f(\frac{4k}{10}))$$
$$= 5{,}312\ldots \approx 5{,}31$$

$$A_{50} \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{50} \cdot (f(0) + f(4) + \sum_{k=1}^{49} (3 - (-1)^k) \cdot f(\frac{4k}{50}))$$
$$= 5{,}331\ldots \approx 5{,}33$$

Vastaus a) $A_n \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{n} \cdot (f(0) + f(4) + \sum_{k=1}^{n-1} (3 - (-1)^k) \cdot f(\frac{4k}{n}))$

b) $A_{10} \approx 5{,}31$, $A_{50} \approx 5{,}33$

282

Lasketaan virheen suuruus virhekaavalla $E_n = -\dfrac{(b-a)^5 \cdot f^{(4)}(t)}{180n^4}$,
missä $[a, b]$ on tarkasteltava väli, n on osavälien lukumäärä, $f^{(4)}$ on funktion f neljäs derivaatta ja t on jokin välille $]a, b[$ kuuluva luku.

a) Lasketaan funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 8$ neljäs derivaatta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Tällöin virheen suuruus käytettäessä kahta osaväliä on

$$E_2 = -\frac{(4-0)^5 \cdot f^{(4)}(t)}{180 \cdot 2^4} = -\frac{(4-0)^5 \cdot 0}{180 \cdot 2^4} = 0\,.$$

Simpsonin säännöllä saadaan siis pinta-alan tarkka arvo.

b) Lasketaan funktion $g(x) = 6x^2 - x^4$ neljäs derivaatta.

$$g'(x) = 12x - 4x^3$$
$$g''(x) = 12 - 12x^2$$
$$g'''(x) = -24x$$
$$g^{(4)}(x) = -24$$

Tällöin virheen suuruus käytettäessä neljää osaväliä on

$$\begin{aligned} E_4 &= -\frac{(2-(-2))^5 \cdot f^{(4)}(t)}{180 \cdot 4^4} \\ &= -\frac{4^5 \cdot (-24)}{180 \cdot 4^4} \\ &= 0{,}5333... \approx 0{,}53. \end{aligned}$$

Vastaus a) 0 (Simpsonin säännöllä saadaan tarkka arvo.)

b) $0{,}53$

283

Lasketaan virheen suuruus virhekaavalla $E_n = -\dfrac{(b-a)^5 \cdot f^{(4)}(t)}{180n^4}$,
missä $[a, b]$ on tarkasteltava väli, n on osavälien lukumäärä, $f^{(4)}$ on funktion f neljäs derivaatta ja t on jokin välille $]a, b[$ kuuluva luku.

Lasketaan funktion $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ neljäs derivaatta.

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$f'''(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$f^{(4)}(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

Suurin arvo, jonka $f^{(4)}(x)$ voi välillä $]1, 5[$ saada on 24, kun $x = 1$.

Lasketaan kuinka monta osaväliä vähintään tarvitaan, jotta virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01.

$$\left| -\frac{(5-1)^5 \cdot 24}{180 \cdot n^2} \right| < 0,01$$

$$\frac{24576}{180n^2} < 0,01$$

$$1,8n^2 - 245,76 > 0$$

Ratkaistaan laskimella.

$n < -11,684...$ tai $n > 11,684...$

Osavälien lukumäärä on positiivinen, joten virheen itseisarvo on pienempi kuin 0,01, kun osavälien lukumäärä on vähintään 12.

Vastaus vähintään 12 osaväliä

284

a) Sovelletaan suorakaidesääntöä funktioon $f(x)=\sin\sqrt{x}$, kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä. Kun väli $[0, 4]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$d=\frac{4-0}{4}=1.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &\approx 1\cdot(f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5))\\ &=3{,}545...\approx 3{,}5\end{aligned}$$

b) Sovelletaan Simpsonin sääntöä funktioon $f(x)=\sin\sqrt{x}$. Kun väli $[0, 4]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h=\frac{4-0}{4}=1.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4))\\ &=3{,}399...\approx 3{,}4\end{aligned}$$

Vastaus a) 3,5 b) 3,4

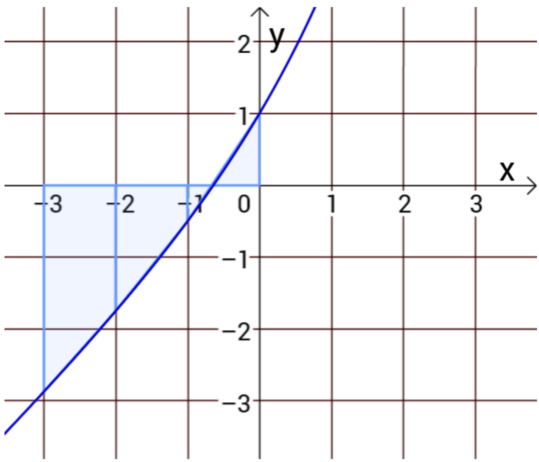
285

a) Sovelletaan puolisuunnikassääntöä funktioon $f(x)=2^x+x$.
Kun väli $[-3,0]$ jaetaan kolmeen osaväliin, on yhden osavälin pituus $h=\dfrac{0-(-3)}{3}=1$.

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\int_{-3}^{0}(2^x+x)\,\mathrm{d}x \approx 1\cdot\left(\frac{1}{2}f(-3)+f(-2)+f(-1)+\frac{1}{2}f(0)\right)$$
$$=-3{,}187\ldots\approx -3{,}2$$

b) Kuvaajan perusteella huomataan, että osa muodostuvasta alueesta on x-akselin alapuolella. Tällöin pinta-alaa laskettaessa funktion arvoista pitää määrittää itseisarvot.



Lasketaan arvio alueen pinta-alalle.

$$A \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\left|f(-3)\right| + \left|f(-2)\right| + \left|f(-1)\right| + \frac{1}{2}\left|f(0)\right|\right)$$
$$= 4{,}187... \approx 4{,}2$$

Vastaus a) $-3{,}2$ b) $4{,}2$

286

Sovelletaan puolisuunnikassääntöä funktioon

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x\neq 0\\ 1, & \text{kun } x=0.\end{cases}$$

Kun väli $[0,1]$ jaetaan viiteen osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h=\frac{1-0}{5}=0,2\,.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille, kun siis $f(0)=1$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\approx 0,2\cdot\left(\frac{1}{2}f(0)+f(0,2)+f(0,4)+f(0,6)+f(0,8)+\frac{1}{2}f(1)\right)\\ &=0,945...\approx 0,95\end{aligned}$$

Vastaus $\quad 0,95$

287

a) Määritetään määrätyn integraalin likiarvo Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Kun väli $[0, 2]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4} = 0,5\,.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\cdot 0,5 \cdot (f(0)+4f(0,5)+2f(1)+4f(1,5)+f(2))$$
$$= 3,2396... \approx 3,240$$

b) Lasketaan määrätty integraali laskimella.

$$\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = 3,2413... \approx 3,241$$

Lasketaan, kuinka monta prosentti a-kohdan arvio poikkeaa laskimen antamasta likiarvosta.

$$\frac{3,241-3,240}{3,241}\cdot 100\,\% = 0,030...\,\% \approx 0,03\,\%$$

Vastaus a) $3,240$ b) $3,241$, ero $0,03\,\%$

288

a) Määritetään määrätyn integraalin likiarvo puolisuunnikassäännöllä käyttäen kolmea osaväliä. Kun väli $[0, 3]$ jaetaan kolmeen osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h = \frac{3-0}{3} = 1.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3)\right) = 1{,}25$$

b) Lasketaan määrätty integraali laskimella.

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 1{,}249\ldots \approx 1{,}25$$

Tulokset ovat kahden desimaalin tarkkuudella yhtä suuret.

Vastaus a) $1{,}25$

b) $1{,}25$; kahden desimaalin tarkkuudella tulokset ovat yhtä suuret.

289

a) Lasketaan arvio määrätylle integraalille Simpsonin säännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 6.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	0,30	0,92	1,15	0,70	–0,49	–2,21	–3,98

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(-1)+4f(-0,5)+2f(0)+4f(0,5)$$

$$+2f(1)+4f(1,5)+f(2))$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(0,30+4\cdot 0,92+2\cdot 1,15+4\cdot 0,70$$

$$+2\cdot(-0,49)+4\cdot(-2,21)+(-3,98))$$

$$=-0,78666\ldots\approx -0,79$$

b) Taulukon funktion arvoista huomataan, että osa muodostuvasta pinta-alasta sijaitsee x-akselin alapuolella. Pinta-alaa laskettaessa Simpsonin säännöllä tämä huomioidaan laskemalla funktioiden arvojen itseisarvot.

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (|f(-1)| + 4|f(-0,5)| + 2|f(0)| + 4|f(0,5)|$$
$$+2|f(1)| + 4|f(1,5)| + |f(2)|)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (0,30 + 4 \cdot 0,92 + 2 \cdot 1,15 + 4 \cdot 0,70$$
$$+2 \cdot 0,49 + 4 \cdot 2,21 + 3,98)$$
$$= 3,81333... \approx 3,81$$

Vastaus a) $-0,79$

b) $3,81$

290

Lasketaan arvio määrätylle integraalille puolisuunnikassäännöllä. Taulukosta havaitaan, että osavälin pituus on 3 ja osävälien lukumäärä on 8.

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{24}\cdot 3\cdot(\frac{1}{2}f(0)+f(3)+f(6)+f(9)+f(12)+f(15)$$

$$+f(18)+f(21)+\frac{1}{2}f(24))$$

$$=\frac{3}{24}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 10,2+10,7+12,3+13,8+15,8+17,9+17,0$$

$$+15,5+\frac{1}{2}\cdot 14,2)$$

$$=14,4$$

Vastaus $\quad 14,4\ ^{\circ}\mathrm{C}$

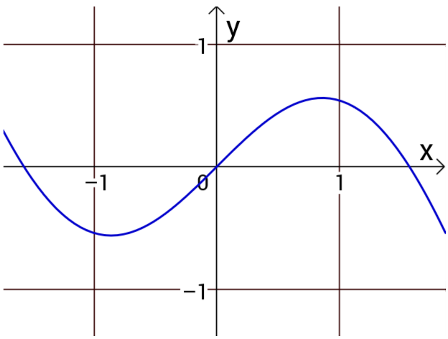
291

a) Lasketaan arvio määrätylle integraalille Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h=\frac{1-(-1)}{4}=\frac{2}{4}=0,5.$$

$$\int_{-1}^{1} x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(-1)+4f(-0,5)+2f(0)+4f(0,5)+f(1))$$
$$=6,666...\cdot 10^{-15}\approx 0,0$$

b) Kuvan perusteella huomataan, että osa muodostuvasta alueesta on x -akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A\approx\frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(|f(-1)|+4|f(-0,5)|+2|f(0)|+4|f(0,5)|+|f(1)|)$$
$$=0,765...\approx 0,8$$

c) Kuvaajan ja x -akselin välinen kokonaispinta-ala x -akselin yläpuolella on likimain yhtä suuri kuin kuvaajan ja x -akselin välinen kokonaispinta-ala x -akselin alapuolella.

Vastaus a) $0,0$

b) $0,8$

c) Kuvaajan ja x -akselin välinen kokonaispinta-ala x -akselin yläpuolella on likimain yhtä suuri kuin kuvaajan ja x -akselin välinen kokonaispinta-ala x -akselin alapuolella.

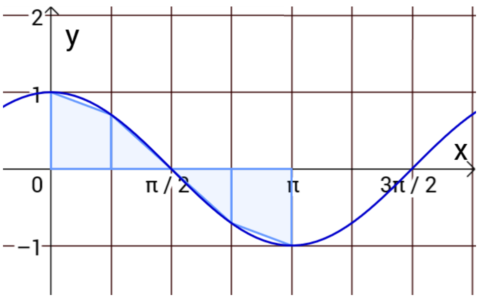
292

a) Lasketaan arvio määrätylle integraalille puolisuunnikassäännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x \, dx &\approx \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} f(\pi)\right) \\ &= 0{,}00\end{aligned}$$

b) Kuvan perusteella huomataan, että osa (tasan puolet) muodostuvasta alueesta on x-akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$\int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\left|f(0)\right| + \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|f(\pi)\right|\right)$$

$$= 1{,}896\ldots \approx 1{,}90$$

Vastaus a) $0{,}00$

b) $1{,}90$

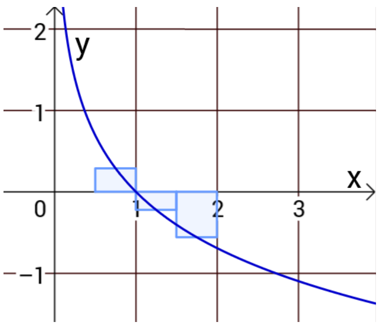
293

a) Sovelletaan suorakaidesääntöä funktioon $f(x)=\ln\frac{1}{x}$, kun laskentapisteenä käytetään osavälin keskipistettä. Kun väli $[0,5;\,2]$ jaetaan kolmeen osaväliin, on yhden osavälin pituus $d=\frac{2-0,5}{3}=0,5$.

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{2}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\approx 0,5\cdot(f(0,75)+f(1,25)+f(1,75))\\ &=-0,2475...\approx -0,248\end{aligned}$$

b) Kuvan perusteella huomataan, että osa muodostuvasta alueesta on x-akselin alapuolella, jolloin funktioiden arvoista pitää laskea itseisarvot pinta-alaa laskettaessa.



Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx 0,5 \cdot (|f(0,75)| + |f(1,25)| + |f(1,75)|)$$
$$= 0,5352... \approx 0,535$$

Vastaus a) $-0,248$ b) $0,535$

294

a) Määritetään määrätyn integraalin likiarvo Simpsonin säännöllä käyttäen neljää osaväliä. Kun väli $[-1,1]$ jaetaan neljään osaväliin, on yhden osavälin pituus

$$h=\frac{1-(-1)}{4}=\frac{2}{4}=0,5.$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx &\approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(-1)+4f(-0,5)+2f(0)+4f(0,5)+f(1))\\ &=1,49436...\approx 1,4944\end{aligned}$$

b) Lasketaan määrätty integraali laskimella.

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = 1,49364...\approx 1,4936$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia a-kohdan arvio poikkeaa laskimen antamasta likiarvosta.

$$\frac{1,4944-1,4936}{1,4944}\cdot 100\ \% = 0,0535...\ \% \approx 0,054\ \%$$

Vastaus a) $1,4944$ b) $1,4936$, ero $0,054\ \%$

295

Lasketaan integraalin tarkka arvo.

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathop{/}_1^3 \ln x = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

Lasketaan arvio määrätylle integraalille puolisuunnikassäännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on siis

$$h = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5\,.$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\approx 0{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5) + \frac{1}{2}f(3)\right)\\ &= 1{,}116666... \approx 1{,}11667\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia likiarvo poikkeaa tarkasta arvosta.

$$\frac{1{,}1667 - \ln 3}{\ln 3}\cdot 100\ \% = 1{,}6436...\ \% \approx 1{,}64\ \%$$

Vastaus Tarkka arvo $\ln 3$. Likiarvo $1{,}11667$.
Suhteellinen virhe $1{,}64\ \%$.

296

Funktion f kuvaajan kaaren pituus välillä $[a, b]$ on

$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$. Lasketaan funktion $f(x)=\ln x$ kuvaajan kaaren pituus välillä $[1, 2]$ arvioimalla määrättyä integraalia puolisuunnikassäännöllä käyttäen neljää osaväliä. Yhden osavälin pituus on tällöin

$h=\dfrac{2-1}{4}=\dfrac{1}{4}=0,25$.

Lasketaan funktion f derivaatta.

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

Merkitään integroitavaa funktiota $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1+f'(x)^2} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Tällöin funktion f kuvaajan kaaren pituus välillä $[1, 2]$ on

$$\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}25 \cdot (\frac{1}{2}g(1) + g(1{,}25) + g(1{,}5) + g(1{,}75) + \frac{1}{2}g(2)$$

$$= 1{,}2250... \approx 1{,}225.$$

Vastaus $\quad 1{,}225$

297

a) Lasketaan arvio määrätylle integraalille Simpsonin säännöllä. Taulukosta voidaan havaita, että osavälin pituus on $0,5$ ja osavälien lukumäärä on 6.

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1
f(x)	–0,20	–0,05	0,95	0,55	0,10	–0,85	–1,25

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(f(-2)+4f(-1,5)+2f(-1)+4f(-0,5)\\ &\quad +2f(0)+4f(0,5)+f(1))\\ &=\frac{1}{3}\cdot 0,5\cdot(-0,20+4\cdot(-0,05)+2\cdot 0,95+4\cdot 0,55\\ &\quad +2\cdot 0,10+4\cdot(-0,85)+(-1,25))\\ &=-0,125\approx -0,13\end{aligned}$$

b) Taulukon funktion arvoista huomataan, että osa muodostuvasta pinta-alasta sijaitsee x -akselin alapuolella. Pinta-alaa laskettaessa Simpsonin säännöllä tämä huomioidaan laskemalla funktioiden arvoista itseisarvot.

$$A \approx \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (|f(-2)| + 4|f(-1,5)| + 2|f(-1)| + 4|f(-0,5)|$$
$$+2|f(0)| + 4|f(0,5)| + |f(1)|)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot (0,20 + 4 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,95 + 4 \cdot 0,55$$
$$+2 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,85 + 1,25)$$
$$= 1,55833... \approx 1,56$$

Vastaus a) $-0,13$

b) $1,56$

298

a) Määritetään Simpsonin säännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio määrätylle integraalille, missä $f(x)=\sqrt{x}$.
Yleisesti Simpsonin sääntö on muotoa

$$\frac{1}{3}h\cdot(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

Osavälin pituus on nyt $h=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$. Lisäksi $x_0=0$,
$x_1=0+\frac{4}{n}=\frac{4}{n}$, $x_2=\frac{4}{n}+\frac{4}{n}=\frac{4\cdot 2}{n}$, $x_k=\frac{4k}{n}$.

Vuorotteleva kerroin $4, 2, 4, \ldots$ saadaan lausekkeesta $3-(-1)^k$, missä $k=1, 2, 3, \ldots$.

Tällöin arvio määrätylle integraalille Simpsonin säännöllä voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{n}\cdot\left(f(0)+f(4)+\sum_{k=1}^{n-1}(3-(-1)^k)\cdot f\left(\frac{4k}{n}\right)\right).$$

b) Arvioidaan määrätyn integraalin arvoa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 20.

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{20}\cdot(f(0)+f(4)+\sum_{k=1}^{19}(3-(-1)^k)\cdot f(\frac{4k}{20}))$$
$$=5{,}32607...\approx 5{,}326$$

Vastaus a) $\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{3n}\cdot(f(0)+f(4)+\sum_{k=1}^{n-1}(3-(-1)^k)\cdot f(\frac{4k}{n}))$

b) $5{,}326$

299

a) Määritetään puolisuunnikassäännöllä summalauseke, jolla saadaan laskettua arvio määrätylle integraalille, missä $f(x) = 3^{-x^2}$. Yleisesti puolisuunnikassääntö on muotoa

$$h \cdot (\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)).$$

Osavälin pituus on nyt $h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Lisäksi $x_0 = 0$, $x_1 = 0 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{2 \cdot 2}{n}$, $x_k = \frac{2k}{n}$.

Tällöin arvio määrätylle integraalille puolisuunnikassäännöllä voidaan kirjoittaa summamerkinnän avulla muodossa

$$\int_0^2 3^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(2) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{2k}{n})).$$

b) Arvioidaan määrätyn integraalin arvoa summalausekkeen avulla, kun osavälien lukumäärä on 30.

$$\int_0^2 3^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{2}{30}\cdot\left(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(2)+\sum_{k=1}^{29} f\left(\frac{2k}{30}\right)\right)$$
$$= 0{,}842935\ldots \approx 0{,}8429$$

Vastaus a) $\displaystyle\int_0^2 3^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(2)+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right)\right)$

b) $0{,}8429$

300

a) Osoitetaan, että jokaiselle kolmannen asteen polynomille $p(x)$ pätee $\int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[p(0)+4p(1)+p(2)\right]$.

Lasketaan aluksi määrätty integraali, kun $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$$\int_0^2 (ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{d}x$$
$$=\Big/_0^2\left(\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{2}cx^2+dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}a\cdot 2^4+\frac{1}{3}b\cdot 2^3+\frac{1}{2}c\cdot 2^2+d\cdot 2$$
$$=4a+\frac{8}{3}b+2c+2d$$

Sievennetään väitteen yhtälön oikeaa puolta.

$$\frac{1}{3}\left[p(0)+4p(1)+p(2)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[d+4(a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d)+(a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[d+4a+4b+4c+4d+8a+4b+2c+d\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[12a+8b+6c+6d\right]$$
$$=4a+\frac{8}{3}b+2c+2d$$

Tällöin siis $\int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[p(0)+4p(1)+p(2)\right]$.

b) Lasketaan edellisen kohdan perusteella määrätty integraali

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^3+x^2+x+1)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left[1+4(1^3+1^2+1+1)+(2^3+2^2+2+1)\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[1+4\cdot 4+15\right]\\ &= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}\end{aligned}$$

c) Osoitetaan, että kaava ei päde esimerkiksi polynomille $p(x) = x^4$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x &= \Big/_0^2 \frac{1}{5}x^5\\ &= \frac{1}{5}\cdot 2^5\\ &= \frac{32}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\left[p(0)+4p(1)+p(2)\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[0^4+4\cdot 1^4+2^4\right]\\ &= \frac{20}{3} \neq \frac{32}{5}\end{aligned}$$

Kaava ei siis päde kaikille neljännen asteen polynomeille.

Vastaus a) On osoitettu väite todeksi.

b) $\frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

c) On osoitettu väite todeksi.

301

Aikavälillä $[0, 2]$ pallon lentämä matka saadaan funktion v ja t-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan avulla. Lasketaan määrätty integraali laskimella.

$$
\begin{aligned}
x &= \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \sqrt{20^2 - 2\cdot 20\cdot 9,81\cdot t\cdot \sin 35^\circ + 9,81^2\cdot t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 34,77471... \approx 35
\end{aligned}
$$

Vastaus 35 m