204

a)

$$f'(3) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$$

b) Sijoitetaan erotusosamäärän lausekkeeseen $h = 0,1$.

$$f'(3) = \frac{\sqrt{3+0,1} - \sqrt{3}}{0,1}$$
$$= \frac{\sqrt{3,1} - \sqrt{3}}{0,1}$$
$$= 0,28630... \approx 0,286$$

Sijoitetaan erotusosamäärän lausekkeeseen $h = -0,1$.

$$f'(3) = \frac{\sqrt{3-0,1} - \sqrt{3}}{-0,1}$$
$$= \frac{\sqrt{2,9} - \sqrt{3}}{-0,1}$$
$$= 0,29112... \approx 0,291$$

205

a) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 0, kun $h=0,1$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \frac{f(0,1)-f(0)}{0,1} \\ &= \frac{2^{0,1}-2^{0}}{0,1} \\ &= 0,7177... \approx 0,72. \end{aligned}$$

b) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 0, kun $h=0,01$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \frac{f(0,01)-f(0)}{0,01} \\ &= \frac{2^{0,01}-2^{0}}{0,01} \\ &= 0,6955... \approx 0,70. \end{aligned}$$

c) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 0, kun $h = 0,001$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{f(0,001) - f(0)}{0,001} \\ &= \frac{2^{0,001} - 2^{0}}{0,001} \\ &= 0,6933... \approx 0,69. \end{aligned}$$

Lähimpänä derivaatan oikeaa likiarvoa oli tulos, joka saadaan kun $h = 0,001$.

Vastaus a) 0,72 b) 0,70 c) 0,69
Likiarvoista paras saadaan, kun $h = 0,001$.

206

a) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 1, kun $h = 0,01$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{f(1,01) - f(1)}{0,01} \\ &= \frac{\sqrt[3]{0,5+0,01} - \sqrt[3]{0,5}}{0,01} \\ &= 0,52564... \approx 0,526. \end{aligned}$$

b) Lasketaan keskeisdifferenssin arvo kohdassa 1, kun $h = 0,01$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \\ &= \frac{f(1,01) - f(0,99)}{0,02} \\ &= \frac{\sqrt[3]{1,01-0,5} - \sqrt[3]{0,99-0,5}}{0,01} \\ &= 0,52917... \approx 0,529. \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,526 b) 0,529
Keskeisdifferenssillä saadaan parempi likiarvo.

207

Muodostetaan keskeisdifferenssin lauseke kohdassa –2.

$$f'(-2) = \frac{f(-2+h) - f(-2-h)}{2h}$$
$$= \frac{\sin(h-2) - \sin(-h-2)}{2h}$$

Lasketaan keskeisdifferenssin arvo h:n arvoilla 0,1; 0,01; 0,001 ja 0,0001. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B
1	0,1	-0,41545
2	0,01	-0,41614
3	0,001	-0,41615
4	0,0001	-0,41615

208

a) Nopeus on paikan derivaatta ajan suhteen: $v = x'(t)$. Pitää siis määrittää derivaatan $x'(1,0)$ likiarvo. Valitaan $h = 0,5$.

$$\begin{aligned} x'(1,0) &= \frac{x(1,0+0,5) - x(1,0-0,5)}{2 \cdot 0,5} \\ &= \frac{x(1,5) - x(0,5)}{1} \\ &= 0,55 - 0,06 = 0,49 \end{aligned}$$

b) Valitaan taas $h = 0,5$, ja lasketaan derivaatan $x'(2,5)$ likiarvo.

$$\begin{aligned} x'(2,5) &= \frac{x(2,5+0,5) - x(2,5-0,5)}{2 \cdot 0,5} \\ &= \frac{x(3,0) - x(2,0)}{1} \\ &= 2,27 - 1,00 = 1,27 \end{aligned}$$

Vastaus a) $0,49$ m/s b) $1,27$ m/s

209

a) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ajan suhteen: $a = v'(t)$. Pitää siis määrittää derivaatan $v'(10)$ likiarvo. Lyhin aikojen välinen ero on $1\ s$, joten valitaan $h = 1$.

$$\begin{aligned} v'(10) &= \frac{v(10+1) - v(10-1)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{v(11) - v(9)}{2} \\ &= \frac{18,9 - 17,2}{2} = 0,85 \end{aligned}$$

b) Valitaan taas $h = 1$, ja lasketaan derivaatan $v'(7)$ likiarvo.

$$\begin{aligned} v'(7) &= \frac{v(7+1) - v(7-1)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{v(8) - v(6)}{2} \\ &= \frac{16,4 - 13,9}{2} = 1,25 \end{aligned}$$

Vastaus a) $0,85\ \text{m/s}^2$ b) $1,25\ \text{m/s}^2$

210

a) Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatan arvo kohdassa $x = 2.$ Lasketaan siis keskeisdifferenssin avulla derivaatan $f'(2)$ likiarvo, käyttämällä $h = 0,01.$

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \frac{f(2+0,01)-f(2-0,01)}{2\cdot 0,01} \\
&= \frac{f(2,01)-f(1,99)}{0,02} \\
&= \frac{2,01^{\log_2 2,01}-1,99^{\log_2 1,99}}{0,02} \\
&= 2,000036... \approx 2,000
\end{aligned}
$$

b) Suuntakulma saadaan tangentin kulmakertoimen avulla yhtälöstä $k = \tan \alpha.$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1} k \\
&= \tan^{-1} 2 \\
&= 63,4349...^\circ \approx 63^\circ
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 2,000 b) 63°

211

Täytyy määrittää derivaatan $y'(1)$ likiarvo. Valitaan $h = 0,25,$ ja käytetään keskeisdifferenssiä. Kuvaajan perusteella $y(0,75) \approx 1,25$ ja $y(1,25) \approx 0,75.$

$$
\begin{aligned}
y'(1) &= \frac{y(1+0,25)-y(1-0,25)}{2\cdot 0,25} \\
&= \frac{y(1,25)-y(0,75)}{0,5} \\
&= \frac{0,75-1,25}{0,5} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Selvitetään kaltevuuskulma tämän arvion mukaisesti yhtälöstä $k = \tan\alpha.$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1} k \\
&= \tan^{-1} -1 \\
&= -45°
\end{aligned}
$$

Vastaus $-45°$

212

Määritetään derivaatan $f'(2)$ likiarvo erotusosamäärän avulla.
Valitaan $h = 0,0005$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \frac{f(2+0,0005)-f(2)}{0,0005} \\ &= \frac{f(2,0005)-f(2)}{0,0005} \\ &= \frac{3,7458664-3,7458053}{0,0005} \\ &= 0,1222 \end{aligned}$$

Vastaus 0,1222

213

a) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 2, kun $h = 0,01$.

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \frac{f(2+0,01)-f(2)}{0,01} \\
&= \frac{f(2,01)-f(2)}{0,01} \\
&= \frac{2,01^{-2,01}-2^{-2}}{0,01} \\
&= -0,42033... \approx -0,42
\end{aligned}$$

b) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 2, kun $h = -0,01$.

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \frac{f(2-0,01)-f(2)}{-0,01} \\
&= \frac{f(1,99)-f(2)}{-0,01} \\
&= \frac{1,99^{-1,99}-2^{-2}}{-0,01} \\
&= -0,42625... \approx -0,43
\end{aligned}$$

Vastaus a) $-0,42$ b) $-0,43$

214

a) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 0,5, kun $h = 0{,}01$.

$$
\begin{aligned}
f'(0{,}5) &= \frac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h} \\
&= \frac{f(0{,}5+0{,}01)-f(0{,}5)}{0{,}01} \\
&= \frac{f(0{,}51)-f(0{,}5)}{0{,}01} \\
&= \frac{0{,}51^{0{,}51^{0{,}51}}-0{,}5^{0{,}5^{0{,}5}}}{0{,}01} \\
&= 0{,}76998... \approx 0{,}770
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan erotusosamäärän arvo kohdassa 0,5, kun $h = -0{,}01$.

$$
\begin{aligned}
f'(0{,}5) &= \frac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h} \\
&= \frac{f(0{,}5-0{,}01)-f(0{,}5)}{-0{,}01} \\
&= \frac{f(0{,}49)-f(0{,}5)}{-0{,}01} \\
&= \frac{0{,}49^{0{,}49^{0{,}49}}-0{,}5^{0{,}5^{0{,}5}}}{-0{,}01} \\
&= 0{,}77849... \approx 0{,}778
\end{aligned}
$$

c) Lasketaan derivaatan likiarvo keskeisdifferenssillä, kun $h = 0,01$.

$$
\begin{aligned}
f'(0,5) &= \frac{f(0,5+h) - f(0,5-h)}{2h} \\
&= \frac{f(0,5+0,01) - f(0,5-0,01)}{2 \cdot 0,01} \\
&= \frac{f(0,51) - f(0,49)}{0,02} \\
&= \frac{0,51^{0,51^{0,51}} - 0,49^{0,49^{0,49}}}{0,02} \\
&= 0,74424... \approx 0,744
\end{aligned}
$$

d) Laskin antaa kolmen desimaalin tarkkuudella derivaatalle arvon 0,744.

Vastaus a) 0,770 b) 0,778 c) 0,744 d) 0,744
Keskeisdifferenssillä saatu likiarvo on sama kuin laskimella saatu.

215

a) Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatan arvo kohdassa $x=-1$. Lasketaan siis keskeisdifferenssin avulla derivaatan $f'(-1)$ likiarvo, käyttämällä h:n arvoja 0,1; 0,01; 0,001 ja 0,0001. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B
1	0,1	0,535266
2	0,01	0,534086
3	0,001	0,534074
4	0,0001	0,534074

b) Suuntakulma saadaan tangentin kulmakertoimen avulla yhtälöstä $k=\tan\alpha$.

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}k\\ &= \tan^{-1}0{,}534074\\ &= 28{,}1055...° \approx 28°\end{aligned}$$

216

a) Nopeus on paikan derivaatta ajan suhteen: $v = x'(t)$. Pitää siis määrittää derivaatan $x'(2)$ likiarvo. Lyhin aikojen välinen ero on $1\ s$, joten valitaan $h = 1$.

$$\begin{aligned} x'(2) &= \frac{x(2+1) - x(2-1)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{x(3) - x(1)}{2} \\ &= \frac{28{,}8 - 3{,}2}{2} = 12{,}8 \end{aligned}$$

b) Valitaan tällä kertaa likiarvon $x'(3{,}5)$ laskemiseksi $h = 0{,}5$.

$$\begin{aligned} x'(3{,}5) &= \frac{x(3{,}5+0{,}5) - x(3{,}5-0{,}5)}{2 \cdot 0{,}5} \\ &= \frac{x(4) - x(3)}{1} \\ &= 51{,}2 - 28{,}8 = 22{,}4 \end{aligned}$$

Vastaus a) $12{,}8$ m/s b) $22{,}4$ m/s

217

a) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ajan suhteen: $a = v'(t)$. Pitää siis määrittää derivaatan $v'(2)$ likiarvo. Lyhin aikojen välinen ero on $1\ s$, joten valitaan $h = 1$. Muutetaan aluksi nopeudet $v(3)$ ja $v(1)$ yksikköön m/s.

$$\begin{aligned} v(3) = 86 \text{ km/h} &= 86 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \text{ m/s} \\ &= 23{,}8888... \text{ m/s} \\ &\approx 23{,}889 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1) = 28 \text{ km/h} &= \frac{28}{3{,}6} \text{ m/s} \\ &= 7{,}7777... \text{ m/s} \\ &\approx 7{,}778 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea keskeisdifferenssillä derivaatan $v'(2)$ likiarvo.

$$\begin{aligned} v'(2) &= \frac{v(2+1) - v(2-1)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{v(3) - v(1)}{2} \\ &= \frac{23{,}889 - 7{,}778}{2} = 8{,}0555 \approx 8{,}1 \end{aligned}$$

b) Valitaan taas $h=1$, ja lasketaan derivaatan $v'(4)$ likiarvo. Muutetaan aluksi nopeudet $v(5)$ ja $v(3)$ yksikköön m/s.

$$v(5)=41{,}3888...\text{ m/s}\approx 41{,}389\text{ m/s}$$

$$v(3)\approx 23{,}889\text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}v'(4)&=\frac{v(4+1)-v(4-1)}{2\cdot 1}\\&=\frac{v(5)-v(3)}{2}\\&=\frac{41{,}389-23{,}889}{2}=8{,}75\approx 8{,}8\end{aligned}$$

c) Valitaan taas $h=1$, ja lasketaan derivaatan $v'(7)$ likiarvo. Muutetaan aluksi nopeudet $v(8)$ ja $v(6)$ yksikköön m/s.

$$v(8)=76{,}6666...\text{ m/s}\approx 76{,}667\text{ m/s}$$

$$v(6)=52{,}2222...\text{ m/s}\approx 52{,}222\text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}v'(7)&=\frac{v(7+1)-v(7-1)}{2\cdot 1}\\&=\frac{v(8)-v(6)}{2}\\&=\frac{76{,}667-52{,}222}{2}=12{,}2225\approx 12{,}2\end{aligned}$$

Vastaus a) $8{,}1\text{ m/s}^2$ b) $8{,}8\text{ m/s}^2$ c) $12{,}2\text{ m/s}^2$

218

Muodostetaan keskeisdifferenssin lauseke.

$$f'(2) = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$$
$$= \frac{3^{2+h} - 3^{2-h}}{2h}$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla derivaatan likiarvo h:n arvoilla 0,1; 0,01; 0,001; ... .

	A	B
1	0,1	9,907412...
2	0,01	9,887709...
3	0,001	9,887513...
4	0,0001	9,887511...
...		
8	1E-08	9,887510...
9	1E-09	9,887511...
10	1E-10	9,887531...
11	1E-11	9,887735...
12	1E-12	9,888090...
13	1E-13	9,876544...
14	1E-14	9,947598...
15	1E-15	9,769963...

Näyttää olevan $f'(2) \approx 9{,}88751$.

Vastaus $f'(2) \approx 9{,}88751$

219

Muodostetaan erotusosamäärän lauseke.

$$f'(0,5) = \frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$$
$$= \frac{\sin(0,5+h)-\sin(0,5)}{h}$$

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla derivaatan likiarvo h:n arvoilla 10^{-3}, 10^{-4}, ... , 10^{-10}.

	A	B
$p=3$	0,001	0,8773427029...
$p=4$	0,0001	0,8775585892...
$p=5$	0,00001	0,8775801647...
$p=6$	0,000001	0,8775823222...
$p=7$	0,0000001	0,8775825372...
$p=8$	1E-08	0,8775825622...
$p=9$	1E-09	0,8775825067...
$p=10$	1E-10	0,8775824512...

Derivaatan tarkka arvo on $f'(0,5) = \cos 0,5 = 0,8775825619...$, joten lähimpänä tätä näyttäisi olevan arvo $p=8$. Tulos riippuu kuitenkin laskennassa käytetystä laskimesta, ja toisella menetelmällä tulokseksi voisi saada esimerkiksi $p=7$ tai $p=9$.

Vastaus Laskimesta riippuen vastaus saattaa olla esimerkiksi $p=7$, $p=8$ tai $p=9$.

220

a) Sijoitetaan lausekkeeseen $L(x)$ arvo $x = \frac{\pi}{3} + 10^{-3n}$. Lasketaan lausekkeen arvot, kun $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$ Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

$$L(x) = \frac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-3n}\right) - \sqrt{3}}{\frac{\pi}{3} + 10^{-3n} - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-3n}\right) - \sqrt{3}}{10^{-3n}}$$

n	***L(x)***
1	4,0069415620...
2	4,0000069275...
3	3,9999998869...
4	3,9999115131...
5	3,9968028887...

Saadut tulokset riippuvat käytetystä laskentaohjelmasta.

b) Huomataan, että funktio $L(x)=\dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{x-\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\tan x-\tan\dfrac{\pi}{3}}{x-\dfrac{\pi}{3}}$ on funktion $f(x)=\tan x$ erotusosamäärä kohdassa $x=\dfrac{\pi}{3}$. Siis $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} L(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}}=4.$ Kun derivaatan likiarvoa laskettaessa apupiste lähenee tarpeeksi lähelle laskentakohtaa, tulokset alkavat epätarkentumaan. Kun apupiste on liian lähellä, ei likiarvoja pystytä edes laskemaan.

221

Funktio on pariton, jos sille pätee $f(x) = -f(-x)$ kaikilla sen määrittelyjoukon x:n arvoilla. Siis koska $f(0) = -f(0)$, niin $f(0) = 0$. Määritetään nyt sille erotusosamäärän arvo kohdassa 0.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \frac{f(h)}{h}
\end{aligned}
$$

Määritetään seuraavaksi keskeisdifferenssin arvo kohdassa 0. Koska funktio oli pariton, niin $-f(-h) = f(h)$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\
&= \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \\
&= \frac{f(h) + f(h)}{2h} \\
&= \frac{f(h)}{h}
\end{aligned}
$$

Koska erotusosamäärän ja keskeisdifferenssin lausekkeet ovat samat, antavat ne samat likiarvot derivaatalle $f'(0)$.

222

a) Muodostetaan erotusosamäärän ja keskeisdifferenssin lausekkeet kohdassa 0.

Erotusosamäärä:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \frac{\sin(1000000h)-\sin 0}{h} \\ &= \frac{\sin(1000000h)}{h} \end{aligned}$$

Keskeisdifferenssi:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} \\ &= \frac{f(h)-f(-h)}{2h} \\ &= \frac{\sin(1000000h)-\sin(-1000000h)}{2h} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan likiarvot h:n arvoilla $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots 10^{-8}$.

	erotusosamäärä	**keskeisdifferenssi**
h	***f´(0)***	***f´(0)***
0,1	0,35749...	0,35749...
0,01	-30,56144...	-30,56144...
0,001	826,87954...	826,87954...
0,0001	-5063,65641...	-5063,65641...
1E-05	-54402,11109...	-54402,11109...
1E-06	841470,98481...	841470,98481...
1E-07	998334,16647...	998334,16647...
1E-08	999983,33342...	999983,33342...

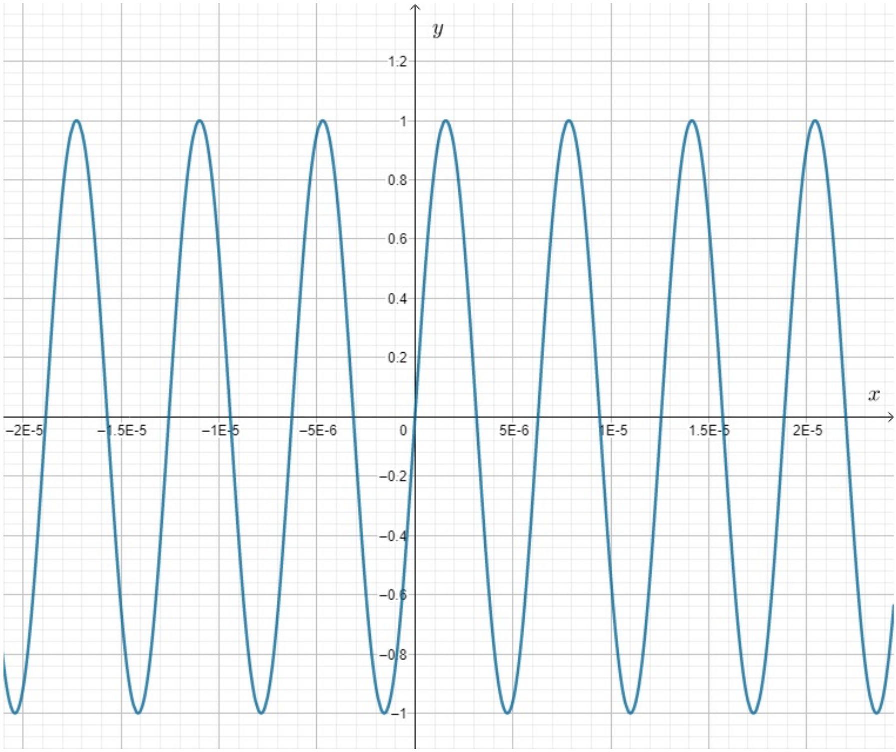
b) Funktio on pariton, sillä

$$f(x) = \sin(1000000x) = -\sin(-1000000x) = -f(-x)$$

kaikilla x. Kuten tehtävässä 221 osoitettiin, tällöin erotusosamäärän ja keskeisdifferenssin lausekkeet ovat samat, ja antavat samat likiarvot derivaatalle. a-kohdassa muodostettua keskeisdifferenssin lauseketta voisikin sieventää vielä pidemmälle, jolloin selvästi nähdään, että se todellakin on sama kuin erotusosamääränkin lauseke:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{\sin(1000000h) - \sin(-1000000h)}{2h} \\ &= \frac{\sin(1000000h) + \sin(1000000h)}{2h} \\ &= \frac{\sin(1000000h)}{h} \end{aligned}$$

c) Funktion f kuvaajan pisteen y-koordinaatti vaihtelee arvojen -1 ja 1 välillä vielä hyvinkin lähellä kohtaa 0.



223

a) Muodostetaan erotusosamäärän lauseke kohdassa 0. Koska lasketaan vasemmanpuoleista erotusosamäärää kohtaan 0, käytetään $h = -0,01$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{f(-0,01) - f(0)}{-0,01} \\ &= \frac{|-0,01| - |0|}{-0,01} \\ &= \frac{0,01}{-0,01} \\ &= -1 \end{aligned}$$

b) Lasketaan oikeanpuoleinen erotusosamäärä.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{f(0,01) - f(0)}{0,01} \\ &= \frac{|0,01| - |0|}{0,01} \\ &= \frac{0,01}{0,01} \\ &= 1 \end{aligned}$$

c) Lasketaan keskeisdifferenssillä derivaatan likiarvo kohdassa 0, kun $h = 0{,}01$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \\
&= \frac{f(0+0{,}01) - f(0-0{,}01}{2 \cdot 0{,}01} \\
&= \frac{f(0{,}01) - f(-0{,}01)}{0{,}02} \\
&= \frac{|0{,}01| - |-0{,}01|}{0{,}02} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

d) Itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva kohdassa 0, joten derivaattaa $f'(0)$ ei ole määritelty.