108

a) Funktio f on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion f arvot kohdissa 0 ja 1.

$$f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 23 \cdot 0 - 14 = -14 < 0$$

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 23 \cdot 1 - 14 = 1 > 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[0,\ 1]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 1[$.

b) Lasketaan funktion f arvot kohdissa 4 ja 5.

$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 23 \cdot 4 - 14 = -2 < 0$$

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 23 \cdot 5 - 14 = 1 > 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[4,\ 5]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]4,\ 5[$.

109

a) Funktio f on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion f arvot kohdissa 2 ja 3.

$$f(2) = 2^3 + 2 - 13 = -3 < 0$$

$$f(3) = 3^3 + 3 - 13 = 17 > 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[2,\ 3]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]2,\ 3[$.

b) Funktio f on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion f arvot kohdissa –1 ja 0.

$$f(-1) = 3^{-1} + (-1)^3 = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f(0) = 3^0 + (0)^3 = 1 > 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[-1,\ 0]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 1[$.

110

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= x^2 - 1 \\ \sqrt{x+1} - x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = \sqrt{x+1} - x^2 + 1$ nollakohdat.

Selvitetään funktion määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq -1$.

Tutkitaan funktion f arvoja välillä $[-1,\ 2]$.

$$f(-1) = \sqrt{-1+1} - (-1)^2 + 1 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0) = \sqrt{0+1} - (0)^2 + 1 = 2 > 0$$

$$f(2) = \sqrt{2+1} - (2)^2 + 1 = \sqrt{3} - 3 < 0$$

Koska funktion arvot välin $[0,\ 2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 2[$.

Koska arvo -1 ei ole välillä $[0,\ 2]$, on funktiolla f ainakin 2 nollakohtaa välillä $[-1,\ 2]$.

111

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^2 + \sqrt{x} = 2x$$
$$x^2 + \sqrt{x} - 2x = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2x$ nollakohdat.

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq 0$.

Tutkitaan funktion f arvoja.

$$f(0) = 0^2 + \sqrt{0} - 2 \cdot 0 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0,1) = 0,1^2 + \sqrt{0,1} - 2 \cdot 0,1 \approx 0,1232... > 0$$

$$f(0,5) = 0,5^2 + \sqrt{0,5} - 2 \cdot 0,5 \approx -0,4289... < 0$$

Koska funktion arvot välin $[0,1;\ 0,5]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,1;\ 0,5[$.

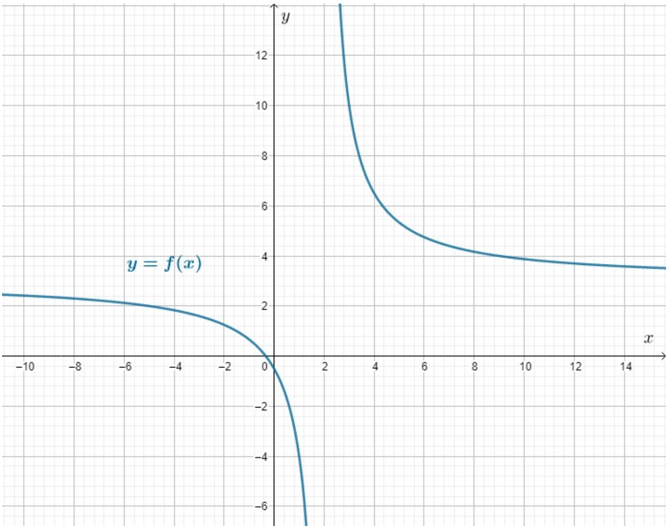
Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(1) = 1^2 + \sqrt{1} - 2 \cdot 1 = 0$$

Löysimme toisenkin tarkan nollakohdan.

Koska arvot 0 ja 1 eivät ole välillä $[0{,}1;\ 0{,}5]$, on funktiolla f ainakin 3 nollakohtaa.

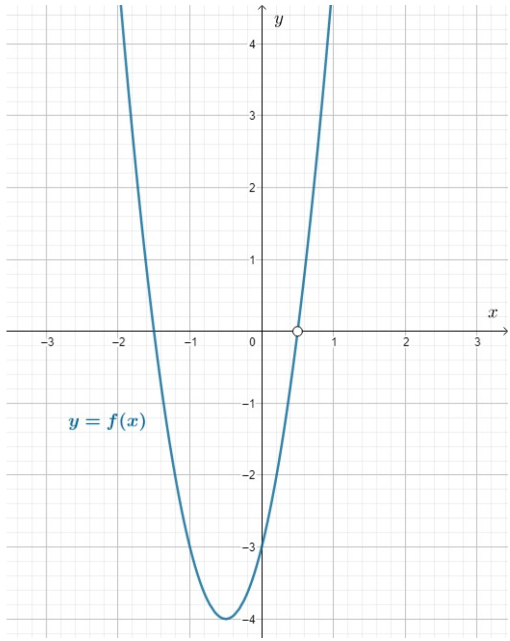
112



a) Ei voi, sillä funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 2$, eikä näin ollen ole jatkuva välillä $[0,\ 3]$.

b) Kyllä voi, sillä funktio on jatkuva välillä $[-3,\ 0]$.

113



Funktiolla f on välillä $]-2, -1[$ nollakohta, koska funktio f on jatkuva välillä $[-2, -1]$ ja $f(-2) > 0$ ja $f(-1) < 0$. Funktiolla f ei ole nollakohtaa välillä $]0, 1[$, sillä funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 0{,}5$.

114

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin x = x + 1$$
$$\sin x - x - 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \sin x - x - 1$ nollakohdat.

Funktio f on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

   Lasketaan funktion f arvoja.

   $$f(-2) = \sin(-2) - (-2) - 1 \approx 0{,}0907... > 0$$

   $$f(-1) = \sin(-1) - (-1) - 1 \approx -0{,}8414... < 0$$

   Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[-2,\ -1]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2,\ -1[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta.

   Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \cos x - 1$$

Koska

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 1 - 1 = 0$$

kaikilla x, niin funktio on vähenevä. Funktio on myös aidosti vähenevä, sillä derivaatta $f'(x) = 0$ vain hetkellisesti. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

115

Funktio f saa arvon 27 funktion $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 27$ nollakohdissa.

Funktio g on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla g on ainakin yksi nollakohta.

   Lasketaan funktion g arvoja.

   $g(3) = \mathrm{e}^3 + 3 - 27 \approx -3,914... < 0$

   $g(4) = \mathrm{e}^4 + 4 - 27 \approx 31,598... > 0$

   Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[3,\ 4]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla g on ainakin yksi nollakohta välillä $]3,\ 4[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla g on enintään yksi nollakohta.

   Tutkitaan funktion g kulkua derivaattafunktion avulla.

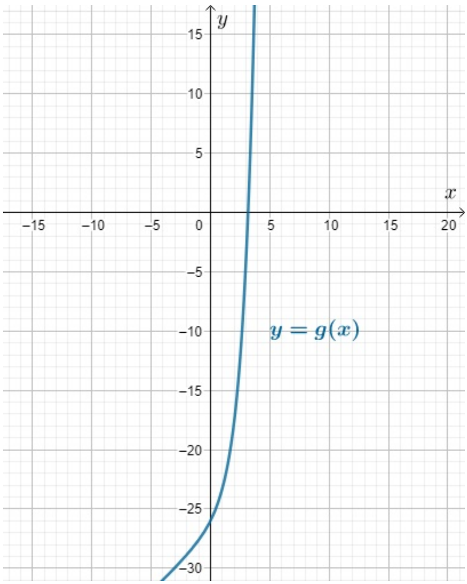
   Määritetään derivaattafunktio.

   $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$

Koska

$$g'(x) = e^x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$$

kaikilla x, niin funktio on aidosti kasvava. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla g on täsmälleen yksi nollakohta, joten myös funktio f saa arvon 27 täsmälleen kerran.

116

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= x+16 \\
\mathrm{e}^x - x - 16 &= 0
\end{aligned}
$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x)=\mathrm{e}^x - x - 16$ nollakohdat.

Funktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=\mathrm{e}^x - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \\
\mathrm{e}^x &= 1 \\
x &= \ln 1 = 0
\end{aligned}
$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

	0	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

x	$f'(x)$	merkki
-1	$\approx -0,632...$	$-$
1	$\approx 1,718...$	$+$

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $x \leq 0,$ joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \leq 0.$

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \geq 0,$ joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \geq 0.$

Näin ollen funktiolla f voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

2) Etsitään funktion f nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \leq 0.$

$$f(-15) = \mathrm{e}^{-15} - (-15) - 16 \approx -0{,}9999 < 0$$

$$f(-20) = \mathrm{e}^{-20} - (-20) - 16 \approx 4{,}0000... > 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-20, -15\right[.$

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \geq 0.$

$$f(2) = \mathrm{e}^{2} - 2 - 16 \approx -10{,}610... < 0$$

$$f(3) = \mathrm{e}^{3} - 3 - 16 \approx 1{,}085... > 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]2,\ 3\right[.$

Koska välit $\left]-20, -15\right[$ ja $\left]2,\ 3\right[$ ovat erilliset, funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla f on enintään kaksi nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa. Siten funktiolla $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 16$ on täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä $\mathrm{e}^x = x + 16$ täsmälleen kaksi ratkaisua.

Vastaus kaksi ratkaisua

117

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 - 80x = 50$$
$$x^5 - 80x - 50 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - 80x - 50$ nollakohdat.

Funktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 5x^4 - 80$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$5x^4 - 80 = 0$$
$$5x^4 = 80$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \pm 2$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

	-2		2	
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	↗		↘	↗

x	$f'(x)$	merkki
-3	325	$+$
0	-80	$-$
3	325	$+$

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \le -2$, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \le -2$.

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $-2 \le x \le 2$, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $-2 \le x \le 2$.

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \ge 2$, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \ge 2$.

Näin ollen funktiolla f voi olla enintään kolme nollakohtaa.

2) Etsitään funktion f nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \le -2$.

$$f(-2) = (-2)^5 - 80 \cdot (-2) - 50 = 78 > 0$$

$$f(-3) = (-3)^5 - 80 \cdot (-3) - 50 = -53 < 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-2, -3\right[$.

Lasketaan funktion arvoja välillä $-2 \le x \le 2$.

$$f(0) = 0^5 - 80 \cdot 0 - 50 = -50 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^5 - 80 \cdot (-1) - 50 = 29 > 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-1,\ 0\right[$.

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \geq 2$.

$f(3) = 3^5 - 80 \cdot 3 - 50 = -47 < 0$

$f(4) = 4^5 - 80 \cdot 4 - 50 = 654 > 0$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]3,\ 4[$.
Funktiolla f on siis ainakin kolme nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla f on enintään kolme nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla f on ainakin kolme nollakohtaa. Siten funktiolla $f(x) = x^5 - 80x - 50$ on täsmälleen kolme nollakohtaa ja yhtälöllä $x^5 - 80x = 50$ täsmälleen kolme ratkaisua.

Vastaus kolme ratkaisua

118

Funktio $f(x)=x^5-2x^2+1$ on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Tutkitaan funktion f arvoja välillä [0, 1].

$$f(0)=0^5-2\cdot 0^2+1=1>0$$

$$f(0,9)=0,9^5-2\cdot 0,9^2+1=-0,02951<0$$

Koska funktion arvot välin $[0;\ 0,9]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0;\ 0,9[$.

Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(1)=1^5-2\cdot 1^2+1=0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan.

Koska arvo 1 ei ole välillä $[0;\ 0,9]$, on funktiolla f ainakin 2 nollakohtaa välillä $[0,\ 1]$.

119

Funktio f saa arvon $\sqrt{2}$ funktion $g(x)=2^x-x^2-\sqrt{2}$ nollakohdissa.

Funktio g on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

Lasketaan funktion g arvot kodissa 4 ja 5.

$$g(4)=2^4-4^2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}<0$$

$$g(5)=2^5-5^2-\sqrt{2}=5,585...>0$$

Koska funktio g on jatkuva välillä $[4,\ 5]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]4,\ 5[$. Siis funktio f saa arvon $\sqrt{2}$ välillä $[4,\ 5]$.

120

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sqrt{x+1} = x^3 + 1$$
$$\sqrt{x+1} - x^3 - 1 = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = \sqrt{x+1} - x^3 - 1$ nollakohdat.

Selvitetään funktion määrittelyehto.

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq -1$.

Tutkitaan funktion f arvoja välillä $[-1,\ 1]$.

$$f(-1) = \sqrt{-1+1} - (-1)^3 - 1 = 0$$

Sattumalta löysimme yhden funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0) = \sqrt{0+1} - 0^3 - 1 = 0$$

Sattumalta löysimme toisenkin funktion nollakohdan. Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(0,5)=\sqrt{0,5+1}-0,5^3-1=0,0997...>0$$

$$f(1)=\sqrt{1+1}-1^3-1=-0,5857...<0$$

Koska funktion arvot välin $[0,5;\ 1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,5;\ 1[$.

Koska arvot -1 ja 0 eivät ole välillä $[0,5;\ 1]$, on funktiolla f ainakin 3 nollakohtaa välillä $[-1,\ 1]$.

121

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$2^x - x = 3$$
$$2^x - x - 3 = 0$$

Yhtälön juuret ovat samat kuin funktion $f(x) = 2^x - x - 3$ nollakohdat.

Funktio f on kaikkialla määritelty ja jatkuva.

Tutkitaan funktion f arvoja.

$$f(-3) = 2^{-3} - (-3) - 3 = \frac{1}{8} > 0$$

$$f(0) = 2^0 - 0 - 3 = -2 < 0$$

Koska funktion arvot välin $[-3,\ 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-3,\ 0[$.

Jatketaan funktion arvojen tutkimista.

$$f(3) = 2^3 - 3 - 3 = 2 > 0$$

Koska funktion arvot välin $[0,\ 3]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 3[$.

Koska välit $]-3,\ 0[$ ja $]0,\ 3[$ ovat erilliset, funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa.

122

a) Ei voi, sillä funktio ei ole määritelty kohdassa $x = \frac{7}{4}$, eikä näin ollen ole jatkuva välillä $[1,\ 2]$.

b) Funktio f on jatkuva välillä $[-1,\ 0]$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(-1) = \frac{2 \cdot (-1) + 1}{4 \cdot (-1) - 7} = 0{,}0909... > 0$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{4 \cdot 0 - 7} = -0{,}1428... < 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[-1,\ 0]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1,\ 0[$.

123

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = 2x - 1$$
$$\sin 2x - 2x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \sin 2x - 2x + 1$ nollakohdat.

Funktio f on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion f arvoja.

$$f(0) = \sin(2 \cdot 0) - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$$

$$f(1) = \sin(2 \cdot 1) - 2 \cdot 1 + 1 = -0{,}0907... < 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[0,\ 1]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 1[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

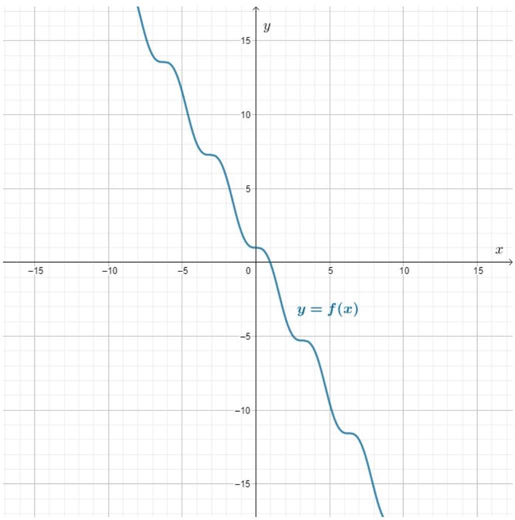
Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = 2\cos 2x - 2$

Koska

$f'(x) = 2\cos 2x - 2 \leq 2 \cdot 1 - 2 = 0$

kaikilla x, niin funktio on vähenevä. Funktio on myös aidosti vähenevä, sillä derivaatta $f'(x) = 0$ vain hetkellisesti. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

124

Funktio f saa arvon 3 funktion $g(x) = x - \mathrm{e}^{-x} - 3$ nollakohdissa.

Funktio g on määritelty ja jatkuva kaikkialla.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla g on ainakin yksi nollakohta.

   Lasketaan funktion g arvoja.

   $g(3) = 3 - \mathrm{e}^{-3} - 3 = -0,0497... < 0$

   $g(4) = 4 - \mathrm{e}^{-4} - 3 = 0,9816... > 0$

   Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[3,\ 4]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla g on ainakin yksi nollakohta välillä $]3,\ 4[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla g on enintään yksi nollakohta.

   Tutkitaan funktion g kulkua derivaattafunktion avulla.

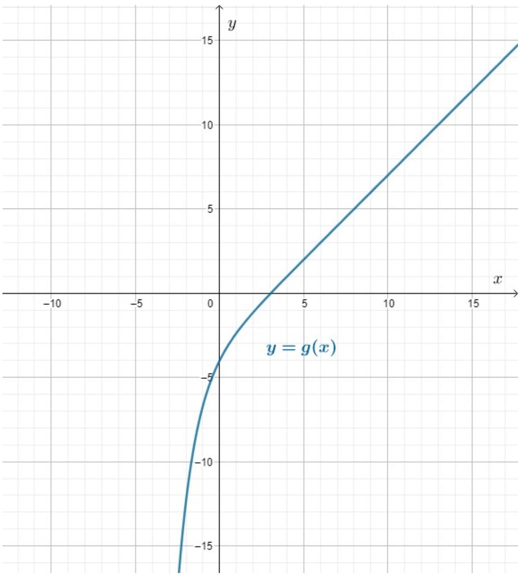
   Määritetään derivaattafunktio.

   $g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{x}$

Koska

$$g'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 1 + 0 = 1 > 0$$

kaikilla x, niin funktio on aidosti kasvava. Sillä siis voi olla enintään yksi nollakohta.



Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla g on täsmälleen yksi nollakohta, joten myös funktio f saa arvon 3 täsmälleen kerran.

125

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^{x^2} + x^2 = 5$$
$$e^{x^2} + x^2 - 5 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 5$ nollakohdat.

Funktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2xe^{x^2} + 2x = 0$$
$$2x\left(e^{x^2} + 1\right) = 0$$

Koska $e^{x^2} + 1 > 0$ kaikilla x, niin tulon nollasäännön nojalla

$$2x = 0$$
$$x = 0.$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

x	$f'(x)$	merkki
-1	$-7{,}436...$	$-$
1	$7{,}436...$	$+$

Funktio f on aidosti vähenevä välillä $x \leq 0$, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \leq 0$.

Funktio f on aidosti kasvava välillä $x \geq 0$, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $x \geq 0$.

Näin ollen funktiolla f voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

2) Etsitään funktion f nollakohtia.

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \leq 0$.

$$f(-2) = \mathrm{e}^{(-2)^2} + (-2)^2 - 5 = 53{,}59... > 0$$

$$f(0) = \mathrm{e}^{0^2} + 0^2 - 5 = -4 < 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2,\ 0[$.

Lasketaan funktion arvoja välillä $x \geq 0$.

$$f(2) = \mathrm{e}^{2^2} + 2^2 - 5 = 53{,}59... > 0$$

Funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,\ 2[$.

Koska välit $]-2,\ 0[$ ja $]0,\ 2[$ ovat erilliset, funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa.

Kohdassa 1 todettiin, että funktiolla f on enintään kaksi nollakohtaa. Kohdassa 2 osoitettiin, että funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa. Siten funktiolla $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} + x^2 - 5$ on täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä $\mathrm{e}^{x^2} + x^2 = 5$ täsmälleen kaksi ratkaisua.

Vastaus kaksi ratkaisua

126

a) Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 6x^5 - 1$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} 6x^5 - 1 &= 0 \\ x^5 &= \frac{1}{6} \\ x &= \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

	$\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

x	$f'(x)$	merkki
0	-1	$-$
1	5	$+$

Funktio f saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $x = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$.

Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)^6 - \sqrt[5]{\frac{1}{6}} + 1 = 0,4176... > 0$$

Koska funktion pienin arvo on positiivinen, ei funktiolla ole yhtään nollakohtaa.

b) Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^6 - x + 1 = 1 - \sqrt{x}$$
$$x^6 - x + \sqrt{x} = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = x^6 - x + \sqrt{x}$ nollakohdat.

Funktio g on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq 0$.

Funktiolla g on ainakin yksi nollakohta, sillä

$$g(0) = 0^6 - 0 + \sqrt{0} = 0.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = 6x^5 - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat laskimella.
Tulokseksi saadaan $x = 0,253148...$ ja $x = 0,560596...$.

Laaditaan funktion g kulkukaavio.

		$0{,}253...$		$0{,}560...$	
$g'(x)$	$+$		$-$		$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

x	$g'(x)$	merkki
$0{,}1$	$0{,}581...$	$+$
$0{,}3$	$-0{,}072...$	$-$
1	$5{,}5$	$+$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla g on minimikohta $x = 0{,}560596...$. Lasketaan funktion arvo laskimella tässä kohdassa.

$$g(0{,}560596...) = 0{,}219172... > 0$$

Funktion kaikki arvot ovat siis positiivisia, kun $x > 0,$ joten sen ainoa nollakohta on $x = 0.$

127

a) Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 0$.

Lasketaan funktion f arvot kohdissa 0,001 ja 0,01.

$$f(0,001) = \sin\frac{1}{0,001} - 0,001 = 0,8258... > 0$$

$$f(0,01) = \sin\frac{1}{0,01} - 0,01 = -0,5163... < 0$$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[0,001;\ 0,01]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]0;\ 0,01[$.

b) Kun $0 < x < \frac{1}{10^n}$, niin $\frac{1}{x} > 10^n$. Välillä $]10^n,\ \infty[$ sinifunktio saa arvot -1 ja 1 äärettömän monta kertaa. Kohdassa, jossa $\sin\frac{1}{x} = 1$, on $f(x) = 1 - x > 0$. Kohdassa, jossa $\sin\frac{1}{x} = -1$, on $f(x) = -1 - x < 0$.

128

Funktio $f(x)=2^x-3x$ on jatkuva kaikkialla.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[0,\ 1]$.

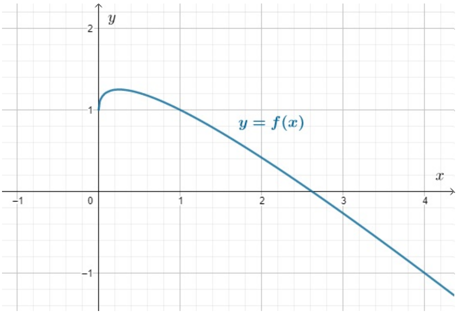
funktion arvot	nollakohta välillä	välin keskipiste
$f(0)=1>0$ $f(1)=-1<0$	$]0;\ 1[$	$0,5$
$f(0,5)=-0,085...<0$	$]0;\ 0,5[$	$0,25$
$f(0,25)=0,439...>0$	$]0,25;\ 0,5[$	$0,375$
$f(0,375)=0,171...>0$	$]0,375;\ 0,5[$	$0,4375$
$f(0,4375)=0,041...>0$	$]0,4375;\ 0,5[$	$0,46875$
$f(0,46875)=-0,022...<0$	$]0,4375;\ 0,46875[$	$0,453125$
$f(0,453125)=-0,009...<0$	$]0,4375;\ 0,453125[$	$0,4453125$
$f(0,4453125)=0,025...>0$	$]0,4453125;\ 0,453125[$	$0,44921875$
$f(0,44921875)=0,017...>0$	$]0,44921875;\ 0,453125[$	$0,451171875$
$f(0,451171875)=0,013...>0$	$]0,451171875;\ 0,453125[$	

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 0,5.

Vastaus 0,5

129

Funktio $f(x)=\sqrt{x}-x+1$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq 0$.



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $]2,\ 3[$.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[2,\ 3]$.

funktion arvot	nollakohta välillä	välin keskipiste
$f(2)=0,414...>0$ $f(3)=-0,267...<0$	$]2;\ 3[$	2,5
$f(2,5)=0,081...>0$	$]2,5;\ 3[$	2,75
$f(2,75)=-0,091...<0$	$]2,5;\ 2,75[$	2,625
$f(2,625)=-0,004...<0$	$]2,5;\ 2,625[$	2,5625
$f(2,5625)=0,038...>0$	$]2,5625;\ 2,625[$	

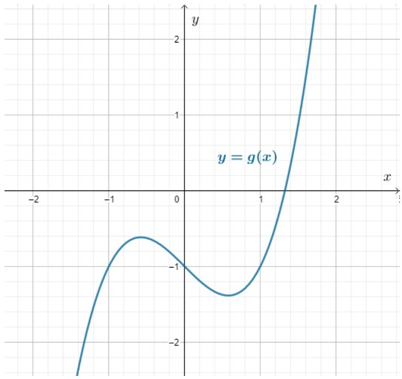
Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 2,6.

Vastaus 2,6

130

Funktio f saa arvon 1 funktion $g(x)=x^3-x-1$ nollakohdissa. Funktio g on polynomifunktio, joten se on kaikkialla jatkuva.

Kuvaajan perusteella funktiolla g on yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.



Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[1,\ 2]$.

funktion arvot	nollakohta välillä	välin keskipiste
$g(1)=-1<0$ $g(2)=5>0$	$]1;\ 2[$	$1,5$
$g(1,5)=0,875>0$	$]1;\ 1,5[$	$1,25$
$g(1,25)=-0,296...<0$	$]1,25;\ 1,5[$	$1,375$
$g(1,375)=0,224...>0$	$]1,25;\ 1,375[$	$1,3125$
$g(1,3125)=-0,051...<0$	$]1,3125;\ 1,375[$	$1,34375$
$g(1,34375)=0,082...>0$	$]1,3125;\ 1,34375[$	

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 1,3.

Vastaus 1,3

131

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + x = 3$$
$$x^3 + x - 3 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + x - 3$ nollakohdat.

Määritetään nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	1	2	1,5	-1	1,875	-1,875
3	1	1,5	1,25	-1	0,203125	-0,20313
4	1	1,25	1,125	-1	-0,45117	0,451172
...						
14	1,213379	1,213623	1,213501	-0,00018	0,000484	-8,6E-08
15	1,213379	1,213501	1,21344	-0,00018	0,000153	-2,7E-08
16	1,213379	1,21344	1,213409	-0,00018	-1,2E-05	2,15E-09

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 1,213$.

Vastaus $\quad x \approx 1,213$

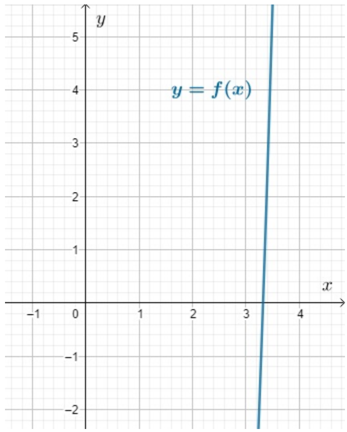
132

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$e^x = 31 - x$$
$$e^x + x - 31 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^x + x - 31$ nollakohdat.

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $]3,\ 4[$.



Määritetään nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	3	4	3,5	-7,91446	5,615452	-44,4433
3	3	3,5	3,25	-7,91446	-1,95966	15,50966
4	3,25	3,5	3,375	-1,95966	1,599284	-3,13405
5	3,25	3,375	3,3125	-1,95966	-0,23383	0,45822
...						
22	3,3206844	3,3206854	3,3206849	-2,7E-05	-1,3E-05	3,55E-10
23	3,3206849	3,3206854	3,3206851	-1,3E-05	-6,4E-06	8,39E-11

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 3,320685$.

Vastaus $\quad x \approx 3,320685$

133

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\cos 2x = -x$$
$$\cos 2x + x = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \cos 2x + x$ nollakohdat.

Funktion $f(x) = \cos 2x + x$ nollakohta on välillä $]-1,\ 0[$, koska funktio on jatkuva ja funktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1{,}416... < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Määritetään nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

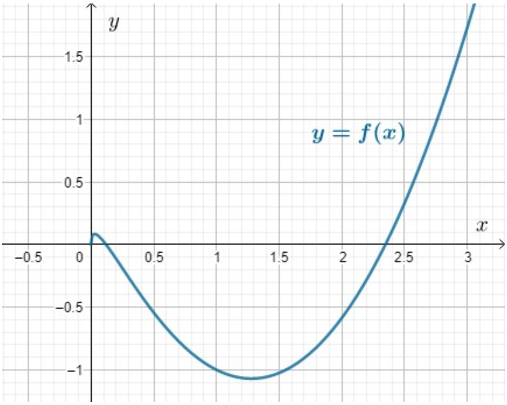
	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	-1	0	-0,5	-1,4161468	0,0403023	-0,0570740
3	-1	-0,5	-0,75	-1,4161468	-0,6792628	0,9619359
4	-0,75	-0,5	-0,625	-0,6792628	-0,3096776	0,2103525
5	-0,625	-0,5	-0,5625	-0,3096776	-0,1313235	0,0406679
...						
23	-0,5149336	-0,5149331	-0,5149333	-8,72589E-07	-2,25411E-07	1,96691E-13
24	-0,5149333	-0,5149331	-0,5149332	-2,25411E-07	9,81777E-08	-2,21304E-14

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx -0{,}514933$.

Vastaus $\quad x \approx -0,514933$

134

Funktio f on jatkuva ja määritelty, kun $x \geq 0$.



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi positiivinen nollakohta välillä $]0,01;\ 0,5[$ ja toinen välillä $]2;\ 2,5[$.

Määritetään välillä $]0,01;\ 0,5[$ oleva nollakohta neljän desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	0,01	0,5	0,255	0,0701	-0,194999753	-0,013669483
3	0,01	0,255	0,1325	0,0701	-0,015938256	-0,001117272
4	0,01	0,1325	0,07125	0,0701	0,058253519	0,004083572
5	0,07125	0,1325	0,101875	0,058253519	0,023932149	0,001394132
...						
15	0,1205969	0,1206567	0,1206268	2,35246E-05	-1,5925E-05	-3,7463E-10
16	0,1205969	0,1206268	0,1206119	2,35246E-05	3,80023E-06	8,93989E-11

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis ensimmäinen nollakohta on $x \approx 0{,}1206$.

Määritetään välillä $]2;\ 2{,}5[$ oleva nollakohta samalla tavalla.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	2	2,5	2,25	-0,585786438	-0,1875	0,109834957
3	2,25	2,5	2,375	-0,1875	0,056728501	-0,010636594
4	2,25	2,375	2,3125	-0,1875	-0,069153117	0,01296621
5	2,3125	2,375	2,34375	-0,069153117	-0,007154848	0,00049478
...						
15	2,3472900	2,3473511	2,3473206	-1,27648E-05	4,89101E-05	-6,24327E-10
16	2,3472900	2,3473206	2,3473053	-1,27648E-05	1,80724E-05	-2,30691E-10

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on $x \approx 2{,}3473$.

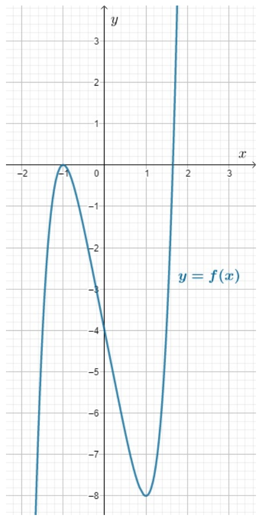
Vastaus $\quad 0{,}1206$ ja $2{,}3473$

135

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 = 5x + 4$$
$$x^5 - 5x - 4 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - 5x - 4$ nollakohdat.



Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi positiivinen nollakohta välillä $]1,\ 2[$.

Määritetään nollakohta viiden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	1	2	1,5	-8	-3,90625	31,25
3	1,5	2	1,75	-3,90625	3,663085938	-14,30892944
4	1,5	1,75	1,625	-3,90625	-0,794036865	3,101706505
5	1,625	1,75	1,6875	-0,794036865	1,246684074	-0,989913114
...						
18	1,6506195	1,6506348	1,6506271	-0,000311032	-6,60061E-05	2,053E-08
19	1,6506271	1,6506348	1,6506310	-6,60061E-05	5,65089E-05	-3,72993E-09

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät viiden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 1,65063$.

Vastaus $\quad x \approx 1,65063$

136

Funktio $f(x) = \log_2 x + x$ on määritelty ja jatkuva, kun $x > 0$.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $[0,01;\ 1]$.

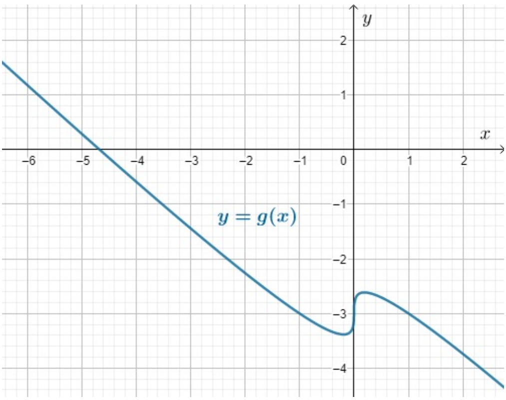
funktion arvot	nollakohta välillä	välin keskipiste
$f(0,01) = -6,633... < 0$ $f(1) = 1 > 0$	$]0,01;\ 1[$	$0,505$
$f(0,505) = -0,480... < 0$	$]0,505;\ 1[$	$0,7525$
$f(0,7525) = 0,342... > 0$	$]0,505;\ 0,7525[$	$0,62875$
$f(0,62875) = -0,040... < 0$	$]0,62875;\ 0,7525[$	$0,690625$
$f(0,690625) = 0,156... > 0$	$]0,62875;\ 0,690625[$	$0,6596875$
$f(0,6596875) = 0,059... > 0$	$]0,62875;\ 0,6596875[$	$0,64421875$
$f(0,64421875) = 0,009... > 0$	$]0,62875;\ 0,64421875[$	

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin 0,6.

Vastaus 0,6

137

Funktio f saa arvon 1 funktion $g(x)=\sqrt[3]{x}-x-3$ nollakohdissa. Funktio g on kaikkialla määritelty ja jatkuva.



Kuvaajan perusteella funktiolla g on yksi nollakohta välillä $]-5,\ -4[$.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku välillä $]-5,\ -4[$.

funktion arvot	nollakohta välillä	välin keskipiste
$g(-5)=0,290\ldots>0$		
$g(-4)=-0,587\ldots<0$	$]-5;\ -4[$	$-4,5$
$g(-4,5)=-0,150\ldots<0$	$]-5;\ -4,5[$	$-4,75$
$g(-4,75)=0,069\ldots>0$	$]-4,75;\ -4,5[$	$-4,625$
$g(-4,625)=-0,041\ldots<0$	$]-4,75;\ -4,625[$	$-4,6875$
$g(-4,6875)=0,013\ldots>0$	$]-4,6875;\ -4,625[$	$-4,65625$
$g(-4,65625)=-0,013\ldots<0$	$]-4,6875;\ -4,65625[$	

Viimeisen välin molemmat päätepisteet pyöristyvät yhden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Nollakohta on noin $-4,7$.

Vastaus $\quad -4,7$

138

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + 5 = x$$
$$x^3 - x + 5 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - x + 5$ nollakohdat.

Määritetään nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	-2	-1	-1,5	-1	3,125	-3,125
3	-2	-1,5	-1,75	-1	1,390625	-1,390625
4	-2	-1,75	-1,875	-1	0,283203	-0,283203
5	-2	-1,875	-1,9375	-1	-0,335693	0,335693
...						
12	-1,904297	-1,903320	-1,903809	-0,001344	0,003479	-0,000005
13	-1,904297	-1,903809	-1,904053	-0,001344	0,001068	-0,000001

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx -1,904$.

Vastaus $\quad x \approx -1,904$

139

Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan yhtälöstä:

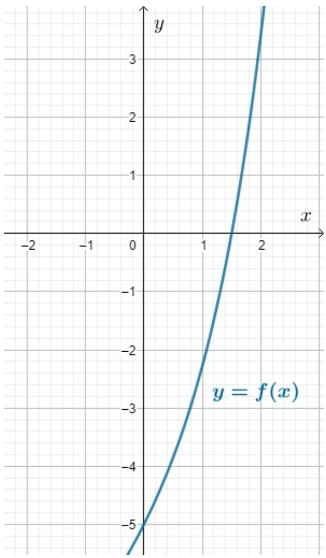
$$e^x = 6 - x$$

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\begin{aligned} e^x &= 6 - x \\ e^x + x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^x + x - 6$ nollakohdat.

Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.



Määritetään nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	1	2	1,5	-2,281718172	-0,01831093	0,041780381
3	1,5	2	1,75	-0,01831093	1,504602676	-0,027550674
...						
9	1,5	1,5078125	1,50390625	-0,01831093	0,003136155	-5,74259E-05
10	1,5	1,50390625	1,501953125	-0,01831093	-0,007595952	0,000139089

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 1{,}50$.

Leikkauspisteen y -koordinaatti saadaan esimerkiksi sijoittamalla saatu x :n arvo suoran yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 6 - 1{,}50 \\ &= 4{,}50 \end{aligned}$$

Vastaus $\quad (1{,}50;\ 4{,}50)$

140

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = x^2$$
$$\sin 2x - x^2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \sin 2x - x^2$ nollakohdat.

Funktion $f(x) = \sin 2x - x^2$ positiivinen nollakohta on välillä $]0,5;\ 1[$, koska funktio on jatkuva ja funktio saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä.

$$f(0,5) = 0,591... > 0$$

$$f(1) = -0,090... < 0$$

Määritetään nollakohta neljän desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	0,5	1	0,75	0,591471	0,434995	0,257287
3	0,75	1	0,875	0,434995	0,218361	0,094986
4	0,875	1	0,9375	0,218361	0,075180	0,016416
5	0,9375	1	0,96875	0,075180	-0,004962	-0,000373
...						
14	0,966797	0,966919	0,966858	0,000212	5,0156E-05	1,06082E-08
15	0,966858	0,966919	0,966888	5,01558E-05	-3,053E-05	-1,5311E-09

Viimeisen välin $\left[a,\ b\right]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 0,9669$.

Vastaus $\quad x \approx 0,9669$

141

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$\sin 2x = 2\cos x - 1$$
$$\sin 2x - 2\cos x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \sin 2x - 2\cos x + 1$ nollakohdat.

Määritetään nollakohta neljän numeron tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	4	5	4,5	3,296645	1,833710	6,045092
3	4,5	5	4,75	1,833710	0,849645	1,558002
4	4,75	5	4,875	0,849645	0,356690	0,303060
...						
13	4,969238	4,969727	4,969482	0,000529	-0,0003682	-1,949E-07
14	4,969238	4,969482	4,969360	0,000529	8,0468E-05	4,2585E-08

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis $x \approx 4{,}969$.

Vastaus $\quad x \approx 4{,}969$

142

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 + \sqrt{x} = 3x$$
$$x^3 + \sqrt{x} - 3x = 0$$

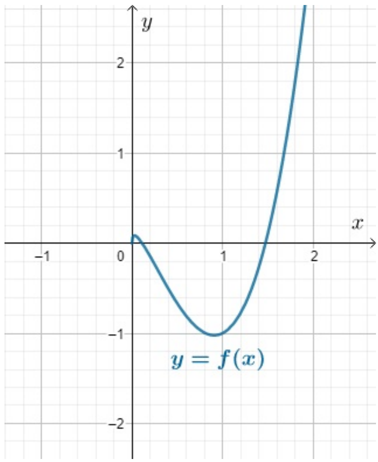
Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 3x$ nollakohdat.

Funktio f on jatkuva ja määritelty, kun $x \geq 0$.

Huomataan, että funktion yksi nollakohta on $x = 0$.

$$f(0) = 0^3 + \sqrt{0} - 3 \cdot 0 = 0$$

Kuvaajan perusteella funktiolla on toinen nollakohta välillä $]0{,}01;\ 1[$ ja kolmas välillä $]1,\ 2[$.



Määritetään välillä $]0{,}01;\ 1[$ oleva nollakohta kuuden desimaalin tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	0,01	1	0,505	0,070001	-0,6755789	-0,0472912
3	0,01	0,505	0,2575	0,070001	-0,2479816	-0,017359
4	0,01	0,2575	0,13375	0,070001	-0,0331389	-0,0023198
5	0,01	0,13375	0,071875	0,070001	0,05284144	0,00369895
...						
22	0,1120462	0,1120471	0,1120466	1,14598E-06	4,527E-07	5,1878E-13
23	0,1120466	0,1120471	0,1120469	4,52696E-07	1,0605E-07	4,801E-14

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on $x \approx 0{,}112047$.

Määritetään välillä $]1,\ 2[$ oleva nollakohta samalla tavalla.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	1	2	1,5	-1	0,09974487	-0,0997449
3	1	1,5	1,25	-1	-0,678841	0,67884101
4	1,25	1,5	1,375	-0,678841011	-0,3527867	0,23948607
5	1,375	1,5	1,4375	-0,352786685	-0,1430831	0,05047782
...						
21	1,4753685	1,4753704	1,4753695	-5,39187E-06	-1,633E-06	8,8033E-12
22	1,4753695	1,4753704	1,4753699	-1,63269E-06	2,469E-07	-4,031E-13

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät kuuden desimaalin tarkkuudella samaan lukuun. Siis kolmas nollakohta on $x \approx 1{,}475370$.

Vastaus $\quad x = 0,\ \ x \approx 0112047$ tai $x \approx 1{,}475370$

143

Funktio f on kaikkialla jatkuva ja määritelty.

Huomataan, että funktiolla on yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$ ja toinen välillä $]100,\ 150[$, sillä funktion saa erimerkkiset arvot näiden välien päätepisteissä.

$$f(1) = -0{,}9 < 0$$
$$f(2) = 524284{,}39 > 0$$

$$f(100) = 9{,}999... \cdot 10^{37} > 0$$
$$f(150) = -4{,}285... \cdot 10^{41} < 0$$

Määritetään välillä $]1,\ 2[$ oleva nollakohta neljän numeron tarkkuudella. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	1	2	1,5	-0,9	2214,21885	-1992,797
3	1	1,5	1,25	-0,9	67,1582348	-60,442411
4	1	1,25	1,125	-0,9	7,3146943	-6,5832249
5	1	1,125	1,0625	-0,9	1,18632772	-1,067695
...						
14	1,0354004	1,0356445	1,0355225	-0,006984447	-0,0027939	1,9514E-05
15	1,0355225	1,0356445	1,0355835	-0,002793896	-0,0006952	1,9422E-06

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis ensimmäinen nollakohta on $x \approx 1{,}036$.

Määritetään välillä $]100,\ 150[$ oleva nollakohta samalla tavalla.

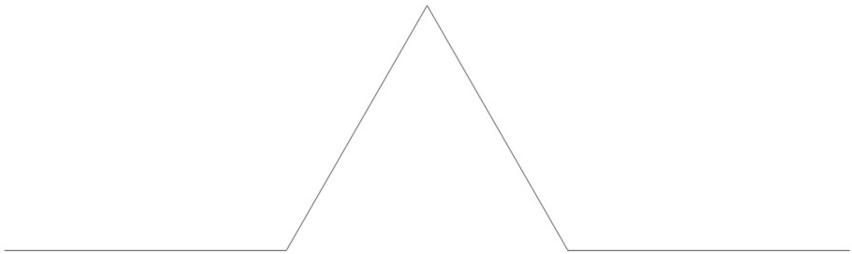
	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*	*f(c)*	*f(a) f(c)*
2	100	150	125	1E+38	6,9388E+39	6,9388E+77
3	125	150	137,5	6,93882E+39	4,2225E+40	2,9299E+80
4	137,5	150	143,75	4,22245E+40	8,6981E+40	3,6727E+81
5	143,75	150	146,875	8,69813E+40	6,1112E+40	5,3156E+81
...						
10	147,85156	148,04688	147,94922	4,79566E+39	-3,669E+39	-1,759E+79
11	147,85156	147,94922	147,90039	4,79566E+39	6,4337E+38	3,0854E+78

Viimeisen välin $[a,\ b]$ molemmat päätepisteet pyöristyvät neljän numeron tarkkuudella samaan lukuun. Siis toinen nollakohta on $x \approx 147,9$.

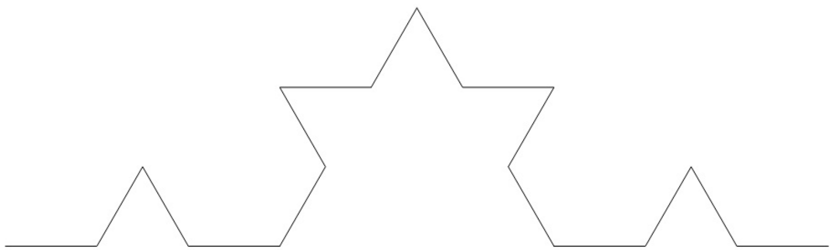
Vastaus $\quad 1,036$ ja $147,9$

144

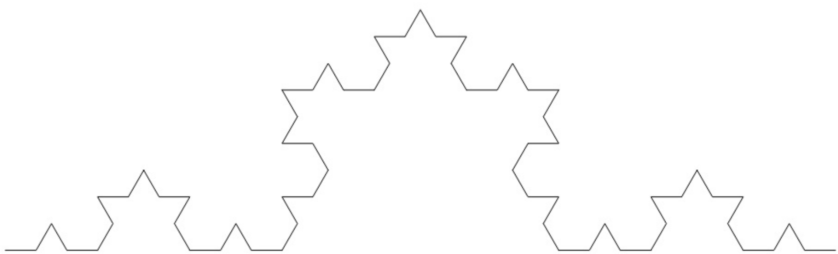
Kuvio 1. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 2. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 3. iterointikierroksen jälkeen:



145

a) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	1
2	1,414213562
3	1,632526919
4	1,760839556
...	
58	1,999999999
59	2,000000000
60	2,000000000

Iterointi näyttää lähestyvän lukua 2.

b)

	A
1	3
2	2,828427125
3	2,665144143
4	2,518512814
...	
61	2,000000001
62	2,000000000
63	2,000000000

Iterointi näyttää lähestyvän lukua 2.

c) Huomataan, että koska $f(4)=\left(\sqrt{2}\right)^4=4,$ jokaisen iterointikierroksen jälkeen luku on edelleen sama.

Siis iterointi lähestyy lukua 4.

d)

	A
1	5
2	5,656854249
3	7,102993301
4	11,7248426
5	58,17878657
6	571189129,9

Luvut näyttäisivät kasvavan jokaisella iterointikierroksella (kierroksen 7 jälkeen niin suuriksi, ettei taulukkolaskentaohjelma pysty niitä enää laskemaan), joten iterointi ei lähesty mitään tiettyä lukua.

Vastaus a) 2 b) 2 c) 4 d) Ei mitään tiettyä lukua

146

a) Lähdetään alkuarvosta 1 ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

1. Iteraatio: $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

2. Iteraatio: $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3. Iteraatio: $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$

4. Iteraatio: $f\left(\frac{5}{3}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$

b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	1
2	2
3	1,5
4	1,666666667
...	
10	1,618181818
11	1,617977528
12	1,618055556
13	1,618025751

Iterointi näyttää kolmen desimaalin tarkkuudella lähestyvän lukua 1,618.

Vastaus a) $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ja $\frac{8}{5}$ b) 1,618

147

Lähdetään alkuarvosta x ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = 2x - 1$$

$$f^2(2x-1) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$$

$$f^3(4x-3) = 2(4x-3) - 1 = 8x - 7$$

$$f^4(8x-7) = 2(8x-7) - 1 = 16x - 15$$

$$f^5(16x-15) = 2(16x-15) - 1 = 32x - 31$$

148

Lähdetään alkuarvosta x ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$f^1(x) = x - 2$

$f^2(x-2) = (x-2) - 2 = x - 4$

$f^3(x-4) = (x-4) - 2 = x - 6$

$f^4(x-6) = (x-6) - 2 = x - 8$

Neljännen ensimmäisen iterointikierroksen perusteella näyttää olevan

$f^n(x) = x - n \cdot 2$

Vastaus $\quad f^n(x) = x - 2n$

149

a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = 32$$

$$x_2 = \frac{3}{4} \cdot x_1 = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$$

$$x_3 = \frac{3}{4} \cdot x_2 = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$$

$$x_4 = \frac{3}{4} \cdot x_3 = \frac{3}{4} \cdot 18 = 13,5$$

b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	32
2	24
3	18
4	13,5
5	10,125
...	
87	0,000000001
88	0,000000000
89	0,000000000

Lukujonon jäsenet näyttävät lähestyvän lukua 0.

Vastaus a) $x_1 = 32,\ x_2 = 24,\ x_3 = 18$ ja $x_4 = 13,5$ b) 0

150

a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = x_1 + 7 = -1 + 7 = 6$$

$$x_3 = x_2 + 7 = 6 + 7 = 13$$

$$x_4 = x_3 + 7 = 13 + 7 = 20$$

b) Huomataan, että lukujono on aritmeettinen. Yleinen jäsen on siis muotoa $x_n = x_1 + (n-1)\cdot d$, missä $x_1 = -1$ ja $d = 7$.

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -1 + (n-1)\cdot 7 \\ &= 7n - 8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 13$ ja $x_4 = 20$ b) $x_n = 7n - 8$

151

a)

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}), \quad \text{kun } n = 2,\ 3,\ 4, \ldots \end{cases}$$

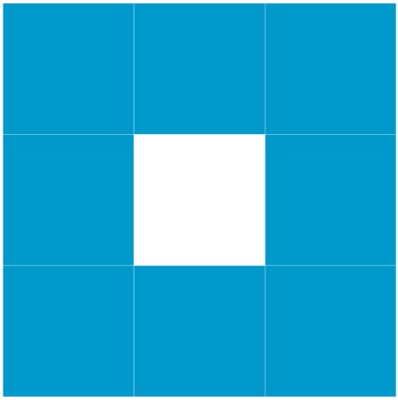
b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla. Otetaan alkuarvoksi esimerkiksi 1.

	A
1	1
2	2
3	1,75
4	1,732142857
5	1,73205081
6	1,732050808
7	1,732050808
8	1,732050808

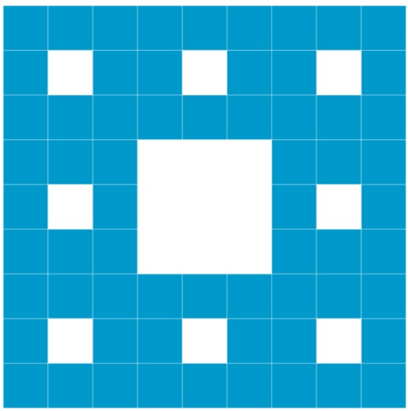
Lukujonon arvot näyttäisivät kuuden desimaalin tarkkuudella lähestyvän lukua 1,732051.

152

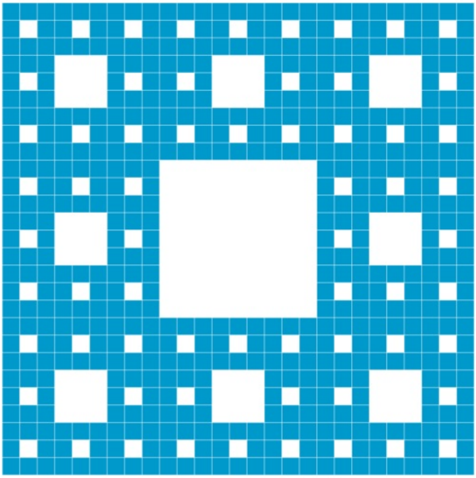
Kuvio 1. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 2. iterointikierroksen jälkeen:



Kuvio 3. iterointikierroksen jälkeen:



153

Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	1
2	1,414213562...
3	1,553773974...
4	1,598053182...
5	1,611847754...
...	
19	1,618033988...
20	1,618033989...
21	1,618033989...

Iterointi näyttää lähestyvän lukua $d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,61803...$.

154

a) Lähdetään alkuarvosta 2 ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

1. Iteraatio: $f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

2. Iteraatio: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=-1$

3. Iteraatio: $f(-1)=\frac{-1-1}{-1}=2$

4. Iteraatio: $f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

b) Ei lähesty, koska neljäs iterointikierros antaa saman luvun kuin ensimmäinen.

Vastaus a) $\frac{1}{2}$, -1, 2 ja $\frac{1}{2}$ b) Ei lähesty.

155

Lähdetään alkuarvosta $x > 0$ ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f^2(x^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$f^3(x^{\frac{1}{4}}) = (x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$$

$$f^4(x^{\frac{1}{8}}) = (x^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{16}}$$

Neljännen ensimmäisen iterointikierroksen perusteella näyttää olevan

$$f^n(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x^{\frac{1}{2n}}, \text{ missä } x > 0.$$

Vastaus $\quad f^n(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x^{\frac{1}{2n}}, \text{ missä } x > 0$

156

Lähdetään alkuarvosta $x > 0$ ja sijoitetaan saatu funktion arvo aina uudestaan funktion lausekkeeseen.

$$f^1(x) = 3x^2$$

$$f^2(3x^2) = 3 \cdot (3x^2)^2 = 3^3 \cdot x^4$$

$$f^3(3^3 \cdot x^4) = 3 \cdot (3^3 \cdot x^4)^2 = 3^7 \cdot x^8$$

$$f^4(3^7 \cdot x^8) = 3 \cdot (3^7 \cdot x^8)^2 = 3^{15} \cdot x^{16}$$

Neljännen ensimmäisen iterointikierroksen perusteella näyttää olevan

$f^n(x) = 3^{n-1} \cdot x^{2^n}$, missä $x > 0$.

Vastaus $f^n(x) = 3^{n-1} x^{2^n}$, missä $x > 0$

157

a) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla, kun $a_1 = \frac{3}{2}$ ja $a_2 = \frac{2}{3}$.

	A
1	1,5
2	0,666666667
3	1
4	0,666666667
...	
12	0,000001030
13	0,000000000
14	0,000000000

Lukujonon jäsenet näyttävät lähestyvän lukua 0.

b) Tutkitaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelmalla, kun $a_1 = 2$ ja $a_2 = \dfrac{2}{3}$.

	A
1	2
2	0,666666667
3	1,333333333
4	0,888888889
5	1,185185185
...	
22	9,3972E+108
23	2,0991E+176
24	1,9726E+285

Lukujonon jäsenet näyttävät vain kasvavan, kun iterointia jatketaan, eli ne eivät lähesty mitään tiettyä lukua.

Vastaus a) lukua 0 b) ei mitään lukua

158

a) Määritetään jonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$x_1 = 1$

$x_2 = 2 \cdot x_1 - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$x_3 = 2 \cdot x_2 - 3 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$

$x_4 = 2 \cdot x_3 - 3 = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$

b) Päätellään jonon jäsenen $x_n = f(n)$ lauseke laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä. Merkitään $a = 1$, $b = -3$ ja $q = 2$.

$x_1 = a$

$x_2 = qx_1 + b = qa + b$

$x_3 = qx_2 + b = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$

$x_4 = qx_3 + b = q(q^2a + qb + b) + b = q^3a + q^2b + qb + b$

Havaitun säännönmukaisuuden perusteella

$x_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + ... + qb + b.$

Lausekkeessa esiintyy geometrinen summa

$$b+qb+\ldots+q^{n-2}b=\frac{b(1-q^{n-1})}{1-q}.$$

Muodostetaan jonon jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}
x_n &= q^{n-1}a\cdot\frac{b(1-q^{n-1})}{1-q}\\
&= 2^{n-1}\cdot 1\cdot\frac{-3\cdot(1-2^{n-1})}{1-2}\\
&= 2^{n-1}\cdot 3\cdot(1-2^{n-1})\\
&= 3-2\cdot 2^{n-1}\\
&= 3-2^{n}
\end{aligned}$$

missä $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$.

Vastaus a) $1,\ -1,\ -5,\ -13$ b) $x_n=3-2^n$

159

a) Kun populaatio kasvaa 6%, se tulee 1,06-kertaiseksi. Tämän jälkeen populaatiosta pyydystetään 10 yksilöä. Näin muodostuu lukujono

$$x_1 = 300$$

$$x_2 = 1,06 \cdot x_1 - 10$$

$$x_3 = 1,06 \cdot x_2 - 10$$

... .

Jonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_n = 1,06x_{n-1} - 10, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots . \end{cases}$$

b) Tutkitaan jonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	300
2	308
3	316,48
...	
9	379,1797433
10	391,9305279
11	405,4463595

Populaation suuruus ylittää 400 yksilöä 11. seurantavuoden alussa.

c) Päätellään jonon $x_n = f(n)$ laskemalla jonon ensimmäisiä jäseniä. Merkitään $a = 300,\ \ b = -10$ ja $q = 1,06.$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = qx_1 + b = qa + b$$

$$x_3 = qx_2 + b = q(qa + b) + b = q^2a + qb + b$$

$$x_4 = qx_3 + b = q(q^2a + qb + b) + b = q^3a + q^2b + qb + b$$

Havaitun säännönmukaisuuden perusteella

$$x_n = q^{n-1}a + q^{n-2}b + \ldots + qb + b.$$

Lausekkeessa esiintyy geometrinen summa

$$b + qb + \ldots + q^{n-2}b = \frac{b(1-q^{n-1})}{1-q}.$$

Muodostetaan jonon jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}
x_n &= q^{n-1}a + \frac{b(1-q^{n-1})}{1-q} \\
&= 1{,}06^{n-1} \cdot 300 + \frac{(-10)\cdot(1-1{,}06^{n-1})}{1-1{,}06} \\
&= 1{,}06^{n-1} \cdot 300 + \frac{500}{3}(1-1{,}06^{n-1}) \\
&= \frac{1}{3}(900 \cdot 1{,}06^{n-1} + 500 - 500 \cdot 1{,}06^{n-1}) \\
&= \frac{1}{3}(400 \cdot 1{,}06^{n-1} + 500)
\end{aligned}$$

Vastaus a) $\begin{cases} x_1 = 300 \\ x_n = 1{,}06x_{n-1} - 10, \text{ kun } n = 2,\ 3,\ 4, \ldots \end{cases}$

b) 11. vuoden

c) $x_n = \frac{1}{3}(400 \cdot 1{,}06^{n-1} + 500)$

160

Kun kanta pienenee 20%, se tulee 0,8-kertaiseksi. Tämän jälkeen kantaan istutetaan a määrä uusia poikasia. Näin muodostuu lukujono

$x_1 = 100000$

$x_2 = 0,8 \cdot x_1 + a$

$x_3 = 0,8 \cdot x_2 + a$

... .

Jonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} x_1 = 100000 \\ x_n = 0,8x_{n-1} + a, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Kannan vakiintuminen 150000 yksilöön tarkoittaa sitä, että kun kanta saavuttaa tämän yksilömäärän, kantaan lisätään vuosittain yhtä paljon kuin siitä pyydystetään, eli $0,2 \cdot 150000 = 30000$ yksilöä.

Tarkistetaan tämä vielä taulukkolaskentaohjelman avulla, eli asetetaan $a = 30000$.

	A
1	100000
2	110000
3	118000
4	124400
5	129520
...	
93	149999,9999
94	150000
95	150000

Kanta näyttäisi vakiintuvan 150000 yksilöön, kun $a = 30000$.

161

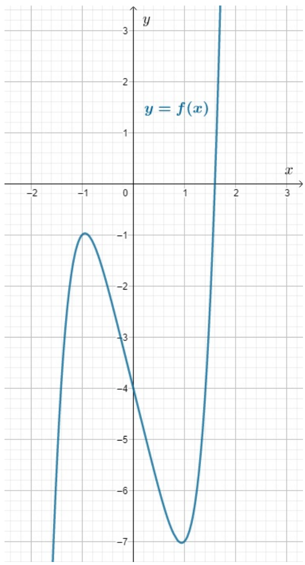
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^5 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 5x^4 - 4$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\,5} - 4x_n - 4}{5x_n^{\,4} - 4}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Kuvan perusteella nollakohta on välillä $]1,\ 2[$. Valitaan alkuarvoksi $x_1 = 2$.



Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{x^5 - 4x - 4}{5x^4 - 4}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 2,$ kunnes iteraation arvo pysyy kolmen desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$x_1 = 2$

$x_2 = 1,73684210...$

$x_3 = 1,61978442...$

$x_4 = 1,59772093...$

$x_5 = 1,59700690...$

$x_6 = 1,59700617...$

Arvosta x_5 alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kolmen desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,597.

Nollakohdan likiarvo on siis 1,597.

Vastaus 1,597

162

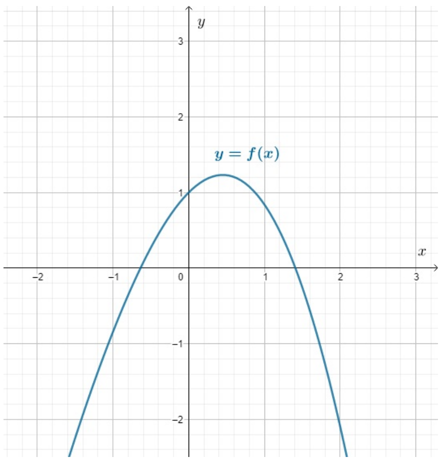
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x)=\sin x-x^2+1$$

$$f'(x)=\cos x-2x$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\sin x_n-x_n^{\ 2}+1}{\cos x_n-2x_n}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Kuvan perusteella nollakohdat ovat väleillä $]-1,\ 0[$ ja $]1,\ 2[$. Valitaan ensimmäisen iteroinnin alkuarvoksi $x_1=-1$ ja toisen alkuarvoksi $x_1=2$.



Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x)=x-\frac{\sin x-x^2+1}{\cos x-2x}$$

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -1,$ kunnes iteraation arvo pysyy kahden desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$x_1 = -1$

$x_2 = -0,66875163...$

$x_3 = -0,63706803...$

$x_4 = -0,63673268...$

Arvosta x_3 alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon $-0,64.$

Ensimmäisen nollakohdan likiarvo on siis $-0,64.$

Selvitetään toisen nollakohdan likiarvo vastaavasti, lähtemälle alkuarvosta $x_1 = 2$.

$x_1 = 2$

$x_2 = 1,52657765...$

$x_3 = 1,41643401...$

$x_4 = 1,40964986...$

$x_5 = 1,40962400...$

Arvosta x_4 alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,41.

Toisen nollakohdan likiarvo on siis 1,41.

Vastaus $-0,64$ ja 1,41

163

Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Muokataan yhtälöä.

$$\ln x = -x^2$$
$$\ln x + x^2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \ln x + x^2$ nollakohdat.

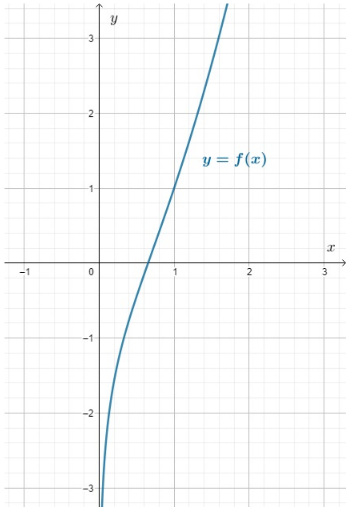
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = \ln x + x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\ln x + x^2}{\frac{1}{x} + 2x}$$

Piirretään funktion f kuvaaja.



Kuvan perusteella funktion nollakohta on välillä $]0,\ 1[$. Valitaan alkuarvoksi $x_1 = 1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	1
x_2	0,66666666...
x_3	0,65290925...
x_4	0,65291864...
x_5	0,65291864...

Iteroinnin perusteella nollakohdan likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella on 0,65292.

Vastaus $\quad x \approx 0,65292$

164

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion
$f(x)=4x^3+18x^2+23x+7$ nollakohdat.

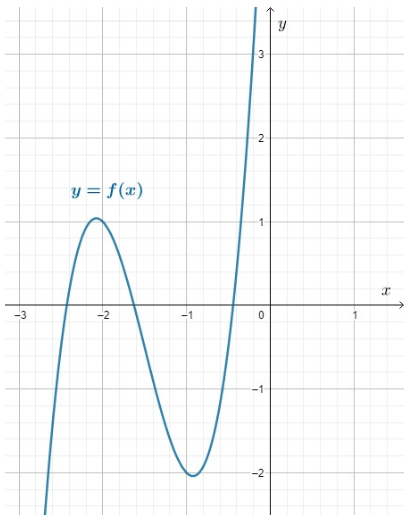
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x)=4x^3+18x^2+23x+7$$

$$f'(x)=12x^2+36x+23$$

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{4x^3+18x^2+23x+7}{12x^2+36x+23}$$

Piirretään funktion f kuvaaja.



Kuvan perusteella näyttäisi, että välillä $]-1,\ 0[$ oleva nollakohta olisi lähimpänä kohtaa $x=-1$. Koska ero on kuitenkin pieni, selvitetään myös varmuuden vuoksi välillä $]-2,\ -1[$ oleva nollakohta. Valitaan välin $]-2,\ -1[$ nollakohdan iteroinnin alkuarvoksi $x_1=-1,5$ ja välin $]-1,\ 0[$ alkuarvoksi $x_1=-0,5$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-1,5	-0,5
x_2	-1,625	-0,4375
x_3	-1,62704918...	-0,44251227...
x_4	-1,62705084...	-0,44254622...
x_5	-1,62705084...	-0,44254622...

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot neljän desimaalin tarkkuudella ovat $-1{,}6271$ ja $-0{,}4425$. Jälkimmäinen on lähempänä arvoa -1, joten se on kysytty nollakohta.

Vastaus $\quad x \approx -0{,}4425$

165

Luku $\sqrt[3]{3}$ on yhtälön

$$x^3 = 3$$
$$x^3 - 3 = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - 3$ nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - 3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3}{3x^2}$$

Luku $\sqrt[3]{3}$ on välillä $]1,\ 2[$, sillä

$$1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} = 2.$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	1
x_2	1,66666666...
x_3	1,47111111...
x_4	1,44281209...
x_5	1,44224979...
x_6	1,44224957...

Iteroinnin perusteella $\sqrt[3]{3} \approx 1,442.$

Vastaus 1,442

166

a) Kun $f(x) = x^3 - 2x - 5$, niin $f'(x) = 3x^2 - 2$.

b) Funktio f on polynomifunktio, ja siksi se on kaikkialla jatkuva.

Lasketaan funktion f arvot kohdissa 2 ja 3.

$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 16 > 0$

Koska funktio f on jatkuva välillä $[2,\ 3]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]2,\ 3[$.

c) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2}$$

Lasketaan funktiolle g neljä iteraatioaskelta lähtien alkuarvosta $x_0 = 2.$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2{,}1$$

$$x_2 = 2{,}09456812...$$

$$x_3 = 2{,}09455148...$$

$$x_4 = 2{,}09455148...$$

Jonon viimeisen jäsenen likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella on 2,0946.

Nollakohdan likiarvo on siis $x \approx 2{,}0946$.

Vastaus
a) $f'(x) = 3x^2 - 2$
b) Koska funktio on jatkuva, ja $f(2) < 0$ ja $f(3) > 0$, on sillä ainakin yksi nollakohta välillä $]2,\ 3[$
c) $x \approx 2{,}0946$

167

a) Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^5 - x = 1$$
$$x^5 - x - 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - x - 1$ nollakohdat.

Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $[1,\ 2]$.

Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$.

$$f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^5 - 2 - 1 = 29 > 0$$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[1,\ 2]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

Kun $1 \leq x \leq 2$, niin

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \geq 5 \cdot 1^4 - 1 = 4 .$$

Funktio on siis tällä välillä aidosti kasvava ja sillä voi olla enintään yksi nollakohta tällä välillä.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta välillä $1 \leq x \leq 2$.

b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^5 - x - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5 - x - 1}{5x^4 - 1}$$

Lasketaan funktiolle g neljä iteraatioaskelta lähtien alkuarvosta $x_0 = 1$.

$x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}25$

$x_2 = 1{,}17845939...$

$x_3 = 1{,}16753738...$

$x_4 = 1{,}16730408...$

Jonon viimeisen jäsenen likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella on 1,167.

Nollakohdan likiarvo on siis $x \approx 1{,}167$.

168

Siirretään yhtälön termit vasemmalle puolelle.

$$x^3 = x + 2$$

$$x^3 - x - 2 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - x - 2$ nollakohdat.

Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva.

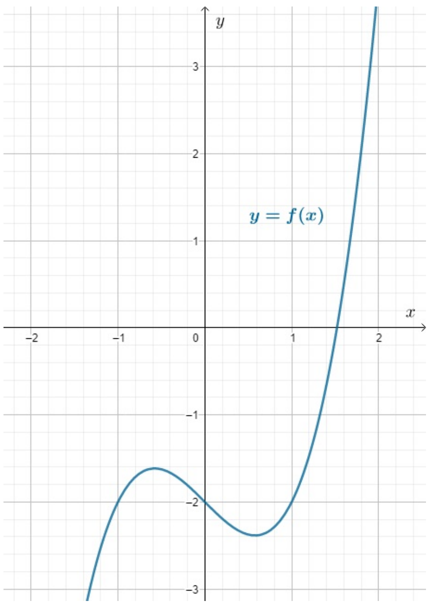
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - 1}$$

Piirretään funktion f kuvaaja.



Kuvan perusteella funktion nollakohta on välillä $]1,\ 2[$.
Valitaan alkuarvoksi $x_1 = 1$.

Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1,$ kunnes iteraation arvo pysyy kahden desimaalin tarkkuudella muuttumattomana.

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1,63636363...$

$x_4 = 1,53039205...$

$x_5 = 1,521441465...$

$x_6 = 1,52137971...$

Arvosta x_5 alkaen jonon jäsenet pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella likiarvoon 1,52.

Nollakohdan likiarvo on siis $x \approx 1,52.$

Koska funktio oli jatkuva, ja $f(1) = -2 < 0$ sekä $f(2) = 4 > 0,$ on funktiolla todellakin ainakin tämä yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.

Osoitetaan seuraavaksi, ettei enempää nollakohtia ole välillä $[1,\ \infty[$.

Kun $x \geq 1$, niin

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 > 0\,.$$

Funktio on siis aidosti kasvava välillä $x \geq 1$ ja sillä voi olla enintään yksi nollakohta tällä välillä.

Päättelyn perusteella funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä on siten täsmälleen yksi ratkaisu välillä $[1, \infty[$.

169

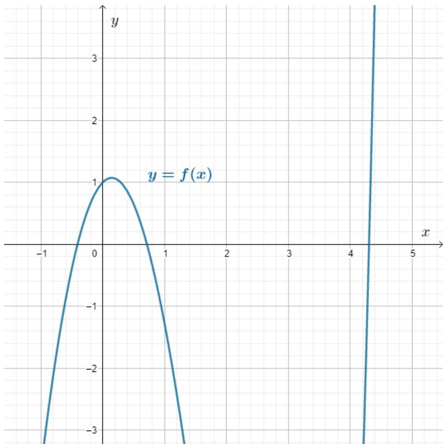
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 4x^2$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 8x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 4x^2}{\mathrm{e}^{x_n} - 8x}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Kuvan perusteella positiiviset nollakohdat ovat väleillä $]0,\ 1[$ ja $]4,\ 5[$.



Valitaan iteroinnin alkuarvoiksi $x_1 = 1$ ja $x_1 = 4$.

Muodostetaan iterointikaavaa vastaava funktio.

$$g(x) = x - \frac{\mathrm{e}^x - 4x^2}{\mathrm{e}^x - 8x}$$

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	1	4
x_2	0,75732931...	4,41604511...
x_3	0,71616399...	4,31565543...
x_4	0,71480740...	4,30665268...
x_5	0,71480591...	4,30658473...
x_6	0,71480591...	4,30658472...

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot viiden desimaalin tarkkuudella ovat 0,71481 ja 4,30658.

Vastaus $x \approx 0,71481$ ja $x \approx 4,30658$

170

Muokataan yhtälöä.

$$x\cos x = x^2 - 1$$
$$x\cos x - x^2 + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x\cos x - x^2 + 1$ nollakohdat.

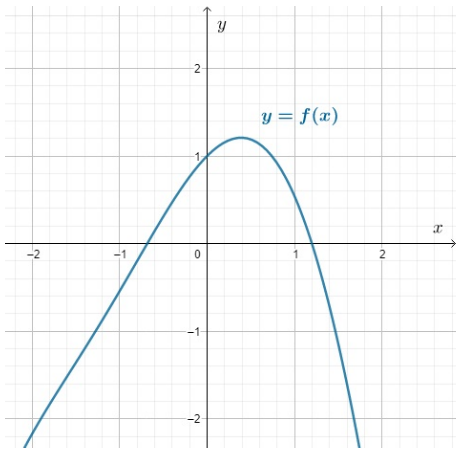
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = x\cos x - x^2 + 1$$

$$f'(x) = \cos x - x\sin x - 2x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x\cos x - x^2 + 1}{\cos x - x\sin x - 2x}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Kuvan perusteella nollakohdat ovat väleillä $]-1,\ 0[$ ja $]1,\ 2[$.



Valitaan iteroinnin alkuarvoiksi $x_1 = -1$ ja $x_1 = 1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-1	1
x_2	-0,681956473	1,234794742
x_3	-0,685174763	1,199222654
x_4	-0,685174134	1,198360352
x_5	-0,685174134	1,198359845

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot neljän desimaalin tarkkuudella ovat $-0,6852$ ja $1,1984$.

Vastaus $\quad x \approx -0,6852$ ja $x \approx 1,1984$

171

a) Luku $\ln 10$ on yhtälön

$$e^x = 10$$
$$e^x - 10 = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^x - 10$ nollakohdat.

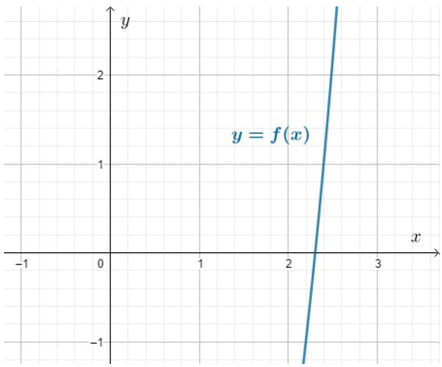
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = e^x - 10$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 10}{e^x}$$

Piirretään funktion f kuvaaja.



Kuvan perusteella nollakohta on välillä $]2,\ 3[$.

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 2$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	2
x_2	2,35335283...
x_3	2,30385224...
x_4	2,30258589...
x_5	2,30258509...

Iteroinnin perusteella $\ln 10 \approx 2{,}3026$.

b) Luku $\ln\frac{1}{2}$ on yhtälön

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$e^x - \frac{1}{2} = 0$$

ratkaisu. Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^x - \frac{1}{2}$ nollakohdat.

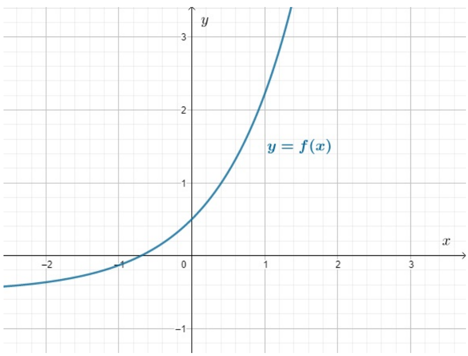
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^x}$$

Piirretään funktion f kuvaaja.



Kuvan perusteella nollakohta on välillä $]-1,\ 0[$.

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = -1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-1
x_2	-0,64085908...
x_3	-0,69180367...
x_4	-0,69314627...
x_5	-0,69314718...

Iteroinnin perusteella $\ln\frac{1}{2} \approx -0,6931.$

Vastaus a) 2,3026 b) $-0,6931$

172

a) Koska $\cos \pi = -1$, voidaan luvun a arvoksi valita -1.

b) Muokataan yhtälöä.

$$\cos x = -1$$
$$\cos x + 1 = 0$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = \cos x + 1$ nollakohdat.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x) = \cos x + 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos x + 1}{-\sin x}$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 3$, sillä se on lähellä π:n arvoa.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	3
x_2	3,070914844...
x_3	3,106268467...
x_4	3,123932397...
...	
x_{25}	3,141592642...
x_{26}	3,141592651...
x_{27}	3,141592651...

Iteroinnin perusteella $\pi \approx 3{,}1415927$.

Vastaus a) $a = -1$ b) $3{,}1415927$

173

Luku $\sqrt{a}$ on funktion $f(x)=x^2-a$ positiivinen nollakohta.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

$$f(x)=x^2-a$$

$$f'(x)=2x$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n{}^2-a}{2x_n}$$

Tällöin siis x_n saadaan kaavalla

$$x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}{}^2-a}{2x_{n-1}}.$$

Muokataan kaavan oikeaa puolta.

$$\begin{aligned}
x_n&=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}{}^2-a}{2x_{n-1}}\\
&=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}{}^2}{2x_{n-1}}+\frac{a}{2x_{n-1}}\\
&=x_{n-1}-\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}\\
&=\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}\\
&=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

174

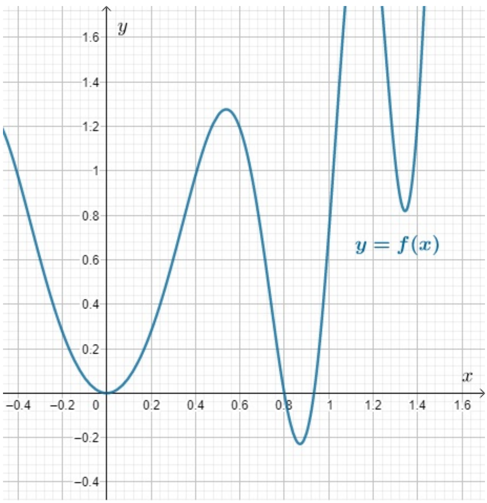
Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = x^2 + \sin 6x^2$$

$$f'(x) = 2x + 12x \cos 6x^2$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + \sin 6x^2}{2x + 12x \cos 6x^2}$$

Piirretään funktion f kuvaaja. Valitaan kuvan perusteella ensimmäisen nollakohdan alkuarvoksi $x_1 = 0,8$ ja toisen alkuarvoksi $x_1 = 0,9$.



x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	0,8	0,9
x_2	0,799478690...	0,952864011...
x_3	0,799479911...	0,935495039...
x_4	0,799479911...	0,933308374...
x_5	0,799479911...	0,933270551...
x_6	0,799479911...	0,933270551...

Iteroinnin perusteella nollakohtien likiarvot viiden desimaalin tarkkuudella ovat $0,79948$ ja $0,93327$.

Vastaus $\quad x \approx 0,79948$ ja $x \approx 0,93327$

175

a) Yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ nollakohdat.

Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva.

1) Osoitetaan ensin, että funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$.

$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 20 = -7 < 0$

$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 20 = 16 > 0$

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä $[1,\ 2]$ ja sen arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]1,\ 2[$.

2) Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla f on enintään yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaattafunktion avulla.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lisäksi diskriminantti $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -104 < 0,$ eli derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia. Siis $f'(x) > 0$ kaikilla x:n arvoilla ja funktio f on aidosti kasvava. Sillä voi olla siis enintään yksi nollakohta.

Kohtien 1 ja 2 perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

b) Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 2x^2 + 10x - 20}{3x^2 + 4x + 10}$$

Valitaan iteroinnin alkuarvoksi $x_0 = 1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_0	1
x_1	1,4117647059...
x_2	1,3693364706...
x_3	1,3688081886...
x_4	1,3688081078...
x_5	1,3688081078...

Saman likiarvon yhdeksän desimaalin tarkkuudella tuottaa neljäs iterointikierros.

Vastaus b) 4. iterointikierros

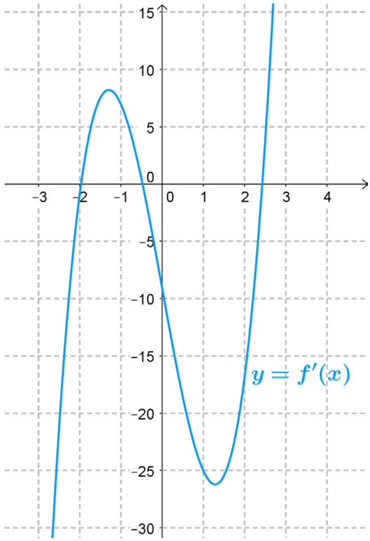
176

Määritetään funktion $f(x) = x^4 - 10x^2 - 9x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 4x^3 - 20x - 9$$

Funktion ääriarvokohdat sijaitsevat derivaatan nollakohdissa.

Piirretään funktion f' kuvaaja.



Kuvan perusteella yksi derivaatan nollakohta on likimain -2, ja kaksi muuta sijaitsevat väleillä $]-1,\ 0[$ ja $]2,\ 3[$.

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f'(x) = 4x^3 - 20x - 9$$

$$f''(x) = 12x^2 - 20$$

$$g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{4x^3 - 20x - 9}{12x^2 - 20}$$

Valitaan kuvaajan perusteella iteroinnin alkuarvoiksi $x_1 = -2$, $x_1 = 0$ ja $x_1 = 2$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-2	0	2
x_2	-1,96428571...	-0,45	2,60714286...
x_3	-1,96312872...	-0,47074559...	2,44890433...
x_4	-1,96312752...	-0,47088167...	2,43413441...
x_5	-1,96312752...	-0,47088168...	2,43400921...

Iteroinnin perusteella derivaatan nollakohtien likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella ovat $-1,96$, $-0,47$ ja $2,43$.

Muodostetaan derivaatan kuvaajan avulla funktion kulkukaavio.

-1,96 -0,47 2,43

$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

min max min

Vastaus minimikohdat $x \approx -1,96$ ja $x \approx 2,43$, maksimikohta $x \approx -0,47$

177

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaava.

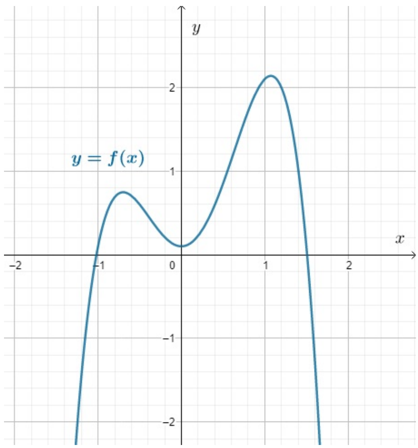
$$f(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 + 0{,}1$$

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 + 6x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-2x_n^{\ 4} + x_n^{\ 3} + 3x_n^{\ 2} + 0{,}1}{-8x_n^{\ 3} + 3x_n^{\ 2} + 6x_n}$$

x_n	a)	b)	c)
x_1	-0,5	0,5	0,6
x_2	-0,02	0,19090909...	0,21490515...
x_3	0,83224094...	0,01274650...	0,03381718...
x_4	0,10259083...	-1,29316189...	-0,46838945...
...			
x_{19}	-1,01911084...	-1,01911084...	1,50875536...
x_{20}	-1,01911084...	-1,01911084...	1,50875536...

Piirretään funktion f kuvaaja.



Funktion pienempi nollakohta kolmen desimaalin tarkkuudella on $x \approx -1{,}019$, ja suurempi $x \approx 1{,}509$.

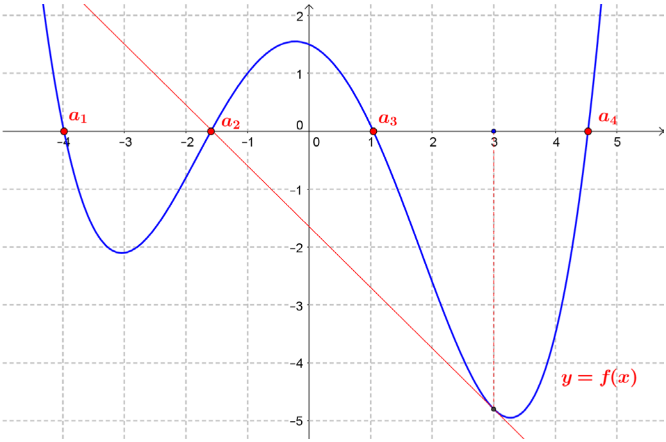
Vastaus a) $x_{20} = -1,01911...$ b) $x_{20} = -1,01911...$

c) $x_{20} = 1,50875...$

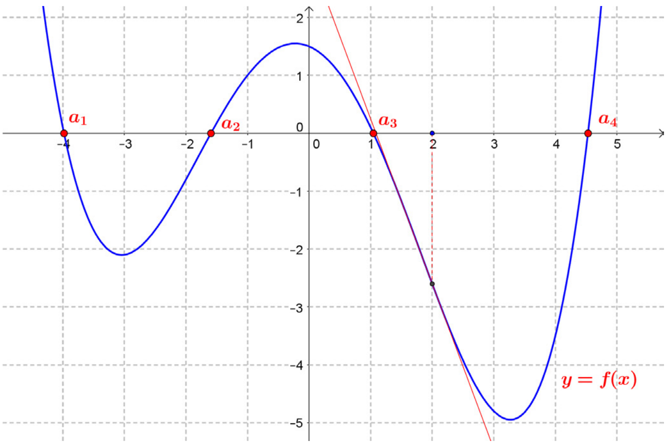
nollakohdat ovat $x \approx -1,019$ ja $x \approx 1,509$

178

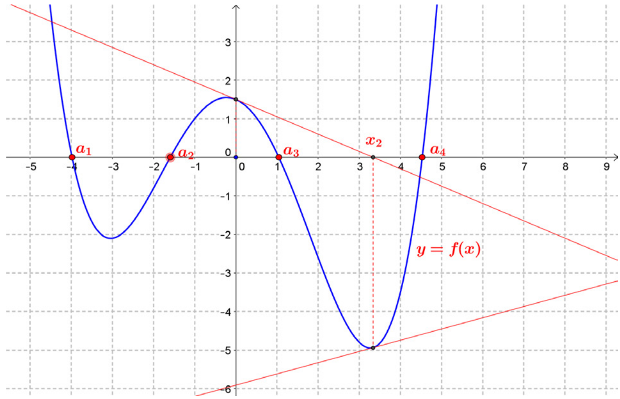
a) Funktiolle kohtaan $x_1 = 3$ piirretty tangetti leikkaa x -akselin hyvin lähellä nollakohtaa a_2, ja edelleen iteroimalla päästään vielä lähemmäksi, joten tällä alkuarvolla selviää nollakohta a_2.



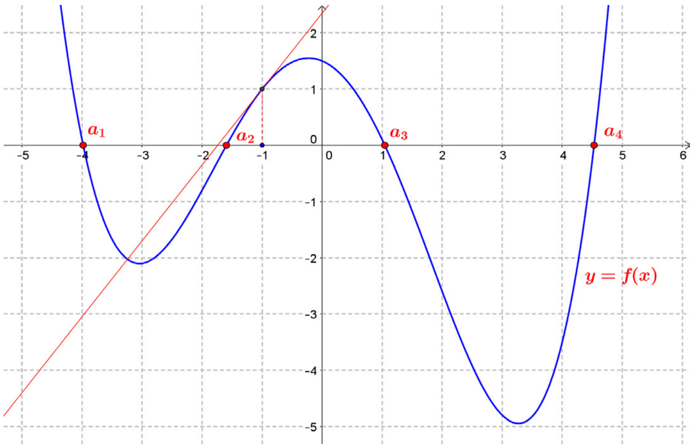
b) Alkuarvo $x_1 = 2$ johtaa nollakohtaan a_3.



c) Funktiolle kohtaan $x_1 = 0$ piirretty tangentti leikkaa x-akselin melko lähellä nollakohtaa a_4. Seuraava iteraatio vie kuitenkin varsin kauas kohdan a_4 oikealle puolelle. Mutta koska funktio on (koko ajan jyrkemmin) kasvava kohdan a_4 oikealla puolella, palaavat iteraatiot takaisinpäin ja suppenevat kohti nollakohtaa a_4.



d) Alkuarvo $x_1 = -1$ johtaa nollakohtaan a_2.



Vastaus a) a_2 b) a_3 c) a_4 d) a_2

179

a) Esimerkin 4 mukaisesti funktiolle f Newtonin menetelmän iterointikaava on

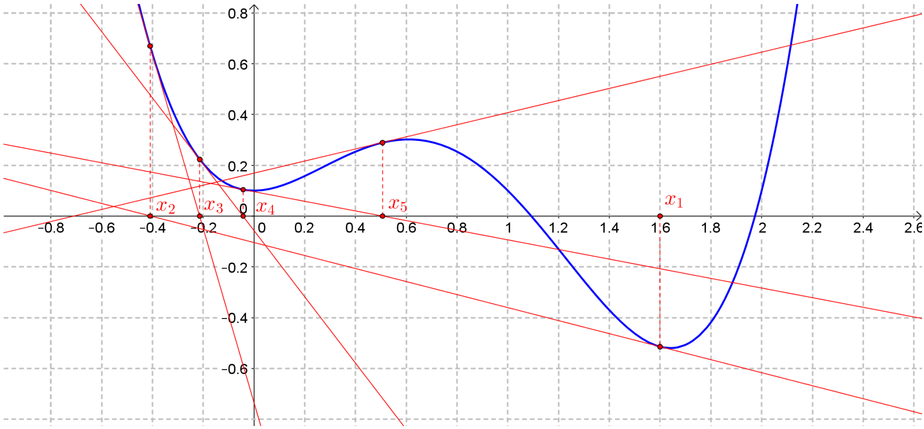
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 4} - 3x_n^{\ 3} + 2x_n^{\ 2} + 0{,}1}{4x_n^{\ 3} - 9x_n^{\ 2} + 4x_n}.$$

Iteroidaan taulukkolaskentaohjelmalla lähtien alkuarvosta $x_1 = 1{,}6$.

x_n	**Iteraatio** $n-1$
x_1	1,6
x_2	-0,409375
x_3	-0,213749834
x_4	-0,043084393
...	
x_{28}	1,973637870
x_{29}	1,973632281

Iterointi saavuttaa viiden desimaalin tarkkuudella funktion f suuremman nollakohdan 28. iteraation jälkeen ($x_{29} \approx 1{,}97363$).

b) Piirretään funktion f kuvaaja.



Alkuarvo on lähellä derivaattafunktion nollakohtaa. Funktiolla on lisäksi kolme derivaattafunktion nollakohtaa lähekkäin, ja iteraatio heilahtelee aluksi näiden ympärillä.

Vastaus a) 28. iteraatio ($x_{29} \approx 1{,}97363$)

180

Muodostetaan Newtonin menetelmän iterointikaavaa vastaava funktio g.

$$f(x)=\frac{4x-1}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+2x+4}{(x^2+1)^2}$$

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\frac{4x-1}{x^2+1}}{\frac{-4x^2+2x+4}{(x^2+1)^2}}=x-\frac{4x^3-x^2+4x-1}{-4x^2+2x+4}$$

Iteroidaan alkuarvoilla $x_1=-0,5$ ja $x_1=1$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-0,5	1
x_2	1,375	-2
x_3	17,38461538...	-4,8125
x_4	35,14551521...	-9,791282398...
...		
x_{36}	1,52198E+11	-41580195787,...
...		
x_{99}	1,40378E+30	-3,8351E+29

Alkuarvot eivät johda nollakohtaan. Alkuarvolla $x_1 = -0,5$ jonon jäsenet kasvavat jokaisella iteraatiolla, ja puolestaan alkuarvolla $x_1 = 1$ ne pienenevät.

Siirretään alkuarvoja yksi desimaali kerrallaan lähemmäs nollakohtaa, kunnes menetelmä suppenee.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-0,4	0,8
x_2	0,778125	-0,38684210...
x_3	-0,30394579...	0,72764668...
...		
x_7	0,24999919...	0,24999890...
x_8	0,25	0,25
x_9	0,25	0,25

Kun alkuarvo on väliltä $[-0,4;\ 0,8]$, menetelmä suppenee nollakohtaan $x = 0,25$.

Vastaus Iterointi suppenee kohti nollakohtaa, kun alkuarvo valitaan väliltä $[-0,4; 0,8]$.

181

Yhtälön $x-\sqrt{x+4}=0$ määrittelyehto on

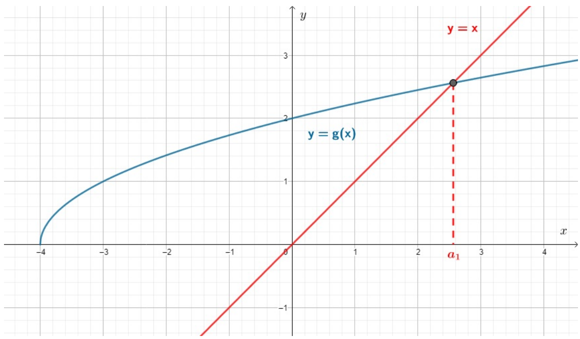
$$x+4\geq 0$$
$$x\geq -4.$$

Muokataan yhtälö muotoon $x=g(x)$.

$$x-\sqrt{x+4}=0$$
$$x=\sqrt{x+4}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x)=\sqrt{x+4}$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y=x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]2,\ 3[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 2$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	2
2	2,44948974...
3	2,53958456...
...	
10	2,56155257...
11	2,56155276...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on $2,561553$.

Siis yhtälön $x - \sqrt{x+4} = 0$ ratkaisu on $x \approx 2,561553$.

Vastaus $\quad x \approx 2,561553$

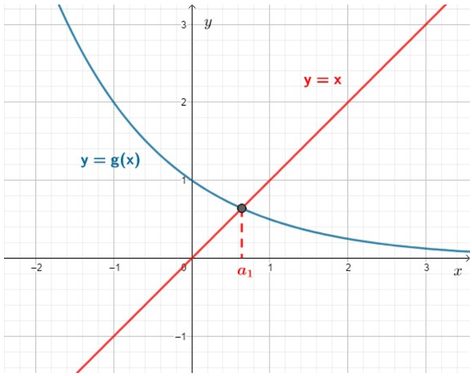
182

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$2^{-x} - x = 0$$
$$x = 2^{-x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = 2^{-x}$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]0,\ 1[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	1
2	0,5
3	0,70710678...
4	0,61254732...
...	
10	0,64120525...
11	0,64117707...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on $0,6412$.

Siis yhtälön $2^{-x} - x = 0$ ratkaisu on $x \approx 0,6412$.

Vastaus $x \approx 0,6412$

183

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

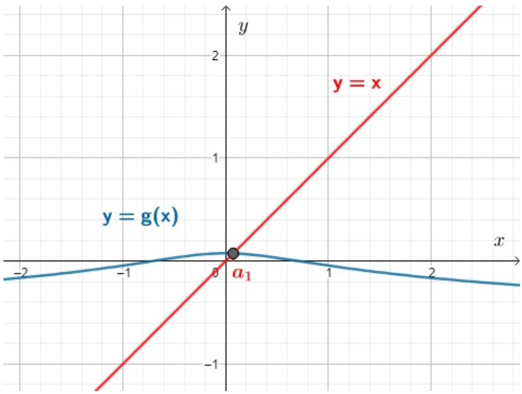
$$\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$$

$$x = \frac{\lg(x^2 + \frac{1}{2})}{-4}$$

$$x = -\frac{1}{4}\lg(x^2 + \frac{1}{2})$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = -\frac{1}{4}\lg(x^2 + \frac{1}{2})$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]0,\ 1[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 0$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	0
2	0,07525749...
3	0,07403455...
4	0,07407376...
5	0,07407251...
6	0,07407255...

Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on $0,074073$.

Siis yhtälön $\lg(x^2 + \frac{1}{2}) + 4x = 0$ ratkaisu on $x \approx 0,074073$.

Vastaus $\quad x \approx 0,074073$

184

a) Muokataan yhtälö muotoon $x = 2 - \frac{1}{2}x^3$.

$$x^3 + 2x - 4 = 0$$
$$2x = 4 - x^3 \quad \Big|: 2$$
$$x = 2 - \frac{1}{2}x^3$$

b) Muokataan yhtälö muotoon $x = \sqrt[3]{4 - 2x}$.

$$x^3 + 2x - 4 = 0$$
$$x^3 = 4 - 2x \quad \Big|\sqrt[3]{}$$
$$x = \sqrt[3]{4 - 2x}$$

Yhtälön $x^3 + 2x - 4 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin a- ja b-kohdissa johdettujen yhtälöiden ratkaisut.

Iteroidaan funktioita

a) $g(x) = 2 - \frac{1}{2}x^3$ ja

b) $g(x) = \sqrt[3]{4 - 2x}$

lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.

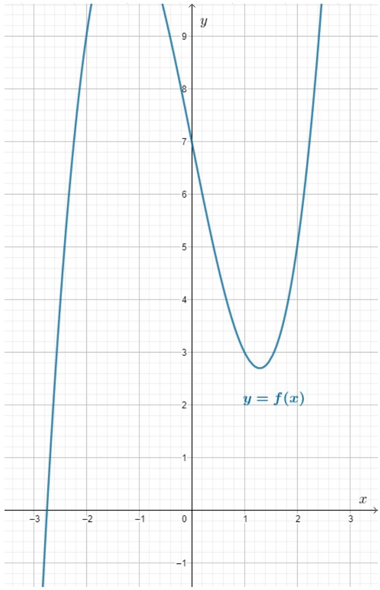
	a)	b)
1	1	1
2	1,5	1,25992105...
3	0,3125	1,13964436...
4	1,98474121...	1,19831041...
...		
10	3,21076E+47	1,17973783...
11	-1,655E+142	1,17939937...

Iteroinnin perusteella näyttää, että a-kohdan funktiolla suoritettu iterointi ei suppene kohti yhtälön juurta.
b-kohdan funktiolla iteraatiot suppenevat kohti ratkaisua.

Vastaus a) Ei tuota kiintopistettä b) Tuottaa kiintopisteen

185

Yhtälön $x^3 - 5x + 7 = 0$ ratkaisut ovat samat, kuin funktion $f(x) = x^3 - 5x + 7$ nollakohdat.
Kuvan perusteella yhtälön ratkaisu on välillä $]-2, -3[$.

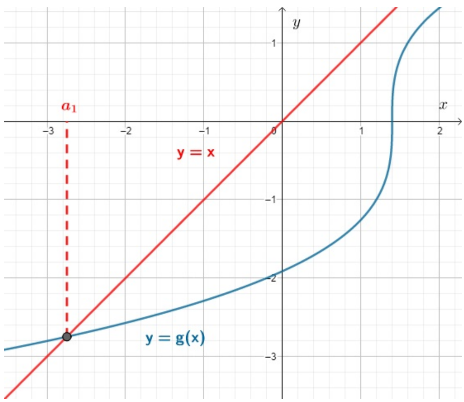


Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$x^3 - 5x + 7 = 0$$
$$x^3 = 5x - 7$$
$$x = \sqrt[3]{5x - 7}$$

Yhtälön ratkaisu on funktion $g(x) = \sqrt[3]{5x-7}$ kiintopiste. Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = -3$.

	A
1	-3
2	-2,80203933...
3	-2,75937064...
...	
6	-2,74747583...
7	-2,74737509...
8	-2,74735284...



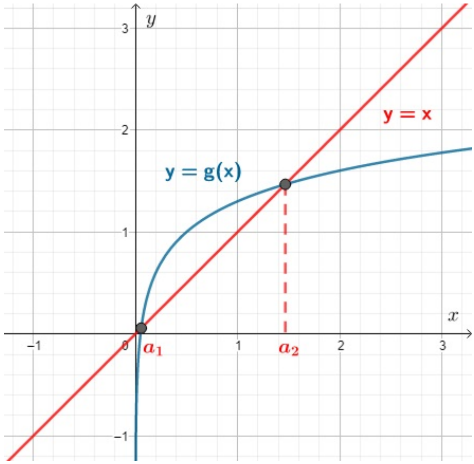
Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on $-2,747$.

Siis yhtälön $x^3 - 5x + 7 = 0$ ratkaisu on $x \approx -2,747$.

Vastaus $\quad -2,747$

186

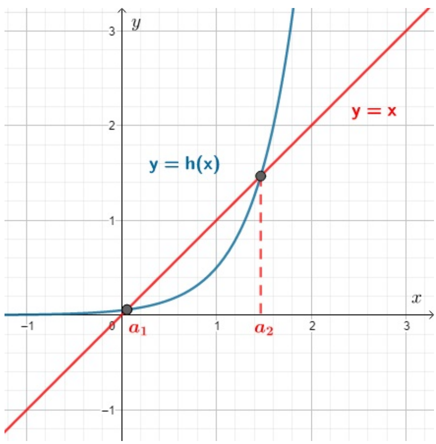
a) Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y=x$ samaan koordinaatistoon.



Kuvan perusteella funktiolla g on kaksi kiintopistettä.

b) Kuvaajan perusteella funktion g kiintopisteet ovat väleillä $]0,\ 1[$ ja $]1,\ 2[$. Kiintopiste a_2 löydetään iteroimalla funktiota g alkuarvolla $x_1=1$.
Kiintopistettä a_1 varten yhtälöä on muokattava.

$$\begin{aligned} x &= \lg(2x)+1 \\ x-1 &= \log_{10}(2x) \\ 10^{x-1} &= 2x \\ x &= \frac{1}{2}\cdot 10^{x-1} \end{aligned}$$



Funktion g kiintopisteet ovat samat kuin funktion $h(x)=\frac{1}{2}\cdot 10^{x-1}$ kiintopisteet.

Kiintopiste a_1 saadaan iteroimalla funktioita h alkuarvosta $x_1 = 0$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	a_1	a_2
1	0	1
2	0,05	1,30102999...
3	0,05610092...	1,41531730...
...		
11	0,05701437...	1,46765038...
12	0,05701437...	1,46765260...

Iteroinnin perusteella funktion g (ja h) kiintopisteiden likiarvot ovat $0,05701$ ja $1,46765$.

Vastaus a) kaksi kiintopistettä b) $0,05701$ ja $1,46765$

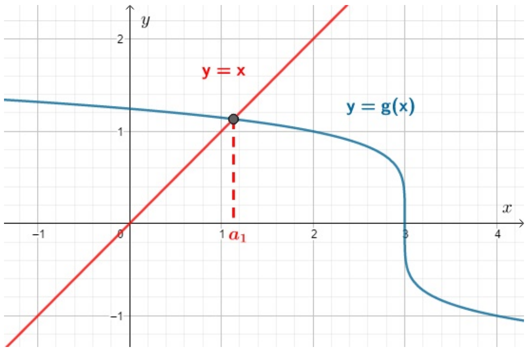
187

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$x^5 + x - 3 = 0$$
$$x^5 = 3 - x$$
$$x = \sqrt[5]{3 - x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = \sqrt[5]{3 - x}$ kiintopisteet.

Kuvan perusteella funktion g kiintopiste on välillä $]1, 2[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.

	A
1	1
2	1,14869835...
3	1,13108550...
4	1,13322953...
5	1,13296941...

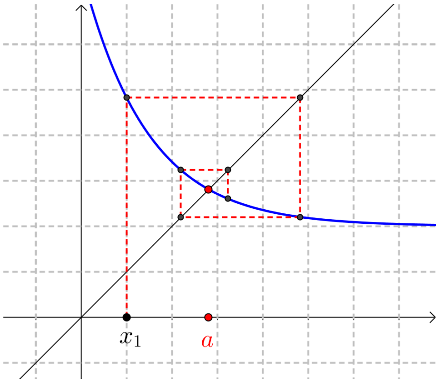
Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on 1,133.

Siis yhtälön $x^3 + x - 3 = 0$ ratkaisu on $x \approx 1{,}133$.

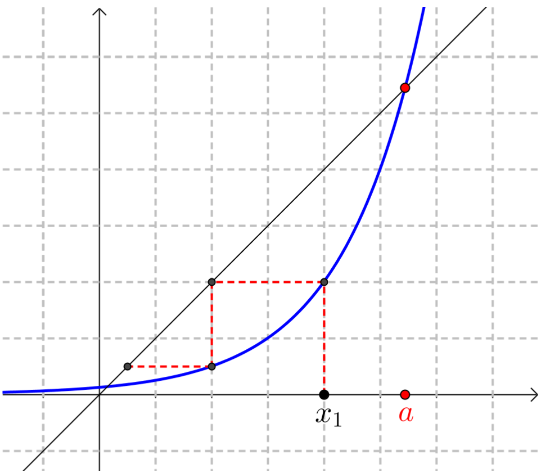
Vastaus $x \approx 1{,}133$

188

a) Kun kuvaajalla lähdetään alkuarvosta x_1, ja siirrytään aina funktion arvon kautta suoralle $y = x$, huomataan että lähestytään kiintopistettä a.



b) Tässä tapauksessa liikutaan jokaisella iteraatiolla kauemmaksi kiintopisteestä a, eli kiintopisteiterointi ei lähesty sitä (se kuitenkin lähestyy toista kiintopistettä, nollaa).



189

a) Lasketaan iteroimalla lukujonon

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2 + \ln x_n$$

arvoja alkuarvauksella $x_0 = 1$.

x_n	Iteraatio
x_0	1
x_1	2
x_2	2,69314718...
...	
x_9	3,14602684...
x_{10}	3,14614033...

Iteroinnin perusteella $x_{10} \approx 3,146$.

b) Muokataan yhtälöä.

$$x = 2 + \ln x$$
$$x - 2 = \log_e x$$
$$x = e^{x-2}$$

Lasketaan nyt lukujonon

$$x_{n+1} = h(x_n) = e^{x_n - 2}$$

arvoja alkuarvauksella $x_0 = 1$.

x_n	Iteraatio
x_0	1
x_1	0,36787944…
x_2	0,19551453…
…	
x_9	0,15859443…
x_{10}	0,15859435…

Iteroinnin perusteella toinen ratkaisu on $x_{10} \approx 0{,}159$.

Vastaus a) $x_{10} \approx 3{,}146$ b) $x = e^{x-2}$, $x_{10} \approx 0{,}159$

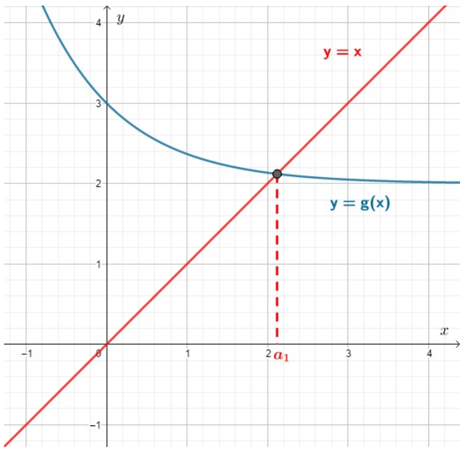
190

Muokataan yhtälö muotoon $x = g(x)$.

$$e^{-x} + 2 - x = 0$$
$$x = 2 + e^{-x}$$

Yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = 2 + e^{-x}$ kiintopisteet.

Piirretään funktion g kuvaaja ja suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Kuvan perusteella funktion g ainoa kiintopiste on välillä $]2, 3[$.



Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 2$. Käytetään taulukkolaskentaohjelmaa.

	A
1	2
2	2,13533528...
...	
7	2,12002786...
8	2,12002828...

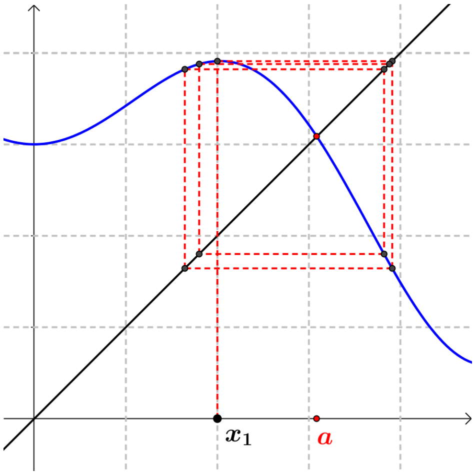
Iteroinnin perusteella funktion g ainoan kiintopisteen likiarvo on $2{,}120028$.

Siis yhtälön $\mathrm{e}^{-x} + 2 - x = 0$ ratkaisu on $x \approx 2{,}120028$.

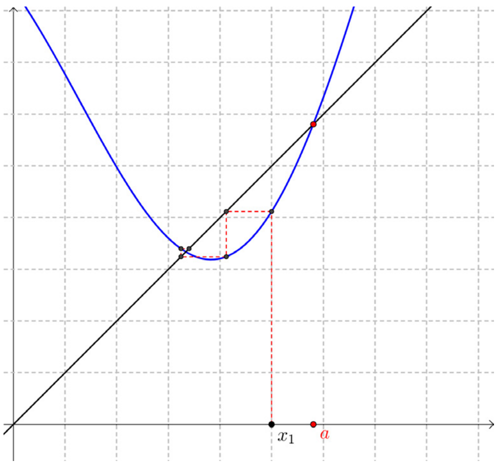
Vastaus 2,120028

191

a) Eivät lähesty, iterointi jää kiertämään kehää.



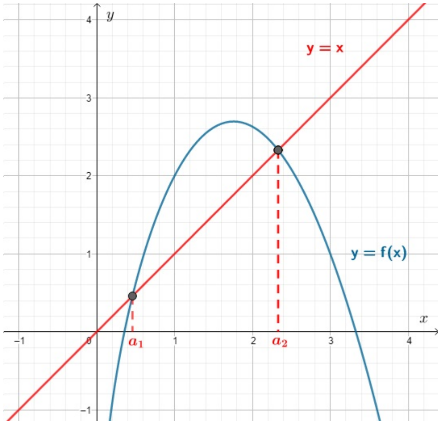
b) Eivät lähesty, iterointi lähestyy vasemmanpuoleista kiintopistettä.



192

Funktio on määritelty, kun $x > 0$.

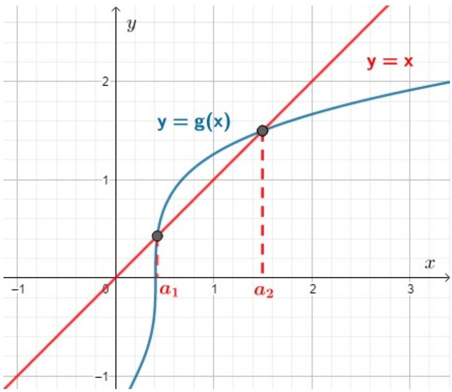
Kuvaajan perusteella funktion $f(x) = \log_3 x + 3x - x^3$ kiintopisteet ovat väleillä $]0,\ 1[$ ja $]1,\ 2[$.



Muokataan $x = f(x)$ eri muotoihin kiintopisteiden löytämiseksi.

$$x = \log_3 x + 3x - x^3$$
$$x^3 = 2x + \log_3 x$$
$$x = \sqrt[3]{2x + \log_3 x}$$

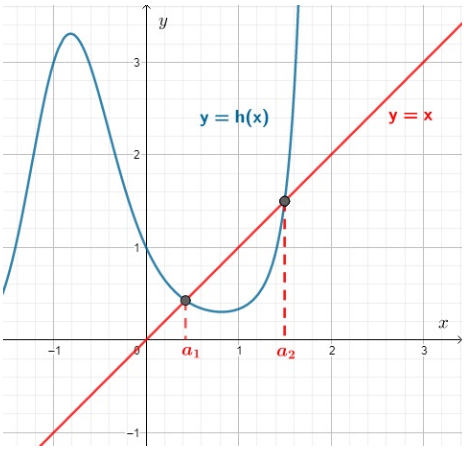
Funktiolla $g(x) = \sqrt[3]{2x + \log_3 x}$ on samat kiintopisteet kuin funktiolla f. Sitä iteroimalla löydetään kiintopiste a_2. Valitaan tämän iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 1$.



Muokataan funktio $x = f(x)$ vielä toiseen muotoon kiintopisteen a_1 löytämiseksi.

$$x = \log_3 x + 3x - x^3$$
$$\log_3 x = x^3 - 2x$$
$$x = 3^{x^3 - 2x}$$

Funktiolla $h(x) = 3^{x^3 - 2x}$ on samat kiintopisteet kuin funktiolla f. Sitä iteroimalla löydetään kiintopiste a_1. Valitaan myös tämän iteroinnin alkuarvoksi $x_1 = 1$.



Iteroidaan funktioita taulukkolaskentaohjelmalla.

	a_1 ($h(x)$)	**a_2 ($g(x)$)**
1	1	1
2	0,33333333...	1,25992105...
3	0,50071467...	1,39764092...
4	0,38202609...	1,45810240...
...		
22	0,42663379...	1,49856645...
23	0,42651905...	1,49856645...

Iteroinnin perusteella kiintopisteiden likiarvot ovat $0,427$ ja $1,499$.

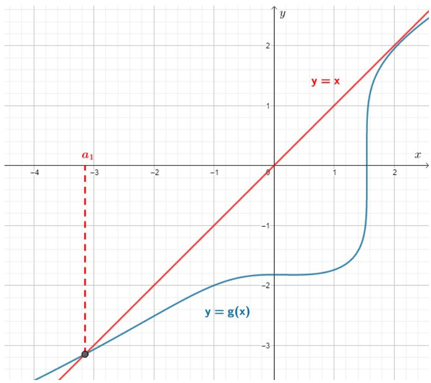
Vastaus $x \approx 0,427$ ja $x \approx 1,499$

193

Muokataan yhtälöä.

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$$
$$x^5 = 8x^3 - 4x^2 - 20$$
$$x = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$$

Funktion $g(x) = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$ kiintopisteet ovat samat kuin yhtälön ratkaisut. Kuvan perusteella kiintopiste on välillä $\left]-4, -3\right[$.



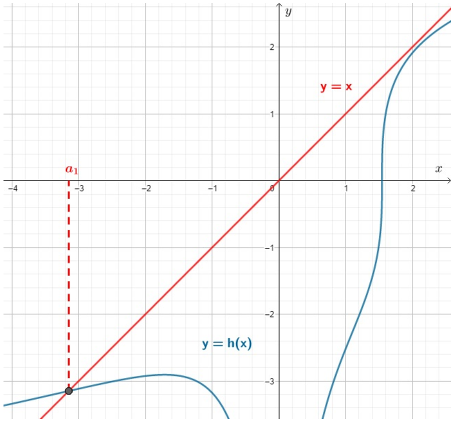
Muokataan yhtälö vielä toiseen muotoon.

$$x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 20 = 0$$
$$x^5 = 8x^3 - 4x^2 - 20 \qquad \Big| : x^2,\ x \neq 0$$
$$x^3 = 8x - 4 - \frac{20}{x^2}$$
$$x = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}}$$

Funktion

$$h(x) = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}} \quad , x \neq 0$$

kiintopisteet ovat samat kuin yhtälön ratkaisut.



Iteroidaan funktioita g ja h lähtien alkuarvosta $x_1 = -3$.

x_n	Iteraatio $g(x_{n-1})$
x_1	-3
x_2	-3,06841276...
x_3	-3,10536475...
...	
x_{10}	-3,14770837...
x_{11}	-3,14796096...

x_n	Iteraatio $h(x_{n-1})$
x_1	-3
x_2	-3,11488581...
x_3	-3,14071873...
x_4	-3,14655039...
x_5	-3,14786774...
x_6	-3,14816537...

Iterointien perusteella yhtälön ratkaisun likiarvo on $-3{,}148$.
Funktiolla g likiarvo saatiin 9. iterointikierroksella ja funktiolla h 4. iterointikierroksella.

Vastaus Esimerkiksi $x = \sqrt[5]{8x^3 - 4x^2 - 20}$, $x_{10} \approx -3{,}148$;

$$x = \sqrt[3]{8x - 4 - \frac{20}{x^2}}, \quad x_5 \approx -3{,}148.$$

194

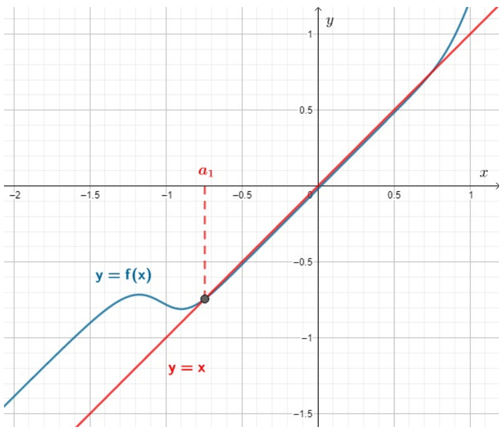
a) Iteroidaan funktiota f lähtien alkuarvosta $x_1 = -0,5$.

	A
1	-0,5
2	-0,51812511...
3	-0,53609674...
4	-0,55386031...
...	
40	-0,74335388...
41	-0,74336551...

Iteroinnin perusteella kiintopisteen likiarvo on $-0,7434$.

b) Piirretään funktion f kuvaaja.

Kuvaajasta nähdään, että funktion f kuvaaja on kiintopisteen läheisyydessä lähes yhdensuuntainen suoran $y = x$ kanssa. Tästä syystä suppeneminen on hidasta.



Vastaus a) $-0,7434$

b) Funktio on kiintopisteen läheisyydessä lähes yhdensuuntainen suoran $y = x$ kanssa

195

a) Iteroidaan funktiota g lähtien alkuarvosta $x_1 = 1$.

	A
1	1
2	1,5
3	1,416666666...
4	1,414215686...
5	1,414213562...
6	1,414213562...

Iteroinnin perusteella kiintopisteen likiarvo on $1,41421356$.

b) Luvun suuruudesta päätellen, se voisi olla $\sqrt{2}$. Lisäksi kokeilemalla $1,41421356^2 \approx 2$.

c) Ratkaistaan yhtälö $g(x) = x$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) &= x && \Big|\cdot 2 \\
x+\frac{2}{x} &= 2x && \Big|\cdot x,\ x \neq 0 \\
x^2+2 &= 2x^2 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Yhtälön ratkaisut ovat $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$. Positiivinen kiintopiste on siis $\sqrt{2}$.

Vastaus a) $1,41421356$ b) $\sqrt{2}$ c) Funktion positiivinen kiintopiste on $\sqrt{2}$

196

Esimerkiksi sopiva funktio voitaisiin muokata yhtälöstä seuraavasti.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= 3 && |+x^3 \\
2x^3 &= x^3+3 && |: x^2,\ x \neq 0 \\
2x &= x+\frac{3}{x^2} && |: 2 \\
x &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Nyt iteroimalla funktioita $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x^2}\right)$ lähtien alkuarvosta $x_1=1$ saadaan laskettua luvun $\sqrt[3]{3}$ likiarvo.

	A
1	1
2	2
3	1,375
4	1,48088843...
...	
17	1,44224511...
18	1,44225179...

Iteroinnin perusteella $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44225$.

Vastaus Esimerkiksi $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x^2}\right)$, $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44225$

197

Tiedetään, että funktion g kiintopisteiterointi suppenee kohti kiintopistettä. Olkoon tämä funktion g kiintopiste a. Tällöin kiintopisteen määritelmän mukaisesti $g(a) = a$. Siis

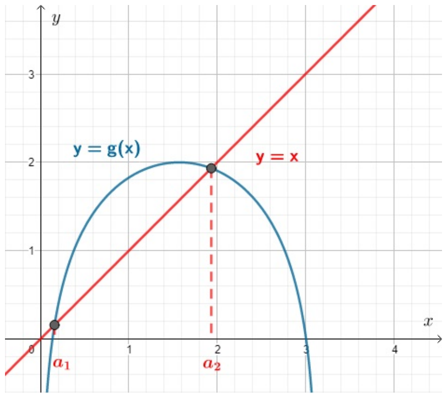
$$
\begin{aligned}
g(a) &= a \\
a - \frac{f(a)}{f'(a)} &= a \\
\frac{f(a)}{f'(a)} &= 0 \qquad \left| \cdot f'(a),\ f'(a) \neq 0 \right. \\
f(a) &= 0.
\end{aligned}
$$

Eli funktion g kiintopiste a on funktion f nollakohta.

198

a) Piirretään funktion $g(x) = \ln(\sin x) + 2$ kuvaaja. Funktio on määritelty, kun $\sin x > 0$, eli se on määritelty välillä $]0, \pi[$.

Kuvan perusteella välillä $[0, \pi]$ olevat kiintopisteet ovat väleillä $]0, 1[$ ja $]1, 2[$.



Funktion g kiintopisteet ovat yhtälön $x = g(x)$ juuria. Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = \ln(\sin x) + 2$

$x \approx 0,1594$ ja $x \approx 1,9329$.

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Lasketaan derivaatan itseisarvot kiintopisteiden kohdilla.

$$|g'(0{,}1594)| = |6{,}22...| = 6{,}22... > 1$$

$$|g'(1{,}9329)| = |-0{,}37...| = 0{,}37... < 1$$

Kiintopiste $x \approx 0{,}1594$ on hylkivä ja kiintopiste $x \approx 1{,}9329$ puoleensavetävä.

c) Iteroimalla funktiota g lähtöarvoista $x_1 = 0{,}16$ ja $x_1 = 1{,}93$ kummassakin tapauksessa jono suppenee kohti kiintopistettä $x \approx 1{,}9329$.

Vastaus a) $0{,}1594$ ja $1{,}9329$
b) Ensimmäinen on hylkivä ja jälkimmäinen puoleensavetävä
c) Molemmat iteroinnit suppenevat kohti kiintopistettä $x \approx 1{,}9329$.

199

a) Ratkaistaan yhtälö $x = f(x)$.

$$x = ax(1-x)$$
$$x = ax - ax^2$$
$$ax^2 + x - ax = 0$$
$$x(ax+1-a) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad ax+1-a = 0$$
$$ax = a-1 \quad |:a,\ a>0$$
$$x = \frac{a-1}{a}$$

Funktion f kiintopisteet ovat $x=0$ ja $x = \frac{a-1}{a}$.

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = a - 2ax$$

Tarkastellaan derivaatan itseisarvoja kiintopisteiden kohdalla.

$$|f'(0)| = |a - 2a\cdot 0| = |a|$$

$$\left|f'\left(\frac{a-1}{a}\right)\right| = \left|a - 2a\cdot\frac{a-1}{a}\right| = |2-a|$$

Kiintopiste 0 on puoleensavetävä, kun $|a|<1$, eli $-1<a<1$.

Jälkimmäinen kiintopiste on puoleensavetävä, kun $|2-a|<1$, eli $1<a<3$.

Vastaus a) $x = 0$ ja $x = \dfrac{a-1}{a}$

b) Kiintopiste $x = 0$ on puoleensavetävä, jos $-1 < a < 1$.

Kiintopiste $x = \dfrac{a-1}{a}$ on puoleensavetävä, jos $1 < a < 3$

200

a) $f(x)=2x(1-x)$. Iteroidaan funktiota lähtien alkuarvosta $x_1=0,1$.

	A
1	0,1
2	0,18
...	
7	0,49999968...
8	0,5
9	0,5

Iterointi suppenee kiintopisteeseen $\frac{1}{2}$.

b) $f(x)=3,5x(1-x)$. Iteroidaan funktioita lähtien alkuarvosta $x_1=0,7$.

	A
1	0,7
2	0,735
3	0,6817125
...	
39	0,50088421
40	0,874997264
41	0,382819683
42	0,826940707

Iterointi jää heilahtelemaan eikä näytä suppenevan.

c) $f(x) = 0,5x(1-x)$. Iteroidaan funktiota lähtien alkuarvosta $x_1 = -0,9$.

	A
1	-0,9
2	-0,855
3	-0,7930125
...	
56	-1,53048E-15
57	-7,65242E-16
...	
1028	-3,8342E-308
1029	0

Iterointi suppenee kiintopisteeseen 0.

Vastaus a) Iterointi suppenee kiintopisteeseen $\frac{1}{2}$

b) Iterointi ei suppene

c) Iterointi suppenee kiintopisteeseen 0

201

Funktion f kiintopisteet ovat yhtälön $x = f(x)$ ratkaisut. Yhtälön ratkaisut ovat taas samat kuin funktion $h(x) = x - f(x)$ nollakohdat. Tarkastellaan funktion h arvoja välin $[-1, 1]$ päätepisteissä.

$$h(-1) = -1 - f(-1) \leq -1 - (-1) = 0$$

$$h(1) = 1 - f(1) \geq 1 - 1 = 0$$

Toisin sanoen, joko $h(-1) = 0$, $h(1) = 0$ tai $h(-1) < 0$ ja $h(1) > 0$.

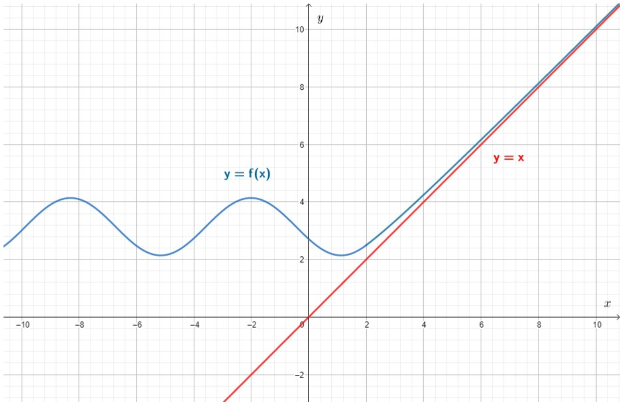
Jos $h(-1) = 0$, niin funktiolla f on kiintopiste $x = -1$.

Jos $h(1) = 0$, niin funktiolla f on kiintopiste $x = 1$.

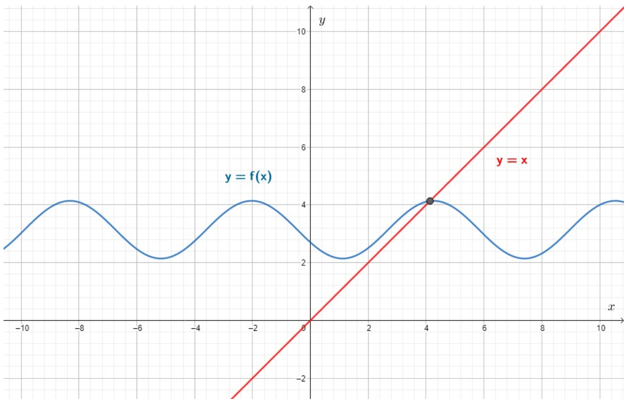
Jos taas $h(-1) < 0$ ja $h(1) > 0$, niin jatkuvalla funktiolla h on Bolzanon lauseen nojalla ainakin yksi nollakohta välillä $]-1, 1[$. Tällöin funktiolla f on ainakin yksi kiintopiste välillä $]-1, 1[$.

202

Funktiolla voi olla nolla kiintopistettä (funktion kuvaaja lähestyy asymptoottisesti suoraa $y = x$)



tai yksi kiintopiste (leikattuaan suoran $y = x$ kuvaaja ei voi derivaattarajoituksen vuoksi saavuttaa sitä enää uudelleen).



203

a) Sijoitetaan $y = kx$ lausekkeeseen $P_k(x,y) = \left(\frac{ky+x}{k^2+1}, \frac{k^2y+kx}{k^2+1}\right)$.

$$\begin{aligned} P_k(x,y) &= \left(\frac{ky+x}{k^2+1}, \frac{k^2y+kx}{k^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{k\cdot kx+x}{k^2+1}, \frac{k^2\cdot kx+kx}{k^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{x(k^2+1)}{k^2+1}, \frac{kx(k^2+1)}{k^2+1}\right) \\ &= (x,kx) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Siis jos $y = kx$, niin $P_k(x,y) = (x,y)$.

b) Jos $P_k(x,y) = (x,y)$, eli $\left(\frac{ky+x}{k^2+1}, \frac{k^2y+kx}{k^2+1}\right) = (x,y)$, niin

$x = \frac{ky+x}{k^2+1}$ ja $y = \frac{k^2y+kx}{k^2+1}$. Ratkaistaan yhtälöt y:n suhteen.

$$\begin{aligned} x &= \frac{ky+x}{k^2+1} && \Big|\cdot(k^2+1) \\ x(k^2+1) &= ky+x \\ ky &= k^2x && \Big|:k \\ y &= kx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{k^2y+kx}{k^2+1} && \Big|\cdot(k^2+1) \\ y(k^2+1) &= k^2y+kx \\ k^2y+y-k^2y &= kx \\ y &= kx \end{aligned}$$

Siis jos $P_k(x,y) = (x,y)$, niin $y = kx$.