24

Lasketaan jakolaskut jakokulmassa.

a)

$$
\begin{array}{r|r}
 & 027 \\ \cline{2-2}
23 & 621 \\
- & 46 \\ \cline{2-2}
 & 161 \\
- & 161 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|r}
 & 027 \\ \cline{2-2}
23 & 629 \\
- & 46 \\ \cline{2-2}
 & 169 \\
- & 161 \\ \cline{2-2}
 & 8
\end{array}
$$

Vastaus a) $\frac{621}{23} = 27$, jakojäännös 0

b) $\frac{629}{23} = 27\frac{8}{23}$, jakojäännös 8

25

Lasketaan jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 5 \\
\hline
3x + 2 & 6x^2 - 11x - 10 \\
- & 6x^2 + 4x \\
\hline
 & -15x - 10 \\
- & -15x - 10 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus $2x - 5$

26

Lasketaan jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + x - 1 \\
\hline
x+2 & 3x^3 + 7x^2 + x - 2 \\
- & \underline{3x^3 + 6x^2} \\
 & x^2 + x - 2 \\
- & \underline{x^2 + 2x} \\
 & -x - 2 \\
- & \underline{-x - 2} \\
 & 0
\end{array}
$$

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{-x}{x} = -1$$

Vastaus $3x^2 + x - 1$

27

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 \qquad\qquad\qquad - \ 6 \\
\hline
3x^2-5x+7 & 6x^5-10x^4+14x^3-18x^2+30x-42 \\
- & \underline{6x^5-10x^4+14x^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad -18x^2+30x-42 \\
- & \qquad\qquad\qquad \underline{-18x^2+30x-42} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\frac{6x^5}{3x^2}=2x^3$$

$$\frac{-18x^2}{3x^2}=-6$$

Vastaus $\quad 2x^3-6$

28

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

a)

$$
\begin{array}{rlll}
 & x^2 & +\ 9 & \\
\cline{2-4}
x^2+5 \,\big|\, & x^4 & +14x^2 & +45 \\
- & x^4 & +5x^2 & \\
\cline{2-4}
 & & 9x^2 & +45 \\
 & - & 9x^2 & +45 \\
\cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$\frac{9x^2}{x^2} = 9$$

On jaollinen, koska jakojäännös on 0.

b)

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 \quad - 2x \quad + 23 \\
x^2 + 2x - 5 & \overline{\big)\, x^4 \qquad + 14x^2 \qquad + 45} \\
- & \underline{x^4 + 2x^3 - 5x^2} \\
 & -2x^3 + 19x^2 \qquad + 45 \\
- & \underline{-2x^3 - 4x^2 + 10x} \\
 & 23x^2 - 10x + 45 \\
- & \underline{23x^2 + 46x - 115} \\
 & -56x + 160
\end{array}
$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$$

$$\frac{23x^2}{x^2} = 23$$

Ei ole jaollinen, koska jakojäännökseksi saatiin $-56x + 160$, joka ei aina ole nolla.

Vastaus a) On, koska jakojäännös on 0.

b) Ei ole, koska jakojäännös $-56x + 160$ ei aina ole nolla.

29

Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3t^3 - 6t^2 + 7t - 14 \\
t+2 & \overline{)\,3t^4 \qquad - 5t^2 \qquad + 9} \\
- & 3t^4 + 6t^3 \\
\hline
 & -6t^3 - 5t^2 \qquad + 9 \\
- & -6t^3 - 12t^2 \\
\hline
 & 7t^2 \qquad + 9 \\
- & 7t^2 + 14t \\
\hline
 & -14t + 9 \\
- & -14t - 28 \\
\hline
 & 37
\end{array}
$$

$$\frac{3t^4}{t} = 3t^3$$

$$\frac{-6t^3}{t} = -6t^2$$

$$\frac{7t^2}{t} = 7t$$

$$\frac{-14t}{t} = -14$$

Vastaus Ei ole, koska jakojäännös $37 \neq 0$.

30

$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7$, $Q(x) = x + 1$ ja $T(x) = x - 1$.

a) Jaetaan polynomi P polynomilla Q jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 5x^2 & -7x & +7 & \\
\cline{2-5}
x+1 \,\big| & 5x^3 & -2x^2 & & +7 \\
- & 5x^3 & +5x^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -7x^2 & & +7 \\
- & & -7x^2 & -7x & \\
\cline{3-5}
 & & & 7x & +7 \\
- & & & 7x & +7 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$\frac{5x^3}{x} = 5x^2$$

$$\frac{-7x^2}{x} = -7x$$

$$\frac{7x}{x} = 7$$

Jakojäännökseksi saatiin 0, joten polynomi P on jaollinen polynomilla Q.

b) Jaetaan polynomi P polynomilla T jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rlllll}
 & 5x^2 & +3x & +3 & & \\
\cline{2-5}
x-1 & \multicolumn{1}{|l}{5x^3} & -2x^2 & & +7 & \\
- & 5x^3 & -5x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 3x^2 & & +7 & \\
 & - & 3x^2 & -3x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 3x & +7 & \\
 & & - & 3x & -3 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 10 &
\end{array}
$$

$$\frac{5x^3}{x} = 5x^2$$

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$\frac{3x}{x} = 3$$

Jakojäännökseksi saatiin $10 \neq 0$, joten polynomi P ei ole jaollinen polynomilla T.

Vastaus a) On, koska jakojäännös on 0.

b) Ei ole, koska jakojäännös on $10 \neq 0$.

31

Järjestetään jaettavan ja jakajan termit laskevan eksponentin mukaiseen järjestykseen ja lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 45x^2 - 15x - 64 \\
\hline
3x^2 + x + 4 & 135x^4 \qquad - 27x^2 + 72x \\
- & 135x^4 + 45x^3 + 180x^2 \\
\hline
 & -45x^3 - 207x^2 + 72x \\
- & -45x^3 - 15x^2 - 60x \\
\hline
 & -192x^2 + 132x \\
- & -192x^2 - 64x - 256 \\
\hline
 & 196x + 256
\end{array}
$$

Vastaus $\quad 45x^2 - 15x - 64 + \dfrac{196x + 256}{3x^2 + x + 4}$

32

$P(x) = 6x^3 - 12x^2 + a$

a) Polynomi P on jaollinen polynomilla $2x + 8$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta.

Määritetään jakajan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
2x + 8 &= 0 \\
2x &= -8 \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

Jakajan nollakohdan $x = -4$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$
\begin{aligned}
P(-4) &= 0 \\
6 \cdot (-4)^3 - 12 \cdot (-4)^2 + a &= 0 \\
-384 - 192 + a &= 0 \\
a &= 576
\end{aligned}
$$

b) Polynomi P on jaollinen polynomilla $3x-6$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta.

Määritetään jakajan nollakohta:

$$\begin{aligned} 3x-6&=0 \\ 3x&=6 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Jakajan nollakohdan $x=2$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$\begin{aligned} P(2)&=0 \\ 6\cdot 2^3-12\cdot 2^2+a&=0 \\ 48-48+a&=0 \\ a&=0 \end{aligned}$$

Vastaus a) $a=576$ b) $a=0$

33

a) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & -x^4 & -x^2 & -1 & \\ \cline{2-5}
-x^2+1 \,\big| & x^6 & & & -1 \\
- & x^6 & -x^4 & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^4 & & -1 \\
- & & -x^4 & -x^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & x^2 & -1 \\
- & & & x^2 & -1 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \ (-x^4 - x^2 - 1) = -1^4 - 1^2 - 1 = -3$$

b) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-4 & 3x^2+6x-24 \\ - & 3x^2 \qquad -12 \\ \hline & \qquad 6x-12 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+6x-24}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \left(3+\frac{6x-12}{x^2-4}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(3+\frac{6(x-2)}{(x+2)(x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \left(3+\frac{6}{(x+2)}\right)$$

$$= 3+\frac{6}{2+2}$$

$$= 3+\frac{6}{4}$$

$$= 3+1\frac{1}{2}$$

$$= 4\frac{1}{2}$$

Vastaus a) -3 b) $4\frac{1}{2}$

34

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^2 + 2x - 4 \\
\cline{2-2}
2x-3 & \big| \; 6x^3 - 5x^2 - 14x + 12 \\
- & 6x^3 - 9x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^2 - 14x + 12 \\
- & \qquad 4x^2 - 6x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -8x + 12 \\
- & \qquad\qquad -8x + 12 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Vastaus $3x^2 + 2x - 4$

35

a) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \quad\quad - 1 \\
\hline
2x^3+5 & 6x^5 \quad -2x^3 + x^2 - 5 \\
- & 6x^5 \quad\quad\quad + 15x^2 \\
\hline
 & \quad -2x^3 - 14x^2 - 5 \\
- & \quad -2x^3 \quad\quad\quad - 5 \\
\hline
 & \quad\quad -14x^2
\end{array}
$$

Ei ole jaollinen, koska jakojäännös $-14x^2$ ei ole aina nolla.

b) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 5x + 5 \\
\cline{2-2}
x-1 & \big) \; 6x^5 \qquad - 2x^3 + x^2 \qquad - 5 \\
- & 6x^5 - 6x^4 \\
\cline{2-2}
 & \quad 6x^4 - 2x^3 + x^2 \qquad - 5 \\
- & \quad 6x^4 - 6x^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^3 + x^2 \qquad - 5 \\
- & \qquad 4x^3 - 4x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 5x^2 \qquad - 5 \\
- & \qquad\quad 5x^2 - 5x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 5x - 5 \\
- & \qquad\qquad 5x - 5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

On jaollinen, koska jakojäännös on 0.

c) Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^5 & -\frac{1}{3}x^3 & +\frac{1}{6}x^2 & -\frac{5}{6} \\
\cline{2-5}
6 & \multicolumn{1}{|l}{6x^5} & -2x^3 & +\ x^2 & -5 \\
- & 6x^5 & & & \\
\cline{2-5}
 & & -2x^3 & +\ x^2 & -5 \\
 & - & -2x^3 & & -5 \\
\cline{3-5}
 & & & x^2 & -5 \\
 & & - & x^2 & \\
\cline{4-5}
 & & & & -5 \\
 & & & - & -5 \\
\cline{5-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

On jaollinen (jokainen polynomi on jaollinen millä tahansa nollasta eroavalla vakiolla).

Vastaus a) Ei ole, koska jakojäännös $-14x^2$ ei ole aina nolla.

b) On, koska jakojäännös on 0.

c) On, koska jakojäännös on 0.

36

a) Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-x+2 & x^3 \qquad\quad - 5x + 4 \\
- & x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & \qquad 2x^2 - 5x + 4 \\
- & \qquad 2x^2 - 4x \\
\hline
 & \qquad\qquad -x + 4 \\
- & \qquad\qquad -x + 2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 2
\end{array}
$$

b) Lasketaan polynomien jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^3 \qquad + 7x \\
\hline
2x^2-5 & 8x^5 \quad - 6x^3 \qquad\qquad + 9 \\
- & 8x^5 \quad - 20x^3 \\
\hline
 & \qquad\quad 14x^3 \qquad\qquad + 9 \\
- & \qquad\quad 14x^3 \quad - 35x \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 35x + 9
\end{array}
$$

Vastaus a) $-x^2 - 2x + 1 + \dfrac{2}{2-x}$

b) $4x^3 + 7x + \dfrac{35x+9}{2x^2-5}$

37

Ratkaistaan polynomin P lauseke jakoyhtälön avulla.

$$\begin{aligned}
\text{jaettava} &= \text{osamäärä} \cdot \text{jakaja} + \text{jakojäännös} \\
P(x) &= (7x^2 - 8) \cdot (x^2 + 2) + 19 \\
&= 7x^4 + 14x^2 - 8x^2 - 16 + 19 \\
&= 7x^4 + 6x^2 + 3
\end{aligned}$$

Vastaus $P(x) = 7x^4 + 6x^2 + 3$

38

$P(x) = 42x^3 + ax^2 + 23x - 3$

Polynomi P on jaollinen polynomilla $7x - 1$, jos jaettavalla ja jakajalla on sama nollakohta. Määritetään jakajan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
7x - 1 &= 0 \\
7x &= 1 \\
x &= \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Jakajan nollakohdan $x = \frac{1}{7}$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$P\left(\frac{1}{7}\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
42 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 + 23 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) - 3 &= 0 \\
\frac{{}^{(7}42}{7^3} + \frac{a}{7^2} + \frac{23}{7} - 3 &= 0 \\
\frac{6}{7^2} + \frac{a}{7^2} + \frac{23}{7} - 3 &= 0 \qquad \Big| \cdot 49 \; (= 7^2) \\
6 + a + 7 \cdot 23 - 49 \cdot 3 &= 0 \\
a &= 147 - 6 - 161 \\
a &= 147 - 167 \\
a &= -20
\end{aligned}
$$

Vastaus $a = -20$

39

Tutkitaan polynomien jakolaskua jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & t^{2015} + t^{2013} + t^{2011} + \ldots + t \\
\cline{2-2}
t^2 - 1 & \big) \; t^{2017} + t + 1 \\
- & t^{2017} - t^{2015} \\
\cline{2-2}
 & t^{2015} + t + 1 \\
- & t^{2015} - t^{2013} \\
\cline{2-2}
 & t^{2013} + t + 1 \\
- & t^{2013} + t^{2011} \\
\cline{2-2}
 & t^{2011} + t + 1 \\
 & \vdots \\
\cline{2-2}
 & t^3 + t + 1 \\
- & t^3 - t \\
\cline{2-2}
 & 2t + 1
\end{array}
$$

Vastaus $\quad 2t + 1$

40

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2 \qquad\quad +1 \\
4x^2 - x + 2 & \big| \; 8x^4 - 2x^3 + 8x^2 + ax + b \\
- & \underline{8x^4 - 2x^3 + 4x^2 } \\
 & \qquad\qquad\quad 4x^2 + ax + b \\
 & \qquad\quad - \; \underline{4x^2 - \; x + 2} \\
 & \qquad\qquad (a+1)x + b - 2
\end{array}
$$

Koska jako menee tasan, niin jakojäännöksen on oltava nolla kaikilla x.

Siis

$(a+1)x + b - 2 \equiv 0$

$(a+1)x + b - 2 \equiv 0x + 0$

$a + 1 = 0 \quad$ ja $\quad b - 2 = 0$

$a = -1 \quad$ ja $\quad b = 2$

Vastaus $\quad a = -1$ ja $b = 2$

41

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 5x + 2y \qquad\qquad +1 \\
\cline{2-2}
3x-7y & \big)\, 15x^2 - 14y^2 - 29xy + 3x - 7y \\
- & 15x^2 \qquad\quad - 35xy \\
\cline{2-2}
 & \qquad -14y^2 + 6xy + 3x - 7y \\
- & \qquad -14y^2 + 6xy \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 3x - 7y \\
- & \qquad\qquad\qquad 3x - 7y \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\frac{15x^2}{3x} = 5x$$

$$\frac{-14y^2}{-7y} = 2y$$

$$\frac{3x}{3x} = 1$$

Vastaus $\quad 5x + 2y + 1$

42

a) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \qquad\quad -5 \\
\hline
2x+6 & 6x^3+18x^2-10x-30 \\
- & \underline{6x^3+18x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad -10x-30 \\
- & \qquad\qquad \underline{-10x-30} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} \frac{6x^3+18x^2-10x-30}{2x+6} &= \lim_{x \to -3} (3x^2-5) \\
&= 3 \cdot (-3)^2 - 5 \\
&= 27-5 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

b) Sievennetään lauseke jakokulman avulla.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7x^2 + 3x \\
\hline
x^2 + x & 7x^4 + 10x^3 + 3x^2 \\
- & \underline{7x^4 + 7x^3} \\
 & 3x^3 + 3x^2 \\
- & \underline{3x^3 + 3x^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{7x^4 + 10x^3 + 3x^2}{x^2 + x} &= \lim_{x\to -1} (7x^2 + 3x) \\
&= 7\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) \\
&= 7 - 3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 22 b) 4

43

a) Koska raja-arvo määritetään jakajan nollakohdassa, on tuon nollakohdan $x = 2$ oltava myös jaettavan nollakohta, jotta raja-arvo olisi olemassa.

Jakajan nollakohdan $x = 2$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 0 \\
6 \cdot 2^4 - a &= 0 \\
a &= 6 \cdot 16 \\
a &= 96
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $a = 96$ ja lasketaan jakolasku $\dfrac{6x^4 - 96}{x^2 - 4}$ jakokulman avulla.

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 6x^2 & +24 & \\
\hline
x^2 - 4 & 6x^4 & & -96 \\
- & 6x^4 & -24x^2 & \\
\hline
 & & 24x^2 & -96 \\
 & - & 24x^2 & -96 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\lim_{x \to 2} \frac{6x^4 - 96}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} (6x^2 + 24) = 6 \cdot 2^2 + 24 = 24 + 24 = 48
$$

b) Koska raja-arvo määritetään jakajan nollakohdassa, on tuon nollakohdan $x = 3$ oltava myös jaettavan nollakohta, jotta raja-arvo olisi olemassa.

Jakajan nollakohdan $x = 3$ tulee siis olla myös jaettavan polynomin P nollakohta.

$$\begin{aligned} P(3) &= 0 \\ 12 \cdot 3^3 + 3a &= 0 \\ 12 \cdot 27 + 3a &= 0 \\ 4 \cdot 27 + a &= 0 \\ a &= -108 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $a = -108$ ja lasketaan jakolasku $\dfrac{12x^3 - 108}{x^2 - 9}$ jakokulman avulla.

$$\begin{array}{r|ll} & 12x & \\ \hline x^2 - 9 & 12x^3 & -108 \\ - & 12x^3 & -108 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x \to 3} \frac{12x^3 - 108}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} 12x = 12 \cdot 3 = 36$$

Vastaus a) $a = 96$, $\lim_{x \to 2} \dfrac{6x^4 - 96}{x^2 - 4} = 48$

b) $a = -108$, $\lim_{x \to 3} \dfrac{12x^3 - 108}{x^2 - 9} = 36$

44

a) Polynomilla $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 18$ on tekijänä $x + 1 = x - (-1)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on -1. Lasketaan $P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-1) + 18 \\ &= -3 - 6 + 15 + 18 \\ &= 24 \neq 0 \end{aligned}$$

Koska $x = -1$ ei ole polynomin P nollakohta, niin $x + 1$ ei ole polynomin P tekijä.

b) Polynomilla $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 18$ on tekijänä $4x - 12 = 4(x - 3)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 3. Lasketaan $P(3)$.

$$\begin{aligned} P(3) &= 3\cdot 3^3 - 6\cdot 3^2 - 15\cdot 3 + 18 \\ &= 81 - 54 - 45 + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Koska $x = 3$ on polynomin P nollakohta, niin $4x - 12$ on polynomin P tekijä.

Vastaus a) ei ole b) on

45

Jaetaan polynomi $A(x)$ jakokulmassa tekijällä x^2+3.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-32 \\
\hline
x^2+3 & 2x^4-26x^2-96 \\
- & \underline{2x^4+\ \ 6x^2\qquad\quad} \\
 & \qquad -32x^2-96 \\
- & \qquad \underline{-32x^2-96} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Siis $A(x)=(x^2+3)(2x^2-32)$. Osamääräksi saatiin toisen asteen polynomi $2x^2-32$, joka on myös polynomin $A(x)$ tekijä. Jaetaan tekijä $2x^2-32$ tekijöihin nollakohtiensa avulla.

$$
\begin{aligned}
2x^2-32&=0\\
x^2-16&=0\\
x^2&=16\\
x&=\pm 4
\end{aligned}
$$

Esitetään polynomi $A(x)$ tulomuodossa.

$$
\begin{aligned}
A(x)&=(x^2+3)(2x^2-32)\\
&=(x^2+3)\cdot 2(x-4)(x+4)
\end{aligned}
$$

Vastaus $A(x)=2(x+4)(x-4)(x^2+3)$

46

Polynomilla P on nollakohta $x = 4$, joten $x - 4$ on polynomin P tekijä.

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $x - 4$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 9x - 54 \\
\hline
x - 4 & 3x^3 - 3x^2 - 90x + 216 \\
- & \underline{3x^3 - 12x^2} \\
 & \quad 9x^2 - 90x + 216 \\
- & \quad \underline{9x^2 - 36x} \\
 & \qquad -54x + 216 \\
- & \qquad \underline{-54x + 216} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Siis $P(x) = (x - 4)(3x^2 + 9x - 54)$.

Jaetaan tekijä $3x^2 + 9x - 54$ tekijöihin nollakohtiensa avulla.

$$3x^2 + 9x - 54 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-54)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} \\
&= \frac{-9 \pm 27}{2}
\end{aligned}
$$

$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = 3$

Esitetään polynomi $P(x)$ tulomuodossa.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-4)(3x^2+9x-54) \\ &= (x-4)\cdot 3\cdot (x-3)(x+6) \\ &= 3(x-3)(x-4)(x+6) \end{aligned}$$

Vastaus $\quad P(x) = 3(x-3)(x-4)(x+6)$

47

a) $A(x)=9x^3-48x^2+99x-84$ ja $B(x)=3x-7$.

Jaetaan polynomi A jakokulmassa polynomilla B.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^2 - 9x + 12 \\
\cline{2-2}
3x-7 & \multicolumn{1}{|l}{9x^3-48x^2+99x-84} \\
- & 9x^3-21x^2 \\
\cline{2-2}
 & -27x^2+99x-84 \\
- & -27x^2+63x \\
\cline{2-2}
 & 36x-84 \\
- & 36x-84 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Siis $A(x)=(3x^2-9x+12)(3x-7)+0=(3x^2-9x+12)(3x-7)$.

b) $A(x) = 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84$ ja $B(x) = 3x - 4$.

Jaetaan polynomi A jakokulmassa polynomilla B.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 12x + 17 \\
\hline
3x - 4 & 9x^3 - 48x^2 + 99x - 84 \\
- & 9x^3 - 12x^2 \\
\hline
 & -36x^2 + 99x - 84 \\
- & -36x^2 + 48x \\
\hline
 & 51x - 84 \\
- & 51x - 68 \\
\hline
 & -16
\end{array}
$$

Siis $A(x) = (3x^2 - 12x + 17)(3x - 4) - 16$.

Vastaus a) $A(x) = (3x^2 - 9x + 12)(3x - 7)$

b) $A(x) = (3x^2 - 12x + 17)(3x - 4) - 16$

48

Koska polynomilla P on nollakohta -7, niin sillä on tekijä $x-(-7)=x+7$.

Koska polynomilla P on kaksinkertainen nollakohta 2, niin sillä on tekijä $(x-2)(x-2)=(x-2)^2$.

Kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla P ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$P(x)=a(x+7)(x-2)^2$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $P(1)=-16$ avulla.

$$\begin{aligned} P(1) &= -16 \\ a(1+7)(1-2)^2 &= -16 \\ a\cdot 8\cdot(-1)^2 &= -16 \\ 8a &= -16 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Siis $P(x)=-2(x+7)(x-2)^2=-2x^3-6x^2+48x-56$.

Vastaus $P(x)=-2x^3-6x^2+48x-56$ $(=-2(x-2)^2(x+7))$

49

Koska polynomilla A on viisinkertainen nollakohta -2, niin sillä on tekijä $(x-(-2))^5 = (x+2)^5$.

Viidennen asteen polynomilla on korkeintaan viisi ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla A ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$A(x) = a(x+2)^5$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $A(-4) = 32$ avulla.

$$\begin{aligned}
A(-4) &= 32 \\
a(-4+2)^5 &= 32 \\
a \cdot (-2)^5 &= 32 \\
-32a &= 32 \\
a &= -1
\end{aligned}$$

Siis $A(x) = -(x+2)^5 = -x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 80x - 32$.

Vastaus $A(x) = -x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 80x - 32 \; (= -(x+2)^5)$

50

Osoitetaan, että polynomilla $Q(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+4x+4$ on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä.

Jaetaan polynomi tekijöihin ryhmittelemällä.

$$\begin{aligned}Q(x)&=x^5+x^4+x^3+x^2+4x+4\\&=x^4(x+1)+x^2(x+1)+4(x+1)\\&=(x+1)(x^4+x^2+4)\end{aligned}$$

$$\underbrace{x^4}_{\geq 0}+\underbrace{x^2}_{\geq 0}+4>0$$

Polynomia x^4+x^2+4 ei voi jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole nollakohtia.

Siis polynomilla Q on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä. □

Vastaus On osoitettu, että polynomilla Q on täsmälleen yksi ensimmäisen asteen tekijä.

51

a) Kun polynomi $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9$ jaetaan binomilla $x - 3$, on jakojäännös $P(3)$.

$$P(3) = 4 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 9 = 54$$

b) Kun polynomi $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9$ jaetaan binomilla $x + 2$, on jakojäännös $P(-2)$.

$$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 9 = -51$$

Vastaus a) 54 b) -51

52

Jos polynomilla ei ole ensimmäisen asteen tekijää, sillä ei voi olla myöskään nollakohtia.

Keksitään siis esimerkkejä sellaisista neljännen asteen polynomeista, joilla ei ole nollakohtia.

Esimerkiksi: $(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$ tai

$(x^2+2)(2x^2+1) = 2x^4+5x^2+2$ tai

x^4+1 jne.

Vastaus Esimerkiksi $(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$.

53

a) Jos $x = 1$ on polynomin $P(x) = ax^3 + x^2 + 26x - 15$ nollakohta, niin

$$\begin{aligned} P(1) &= 0 \\ a \cdot 1^3 + 1^2 + 26 \cdot 1 - 15 &= 0 \\ a + 1 + 26 - 15 &= 0 \\ a + 12 &= 0 \\ a &= -12 \end{aligned}$$

b) Koska polynomin $P(x) = -12x^3 + x^2 + 26x - 15$ eräs nollakohta on $x = 1$, on sillä tekijä $x - 1$.

Jaetaan polynomi P polynomilla $x - 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{rl} & -12x^2 - 11x + 15 \\ x-1 & \overline{\big)\, -12x^3 + x^2 + 26x - 15} \\ - & \underline{-12x^3 + 12x^2} \\ & \quad -11x^2 + 26x - 15 \\ - & \quad \underline{-11x^2 + 11x} \\ & \qquad 15x - 15 \\ - & \qquad \underline{15x - 15} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$$-12x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 15}}{2 \cdot (-12)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{841}}{-24} = \frac{11 \pm 29}{-24}$$

$$x = \frac{-18}{-24} = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{40}{-24} = -\frac{5}{3}$$

Siis

$$\begin{aligned} -12x^2 - 11x + 15 &= -12(x - (-\frac{5}{3}))(x - \frac{3}{4}) \\ &= -3 \cdot 4 \cdot (x + \frac{5}{3})(x - \frac{3}{4}) \\ &= -(3x + 5)(4x - 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= -12x^3 + x^2 + 26x - 15 \\ &= (-12x^2 - 11x + 15)(x - 1) \\ &= -(3x + 5)(4x - 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Vastaus a) $a = -12$ b) $P(x) = -(3x + 5)(4x - 3)(x - 1)$

54

a) Polynomilla $P(x)=5x^4-17x^3+39x^2-85x+70$ on tekijänä $x-3$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 3. Lasketaan $P(3)$.

$$\begin{aligned}P(3)&=5\cdot 3^4-17\cdot 3^3+39\cdot 3^2-85\cdot 3+70\\&=405-17\cdot 3^3+13\cdot 3^3-255+70\\&=150-4\cdot 3^3+70\\&=220-108\\&=112\neq 0\end{aligned}$$

Koska $x=3$ ei ole polynomin P nollakohta, niin $x-3$ ei ole polynomin tekijä.

b) Polynomilla $P(x)=5x^4-17x^3+39x^2-85x+70$ on tekijänä $2x-4=2(x-2)$ täsmälleen silloin, kun polynomin P nollakohta on 2. Lasketaan $P(2)$.

$$\begin{aligned}P(2)&=5\cdot 2^4-17\cdot 2^3+39\cdot 2^2-85\cdot 2+70\\&=5\cdot 16-17\cdot 8+39\cdot 4-170+70\\&=80-136+156-170+70\\&=80+20-100\\&=100-100\\&=0\end{aligned}$$

Koska $x=2$ on polynomin P nollakohta, niin $2(x-2)=2x-4$ on polynomin tekijä.

c) Koska jakajalla ei ole nollakohtaa, tutkitaan jaollisuutta jakamalla polynomi P jakokulmassa polynomilla x^2+5

$$
\begin{array}{rl}
 & 5x^2-17x+14 \\
\cline{2-2}
x^2+5 & \big| \; 5x^4-17x^3+39x^2-85x+70 \\
- & 5x^4 \qquad\quad +25x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -17x^3+14x^2-85x+70 \\
- & \qquad -17x^3 \qquad\quad -85x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 14x^2 \qquad +70 \\
- & \qquad\qquad\qquad 14x^2 \qquad +70 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Koska jakolasku meni tasan, on polynomi P jaollinen polynomilla x^2+5.

Vastaus a) ei ole

b) on

c) on

55

Polynomilla P on nollakohta $x=-3$, joten $x-(-3)=x+3$ on polynomin P tekijä.

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $x+3$.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6x^2-37x+45 \\
x+3 & \overline{)\,6x^3-19x^2-66x+135} \\
- & \underline{6x^3+18x^2} \\
 & -37x^2-66x+135 \\
- & \underline{-37x^2-111x} \\
 & 45x+135 \\
- & \underline{45x+135} \\
 & 0
\end{array}
$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$$6x^2-37x+45=0$$

$$x=\frac{37\pm\sqrt{(-37)^2-4\cdot 6\cdot 45}}{2\cdot 6}$$

$$=\frac{37\pm\sqrt{289}}{12}$$

$$=\frac{37\pm 17}{12}$$

$$x=\frac{54}{12}=\frac{9}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

Siis

$$\begin{aligned}6x^2-37x+45 &= 6\cdot(x-\frac{5}{3})(x-\frac{9}{2})\\ &= 2\cdot 3\cdot(x-\frac{5}{3})(x-\frac{9}{2})\\ &= (3x-5)(2x-9).\end{aligned}$$

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$\begin{aligned}P(x) &= (6x^2-37x+45)(x+3)\\ &= (3x-5)(2x-9)(x+3)\end{aligned}$$

Vastaus $\quad P(x)=(3x-5)(2x-9)(x+3)$

56

Koska polynomilla P on nollakohta -1, niin sillä on tekijä $x-(-1)=x+1$.

Koska polynomilla P on nollakohta $-\frac{1}{2}$, niin sillä on tekijä

$x-(-\frac{1}{2})=x+\frac{1}{2}$.

Koska polynomilla P on kolminkertainen nollakohta 2, niin sillä on tekijä $(x-2)^3$.

Viidennen asteen polynomilla on korkeintaan viisi ensimmäisen asteen tekijää, joten polynomilla P ei ole edellä olevien lisäksi muita tekijöitä.

$$P(x)=a(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-2)^3$$

Kerroin a saadaan määritettyä tiedon $P(1)=-18$ avulla.

$$\begin{aligned}
P(1)&=-18\\
a(1+1)(1+\frac{1}{2})(1-2)^3&=-18\\
a\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot(-1)&=-18\\
-3a&=-18\\
a&=6
\end{aligned}$$

Tällöin polynomin P lauseke on

$$\begin{aligned}
P(x) &= 6(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-2)^3 \\
&= 3(x+1)\cdot 2(x+\frac{1}{2})(x-2)^3 \\
&= 3(x+1)(2x+1)(x-2)^3 \\
&= 6x^5-27x^4+21x^3+42x^2-36x-24
\end{aligned}$$

.

Vastaus $P(x) = 6x^5-27x^4+21x^3+42x^2-36x-24$

$(= 3(x+1)(2x+1)(x-2)^3)$

57

Jos $x+2=x-(-2)$ on polynomin $P(x)=3x^3+ax-18$ tekijä, niin
$x=-2$ on polynomin nollakohta.

$$\begin{aligned} P(-2)&=0 \\ 3\cdot(-2)^3+a\cdot(-2)-18&=0 \\ -24-2a-18&=0 \\ -2a&=42 \\ a&=-21 \end{aligned}$$

Siis $P(x)=3x^3-21x-18$.

Jaetaan polynomi P polynomilla $x+2$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{rl} & 3x^2-6x-9 \\ \cline{2-2} x+2 & \big) \; 3x^3 \qquad -21x-18 \\ - & 3x^3+6x^2 \\ \cline{2-2} & -6x^2-21x-18 \\ - & -6x^2-12x \\ \cline{2-2} & -9x-18 \\ - & -9x-18 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

Jaetaan vielä osamääräksi saatu toisen asteen polynomi $3x^2-6x-9$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$3x^2-6x-9=0$$
$$x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}$$
$x=-1$ tai $x=3$

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$\begin{aligned}P(x)&=3x^3-21x-18\\&=(x+2)(3x^2-6x-9)\\&=3(x+2)(x^2-2x-3)\\&=3(x+2)(x-3)(x+1)\end{aligned}$$

Vastaus $a=-21$, $P(x)=3(x+2)(x-3)(x+1)$

58

a) Jotta polynomi $A(x)$ voidaan esittää jakoyhtälönä $A(x)=Q(x)B(x)+R(x)$, on polynomi $A(x)$ jaettava polynomilla $B(x)=2x+9$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 2x^3 \qquad\quad -4x + 6 \\
2x+9 & \big|\; \overline{4x^4+18x^3-8x^2-24x+54} \\
- & \quad \underline{4x^4+18x^3\qquad\qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\quad -8x^2-24x+54 \\
- & \qquad\qquad\quad \underline{-8x^2-36x\qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 12x+54 \\
- & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{12x+54} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Tällöin $A(x)=(2x^3-4x+6)(2x+9)$.

b) Jaetaan polynomi $A(x)$ polynomilla $B(x) = 2x^2 + 5$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2 + 9x - 9 \\
\cline{2-2}
2x^2 + 5 & \big| \; 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 24x + 54 \\
- & \underline{4x^4 \qquad\quad + 10x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\quad 18x^3 - 18x^2 - 24x + 54 \\
- & \qquad\quad \underline{18x^3 \qquad\quad + 45x \quad} \\
 & \qquad\qquad\qquad -18x^2 - 69x + 54 \\
- & \qquad\qquad\qquad \underline{-18x^2 \qquad\quad - 45} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 69x + 99
\end{array}
$$

Tällöin $A(x) = (2x^2 + 9x - 9)(2x^2 + 5) + (-69x + 99)$.

c) Jos jakojäännös $R(x) = 54x + 74$, niin

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$
$$\begin{aligned} Q(x)B(x) &= A(x) - R(x) \\ &= 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 24x + 54 - (54x + 74) \\ &= 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 78x - 20 \end{aligned}$$

Jos $B(x)$ on mikä tahansa toisen asteen polynomi, niin myös $Q(x)$ on toisen asteen polynomi.

Jaetaan polynomi $B(x)Q(x)$ tekijöihin laskimen tekijöihinjako-toiminnolla (factor()).

$$\begin{aligned} Q(x)B(x) &= 4x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 78x - 20 \\ &= (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1) \end{aligned}$$

Siis esimerkiksi
$A(x) = (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1) + (54x + 74)$.

Vastaus

a) $A(x) = (2x^3 - 4x + 6)(2x + 9)$

b) $A(x) = (2x^2 + 9x - 9)(2x^2 + 5) + (-69x + 99)$

c) Esimerkiksi
$A(x) = (4x^2 + 2x - 20)(x^2 + 4x + 1) + (54x + 74)$

59

Jaetaan polynomi $A(x)$ jakokulmassa polynomilla $B(x)$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x + 4 \\
2x^2 - 7x + 3 & \overline{\big)\, 2x^3 + x^2 + ax + b} \\
- & \underline{2x^3 - 7x^2 + 3x} \\
 & \quad 8x^2 + (a-3)x + b \\
- & \quad \underline{8x^2 - 28x + 12} \\
 & \quad (a+25)x + b - 12
\end{array}
$$

Jotta jakolasku menisi tasan, jakojäännöksen $(a+25)x+b-12$ on oltava nolla kaikilla x, eli jakojäännöspolynomin $(a+25)x+b-12$ on oltava nollapolynomi $0x + 0$. Kertoimien $a+25$ ja $b-12$ tulee siis olla nollia eli $a=-25$ ja $b=12$.

Vastaus $a=-25$ ja $b=12$

60

Erotetaan ensin x yhteiseksi tekijäksi.

$$P(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 24x = x(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = -1$ on polynomin $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

Jaetaan polynomi $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ polynomilla $x + 1$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x^2 - 14x + 24 \\
\hline
x+1 & x^4 \qquad -15x^2 + 10x + 24 \\
- & \underline{x^4 + x^3} \\
 & -x^3 - 15x^2 + 10x + 24 \\
- & \underline{-x^3 - x^2} \\
 & -14x^2 + 10x + 24 \\
- & \underline{-14x^2 - 14x} \\
 & 24x + 24 \\
- & \underline{24x + 24} \\
 & 0
\end{array}
$$

Siis $P(x) = x(x+1)(x^3 - x^2 - 14x + 24)$.

Kokeilemalla huomataan, että $x = 2$ on polynomin $x^3 - x^2 - 14x + 24$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - 2$.

Jaetaan polynomi $x^3 - x^2 - 14x + 24$ polynomilla $x - 2$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 12 \\
\hline
x - 2 & x^3 - x^2 - 14x + 24 \\
- & x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & \quad x^2 - 14x + 24 \\
- & \quad x^2 - 2x \\
\hline
 & \qquad -12x + 24 \\
- & \qquad -12x + 24 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Siis $P(x) = x(x+1)(x-2)(x^2 + x - 12)$.

Jaetaan toisen asteen polynomi tekijöihin nollakohtien avulla.

$x^2 + x - 12 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$x = -4$ tai $x = 3$

Siis $x^2 + x - 12 = 1 \cdot (x-3)(x-(-4)) = (x-3)(x+4)$.

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$P(x) = x(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$$

Vastaus $\quad P(x) = x(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$

61

a) Kun polynomi $P(x)=2x^3+3x^2-4x+6$ jaetaan binomilla $x-1$, on jakojäännös $P(1)$.

$P(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-4\cdot 1+6=7$

b) Kun polynomi $P(x)=2x^3+3x^2-4x+6$ jaetaan binomilla $x+3$, on jakojäännös $P(-3)$.

$P(-3)=2\cdot(-3)^3+3\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)+6=-9$

c) Kun polynomi $P(x)=2x^3+3x^2-4x+6$ jaetaan binomilla $2x-8=2(x-4)$, on jakojäännös $P(4)$.

$P(4)=2\cdot 4^3+3\cdot 4^2-4\cdot 4+6=166$

Vastaus a) 7 b) -9 c) 166

62

Määritetään polynomin $P(x)$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ -4x^6 - 20x^4 + 16x^2 + 80 &= 0 \quad \Big| \text{Sijoitetaan } x^2 = t. \\ -4t^3 - 20t^2 + 16t + 80 &= 0 \end{aligned}$$

Kokeilemalla havaitaan, että saatu yhtälö toteutuu, kun $t = 2$, joten $t - 2$ on polynomin $Q(t) = -4t^3 - 20t^2 + 16t + 80$ tekijä. Jaetaan polynomi $Q(t)$ jakokulmassa tekijällä $t - 2$.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & -4t^2 & -28t & -40 & \\
\cline{2-5}
t-2 \big| & -4t^3 & -20t^2 & +16t & +80 \\
- & -4t^3 & +8t^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -28t^2 & +16t & +80 \\
- & & -28t^2 & +56t & \\
\cline{3-5}
 & & & -40t & +80 \\
- & & & -40t & +80 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

Ratkaistaan yhtälö $-4t^3-20t^2+16t+80=0$ tulon nollasäännön avulla.

$$-4t^3-20t^2+16t+80=0$$
$$(t-2)(-4t^2-28t-40)=0$$

$t-2=0$ tai $-4t^2-28t-40=0$

$t=2 \quad \big| \, t=x^2$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

$t^2+7t+10=0$

$$t=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\frac{-7\pm3}{2}$$

$t=-5$ tai $t=-2 \quad \big| \, t=x^2$

$x^2=-5$ ei ratkaisua

$x^2=-2$ ei ratkaisua

Kirjoitetaan polynomi $P(x)$ tulomuodossa polynomin $Q(t)$ avulla.

$$\begin{aligned}Q(t)&=-4t^3-20t^2+16t+80\\&=-4(t-2)(t-(-5))(t-(-2))\\&=-4(t-2)(t+5)(t+2)\end{aligned}$$

Sijoitetaan $t=x^2$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}P(x)&=-4(x^2-2)(x^2+5)(x^2+2)\\&=-4(x-2)(x+2)(x^2+5)(x^2+2).\end{aligned}$$

Polynomin P tekijät x^2+5 ja x^2+2 ovat jaottomia, koska niillä ei ole nollakohtia. Siis polynomilla P on täsmälleen kaksi ensimmäisen asteen tekijää.

Vastaus 2

63

1) ***Väite:*** Jokaisella n :nnen asteen polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa reaalilukujen joukossa ja korkeintaan n ensimmäisen asteen tekijää.

Todistus: Jos a on polynomin P nollakohta, niin $x-a$ on polynomin P tekijä.

Oletetaan vastoin väitettä, että polynomilla P on nollakohtia enemmän kuin n kappaletta. Tällöin polynomilla P on muotoa $x-a$ olevia 1. asteen tekijöitä enemmän kuin n kappaletta. Mutta tällöin polynomin P asteluku on suurempi kuin n, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa ja väitteen on oltava tosi. $\square$

2) ***Väite:*** Kun polynomi P jaetaan polynomilla $x-a$, niin jakojäännös on $P(a)$.

Todistus: Jakoyhtälön perusteella

$P(x)=(x-a)Q(x)+r$, missä r on jakojäännös.

Sijoitetaan $x=a$.

$$P(a)=(a-a)Q(a)+r$$
$$P(a)=r$$

Siis väite on tosi. $\square$

3) ***<u>Väite:</u>*** Jos n. asteen polynomilla P on nollakohdat $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, niin polynomi P on muotoa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n),$$

missä kerroin a on polynomin P korkeimman asteen termin kerroin.

<u>Todistus:</u> Jos x_i on polynomin P nollakohta, niin $x - x_i$ on polynomin P tekijä.

Oletuksen mukaan polynomin P nollakohdat ovat $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, joten polynomilla P on vähintään n ensimmäisen asteen tekijää $x - x_i$.

Toisaalta kohdan 1 mukaan n. asteen polynomilla P on korkeintaan n nollakohtaa ja n 1. asteen tekijää.

Siis polynomilla P on oltava täsmälleen n muotoa $x - x_i$ olevaa 1. asteen tekijää.

Koska polynomin P asteluku on n, sillä ei voi olla muita tekijöitä, ja polynomi P voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n).$$

Toisaalta n :nnen asteen polynomi on aina muotoa

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

joten vakio a on korkeimman asteen termin kerroin.

64

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$(3x-6)(1-x^2)(x+7)=0$$

$$\begin{aligned}3x-6&=0 \\ 3x&=6 \\ x&=2\end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned}1-x^2&=0 \\ x^2&=1 \\ x&=\pm 1\end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned}x+7&=0 \\ x&=-7\end{aligned}$$

Vastaus $x=-7$, $x=-1$, $x=1$ tai $x=2$

65

Polynomin $2x^3+10x^2-26x+14$ eräs nollakohta on $x=1$, joten tekijänä on $x-1$. Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x-1$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \phantom{2x^3+{}}2x^2+12x-14 \\
x-1 & \overline{\big)\,2x^3+10x^2-26x+14} \\
- & \underline{2x^3-2x^2\phantom{{}-26x+14}} \\
 & \phantom{2x^3+{}}12x^2-26x+14 \\
- & \phantom{2x^3+{}}\underline{12x^2-12x\phantom{{}+14}} \\
 & -14x+14 \\
- & \underline{-14x+14} \\
 & 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^3+10x^2-26x+14=0$$

$$(x-1)(2x^2+12x-14)=0$$

$x-1=0$ tai $2x^2+12x-14=0$

$x=1$ $\qquad\qquad x^2+6x-7=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot(-7)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$=\frac{-6\pm8}{2}$$

$$x=-7 \text{ tai } x=1$$

Vastaus $\quad x=-7$ tai $x=1$

66

Polynomin $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ eräs nollakohta on $x = 4$, joten tekijänä on $x - 4$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 4$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - x \quad - 6 \\
x - 4 & \overline{\big|\, x^3 - 5x^2 - 2x + 24} \\
- & \underline{x^3 - 4x^2} \\
 & \quad -x^2 - 2x + 24 \\
- & \quad \underline{-x^2 + 4x} \\
 & \qquad\quad -6x + 24 \\
- & \qquad\quad \underline{-6x + 24} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$$
$$(x-4)(x^2 - x - 6) = 0$$

$x - 4 = 0$ tai $x^2 - x - 6 = 0$

$x = 4$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x = -2$ tai $x = 3$

Vastaus $x = -2$, $x = 3$ tai $x = 4$

67

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(x)=x^3-2x^2-13x-10$ eräs nollakohta on $x=-1$, joten tekijänä on $x-(-1)=x+1$.

$$P(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-13\cdot(-1)-10=-1-2+13-10=0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x+1$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-3x-10 \\
\cline{2-2}
x+1 \,\big| & x^3-2x^2-13x-10 \\
- & \underline{x^3+x^2} \\
 & -3x^2-13x-10 \\
- & \underline{-3x^2-3x} \\
 & -10x-10 \\
- & \underline{-10x-10} \\
 & 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^3-2x^2-13x-10=0$$
$$(x+1)(x^2-3x-10)=0$$

$x+1=0$ tai $x^2-3x-10=0$

$x=-1$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}$$
$$=\frac{3\pm7}{2}$$

$x=-2$ tai $x=5$

Vastaus $x=-2$, $x=-1$ tai $x=5$

68

Erotetaan ensin yhteinen tekijä x.

$$P(x) = x^4 - 19x^3 + 99x^2 - 81x = x(x^3 - 19x^2 + 99x - 81)$$

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $x^3 - 19x^2 + 99x - 81$ eräs nollakohta on $x = 1$, joten tekijänä on $x - 1$.

$$1^3 - 19 \cdot 1^2 + 991 \cdot -81 = 1 - 19 + 99 - 81 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 - 18x + 81 \\
\cline{2-2}
x - 1 & \big) \; x^3 - 19x^2 + 99x - 81 \\
- & x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -18x^2 + 99x - 81 \\
- & \quad -18x^2 + 18x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 81x - 81 \\
- & \qquad\qquad 81x - 81 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^4 - 19x^3 + 99x^2 - 81x = 0$$
$$x(x-1)(x^2 - 18x + 81) = 0$$
$$x(x-1)(x-9)^2 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad (x-9)^2 = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 9$$

Vastaus $x = 0$, $x = 1$ tai $x = 9$

69

Koska $x=-3$ on polynomin $P(x)=x^4+6x^3+7x^2-12x-18$ kaksinkertainen nollakohta, niin P on jaollinen polynomilla $(x-(-3))^2=(x+3)^2=x^2+6x+9$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä x^2+6x+9.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 \qquad -2 \\
x^2+6x+9 & \overline{\big|\, x^4+6x^3+7x^2-12x-18} \\
- & \underline{x^4+6x^3+9x^2} \\
 & \qquad\quad -2x^2-12x-18 \\
- & \qquad\quad \underline{-2x^2-12x-18} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$
\begin{aligned}
x^4+6x^3+7x^2-12x-18&=0\\
(x+3)^2(x^2-2)&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2&=0 \qquad \text{tai} \qquad & x^2-2&=0\\
x&=-3 & x^2&=2\\
 & & x&=\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus $x=-3$, $x=-\sqrt{2}$ tai $x=\sqrt{2}$

70

Koska $x = 1$ on polynomin $Q(x) = 2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8$ kolminkertainen nollakohta, niin Q on jaollinen polynomilla $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Jaetaan polynomi Q jakokulmassa tekijällä $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad + 8 \\
\hline
x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & 2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8 \\
- & \underline{2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x} \\
 & \qquad 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8 \\
- & \qquad \underline{8x^3 - 24x^2 + 24x - 8} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 22x - 8 = 0$$
$$(x-1)^3(2x+8) = 0$$

$(x-1)^3 = 0$ tai $2x + 8 = 0$

$x = 1$ $\qquad$ $2x = -8$

$x = -4$

Vastaus $\quad x = -4$ tai $x = 1$

71

Ratkaistaan bikvadraattinen yhtälö tekemällä sijoitus $x^2 = t$

$$4x^4 - 24x^2 + 36 = 0 \quad \Big| \text{Sijoitetaan } x^2 = t.$$

$$4t^2 - 24t + 36 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t - 3 = 0$$

$$t = 3$$

Sijoitetaan saatuun ratkaisuun $t = x^2$.

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Vastaus $x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$

72

Tapa 1

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa hyödyntämällä ryhmittelyä ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16 &= 0 \\ x^4(x-1) - 8x^2(x-1) + 16(x-1) &= 0 \\ (x-1)(x^4 - 8x^2 + 16) &= 0 \end{aligned}$$

$x - 1 = 0$ tai $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

$x = 1$ $\quad (x^2 - 4)^2 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Vastaus $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 2$

Tapa 2
Kokeilemalla havaitaan, että $x = 1$ toteuttaa yhtälön:

$$1^5 - 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 16 = 1 - 1 - 8 + 8 + 16 - 16 = 0$$

Jakamalla polynomi $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16$ jakokulmassa tekijällä $x - 1$ saadaan yhtälö tulomuotoon

$$x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16 = 0$$ | Jaetaan jakokulman avulla tekijöihin.

$$(x-1)(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$$

$x - 1 = 0$ tai

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$
$$(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-4) + (-4)^2 = 0$$
$$(x^2 - 4)^2 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

$x = 1$

Vastaus $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 2$

Huomaa, että yhtälön $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ voi ratkaista myös bikvadraattisena yhtälönä.

73

Jos $x = 7$ on polynomin $P(x) = 3x^3 - 14x^2 + ax - 14$ nollakohta, niin

$$\begin{aligned} P(7) &= 0 \\ 3 \cdot 7^3 - 14 \cdot 7^2 + a \cdot 7 - 14 &= 0 \\ a &= -47 \end{aligned}$$

Siis $P(x) = 3x^3 - 14x^2 - 47x - 14$.

Jos $x = 7$ on polynomin P nollakohta, on polynomilla tekijä $x - 7$. Jaetaan polynomi tekijällä $x - 7$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - 7x \quad + 2 \\ \hline x - 7 & 3x^3 - 14x^2 - 47x - 14 \\ - & \underline{3x^3 - 21x^2} \\ & \qquad 7x^2 - 47x - 14 \\ - & \qquad \underline{7x^2 - 49x} \\ & \qquad\qquad 2x - 14 \\ - & \qquad\qquad \underline{2x - 14} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa tulomuodossa ja ratkaista tulon nollasäännön avulla.

$$3x^3 - 14x^2 - 47x - 14 = 0$$
$$(x-7)(3x^2 + 7x + 2) = 0$$

$x - 7 = 0$ tai $3x^2 + 7x + 2 = 0$

$x = 7$ $\qquad x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-7 \pm 5}{6}$

$x = -2$ tai $x = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Vastaus $a = -47$, muut ratkaisut $x = -2$, $x = -\dfrac{1}{3}$

74

Polynomin $2x^3+6x^2-8x-24$ eräs nollakohta on $x=-3$, joten tekijänä on $x-(-3)=x+3$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x+3$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 2x^2 \qquad\qquad -8 \\
x+3 & \big|\overline{\,2x^3+6x^2-8x-24\,} \\
- & \;\; \underline{2x^3+6x^2\qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\quad -8x-24 \\
 & \qquad - \;\;\underline{-8x-24} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$
\begin{aligned}
2x^3+6x^2-8x-24&=0\\
(x+3)(2x^2-8)&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
x+3=0 & \text{tai} & 2x^2-8=0 \\
x=-3 & & 2x^2=8 \\
 & & x^2=4 \\
 & & x=\pm 2
\end{array}
$$

Vastaus $\quad x=-3$, $x=-2$ tai $x=2$

75

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ eräs nollakohta on $x = 1$, joten tekijänä on $x - 1$.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 6 = 2 + 5 - 1 - 6 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2 + 7x + 6 \\
x - 1 & \overline{\big)\, 2x^3 + 5x^2 - x - 6} \\
- & \underline{2x^3 - 2x^2} \\
 & 7x^2 - x - 6 \\
- & \underline{7x^2 - 7x} \\
 & 6x - 6 \\
- & \underline{6x - 6} \\
 & 0
\end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-1)(2x^2 + 7x + 6) = 0$$

$x - 1 = 0$ tai $2x^2 + 7x + 6 = 0$

$x = 1$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4}$$

$x = -2$ tai $x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Vastaus $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ tai $x = 1$

76

Koska $x = 2$ on polynomin
$P(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24$ kolminkertainen nollakohta,
niin P on jaollinen polynomilla $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\qquad -3 \\
\hline
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24 \\
- & \underline{x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2} \\
 & \qquad\qquad -3x^3 + 18x^2 - 36x + 24 \\
- & \qquad\qquad \underline{-3x^3 + 18x^2 - 36x + 24} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24 = 0$$
$$(x-2)^3(x^2-3) = 0$$

$(x-2)^3 = 0$ tai $x^2 - 3 = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Vastaus $\quad x = -\sqrt{3}$, $x = 2$ tai $x = \sqrt{3}$

77

Ratkaistaan yhtälö tekemällä sijoitus $x^3 = t$.

$$
\begin{aligned}
3x^6 - 48x^3 + 192 &= 0 \quad \Big| \text{Sijoitetaan } x^3 = t. \\
3t^2 - 48t + 192 &= 0 \\
t^2 - 16t + 64 &= 0 \\
(t-8)^2 &= 0 \\
t - 8 &= 0 \\
t &= 8
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan saatuun ratkaisuun $t = x^3$.

$$
\begin{aligned}
x^3 &= 8 \\
x &= \sqrt[3]{8} \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Vastaus $x = 2$

78

Tapa 1

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa hyödyntämällä ryhmittelyä ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned}
x^6+x^5-10x^4-10x^3+25x^2+25x&=0\\
x(x^5+x^4-10x^3-10x^2+25x+25)&=0\\
x(x^4(x+1)-10x^2(x+1)+25(x+1))&=0\\
x(x+1)(x^4-10x^2+25)&=0\\
x(x+1)(x^2-5)^2&=0
\end{aligned}$$

$x=0$ tai $x+1=0$ tai $(x^2-5)^2=0$

$x=-1$

$x^2-5=0$

$x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

Vastaus $x=-\sqrt{5}$, $x=-1$, $x=0$ tai $x=\sqrt{5}$

Tapa 2
Erotetaan yhteinen tekijä. Etsitään yksi nollakohta kokeilemalla.
Jaetaan tekijöihin jakokulman avulla.

$$x^6 + x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x = 0$$
$$x(x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25) = 0$$

Kokeilemalla havaitaan, että $x = -1$ on polynomin $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25$ nollakohta:

$$(-1)^5 + (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3 - 10 \cdot (-1)^2 + 25 \cdot (-1) + 25$$
$$= -1 + 1 + 10 - 10 - 25 + 25 = 0$$

Jakamalla $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25$ jakokulmassa tekijällä $x - (-1) = x + 1$ saadaan tulomuoto

$$x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25 = (x+1)(x^4 - 10x^2 + 25).$$

Ratkaistaan yhtälö $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$.

$$\begin{aligned}
x^4 - 10x^2 + 25 &= 0 && \Big| \text{Sijoitetaan } x^2 = t. \\
t^2 - 10t + 25 &= 0 \\
t^2 + 2 \cdot t \cdot (-5) + (-5)^2 &= 0 \\
(t-5)^2 &= 0 \\
t &= 5 && \Big| \text{Sijoitetaan } t = x^2. \\
x^2 &= 5 \\
x &= \pm\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$
\begin{aligned}
x^6 + x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x &= 0 \\
x(x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 25x + 25) &= 0 \\
x(x+1)(x^4 - 10x^2 + 25) &= 0
\end{aligned}
$$

$x = 0$ tai $x + 1 = 0$ tai $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

$x = -1$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{5}$

Vastaus $\quad x = -\sqrt{5}$, $x = -1$, $x = 0$ tai $x = \sqrt{5}$

79

Erotetaan yhteinen tekijä x.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^5 + 25x^4 + 38x^3 + 25x^2 + 6x \\ &= x(6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6) \end{aligned}$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = -1$ on polynomin $6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x - (-1) = x + 1$.

Jaetaan polynomi $6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6$ polynomilla $x + 1$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{rl}
 & 6x^3 + 19x^2 + 19x + 6 \\ \cline{2-2}
x+1 & \big)\, 6x^4 + 25x^3 + 38x^2 + 25x + 6 \\
- & 6x^4 + 6x^3 \\ \cline{2-2}
 & 19x^3 + 38x^2 + 25x + 6 \\
- & 19x^3 + 19x^2 \\ \cline{2-2}
 & 19x^2 + 25x + 6 \\
- & 19x^2 + 19x \\ \cline{2-2}
 & 6x + 6 \\
- & 6x + 6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Siis $P(x) = x(x+1)(6x^3 + 19x^2 + 19x + 6)$.

Kokeilemalla huomataan, että $x=-1$ on polynomin $6x^3+19x^2+19x+6$ eräs nollakohta. Tällöin polynomin tekijänä on $x-(-1)=x+1$.

Jaetaan polynomi $6x^3+19x^2+19x+6$ polynomilla $x+1$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6x^2+13x+6 \\
x+1 & \overline{\big)\,6x^3+19x^2+19x+6} \\
- & \underline{6x^3+6x^2} \\
 & \quad 13x^2+19x+6 \\
- & \quad \underline{13x^2+13x} \\
 & \qquad\qquad 6x+6 \\
- & \qquad\qquad \underline{6x+6} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Siis $P(x)=x(x+1)^2(6x^2+13x+6)$.

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$x(x+1)^2(6x^2+13x+6)=0$$

$x=0$ tai $(x+1)^2=0$ tai $6x^2+13x+6=0$

$$x+1=0 \qquad x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot6\cdot6}}{2\cdot6}$$

$$x=-1 \qquad =\frac{-13\pm\sqrt{25}}{12}$$

$$=\frac{-13\pm5}{12}$$

$$x=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$$

Vastaus $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 0$

80

Yhtälön ratkaisuiksi kelpaavat kaikki muut reaaliluvut, paitsi jakajan nollakohta $x = 4$.

Lasketaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^3 \qquad\quad -48x \\ \hline x-4 & 3x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 192x \\ - & \underline{3x^4 - 12x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\ & \qquad\qquad -48x^2 + 192x \\ - & \qquad\qquad \underline{-48x^2 + 192x} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Siis $\dfrac{3x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 192x}{x-4} = 3x^3 - 48x \quad (x \neq 4)$.

Ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännön avulla.

$$3x^3 - 48x = 0$$
$$3x(x^2 - 16) = 0$$
$$3x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 16 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Ratkaisuista $x = 4$ ei toteuta määrittelyehtoa, joten se ei kelpaa ratkaisuksi.

Vastaus $\quad x = -4$ tai $x = 0$

81

Polynomin $P(x) = 6x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 38x - 24$ nollakohtina ovat $x = -1$ ja $x = -2$, joten sillä on tekijöinä $x - (-1) = x + 1$ ja $x - (-2) = x + 2$.

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $x + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 6x^3 & +11x^2 & -14x & -24 & \\ \cline{3-7}
x+1 & \multicolumn{1}{|r}{6x^4} & +17x^3 & -3x^2 & -38x & -24 & \\
- & 6x^4 & +6x^3 & & & & \\ \cline{2-7}
 & & 11x^3 & -3x^2 & -38x & -24 & \\
 & - & 11x^3 & +11x^2 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & -14x^2 & -38x & -24 & \\
 & & - & -14x^2 & -14x & & \\ \cline{4-7}
 & & & & -24x & -24 & \\
 & & & - & -24x & -24 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Jaetaan polynomi $6x^3+11x^2-14x-24$ jakokulmassa tekijällä $x+2$.

$$\begin{array}{rl}
 & 6x^2 - x - 12 \\
x+2 & \overline{)\,6x^3+11x^2-14x-24} \\
- & \underline{6x^3+12x^2} \\
 & \qquad -x^2-14x-24 \\
- & \qquad \underline{-x^2-2x} \\
 & \qquad\qquad -12x-24 \\
- & \qquad\qquad \underline{-12x-24} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Jaetaan polynomi $6x^2-x-12$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$6x^2-x-12=0$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-12)}}{2\cdot 6}$$

$$=\frac{1\pm 17}{12}$$

$$x=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad x=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

Siis $6x^2-x-12=6(x-\frac{3}{2})(x+\frac{4}{3})$.

Kirjoitetaan polynomi P tulomuodossa.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6(x-\frac{3}{2})(x+\frac{4}{3})(x+2)(x+1) \\ &= 2(x-\frac{3}{2})\cdot 3(x+\frac{4}{3})(x+2)(x+1) \\ &= (2x-3)(3x+4)(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

Vastaus $\quad P(x) = (2x-3)(3x+4)(x+2)(x+1)$

82

Lasketaan aluksi yhtälön vasemman puolen määrätty integraali ja tämän jälkeen ratkaistaan yhtälö tulon nollasäännöllä.

$$\int_0^x (3t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t = x$$

$$\Big/_0^x (t^3 - t^2) = x$$

$$x^3 - x^2 = x$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vastaus $x = 0$, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ tai $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

83

Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

$a_n = 3x^3 - x^4 \qquad a_{n+1} = 6x - 4 \qquad a_{n+2} = 2x^2$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= a_{n+2} - a_{n+1} \\
6x - 4 - (3x^3 - x^4) &= 2x^2 - (6x - 4) \\
6x - 4 - 3x^3 + x^4 &= 2x^2 - 6x + 4 \\
x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 &= 0
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Ratkaisuna on $x = 1$ tai $x = -2$ tai $x = 2$.

Vastaus $x = -2$, $x = 1$ tai $x = 2$

84

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a > 2$ ja jonon suhdeluku on q.

1) Mikäli $q = 1$, jonon kaikki termit ovat yhtä suuria kuin jonon 1. termi a_1 ja $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 = 1 - q^2$. Koska $q = 1$, saadaan yhtälö

$$4a_1 = 1 - 1^2$$

$$4a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Koska $a_1 > 2$, ei tapaus $q = 1$ ole mahdollinen.

2) Olkoon $q \neq 1$. Muodostetaan neljän ensimmäisen termin summa.

$$S_4 = \frac{a(1-q^4)}{1-q}$$

$$1 - q^2 = \frac{a(1-q^4)}{1-q} \qquad \Big| \cdot (1-q) \quad (\neq 0)$$

$$(1-q)(1-q^2) = a(1-q^4) \qquad \Big| a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(1-q)(1-q^2) = a(1-q^2)(1+q^2)$$

$$a(1-q^2)(1+q^2) - (1-q)(1-q^2) = 0$$

$$(1-q^2)(aq^2 + q + a - 1) = 0$$

$1 - q^2 = 0$ tai $aq^2 + q + a - 1 = 0$

$q^2 = 1$

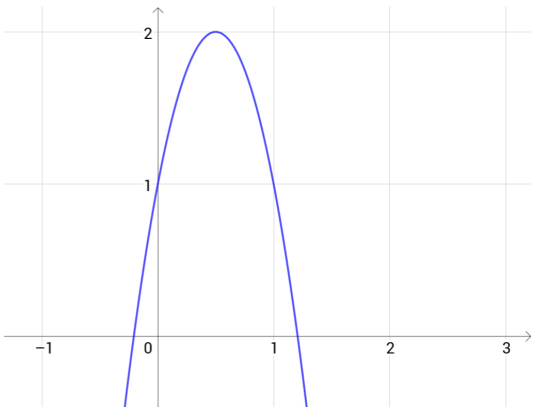
$q = \pm 1$

Määrittelyehdon $q \neq 1$ mukaan ratkaisuksi kelpaa $q = -1$.

Tarkastellaan yhtälön $aq^2 + q + a - 1 = 0$ ratkaisuiden lukumäärää diskriminantin avulla.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} &= 1^2 - 4 \cdot a \cdot (a-1) \\
&= 1 - 4a^2 + 4a \\
&= -4a^2 + 4a + 1 < 0, \text{ kun } a > 2
\end{aligned}
$$

Tämä voidaan vielä havaita diskriminantin kuvaajasta.



Siis yhtälöllä $aq^2 + q + a - 1 = 0$ ei ole ratkaisua, kun $a > 2$.

Vastaus $q = -1$

85

Jos polynomiyhtälön $P(x) = 0$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin sen kaikki rationaalijuuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä p on vakiotermin tekijä ja q korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.

a) Luetteloidaan yhtälön $2x^5 + x^4 - 2x - 1 = 0$ vakiotermin ja korkeimman asteen termin kertoimen tekijät.

Vakiotermin -1 tekijät: ± 1

Korkeimman asteen termin kertoimen 2 tekijät: ± 1, ± 2

b) Tällöin mahdolliset rationaalilukujuuret ovat $\pm\frac{1}{2}$ ja ± 1.

c) Etsitään testaamalla, mitkä kolme vaihtoehdoista ovat yhtälön ratkaisut.

$$P(x) = 2x^5 + x^4 - 2x - 1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = -\frac{15}{8}$$

$$P(-1) = 2\cdot(-1)^5 + (-1)^4 - 2\cdot(-1) - 1 = 0$$

$$P(1) = 2\cdot 1^5 + 1^4 - 2\cdot 1 - 1 = 0$$

Vastaus $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 1$

86

Jos polynomiyhtälön $P(x)=0$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin sen kaikki rationaalijuuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä p on vakiotermin tekijä ja q korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.

a) Luetteloidaan yhtälön $2x^4+x^3-13x^2-5x+15=0$ vakiotermin ja korkeimman asteen termin kertoimen tekijät.

Vakiotermin 15 tekijät: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15

Korkeimman asteen termin kertoimen 2 tekijät: ± 1, ± 2

Tällöin mahdolliset rationaalilukujuurivaihtoehdot ovat

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2},\ \pm\frac{15}{2},\ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15.$$

b) Ratkaistaan yhtälö laskimella, jolloin ratkaisuna on

$$x=-\sqrt{5},\ x=-\frac{3}{2},\ x=1 \text{ tai } x=\sqrt{5}$$

Huomataan, että tällä menetelmällä saadaan selville kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön rationaalijuuret, mutta ei irrationaalijuuria.

Vastaus $\quad x=-\sqrt{5},\ x=-\frac{3}{2},\ x=1$ tai $x=\sqrt{5}$

87

Sijoitetaan kompleksiluku $z = 2 + i$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 5 &= (2+i)^2 - 4(2+i) + 5 \\ &= 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 \\ &= 4 - 8 + 5 + i^2 \\ &= 1 + i^2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus On osoitettu, että kompleksiluku $2 + i$ toteuttaa yhtälön.

88

a) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$
\begin{aligned}
z^2 + 16 &= 0 \\
z^2 &= -16 \\
z &= \pm\sqrt{-16} \\
z &= \pm\sqrt{16}\, i \\
z &= \pm 4i
\end{aligned}
$$

b) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$
\begin{aligned}
3z^2 + 27 &= 0 \\
z^2 + 9 &= 0 \\
z^2 &= -9 \\
z &= \pm\sqrt{-9} \\
z &= \pm\sqrt{9}\, i \\
z &= \pm 3i
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $z = 4i$ tai $z = -4i$

b) $z = 3i$ tai $z = -3i$

89

Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$(z-4)^2+16=0$$
$$(z-4)^2=-16$$
$$z-4=\pm\sqrt{-16}$$
$$z-4=\pm\sqrt{16}\,i$$
$$z-4=\pm 4i$$
$$z-4=-4i \quad \text{tai} \quad z-4=4i$$
$$z=4-4i \qquad\qquad z=4+4i$$

Vastaus $z=4+4i$ tai $z=4-4i$

90

a) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$z^2 + 2z + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}\, i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}\, i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}\, i}{2} \\ &= \frac{2(-1 \pm \sqrt{5}\, i)}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{5}\, i \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan yhtälö kompleksilukujen joukossa.

$$z^2 - 5z + 8 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{7}\, i}{2} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{aligned}$$

Vastaus a) $z = -1 + \sqrt{5}\, i$ tai $z = -1 - \sqrt{5}\, i$

b) $z = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2} i$ tai $z = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2} i$

91

a) Sievennetään.

$$\begin{aligned}&(3+5i)(2-3i)\\&=6-9i+10i-15i^2\\&=6+i-15\cdot(-1)\\&=21+i\end{aligned}$$

b) Sievennetään laventamalla imaginääriyksiköllä i.

$$\frac{3}{i}=\frac{3i}{i^2}=\frac{3i}{-1}=-3i$$

c) Sievennetään laventamalla liittoluvulla $1+i$.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$$

Vastaus a) $21+i$ b) $-3i$ c) i

92

a) Lasketaan $z \cdot \overline{z}$, kun $z = 3 - 4i$ ja $\overline{z} = 3 + 4i$.

$$\begin{aligned}
z \cdot \overline{z} &= (3-4i)(3+4i) \\
&= 3^2 - (4i)^2 \\
&= 9 - 16i^2 \\
&= 9 - 16 \cdot (-1) \\
&= 9 + 16 \\
&= 25
\end{aligned}$$

b) Lasketaan $z \cdot \overline{z}$, kun $z = 7 + 2i$ ja $\overline{z} = 7 - 2i$.

$$\begin{aligned}
z \cdot \overline{z} &= (7+2i)(7-2i) \\
&= 7^2 - (2i)^2 \\
&= 49 - 4i^2 \\
&= 49 - 4 \cdot (-1) \\
&= 49 + 5 \\
&= 53
\end{aligned}$$

Vastaus a) 25 b) 53

93

Koska $z_0 = 3 - 4i$ on polynomin P nollakohta, myös liittoluku $\overline{z}_0 = 3 + 4i$ on polynomin P nollakohta. Polynomilla P on ensimmäisen asteen tekijät

$$z - z_0 = z - (3 - 4i) = z - 3 + 4i$$

ja

$$z - z_0 = z - (3 + 4i) = z - 3 - 4i$$

Myös näiden tekijöiden tulo on polynomin P tekijä.

$$\begin{aligned}
&(z - z_0)(z - \overline{z}_0) \\
&= (z - 3 + 4i)(z - 3 - 4i) \\
&= ((z - 3) + 4i)((z - 3) - 4i) \\
&= (z - 3)^2 - (4i)^2 \\
&= z^2 - 6z + 9 - 16i^2 \\
&= z^2 - 6z + 9 - 16 \cdot (-1) \\
&= z^2 - 6z + 25
\end{aligned}$$

Jaetaan polynomi P jakokulmassa tekijällä $z^2 - 6z + 25$.

$$
\begin{array}{rl}
 & z^2 - 10z + 29 \\
z^2 - 6z + 25 \,\big|\, & z^4 - 16z^3 + 114z^2 - 424z + 725 \\
- & z^4 - 6z^3 + 25z^2 \\
\hline
 & -10z^3 + 89z^2 - 424z + 725 \\
- & -10z^3 + 60z^2 - 250z \\
\hline
 & 29z^2 - 174z + 725 \\
- & 29z^2 - 174z + 725 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$z^4 - 16z^3 + 114z^2 - 424z + 725 = 0$$

$$(z^2 - 6z + 25)(z^2 - 10z + 29) = 0$$

$z^2 - 6z + 25 = 0$ tai $z^2 - 10z + 29 = 0$

$z = 3 - 4i$ tai $z = 3 + 4i$

$$z = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}\, i}{2}$$

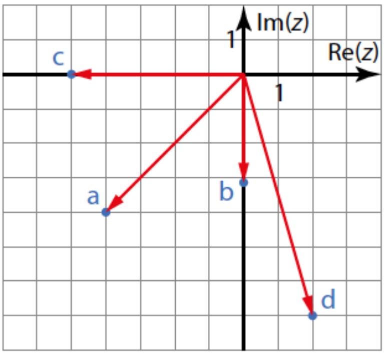
$$= \frac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i$$

$z = 5 - 2i$ tai $z = 5 + 2i$

Vastaus $z = 3 - 4i$, $z = 3 + 4i$, $z = 5 - 2i$ tai $z = 5 + 2i$

94

Esitetään kompleksiluvut kompleksitasossa ja määritetään moduli ja vaihekulma.



a) $z = -4 - 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Ratkaistaan vaihekulma.

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

b) $z = -3i$

$|z| = \sqrt{(-3)^2} = 3$

Vaihekulma on $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

c) $z = -5$

$|z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$

Vaihekulma on $\varphi = \pi$.

d) $z = 2 - 7i$

$|z| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

Vaihekulma on $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-7}{2}\right) \approx -1{,}29$.

Vastaus a) $|z| = 5$, $\varphi = \pi$

b) $|z| = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

c) $|z| = 4\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$

d) $|z| = \sqrt{53}$, $\varphi \approx -1{,}29$ $\quad (\tan\varphi = \frac{-7}{2})$

95

Määritetään kuvan avulla kompleksiluvut z_1, z_2, z_3 ja z_4.

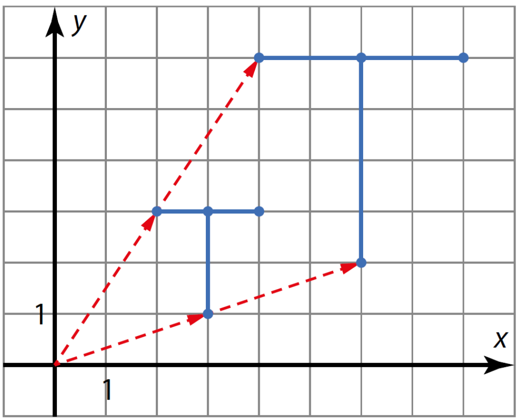
$z_1 = 2 + 3i$ $\quad$ $z_2 = 3 + 3i$

$z_3 = 4 + 3i$ $\quad$ $z_4 = 3 + i$

a) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla 2.

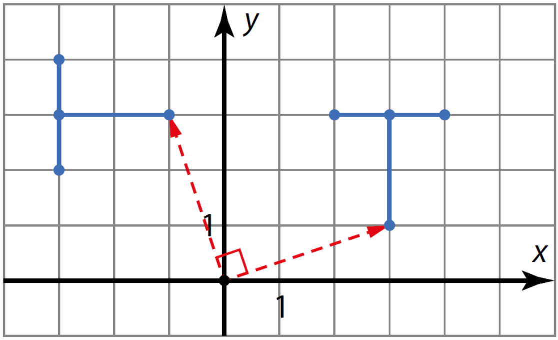
$z_1 = 2(2 + 3i) = 4 + 6i$ $\quad$ $z_2 = 2(3 + 3i) = 6 + 6i$

$z_3 = 2(4 + 3i) = 8 + 6i$ $\quad$ $z_4 = 2(3 + i) = 6 + 2i$



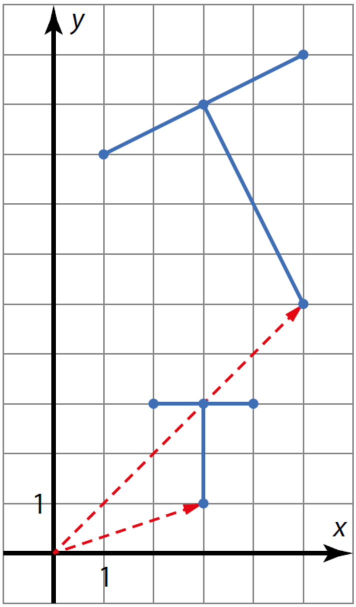
b) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla i.

$$z_1 = i(2+3i) = 2i + 3i^2 = -3 + 2i$$
$$z_2 = i(3+3i) = 3i + 3i^2 = -3 + 3i$$
$$z_3 = i(4+3i) = 4i + 3i^2 = -3 + 4i$$
$$z_4 = i(3+i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$$



c) Kerrotaan kompleksiluvut luvulla $2+i$.

$$z_1 = (2+i)(2+3i) = 4+6i+2i+3i^2 = 1+8i$$
$$z_2 = (2+i)(3+3i) = 6+6i+3i+3i^2 = 3+9i$$
$$z_3 = (2+i)(4+3i) = 8+6i+4i+3i^2 = 5+10i$$
$$z_4 = (2+i)(3+i) = 6+2i+3i+i^2 = 5+5i$$



Vastaus a) Kuvion janat ja paikkavektorit pitenevät kaksinkertaisiksi.

b) Kuvio kiertyy origon ympäri 90° vastapäivään.

c) Kuvio kiertyy ja suurenee.

96

Määritetään kompleksiluvun $z = (-2+2i)(4+4i)(1-\sqrt{3}\,i)$ moduli.

$$\begin{aligned}
|\,z\,| &= |\,z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| \\
&= |\,z_1|\cdot|\,z_2|\cdot|\,z_3| \\
&= \sqrt{(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{8}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{4} \\
&= \sqrt{32}\cdot\sqrt{32} \\
&= (\sqrt{32})^2 \\
&= 32
\end{aligned}$$

Määritetään aluksi kompleksiluvun tekijöiden vaihekulmat ja lasketaan niiden avulla luvun z vaihekulma.

$\tan^{-1}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$, joten

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \pi - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) \\
&= \tan^{-1}(1) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) \\
&= \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \\
&= -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) \\
&= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\
&= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Vastaus $\quad |z| = 32\,,\ \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

97

Esitetään luku napakoordinaattimuodossa $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

a) $z = 3i$

$|z| = \sqrt{3^2} = 3$

Vaihekulma on $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

b) $z = 3 + 3i$

$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right)\\ &= \tan^{-1}(1)\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

c) $z = -2$

$$|\,z\,| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

Vaihekulma on $\varphi = \pi$.

Siis luku napakoordinaattimuodossa on $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

d) $z = \sqrt{3} - 3i$

$$|\,z\,| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

Siis luku napakoordinaattimuodossa on

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Vastaus

a) $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

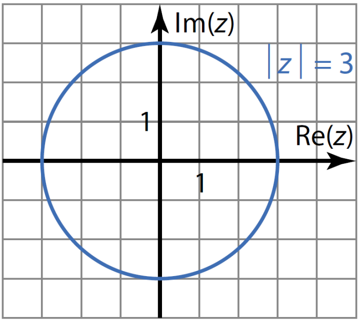
b) $z = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

c) $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

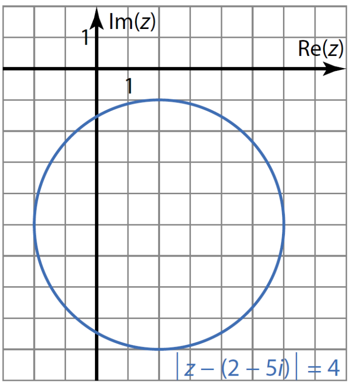
d) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

98

a) Ehdon $|z| = 3$ toteuttavat ne kompleksiluvut, jotka muodostavat origokeskisen ympyrän, jonka säde on 3.



b) Ehdon $|z - 2 + 5i| = 4$ toteuttavat ne kompleksiluvut, jotka muodostavat ympyrän, jonka keskipiste on $(2, -5)$ ja säde 4.



Vastaus a) Ympyrä, jonka keskipiste on origo ja säde 3.
b) Ympyrä, jonka keskipiste on $(2, -5)$ ja säde 4.

99

a) Lasketaan lukujonon $a_n = i^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = i^1 = i$$
$$a_2 = i^2 = -1$$
$$a_3 = i^3 = i \cdot i^2 = -i$$
$$a_4 = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$
$$a_5 = i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$

b) $$a_{1100} = i^{1100} = (i^2)^{550} = (-1)^{550} = 1$$

$$a_{1103} = i^{1103} = i^{1100+3} = i^{1100} \cdot i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$$

Vastaus a) $i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i$

b) $a_{1100} = 1$ ja $a_{1103} = -i$

100

Kokeilemalla havaitaan, että polynomin $P(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$ eräs nollakohta on $z = -1$, joten tekijänä on $z - (-1) = z + 1$.

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 = -1 - 1 - 3 + 5 = 0$$

Jaetaan polynomi jakokulmassa tekijällä $z + 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & z^2 - 2z + 5 \\
\cline{2-2}
z + 1 & \big) \; z^3 - z^2 + 3z + 5 \\
- & z^3 + z^2 \\
\cline{2-2}
 & -2z^2 + 3z + 5 \\
- & -2z^2 - 2z \\
\cline{2-2}
 & 5z + 5 \\
- & 5z + 5 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Kirjoitetaan yhtälö tulomuodossa ja ratkaistaan se tulon nollasäännön avulla.

$$z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$$
$$(z+1)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

$z + 1 = 0$ tai $z^2 - 2z + 5 = 0$

$z = -1$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}\, i}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4i}{2} \\ &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

$z = 1 - 2i$ tai $z = 1 + 2i$

Vastaus $z = -1$, $z = 1 - 2i$ tai $z = 1 + 2i$

101

Jaetaan polynomi $18z^3-9z^2+2z-1$ jakokulmassa binomilla $3z+i$.

$$
\begin{array}{rl}
 & 6z^2+(-3-2i)z \qquad\qquad +i \\
\hline
3z+i \,\big| & 18z^3-9z^2 \qquad\qquad +2z-1 \\
- & 18z^3+6iz^2 \\
\hline
 & (-9-6i)z^2 \qquad\qquad +2z-1 \\
- & (-9-6i)z^2+(-3i+2)z \\
\hline
 & 3iz-1 \\
- & 3iz-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\frac{18z^3}{3z}=6z^2$$

$$\frac{(-9-6i)z^2}{3z}=(-3-2i)z$$

$$\frac{3iz}{3z}=i$$

Polynomi $18z^3-9z^2+2z-1$ on jaollinen binomilla $3z+i$, koska jakojäännös on 0.

Vastaus On

102

Olkoon $z = a + bi$, missä a ja b ovat nollasta eroavia reaalilukuja. Tällöin

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + (bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2 i^2 \\ &= a^2 + 2abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \\ &= (a^2 - b^2) + (2ab)i \end{aligned}$$

Jotta $z^2 = 3 - 4i$, on oltava $a^2 - b^2 = 3$ ja $2ab = -4$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan, että $b = -\dfrac{2}{a}$, mikä voidaan sijoittaa ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 3 \\ a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 &= 3 \\ a^2 - \frac{4}{a^2} - 3 &= 0 \\ a^4 - 4 - 3a^2 &= 0 \\ a^4 - 3a^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Merkitään $a^2 = t$.

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$
$$t^2 - 3t - 4 = 0$$
$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$= \frac{3 \pm 5}{2}$$

$t = -1$ tai $t = 4$

$a^2 = -1$ $\quad$ $a^2 = 4$

ei ratkaisua $\quad$ $a^2 = 4$

$a = \pm 2$

Jos $a = -2$, niin $b = -\frac{2}{a} = -\frac{2}{-2} = 1$.

Jos $a = 2$, niin $b = -\frac{2}{a} = -\frac{2}{2} = -1$.

Yhtälö $z^2 = 3 - 4i$ toteutuu, kun $z = -2 + i$ tai $z = 2 - i$.

Vastaus $\quad z = -2 + i$ tai $z = 2 - i$

103

Tulkitaan vektori $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j}$ kompleksiluvuksi $v = 1 + 2i$.

Kerrotaan luku v kompleksiluvulla z, jonka vaihekulma on $+45°(= +\frac{\pi}{4}\text{ rad})$ sekä moduli on 1.
Tällöin tulon moduli $|v \cdot z| = |v| \cdot |z| = |v| \cdot 1 = |v|$ ja tulon vaihekulma $\arg(v \cdot z) = \arg v + \arg z = \arg v + 45°$. Siis tulon moduli (eli vektorin pituus) säilyy samana, mutta vaihekulma kasvaa vaaditut 45°.

Kopleksiluku $z = 1 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$.

Tuloksi saadaan

$$
\begin{aligned}
z \cdot v &= (1 + 2i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{2}{\sqrt{2}} i + \frac{2}{\sqrt{2}} i^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} i - \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} i.
\end{aligned}
$$

Kysytty vektori on siis $-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\overline{j}$.

Vastaus $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\overline{j}$

104

Osoitetaan, että $|z|^2 = z\overline{z}$.

Merkitään $z = a + bi$ ja $\overline{z} = a - bi$.

$$|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 - b^2 \cdot (-1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Täten siis $|z|^2 = z\overline{z}$.

Vastaus On osoitettu, että $|z|^2 = z\overline{z}$.

105

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$.

Tällöin $\overline{z}_1 = a - bi$ ja $\overline{z}_2 = c - di$.

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = a - bi + c - di = a + c - (b + d)i$$

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = a + c - (b + d)i$$

Täten siis $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$.

Vastaus On osoitettu, että liittolukujen summa on lukujen summan liittoluku.

106

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$.

Tällöin $\overline{z_1} = a - bi$ ja $\overline{z_2} = c - di$.

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - bi)(c - di) \\ &= ac - adi - bci + bdi^2 \\ &= ac - bd - (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i\end{aligned}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)i$$

Täten siis $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Vastaus On osoitettu, että tulon liittoluku on liittolukujen tulo.

107

Olkoon reaalilukukertoiminen polynomi P muotoa

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n .$$

Väite:
Jos kompleksiluku $z = a + bi$ on polynomin P nollakohtana, niin myös liittoluku $\overline{z} = a - bi$ on polynomin P nollakohta.

Todistus:

Tehtävien 105 ja 106 perusteella tiedetään, että
summan liittoluku on liittolukujen summa $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$ ja
tulon liittoluku on liittolukujen tulo $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Oletetaan, että luku z on polynomin P nollakohta eli $P(z) = 0$.
Koska 0 on reaaliluku, tällöin on myös $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$, joten

$$\overline{P(z)} = 0$$

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n} = 0 \qquad \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \ldots + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_n z^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \ldots + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} = 0 \qquad \text{reaalilukukertoimet!}$$

$$a_0 + a_1 \cdot \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z^2} + \ldots + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_n \cdot \overline{z^n} = 0 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$$a_0 + a_1 \cdot \overline{z} + a_2 \cdot \overline{z}^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot \overline{z}^{n-1} + a_n \cdot \overline{z}^n = 0$$

$$P(\overline{z}) = 0$$

Siis mikäli $P(z) = 0$ niin myös $P(\overline{z}) = 0$, eli jos z on polynomin P nollakohta, niin myös $\overline{z}$ on polynomin P nollakohta. □