1

Lukujen 0 ja 100 keskiarvo on 50, joten aloitetaan kysymyksellä ”Onko luku välillä [0, 50]?”, ja jatketaan esimerkin mukaisesti riippuen siitä, onko vastaus kyllä vai ei. Esimerkiksi jos arvattava luku oli 23, keskustelu näyttäisi tältä:

Henkilö 1: Onko luku välillä [0, 50]?

Henkilö 2: Kyllä.

Henkilö 1: Onko luku välillä [0, 25]?

Henkilö 2: Kyllä.

Henkilö 1: Onko luku välillä [0; 12,5]?

Henkilö 2: Ei.

Henkilö 1: Onko luku välillä [12,5; 18,75]?

Henkilö 2: Ei.

Henkilö 1: Onko luku välillä [18,75; 21,875]?

Henkilö 2: Ei.

Henkilö 1: Onko luku välillä [21,875; 23,4375]?

Henkilö 2: Kyllä.

Henkilö 1: Onko luku välillä [21,875; 22,65625]?

Henkilö 2: Ei.

Henkilö 1: Välillä [22,65625; 23,4375] on vain yksi kokonaisluku. Luku on 23.

Esimerkissä henkilö 1 löysi luvun seitsemällä kysymyksellä. Puolitusmenetelmällä minkä tahansa luvun väliltä [0, 100] arvaa viimeistään seitsemännellä kysymyksellä, mutta joidenkin lukujen tapauksessa kuusikin kysymystä voi riittää.

2

Sovelletaan esimerkin 1 puolitusmenetelmää. Hakemiston sanat voi esimerkiksi numeroida järjestyksen mukaan, ja käsitellä niitä kuin lukuja.

3

a)

$$
\begin{array}{r}
\ {}^{\ \ 8\ 10}\\
3\,\cancel{9}\,\cancel{0}\,8\\
-\quad 4\,5\,2\\
\hline
3\,4\,5\,6
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rl}
3908 & \\
\cdot\qquad 452 & \\
\hline
{}^{1\,1\,1} & \\
7816 & \quad \cancel{1}\ \cancel{1} \\
19540 & \quad \cancel{4}\ \cancel{4}\ \cancel{1} \\
15632 & \quad \cancel{3}\ \cancel{3}\ \cancel{1} \\
\hline
1766416 &
\end{array}
$$

Vastaus a) 3456 b) 1 766 416

4

a)

$$\begin{array}{r} 6x^2 - x + 4 \\ - \qquad\quad 3x - 5 \\ \hline 6x^2 - 4x + 9 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 6x^2 - x \;\; + 4 \\ \cdot \qquad\qquad 3x \;\; - 5 \\ \hline -30x^2 + 5x - 20 \\ 18x^3 \;\; - 3x^2 + 12x \quad\;\; \\ \hline 18x^3 - 33x^2 + 17x - 20 \end{array}$$

Vastaus a) $6x^2 - 4x + 9$ b) $18x^3 - 33x + 17x - 20$

5

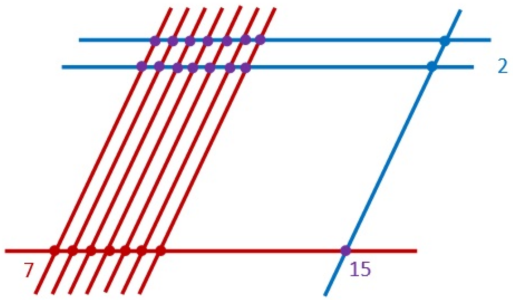
a) Koska $1+3+4+5+2+3=18$ ja $18=2\cdot 9$ on jaollinen yhdeksällä, luku 134523 on myös jaollinen yhdeksällä.

b) Koska $8+7+0+2+4+1+9+2+1=34$ ja $34=3\cdot 9+7$ ei ole jaollinen yhdeksällä, myöskään luku 870241921 ei ole jaollinen yhdeksällä.

Vastaus a) on b) ei ole

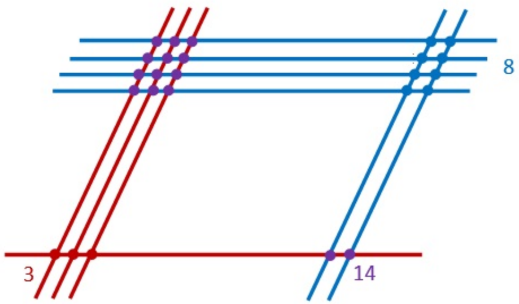
6

a) $71 = 7 \cdot 10 + 1$ ja $12 = 1 \cdot 10 + 2$.



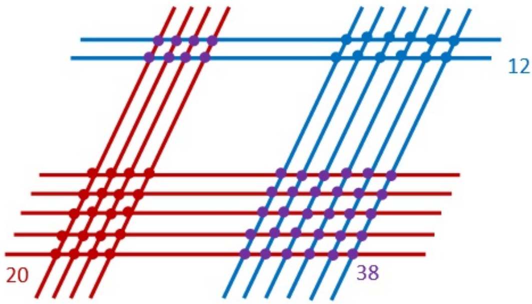
Siis satoja on 7, kymmeniä 15 ja ykkösiä 2. Tulo on siis $71 \cdot 12 = 700 + 150 + 2 = 852$.

b) $32 = 3 \cdot 10 + 2$ ja $14 = 1 \cdot 10 + 4$.



Siis satoja on 3, kymmeniä 14 ja ykkösiä 8. Tulo on siis $32 \cdot 14 = 300 + 140 + 8 = 448$.

c) $46 = 4 \cdot 10 + 6$ ja $52 = 5 \cdot 10 + 2.$



Siis satoja on 20, kymmeniä 38 ja ykkösiä 12. Tulo on siis
$46 \cdot 52 = 2000 + 380 + 12 = 2392.$

Vastaus a) 852 b) 448 c) 2392

7

Esimerkiksi:

1. Vähennetään yhtälöstä molemmin puolin cx ja b.

2. Otetaan yhteinen tekijä termeistä ax ja cx. Lasketaan x:n kertoimen $a-c$ arvo.

3. Jos $a-c \neq 0$, niin jaetaan yhtälö puolittain kertoimella $a-c$, ja saadaan ratkaisu. Ratkaisu on $x = \frac{d-b}{a-c}$.

4. Jos $a-c = 0$ ja $d-b \neq 0$, niin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

5. Jos $a-c = 0$ ja $d-b = 0$, niin yhtälö ratkeaa kaikilla x:n arvoilla.

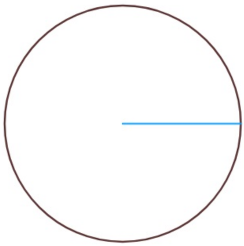
8

Esimerkiksi:

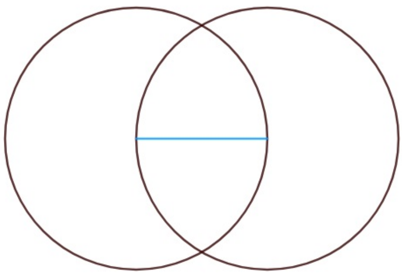
1. Erotetaan yhteinen tekijä termeistä ax^2 ja bx.
2. Tulon nollasäännön mukaisesti päätellään, että $x(ax+b)=0$, kun $x=0$ tai $ax+b=0$.
3. Vähennetään yhtälön $ax+b=0$ molemmilta puolilta vakio b.
4. Jaetaan saatu yhtälö puolittain vakiolla a. Ratkaisu on $x=-\frac{b}{a}$.
5. Yhtälön ratkaisut ovat $x=0$ ja $x=-\frac{b}{a}$.

9

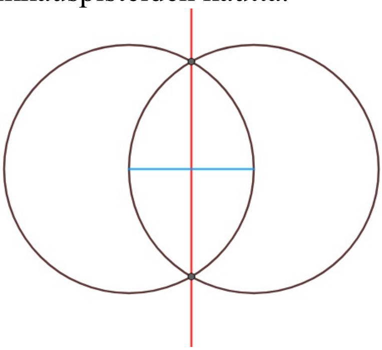
a) Aloitetaan piirtämällä harpilla ympyrä, jonka keskipiste on janan päätepiste, ja säde on janan mittainen.



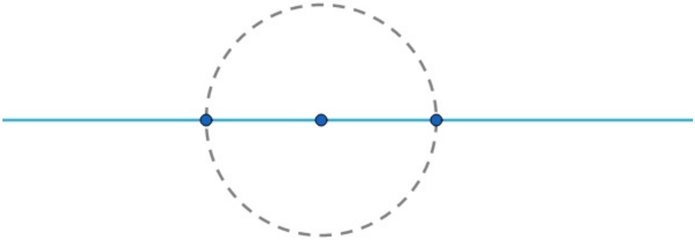
Piirretään sen jälkeen toinen samanlainen ympyrä, mutta jonka keskipisteenä on janan toinen päätepiste.



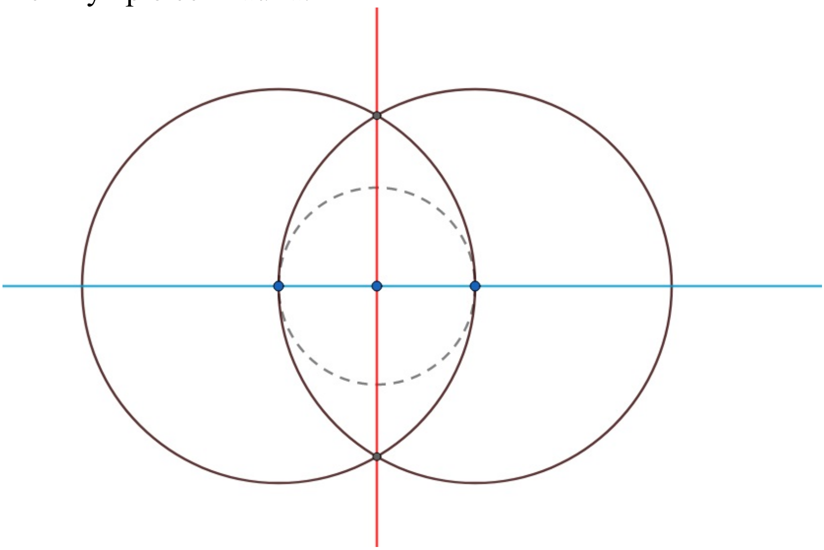
Nyt saadaan janan keskinormaali piirtämällä suora ympyröiden leikkauspisteiden kautta.



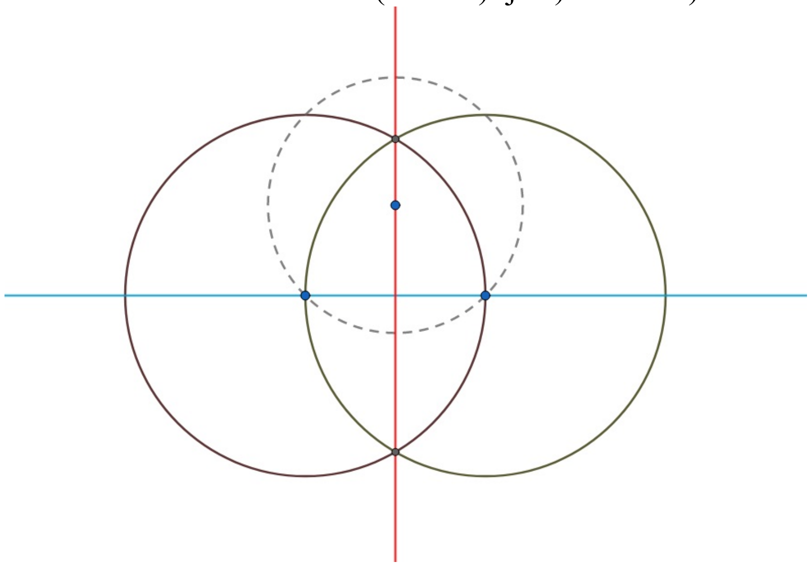
b) Aloitetaan piirtämällä harpin avulla suoralle merkityn pisteen molemmille puolille yhtä kaukana siitä olevat pisteet.



Sen jälkeen, kun piirretään 2 ympyrää joiden keskipisteet ovat juuri merkityt pisteet, ja säteen pituus näiden pisteiden välinen jana (kuten a-kohdassa), saadaan piirrettyä ympyröiden leikkauspisteiden kautta keskinormaali, joka kulkee suoralle merkityn pisteen kautta.

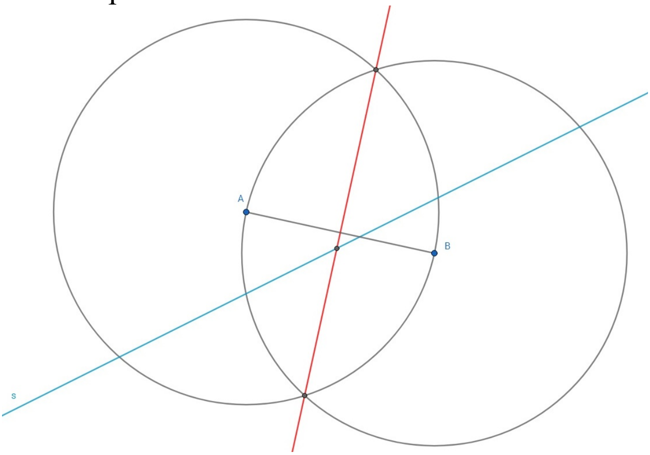


c) Samoin kuin b)-kohdassa, aloitetaan piirtämällä harpin avulla suoralle 2 pistettä, jotka ovat yhtä etäällä suoran ulkopuolelle merkitystä pisteestä. Tämän jälkeen tehdään näiden pisteiden avulla 2 ympyrää, joiden leikkauspisteiden kautta saadaan taas muodostettua keskinormaali (kuten a)- ja b)-kohdissa).

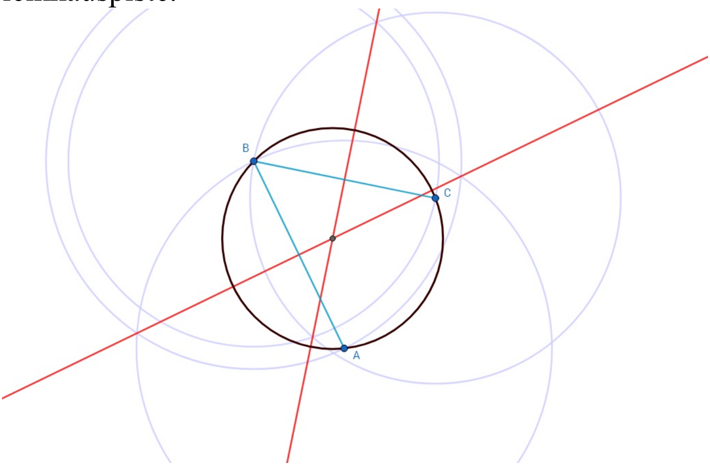


10

a) Muodostetaan janalle AB keskinormaali kuten tehtävässä 9a. Tehtävässä kysytty piste on janan keskinormaalin ja suoran s leikkauspiste.



b) Muodostetaan kahden janan keskinormaalit kuten tehtävässä 9a. Voidaan esimerkiksi muodostaa janojen AB ja BC keskinormaalit. Ympyrän keskipiste on keskinormaalien leikkauspiste.



11

Sovelletaan esimerkin 1 puolitusmenetelmää sivunumeroiden ja kokonaissivumäärän avulla.

12

a)

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+0x-6 \\ -\qquad x^2-2x+7 \\ \hline x^3-5x^2+2x-13 \end{array}$$

b)

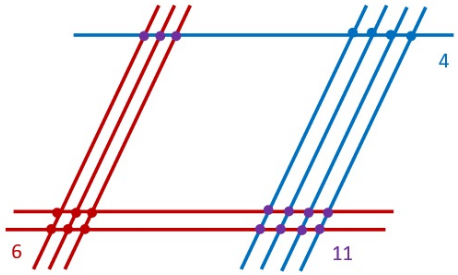
$$\begin{array}{r} x^3-4x^2-6 \\ \cdot\qquad x^2-2x+7 \\ \hline 7x^3-28x^2\qquad-42 \\ -2x^4+8x^3\qquad+12x\qquad \\ x^5-4x^4\qquad-6x^2\qquad\qquad \\ \hline x^5-6x^4+15x^3-34x^2+12x-42 \end{array}$$

Vastaus a) $x^3-5x^2+2x-13$

b) $x^5-6x^4+15x^3-34x^2+12x-42$

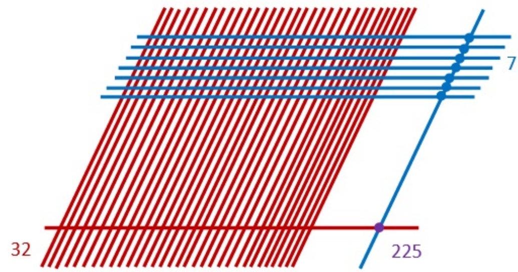
13

a) $34 = 3 \cdot 10 + 4$ ja $21 = 2 \cdot 10 + 1$.



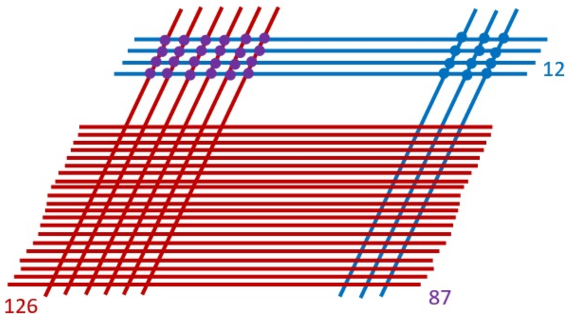
Siis satoja on 6, kymmeniä 11 ja ykkösiä 4. Tulo on siis $34 \cdot 21 = 600 + 110 + 4 = 714$.

b) $321 = 32 \cdot 10 + 1$ ja $17 = 1 \cdot 10 + 7$.



Siis satoja on 32, kymmeniä 225 ja ykkösiä 7. Tulo on siis $321 \cdot 17 = 3200 + 2250 + 7 = 5457$.

c) $63 = 6 \cdot 10 + 3$ ja $214 = 21 \cdot 10 + 4$.



Siis satoja on 126, kymmeniä 87 ja ykkösiä 12. Tulo on siis
$63 \cdot 214 = 12600 + 870 + 12 = 13482$.

Vastaus a) 714 b) 5457 c) 13 482

14

a) Koska luvun 489 viimeinen numero on pariton, ei se ole jaollinen luvulla 2, eikä siis myöskään luvulla 6.

b) Luvun 27 612 numeroiden summa on $2+7+6+1+2=18=6\cdot 3$, joka on jaollinen luvulla 3, joten myös 27 612 on jaollinen luvulla 3, ja koska sen viimeinen numero on parillinen, se on myös jaollinen luvulla 2. Siis luku 27 612 on jaollinen luvulla 6.

c) Luvun 905 284 numeroiden summa on $9+0+5+2+8+4=28=9\cdot 3+1$, joka ei ole jaollinen luvulla 3, joten myöskään 905 284 ei ole jaollinen luvulla 3, joten se ei myöskään ole jaollinen luvulla 6.

Vastaus a) ei ole b) on c) ei ole

15

a)

$$\begin{aligned}124 &= 90\cdot 1+34\\ 90 &= 34\cdot 2+22\\ 34 &= 22\cdot 1+12\\ 22 &= 12\cdot 1+10\\ 12 &= 10\cdot 1+2\\ 10 &= 2\cdot 5+0\end{aligned}$$

Lukujen 124 ja 90 suurin yhteinen tekijä on 2.

b) Jaetaan luvut 124 ja 90 alkulukutekijöihin.

$$\begin{aligned}124 &= 62\cdot 2\\ &= 31\cdot 2\cdot 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}90 &= 45\cdot 2\\ &= 15\cdot 3\cdot 2\\ &= 5\cdot 3\cdot 3\cdot 2\end{aligned}$$

Lukujen 124 ja 90 suurin yhteinen tekijä on 2.

Vastaus a) 2 b) 2

16

a) Esimerkiksi:

1. Vähennetään epäyhtälöstä puolittain vakio b.

2. Jaetaan epäyhtälö $ax > -b$ puolittain vakiolla a.

3. Jos $a > 0$, niin ratkaisu on $x > -\frac{b}{a}$.

4. Jos $a < 0$, niin ratkaisu on $x < -\frac{b}{a}$.

b) Esimerkiksi:

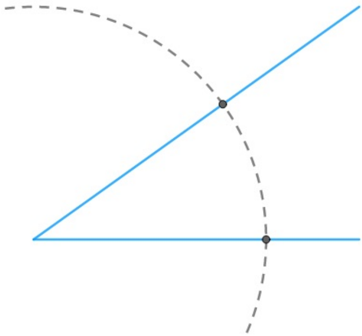
1. Ratkaistaan yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

2. Piirretään nollakohtien avulla mallikuva funktiosta f. Jos $a > 0$, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Jos $a < 0$, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

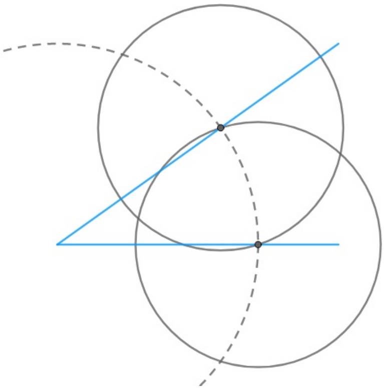
3. Mallikuvasta nähdään, millä x:n arvoilla $ax^2 + bx + c > 0$. Epäyhtälö toteutuu niillä väleillä, joilla kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

17

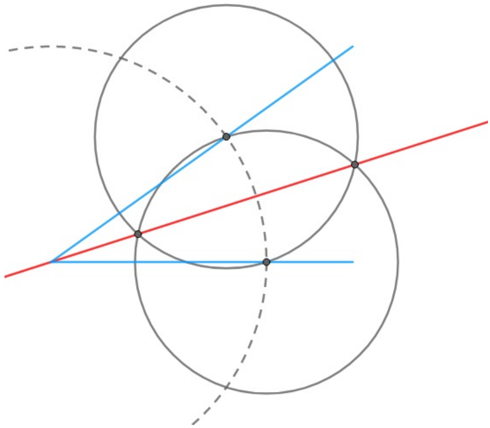
a) Aloitetaan piirtämällä harpin avulla kulman molemmille sivuille pisteet, jotka ovat yhtä etäällä kulman kärjestä.



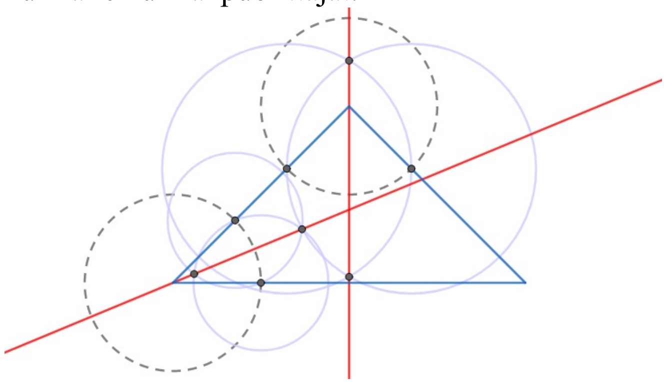
Piirretään harpilla 2 ympyrää, niin että niiden keskipisteinä ovat juuri piirretyt pisteet, ja joiden säde on näiden pisteiden välinen etäisyys.



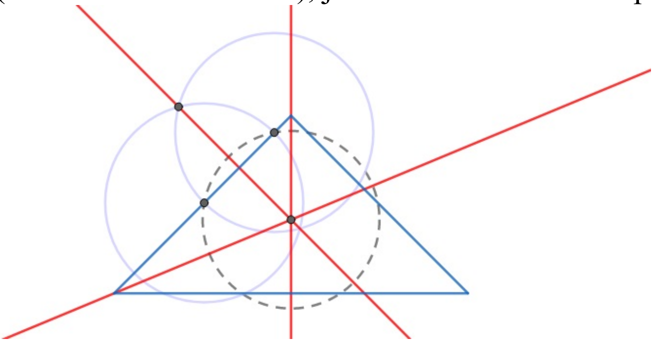
Kulmanpuolittaja saadaan piirtämällä viivoittimella suora näiden ympyröiden leikkauspisteiden kautta.



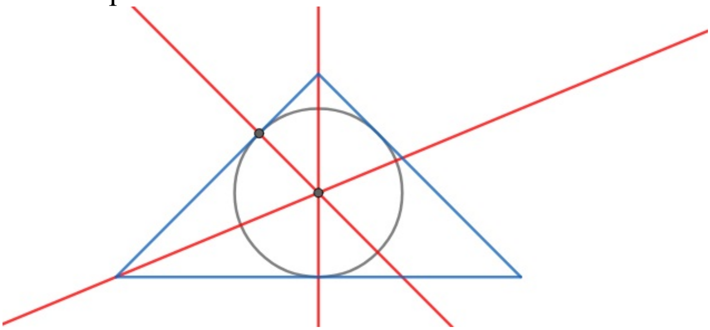
b) Aloitetaan piirtämällä a)-kohdan mukaisesti kolmion kahdelle kulmalle kulmanpuolittajat.



Halutun ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Piirretään seuraavaksi kolmion yhdelle sivulle normaali (tehtävän 9c mukaisesti), joka kulkee tämän keskipisteen kautta.

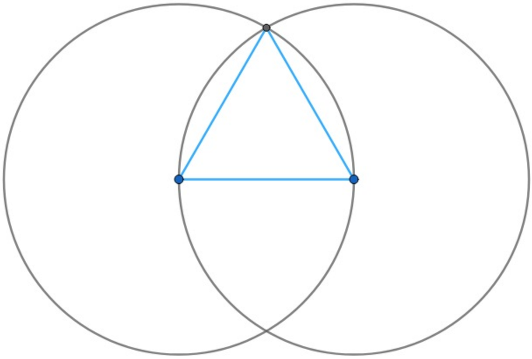


Ympyrä sivuaa kolmiota normaalin ja kolmion sivun leikkauspisteessä.

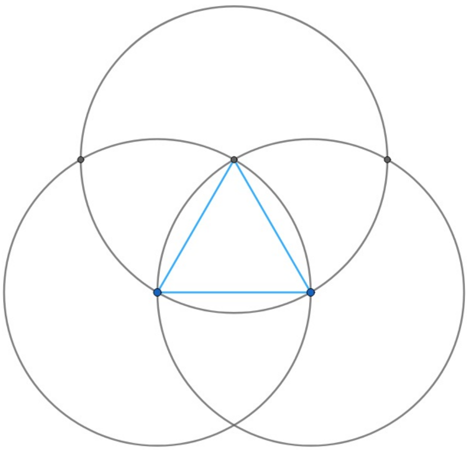


18

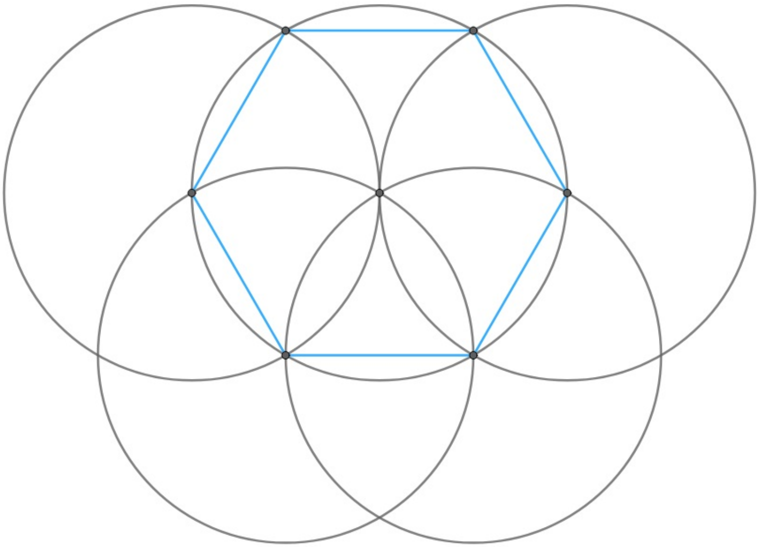
a) Aloitetaan piirtämällä harpilla ympyrä, ja piirretään sen jälkeen toinen samansäteinen ympyrä, niin että ympyröiden keskipisteet ovat toistensa kehällä. Tämän jälkeen tasasivuinen kolmio voidaan piirtää yhdistämällä ympyröiden keskipisteet ja ympyröiden toinen leikkauspiste viivoittimella.



b) Jatketaan a)-kohdan kuviosta piirtämällä harpilla kolmas ympyrä niin, että sen keskipiste on ympyröiden leikkauspisteessä, ja säde sama kuin aiemmillakin ympyröillä.

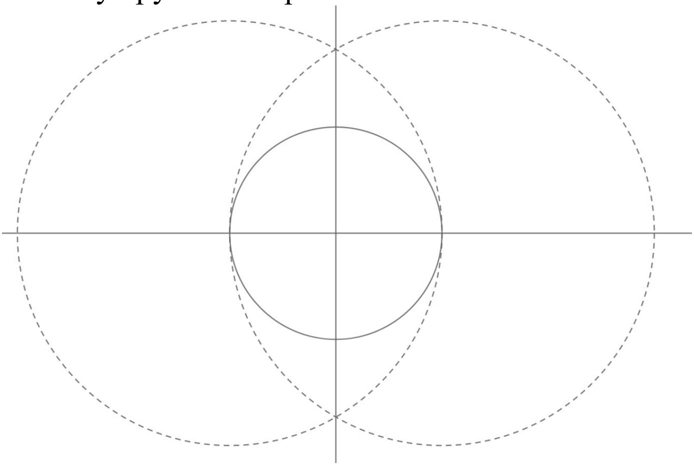


Piirretään tämän jälkeen vielä 2 ympyrää lisää niin, että niiden keskipisteet ovat viimeisimpänä piiretyn ympyrän leikkauspisteet aiempien ympyröiden kanssa (pisteet merkitty äskeiseen kuvaan). Tämän jälkeen yhdistämällä ympyröiden keskipisteet ja ylimpien ympyröiden leikkauspisteet keskimmäisen ympyrän kanssa janoilla, janat muodostavat säännöllisen kuusikulmion.

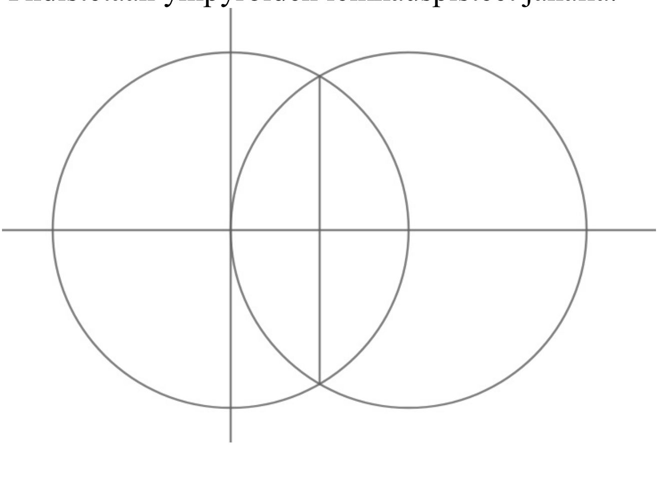


19

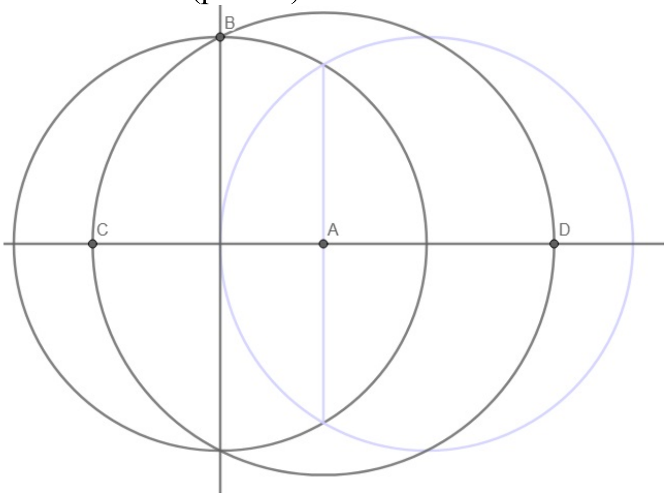
Aloitetaan piirtämällä viivoittimella suora, ja piirretään suoralle harpilla ympyrä. Piirretään tämän jälkeen suoralle normaali, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta.



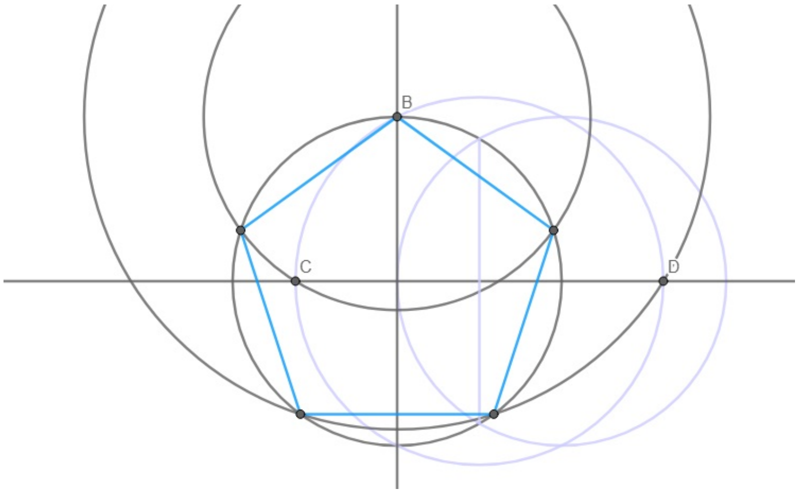
Piirretään seuraavaksi toinen samansäteinen ympyrä, jonka keskipiste on ympyrän ja vaakasuoran suoran leikkauspisteessä. Yhdistetään ympyröiden leikkauspisteet janalla.



Piirretään seuraavaksi ympyrä, jonka keskipisteenä on janan ja vaakasuoran suoran leikkauspiste (seuraavassa kuvassa piste A), ja kehän pisteenä alkuperäisen ympyrän leikkauspiste pystysuoran suoran kanssa (piste B).



Piirretään seuraavaksi 2 ympyrää, joiden keskipisteenä on piste B. Toisen kehän pisteeksi valitaan piste C, ja toisen piste D. Kun yhdistetään janoilla näiden kahden ympyrän leikkauspisteet alkuperäisen ympyrän kanssa, sekä piste B, muodostuu säännöllinen viisikulmio.



20

a)

$$\begin{aligned}111 &= 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 4+2+1\\ &= 7\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}1001 &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 8+0+0+1\\ &= 9\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}1110 &= 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\\ &= 8+4+2+0\\ &= 14\end{aligned}$$

Vastaus a) 7 b) 9 c) 14

21

a) Summa:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & {}^{1} & {}^{1} & {}^{1} & & {}^{1} & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
+ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Tulo:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\cdot & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & {}^{1} & {}^{1} & {}^{1} & {}^{1} & {}^{1} & {}^{1} & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

b)

$$\begin{aligned}10101 &= 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 16+0+4+0+1\\ &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1101 &= 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 8+4+0+1\\ &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100010 &= 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\\ &= 32+0+0+0+2+0\\ &= 34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}100010001 &= 1\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 256+0+0+0+16+0+0+0+1\\ &= 273\end{aligned}$$

$21+13=34$ ja $21\cdot 13=273$, joten summa ja tulo laskettiin oikein.

Vastaus a) summa on 100010, tulo on 100010001
b) $10101=21$, $1101=13$, $100010=34$ ja
$100010001=273$

22

$$\begin{aligned}63 &= 32+16+8+4+2+1\\ &= 1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0\\ &= 111111\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}51 &= 32+16+2+1\\ &= 1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0\\ &= 110011\end{aligned}$$

Summa:

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1\,1\,1\,1\,1\,1}\\ & 111111\\ + & 110011\\ \hline & 1110010\end{array}$$

Tulo:

$$\begin{array}{lr} & 111111\\ \cdot & 110011\\ \hline & {\scriptstyle 1\,\overset{1}{1}\quad \overset{1}{1}\,1\,1\quad 1\,1\,1}\\ & 111111\\ & 111111\\ & 000000\\ & 000000\\ & 111111\\ & 111111\\ \hline & 110010001101\end{array}$$

Vastaus $63 = 111111$, $51 = 110011$, summa on 1110010 ja tulo on 110010001101

23

a) $4 = 2^2$, joten jaotellaan numerot kahden numeron ryhmiin.

$$\begin{aligned} 111001001 &= 1\ 11\ 00\ 10\ 01 \\ &= 13021 \end{aligned}$$

b) $8 = 2^3$, joten jaotellaan numerot kolmen numeron ryhmiin.

$$\begin{aligned} 111001001 &= 111\ 001\ 001 \\ &= 711 \end{aligned}$$

Vastaus a) 13 021 b) 711